EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i3p344-372

O algoritmo da divisão na formação inicial do professor de matemática

The division algorithm in the initial mathematics teacher training

El algoritmo de la división en la formación inicial del profesor de matemáticas

L'algorithme de division dans la formation initiale du professeur de mathématiques

Carlos Ian Bezerra de Melo[1]
Universidade Estadual do Ceará (UECE)
Mestre em Educação
https://orcid.org/0000-0003-1555-3524

João Luzeilton de Oliveira[2]
Universidade Estadual do Ceará (UECE)
Doutor em Engenharia de Teleinformática
https://orcid.org/0000-0002-1001-4401

Resumo

Entre os estudos sobre os saberes e a formação matemática do professor, vimos, nos últimos anos, surgir o interesse sobre a formação em Teoria Elementar dos Números, área da Matemática cuja preocupação são os números inteiros e suas operações. Nesse contexto, a presente investigação teve como objetivo discutir questões relativas à divisão euclidiana, mais especificamente ao algoritmo da divisão, no âmbito da formação inicial, bem como identificar e debater dificuldades evidenciadas por licenciandos em Matemática de uma universidade pública cearense em relacionar esse tópico abordado na disciplina de Teoria dos Números com o ensino da operação matemática de divisão na Educação Básica. O referencial teórico adotado aponta à necessidade de rever a forma como a disciplina de Teoria dos Números vem sendo trabalhada na licenciatura, enquanto os resultados do questionário aplicado a 18 (dezoito) licenciandos em Matemática indicaram que ideias básicas relacionadas à divisão euclidiana, e mais especificamente ao algoritmo da divisão, ainda não estão bem assentadas e articuladas nesses estudantes, o que pode sinalizar possível fragilidade nas futuras práticas docentes. Conclui-se, assim, que uma abordagem mais voltada aos significados dos cálculos e suas implicações do que à memorização e execução dos algoritmos é necessária à qualificação da formação matemática em Teoria Elementar dos Números dos futuros professores de Matemática.

[1] carlosian.melo@uece.br
[2] joao.luzeilton@uece.br

Palavras-chave: Formação de professores de matemática, Teoria elementar dos números, Divisão euclidiana, Algoritmo da divisão.

Abstract

Among studies on teacher knowledge and mathematical training, in recent years we have seen the emergence of interest in training in Elementary Theory of Numbers, Mathematics field whose concern is integers numbers and their operations. In this context, the present investigation aimed to discuss issues related to Euclidean division, more specifically to the division algorithm, within the scope of initial training, as well as to identify and debate, difficulties evidenced by undergraduate students in Mathematics degree at a public university in Ceará in relating This topic is addressed in the subject of Theory of Numbers with the teaching of the mathematical operation of division in Basic Education. The adopted theoretical framework points to the need to review the way in which the subject of Theory of Numbers has been worked on in the teaching degree, while the results of the questionnaire applied to 18 (eighteen) students in Mathematics degree indicated that basic ideas related to Euclidean division, and more specifically to the division algorithm, are still not well settled and articulated in these students, which may signal a possible weakness in the future practice of these teachers. It is concluded, therefore, that an approach more focused on the meanings of calculations and their implications than on the memorization and execution of algorithms is necessary to qualify the mathematical training in Elementary Theory of Numbers of future Mathematics teachers.

Keywords: Mathematics teacher training, Elementary theory of numbers, Euclidean division, Division algorithm.

Resumen

Entre los estudios sobre el conocimiento docente y la formación matemática, en los últimos años hemos visto surgir el interés por la formación en Teoría Elemental de Números, área de las Matemáticas cuya preocupación son los números enteros y sus operaciones. En este contexto, la presente investigación tuvo como objetivo discutir cuestiones relacionadas con la división euclidiana, más específicamente con el algoritmo de la división, en el ámbito de la formación inicial, así como identificar y debatir, las dificultades evidenciadas por los estudiantes de licenciatura en Matemáticas en una audiencia pública. universidad de Ceará en relacionar Este tema es abordado en la asignatura de Teoría de Números con la enseñanza de la operación matemática de división en la Educación Básica. El marco teórico consultado apunta a la necesidad de revisar la forma en que se ha trabajado la asignatura de Teoría de Números en la carrera docente, mientras que los resultados del cuestionario aplicado a 18 (dieciocho) estudiantes de licenciatura en Matemáticas indicaron que las ideas básicas relacionadas a la división euclidiana, y más específicamente al algoritmo de división, aún no están bien asentados y articulados en estos estudiantes, lo que puede señalar una posible debilidad en la práctica futura de estos docentes. Se concluye, por tanto, que es necesario un enfoque más centrado en los significados de los cálculos y sus implicaciones que en la memorización y ejecución de algoritmos para cualificar la formación matemática en Teoría Elemental de Números de los futuros profesores de Matemáticas.

Palabras clave: Formación de profesores de matemáticas, Teoría elemental de números, División euclidiana, Algoritmo de división.

Résumé

Parmi les études portant sur les savoirs des enseignants et la formation mathématique, on a pu constater, ces dernières années, un intérêt pour la formation en Théorie élémentaire des nombres, un domaine des Mathématiques qui s'intéresse aux nombres entiers et à leurs opérations. Dans ce contexte, la présente enquête visait à discuter des questions liées à la division euclidienne, plus spécifiquement à l'algorithme de division, dans le cadre de la formation initiale, ainsi qu'à identifier et débattre, les difficultés mises en évidence par les étudiants de premier cycle en mathématiques à un public université de Ceará en relation Ce sujet est abordé dans le sujet de la théorie des nombres avec l'enseignement de l'opération mathématique de division dans l'éducation de base. Le cadre théorique consulté indique la nécessité de revoir la manière dont le sujet de la théorie des nombres a été travaillé dans le diplôme d'enseignement, tandis que les résultats du questionnaire s'appliquaient à 18 (dix-huit) étudiants de premier cycle en mathématiques ont indiqué que les idées de base liées à la division euclidienne, et plus particulièrement à l'algorithme de division, ne sont pas encore bien installés et articulés chez ces élèves, ce qui peut signaler une éventuelle faiblesse dans la pratique future de ces enseignants. On en conclut donc qu'une approche plus centrée sur le sens des calculs et leurs implications que sur la mémorisation et l'exécution d'algorithmes est nécessaire pour qualifier la formation mathématique des futurs professeurs de mathématiques en théorie élémentaire des nombres.

Mots-clés : Formation des professeurs de mathématiques, Théorie élémentaire des nombres, Division euclidienne, Algorithme de division.

Investigar o que deve saber o professor de Matemática tem sido, nos últimos anos, temática profícua de pesquisas no campo da formação docente. Tais pesquisas, como as de Shulman (1986) e de Carrillo-Yañez et al. (2018), são praticamente unânimes em assegurar que saber o conteúdo a ser ensinado é condição *sine qua non*, isto é, indispensável ao futuro professor, afinal não é possível ensinar aquilo que não se sabe. Essa é, todavia, uma concepção muitas vezes genérica, insuficiente para delinear que conhecimento a ser ensinado é necessário possuir o docente para o bom exercício do seu trabalho. Em se tratando desse professor, estudos como os de Moreira e David (2005) e de Valente (2022) lançam luz sobre que Matemática deve saber esse profissional, e, consequentemente, que a Matemática deve ser trabalhada nos cursos de formação inicial, as licenciaturas.

É possível considerar, desde já, que tais estudos constatam uma formação docente em Matemática ainda muito semelhante à do século XX, isto é, pautada no conhecimento científico *per se*, desarticulada não apenas dos demais saberes profissionais necessários à docência (Fiorentini, 2005), mas também da matemática escolar presente nos currículos e nas práticas pedagógicas da Educação Básica (Moreira & David, 2005). Esse cenário certamente se relaciona com o fato de, mesmo com os investimentos e as mudanças curriculares implementadas nos últimos anos, o desempenho matemático dos alunos da Educação Básica em avaliações como o PISA (*Programme for International Student Assessment*) não apresentarem avanços consideráveis há pelo menos 15 anos (OECD, 2019).

O presente estudo se insere, assim, nesse campo de interesse investigativo, ao se debruçar sobre o tema da formação matemática em Teoria Elementar dos Números dos futuros professores de Matemática. Tomamos aqui como Teoria Elementar dos Números (ou apenas Teoria dos Números) "[...] o estudo dos números inteiros, de suas propriedades e das relações entre eles" (Resende & Machado, 2012, p. 273). Afirmam, ainda, Resende e Machado (2012, p. 259), que "[...] embora o estudo dos números, principalmente o dos inteiros, ocupe grande parte do currículo de Matemática da escola básica, parece não merecer na formação de professores um tratamento que corresponda às demandas que o ensino desse tema apresenta [...]". Tal constatação desperta uma série de questionamentos que podem ser sintetizados no seguinte: "Qual Teoria dos Números poderia ser concebida como um saber a ensinar na Licenciatura em Matemática, visando a prática docente na escola básica?" (Resende & Machado, 2012, p. 262).

Consideramos, conforme assinala Ponte (2006), que, muitas vezes, presumimos que os conceitos numéricos constituem um assunto excessivamente fácil, quando, ao contrário, tratam-se de “construções intelectuais extremamente complexas e engenhosas” (p. 7), motivo que salienta a importância de colocarmos sob análise a Teoria dos Números e os tópicos que a compõem. Cumpre considerarmos também que, no rol dessa área de conhecimento, a divisão euclidiana – comumente conhecida como “divisão com resto” – é uma questão fundamental que tem consequências no estudo dos inteiros, e que “[...] dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão da Teoria dos Números têm raízes no pensamento da divisão com resto, pois este assunto não é tratado na escola básica como algo que é fundamental no conjunto dos inteiros” (Resende, 2007, p. 76).

Diante desse cenário, este estudo teve como objetivo discutir questões relativas à divisão euclidiana, mais especificamente ao algoritmo da divisão, no âmbito da formação inicial, bem como identificar e debater dificuldades evidenciadas por licenciandos em Matemática de uma universidade pública cearense em relacionar esse tópico abordado na disciplina de Teoria dos Números com o ensino da operação matemática de divisão na Educação Básica. O melhor entendimento dessas questões pode auxiliar, eventualmente, no delineamento de ações que visem qualificar a formação de professores de Matemática.

Para tanto, discutimos inicialmente sobre a Teoria Elementar dos Números, abordando sua presença nos documentos reguladores e sua importância e configuração na formação inicial, bem como expondo alguns resultados matemáticos que enfatizam tal análise. Em seguida, apresentamos os dados obtidos a partir de um questionário aplicado a professores em formação, discutindo suas dificuldades e apontando questões didáticas a fim de superá-las.

A Teoria Elementar dos Números e o Algoritmo da Divisão

Podemos dizer que os números estão para a Matemática assim como as letras do alfabeto estão para a linguagem. Isto é, os segundos não são definidos nem limitados pelos primeiros, mas, sem dúvidas, têm neles base fundante das relações e desdobramentos de suas múltiplas áreas. Nesse sentido, o campo de estudo dos fundamentos dos números inteiros, denominado Teoria Elementar dos Números, possui acentuada relevância no âmbito matemático. Uma afirmação simbólica dessa importância vem de uma máxima atribuída ao matemático alemão Carl Friedrich Gauss, que diz que a Matemática é a rainha das Ciências e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática.

Se reportando à história da Matemática, enquanto a Álgebra e a Análise, por exemplo, foram articuladas como campos do conhecimento que reúnem objetos interrelacionados muito recentemente, a matéria prima da Teoria dos Números está posta desde épocas remotas, e “[...] o estudo das propriedades e das relações envolvendo os números inteiros foi sendo realizado, mesmo que ainda de modo não-formal e não-sistematizado, ao longo da história das civilizações” (Resende, 2007, p. 68).

Longe de ser um campo ultrapassado, todavia, o estudo dos números – sobretudo os naturais e inteiros – tem reverberado em temas contemporâneos imprescindíveis à evolução tecnológica em nossa sociedade. Almouloud et al. (2021), por exemplo, assinalam que “[...] muitos princípios da Criptografia moderna são suficientemente descritos por conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental ou Médio, tais como Números Primos, Divisibilidade, Fatoração, Potenciação, Funções Afins etc.” (p. 23), e, ainda, que “Os métodos criptográficos modernos, em particular, são baseados na Teoria dos Números” (p. 23).

Não à toa desde muito tempo o estudo dos números figura no currículo escolar, sendo, em via de regra, o início da sistematização dos aprendizados matemáticos dos estudantes. Sem dúvidas, representa um ponto de virada cognitiva quando a criança pequena passa a conseguir representar quantificações, ordenamentos, agrupamentos etc. – isto é, números –, que antes somente podia ser feito via objetos concretos, em forma de numerais. Isso lhes permite iniciar seu processo de desenvolvimento do pensamento abstrato, articulando as relações lógicas e também aritméticas dos números a partir de suas representações.

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática do terceiro e quarto ciclo (que, na nomenclatura atual, equivalem aos anos finais) do Ensino Fundamental afirmam que:

> Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante nos currículos do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final desse curso com um conhecimento insuficiente dos números, de como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações. Provavelmente isso ocorre em função de uma abordagem inadequada para o tratamento dos números e das operações e à pouca ênfase que tradicionalmente é dada a este assunto nos terceiro e quarto ciclos. (Brasil, 1998, p. 95)

A constatação apresentada no documento, ainda no final do século XX, diz respeito a uma possível mecanização do ensino das operações, mais preocupada na assimilação dos processos e algoritmos de resoluções do que nos diferentes significados de cada uma delas e dos diferentes tipos de cálculo (exato, aproximado, mental e escrito). Em outras palavras, o início do processo de numeralização da criança e do desenvolvimento de seu pensamento aritmético deve estar preocupado com o raciocínio numérico da criança, mesmo quando apresentados e inseridos os “mecanismos” de resolução, isto é, os algoritmos.

Ainda segundo os PCN, devem ser privilegiadas "[...] atividades que possibilitem ampliar o sentido numérico e a compreensão do significado das operações, ou seja, atividades que permitam estabelecer e reconhecer relações entre os diferentes tipos de números e entre as diferentes operações" (Brasil, 1998, pp. 95-96). Na contramão disso, o que se constata são aspectos que comprometem a aprendizagem numérica do aluno, refletidos no "[...] trabalho centrado nos algoritmos, como o cálculo do mmc e do mdc sem a compreensão dos conceitos e das relações envolvidos e da identificação de regularidades que possibilitem ampliar a compreensão acerca dos números" (Brasil, 1998, p. 97).

Preocupação semelhante é apresentada também na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ainda que em menor detalhamento. Segundo o documento, em relação aos anos finais do Ensino Fundamental, "[...] a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos" (Brasil, 2018, p. 269).

A divisão euclidiana, no contexto das operações com números naturais, aparece como um dos primeiros objetos do conhecimento da unidade temática Números, da área de conhecimento Matemática do 6º ano, em destaque em relação à adição, subtração e multiplicação, tendo como habilidade específica relacionada a EF06MA03, que espera do aluno: "Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora" (Brasil, 2018, p. 301).

O apontamento da habilidade envolvendo a operação de divisão no 6º ano, em termos curriculares, já demanda a necessidade de que o professor licenciado em Matemática, aquele que ensinará tal disciplina nos últimos sete anos de escolarização da Educação Básica, seja formado para ensinar não apenas os mecanismos de resolução, mas os significados das operações e seus algoritmos. Essa demanda se torna, contudo, ainda mais latente por sabermos que o currículo considera um "cenário ideal" e que, na prática, a realidade escolar brasileira conta com estudantes que chegam aos anos finais do Ensino Fundamental com dificuldades nas operações anteriores (adição, subtração e multiplicação) e, muitas vezes, concluem essa etapa de ensino ainda com dificuldades em dividir números racionais ("decimais com vírgula", como, por exemplo, 20,7 dividido por 3,16) ou mesmo números inteiros com muitos algarismos (por exemplo, 125468952 dividido por 2654) (Rodrigues, 2019).

Com isso em vista, reiteramos a consideração de Resende e Machado (2012) de que um dos princípios norteadores fundamentais para um curso de formação docente, dentre aqueles elencados nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para a Formação de Professores da Educação Básica, é a necessidade de coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do professor. Afinal, "[...] uma disciplina da licenciatura não deve ser pensada, olhando-se apenas para o saber sábio que lhe dá origem, mas também para as demandas que são apresentadas para o professor na escola básica para ensinar os temas ligados ao campo" (Resende, 2007, p. 227).

No caso da Teoria dos Números, campo do conhecimento que dá embasamento matemático para o trabalho com os números inteiros e suas operações, cumpre refletir seu papel na formação docente e os meios pelos quais se consubstancia. Mesmo parecendo trivial, diante de toda argumentação aqui já apresentada, é sempre salutar considerarmos – e, nesse caso, defendermos – a importância de uma formação matemática robusta para o professor. Pois, quando afirmamos que o professor deve saber o conteúdo que vai ensinar, não queremos dizer que ele deve saber *somente* aquele conteúdo e *tal e qual* vai ensiná-lo, mas, sim, que ele deve saber em profundidade, inclusive seus princípios[3], para compreender os fenômenos didáticos, como, por exemplo, os obstáculos didáticos e epistemológicos (Pais, 2002), que podem se apresentar em torno do conteúdo matemático durante a aula.

Em seu estudo sobre a disciplina de Teoria dos Números na formação docente em Matemática, Resende e Machado (2012, pp. 274-275) constataram que:

> [...] a definição dessa disciplina, tanto no que se refere aos objetivos, como à seleção de conteúdo e de abordagens a serem feitas, deve considerar que: 1) tópicos de Teoria dos Números estão presentes na educação básica [...] 2) a Teoria dos Números é um espaço propício para o desenvolvimento de ideias matemáticas relevantes relativas aos números naturais e algumas também estendidas aos inteiros, presentes na matemática escolar [...] 3) a Teoria dos Números é um campo propício para uma abordagem mais ampla da prova [...] 4) a Teoria dos Números é um campo propício para a investigação matemática.

Percorrendo brevemente cada uma das ideias elencadas pelas autoras, consideramos ser possível, diante do já posto, sintetizar o papel do professor de Matemática ante às concepções de números e operações. O discurso defendido por alguns de que essa responsabilidade é exclusiva dos pedagogos que ensinam Matemática na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental, além de estar equivocada e carregada de culpabilização, não ajuda na resolução da questão. A preocupação com a formação matemática dos alunos mais novos é

[3] Além da já citada pesquisa de Shulman (1986), uma formulação que pode elucidar tal discussão com mais propriedade é a do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (*Mathematics' Teacher Specialised Knowledge* – MTSK). Para mais detalhes cf. Carrillo-Yañez et al. (2018) e Melo e Moriel Junior (2021).

matéria inerente ao trabalho do professor de Matemática, pelo fato de que devemos também nos comprometer com a recuperação de aprendizados básicos desses estudantes para uma educação matemática mais efetiva. Daí o motivo de os conhecimentos relativos à Teoria dos Números estarem, de fato, presentes na educação escolar, necessários no desenvolvimento de concepções sobre os números inteiros.

Além disso, a Teoria dos Números é espaço propício também à investigação matemática e à abordagem de demonstrações, "[...] presentes, não como tópico, mas como forma de validação ou justificação de resultados matemáticos" (Almeida & Ribeiro, 2019, p. 129), essenciais à comprovação em Matemática e ao desenvolvimento do raciocínio matemático em futuros professores. A esse respeito, cabe considerarmos o papel da demonstração, não apenas na disciplina de Teoria dos Números, mas nas diversas disciplinas matemáticas da licenciatura.

Nos termos de Moreira e David (2005), em se tratando da Matemática Científica – ou seja, a ciência denominada Matemática, presente na Educação Superior, inclusive nos cursos de bacharelado – sua estrutura axiomática requer que as demonstrações se desenvolvam apoiadas em definições e nos teoremas anteriormente estabelecidos, o que exige uma formulação precisa, para que não se produzam contradições na teoria a partir de ambiguidades na caracterização de um objeto matemático. Em outras palavras, o vocabulário matemático e o rigor nos processos de demonstração garantem a validade e precisão dos resultados, o que implica no aprimoramento do pensamento lógico-dedutivo do licenciando.

Todavia, sabe-se que as demonstrações matemáticas, e mesmo os teoremas e postulados, não estão presentes integralmente na Matemática Escolar, sobretudo se considerarmos que o assunto dos conjuntos numéricos e suas operações aparecem quando os alunos ainda estão em tenra idade e não possuem amadurecimento cognitivo para acompanhar demonstrações a esse respeito. O que não quer dizer, por sua vez, que não haja espaço para demonstrações na Educação Básica, conforme asseveram os autores ao dizerem que:

> A questão fundamental para a Matemática Escolar [...] refere-se à aprendizagem, portanto ao desenvolvimento de uma prática pedagógica visando à compreensão do fato, à construção de justificativas que permitam ao aluno utilizá-lo de maneira coerente e conveniente na sua vida escolar e extraescolar. (Moreira & David, 2005, pp. 23-24)

Essa discussão reverbera, com efeito, no papel e propósito das demonstrações matemáticas na disciplina de Teoria dos Números, na formação inicial do professor de Matemática, que deve atender aos propósitos formativos e, ao tempo em que apresenta ao licenciando o pensamento refinado e rigoroso que valida o conhecimento matemático em estudo, também amplia sua compreensão sobre o fenômeno, em si, e possibilita a elaboração de estratégias para abordar o tema com seus futuros alunos, na Educação Básica. Em seu estudo sobre cursos de Teoria dos Números no Brasil, entretanto, Resende (2007) aponta que não é bem isso que tem acontecido.

Em muitos casos, a disciplina em questão é posta apenas como um prelúdio para a(s) disciplina(s) de Álgebra, em que o conjunto dos números inteiros com suas operações é apenas um exemplo, dentre tantos, de estrutura algébrica. Na compreensão dos autores consultados e na nossa, a disciplina de Teoria dos Números deve ter sua importância reconhecida em si mesma, não como pré-requisito, visto seu objetivo de explorar ideias matemática relativas aos números inteiros, tais como: "[...] a ideia de recorrência através da qual se definem muitas noções; a indução matemática; a questão da divisibilidade; questões relativas aos números primos e à estrutura multiplicativa dos inteiros" (Resende & Machado, 2012, pp. 273-274).

O cenário de pesquisa sobre esse tema, todavia, aponta que a Teoria dos Números abordada em boa parte das universidades "[...] não tem a preocupação com a formação do professor da escola básica, pois a abordagem dos conteúdos é axiomática, numa linguagem predominantemente simbólico-formal, com ênfase nas demonstrações, o que permite enquadrar o seu ensino na tendência formalista clássica" (Resende, 2007, p. 7). Isso vai de encontro a nossa defesa de que essa disciplina (ou campo disciplinar) possua espaço próprio nos currículos das licenciaturas em Matemática, "[...] para que os aspectos caracterizadores dos números inteiros, presentes nos currículos da escola básica, possam ser devidamente tratados tanto como conhecimento do conteúdo, como conhecimento pedagógico do conteúdo e como conhecimento curricular" (Resende, 2007, p. 227).

Adentrando na discussão mais específica no assunto dessa vasta área que é a Teoria dos Números, temos que as operações entre números inteiros, suas propriedades, problemas, e, em particular, o algoritmo da divisão, eram estudados, no âmbito da matemática escolar, numa disciplina chamada de Aritmética. Hoje, o algoritmo da divisão, nos cursos de licenciatura em Matemática, é estudado na disciplina de Teoria Elementar dos Números, que tem como uma de suas componentes a Aritmética.

Segundo Boyer (1996), a Aritmética tem como principal ponto de partida "Os Elementos", de Euclides (aprox. 300 a.C.). Para Hefez (2004), esse campo de estudo atinge seu ápice com os trabalhos de Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euller (1707-1783), o que a fez tornar-se um dos principais pilares da Matemática. Outros matemáticos, ao longo dos anos, fizeram com que suas contribuições pudessem transformar a Aritmética em Teoria dos Números, como é o caso de Carl Friedrich Gauss (1777-1885), a partir do início do século XIX, que fez relevantes contribuições para que isso ocorresse, criando a Teoria Algébrica dos Números.

Estudiosos como Johann Dirichlet (1805-1859) e Bernhard Riemann (1826-1866), por sua vez, usando ferramentas de Análise Matemática, ajudaram a criar a Teoria Analítica dos Números. Já numa abordagem da Geometria Algébrica, Emil Artin, Helmut Hasse, Louis Joel e André Weil, usaram seus métodos para criar a Geometria Aritmética, já no início do século XX. Foi com base nesta última abordagem que, somente em 1995, o matemático inglês Andrew Willes publicou a demonstração do Último Teorema de Fermat (Hefez, 2004).

O processo ordinário de dividir um número inteiro positivo qualquer por outro inteiro positivo não nulo é conhecido desde o 6º ano do Ensino Fundamental. Como sabemos, essa divisão nem sempre é possível, e a relação que expressa essa possibilidade é chamada de *relação de divisibilidade*. Quando essa divisão é possível, isso significa que, ao dividir o maior desses inteiros pelo menor, obtém-se um quociente (inteiro positivo) e um resto zero – *divisão exata* – e, neste caso, diz-se que o primeiro desses números é *divisível* pelo segundo. Mesmo que não exista tal relação entre dois inteiros, ainda será possível efetuar uma divisão, denominada de *divisão com resto* ou *divisão não exata*, ou, ainda, *divisão euclidiana*.

Geralmente, quando se fala em divisão entre dois inteiros positivos, digamos D e d, $D \geq d > 0$, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, costumamos (tanto alunos quanto professores) associá-la ao seguinte dispositivo prático:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} & \ ? \\ ? & \end{array}$$

e que, devido a tal associação, esse dispositivo passou, erroneamente, a ser chamado de algoritmo da divisão. Essa confusão se dá pelo fato de, ainda no Ensino Fundamental, os alunos não terem absorvido a ideia de divisão entre dois inteiros. Caso esses mesmos alunos optem por ingressar numa licenciatura em Matemática, carregarão, consequentemente, tais deficiências para sua formação enquanto futuros professores. Se esses equívocos não forem trabalhados durante a graduação e permanecerem irrefletidos, naturalmente, serão levados para seus futuros alunos.

É necessário, urgentemente, mudar a abordagem do professor, procurando sanar deficiências ao longo de sua formação para que não sejam levadas para a sala de aula. Na condução desse processo, é essencial que abordagens didáticas/metodológicas adequadas ocorram, fazendo com que os problemas deixem de girá-los em círculo não permitindo que gerações mal formadas comprometam as gerações seguintes.

Em algum momento, ao longo da vida escolar, o aluno irá se deparar com a situação em que há necessidade de efetuar a divisão entre dois inteiros quaisquer, com o segundo diferente de zero e, portanto, estender a aplicação desse algoritmo (antes aplicado aos inteiros positivos) para números inteiros. O algoritmo do qual estamos falando e se costuma confundir com o dispositivo supracitado é o algoritmo da divisão, que, formalmente, pode ser enunciado assim:

Algoritmo da divisão 1: Se D e d são inteiros, com d positivo, então existem inteiros q e r tais que

$$D = qd + r \text{ e } 0 \leq r < d. \tag{1}$$

Para que o aluno entenda o que significa a divisão entre dois números inteiros, com o segundo inteiro positivo, é de extrema importância que o professor tenha essa compreensão de que esse algoritmo dá significado ao processo ordinário de divisão, sem ter que fazer necessariamente uma associação com o dispositivo citado anteriormente, fazendo com que o aluno confunda a operação de divisão com um mecanismo criado para efetuá-la. Após essa compreensão, como um recurso para facilitar o cálculo da divisão, o dispositivo pode ser usado. Posto isto, e para ampliar os conceitos relativos à divisão de inteiros, o aluno deverá ser apresentado a casos em que a divisão entre dois inteiros quaisquer, com o segundo diferente de zero, também é possível.

Inicialmente, observe que, se D e d são inteiros, com d positivo, então D é múltiplo de d ou D está situado entre dois múltiplos consecutivos de d, ou seja,

$$qd \leq D < (q + 1)d, \tag{2}$$

em que q é um número inteiro. Este resultado é, conforme assevera Santos (1999), conhecido como *Teorema de Eudoxius* (408-355 a.C.). Observe, agora, que de (2) segue $0 \leq D - qd < d$, ou ainda, $r = D - qd$ e $0 \leq r < d$ o que nos dá

$$D = qd + r \text{ e } 0 \leq r < d, \tag{3}$$

significando que ao dividirmos o inteiro D pelo inteiro d, obtemos o inteiro q e sobra r, também, inteiro. Isto significa que d cabe $|q|$ vezes em D, e sobra r.

Note-se, também, que os inteiros q e r, que satisfazem às condições em (2), devem ser únicos. Isso, porque, se existirem outros inteiros, digamos, q_1 e r_1, tais que $D = q_1 d + r_1$ e $0 \leq r_1 < d$, tem-se que $qd + r = q_1 d + r_1$, e, daí, $d|q - q_1| = |r_1 - r|$, pois $0 \leq r_1 < d$ e $-d < r \leq 0$, e, como $d > 0$, segue que $0 < d|q - q_1| < 1$, e, assim, $|q - q_1| = 0$. Portanto, $q = q_1$ e $r = r_1$, mostrando a unicidade dos inteiros q e r.

Um resultado, que é consequência do algoritmo apresentado em (1) e que nos diz que é possível efetuar a divisão entre dois inteiros quando o segundo for diferente de zero, é o seguinte:

Algoritmo da divisão 2: Se D e d são inteiros, com $d \neq 0$, então existem inteiros q e r tais que

$$D = qd + r \text{ e } 0 \leq r < |d|. \qquad (4)$$

Os números D, d, q e r são chamados, respectivamente, *dividendo*, *divisor*, *quociente* e *resto* na divisão de D por d. Isto significa que o algoritmo da divisão aplicado aos inteiros D e d, com $d \neq 0$, obtém-se q para *quociente* e r para *resto*. No caso em que D e d são inteiros positivos (naturais), situação vista por alunos e professores a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, o quociente q significa que d "cabe" exatamente q vezes em D, se $r = 0$ (divisão exata); se $r > 0$, d "cabe" q vezes em D, mas com uma pequena sobra (resto). Observe que, neste caso, o quociente q é um inteiro positivo.

No cálculo do quociente e do resto, quando D e d são inteiros quaisquer e $d \neq 0$, para alguns alunos, a tarefa de determiná-los já não é uma tarefa fácil como na situação anterior. Quando $D < 0$ e $d < 0$, por exemplo, tem-se uma situação que não foi explorada no Ensino Fundamental, apenas o caso em que D e d são inteiros positivos. Na disciplina de Teoria dos Números, já nos cursos de licenciatura, em que se tem o primeiro contato com a divisão de inteiros quaisquer, com o segundo diferente de zero, através do algoritmo da divisão, alguns conseguem, sem grandes dificuldades, efetuar corretamente a divisão (determinar corretamente o quociente e o resto nessa divisão). Outros, entretanto, demonstram pouca compreensão, apresentando para o resto, por exemplo, um número negativo, contrariando a condição $0 \leq r < |d|$ do algoritmo da divisão.

Aplicando o algoritmo da divisão aos inteiros D e d, $d \neq 0$, vamos analisar os possíveis casos para D e d: $D > 0$ e $d > 0$; $D < 0$ e $d > 0$; $D > 0$ e $d < 0$; e $D < 0$ e $d < 0$. No caso em que $D > 0$ e $d > 0$, temos, por (1), que $D = dq + r$, em que o quociente é $q > 0$ e o resto é r, $0 \leq r < d$. Quando $D < 0$ e $d > 0$, considere $-D > 0$; aplicando (1) a $-D > 0$ e $d > 0$, de $D = dq + r$ segue-se $-D = d(-q) + (-r)$ (aqui, o quociente não é $-q$, nem o resto é $-r$) e, portanto, $-D = d(-q) + (-d) + d + (-r)$, o que nos dá $-D = d[-(q + 1)] + (d - r)$, concluindo, assim, que o quociente é $-(q + 1)$ e o resto é $d - r$, pois $0 < d - r < d$. Os demais casos podem ser analisados de maneira análoga. Os possíveis quocientes e restos na divisão dos inteiros não nulos, D e d, são, em síntese, conforme apresentados na tabela abaixo:

Tabela 1.

Possíveis quocientes (q) e restos (r) na divisão de D por d, $d \neq 0$.

Dividendo	**Divisor**	**Quociente**	**Resto**
$D > 0$	$d > 0$	$q > 0$	$0 \leq r < d$
$D < 0$	$d > 0$	$-(q+1) < 0$	$0 < d - r < d$
$D > 0$	$d < 0$	$-q < 0$	$0 \leq r < d$
$D < 0$	$d < 0$	$q + 1 > 0$	$0 < d - r < d$

Do que foi visto nas considerações sobre o algoritmo da divisão, fica evidente a relação da operação de divisão com a operação de multiplicação: ao dividir D por $d \neq 0$, obtém-se um quociente q e um resto r, de modo que $dq + r = D$, e que a multiplicação, também, pode ser pensada como uma adição de parcelas iguais.

Para facilitar a compreensão de divisão, principalmente pelos licenciandos, que serão futuros professores de Matemática e, consequentemente, fundamentar o seu conhecimento matemático, é importante ampliar a noção de divisão entre inteiros e buscar outras possibilidades de efetuá-la. Buscando recursos didáticos, apresentamos aqui outro algoritmo para dividir inteiros positivos, agora, baseado no uso de repetidas diferenças. Esse algoritmo consiste em sempre subtrair do maior dos números dados o menor e, novamente, desta diferença subtrair o menor dos números dados. Esse processo, que é finito, continua sempre subtraindo das últimas diferenças obtidas o menor dos números, até que a última das diferenças seja igual ou menor do que zero.

Esse algoritmo, que pode ser encontrado nas notas de aula "Introdução à Teoria dos Números", escritas no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), por Said Sidki, para um curso ministrado no 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, em janeiro de 1975 (Sidki, 1975), pode ser estabelecido assim:

Algoritmo da divisão através da diferença: Para dividir os inteiros D e d, digamos $D \geq d > 0$, podemos aplicar repetidas diferenças, procedendo-se da seguinte maneira:

I) Faça $D = D_1$;

II) Calcule $D_{i+1} = D_i - d$;

III) (a) Se $D_{i+1} > 0$, então volte para II), trocando-se i por $i + 1$;

(b) Se $D_{i+1} \leq 0$, pare. O resultado será:

$$D = id, \text{ se } D_{i+1} = 0, \text{ e}$$

$$D = (i-1)d + D_i, \text{ se } D_{i+1} < 0.$$

É inevitável que, eventualmente, com relação aos dois métodos apresentados, perguntas do tipo "Qual deles traz mais vantagem no que se refere a uma melhor compreensão da divisão?” e “Que relação existe entre eles?” possam surgir. Este algoritmo, ao contrário do anterior, melhor se aplica ao caso em que se quer dividir dois inteiros positivos; para os demais casos, uma adaptação pode ser feita, mas com mais trabalho, tornando-o computacionalmente ineficaz. Além disso, didaticamente não oferece vantagens, fazendo com que o algoritmo da divisão se torne mais adequado para efetuar a divisão no caso em que se tem dois inteiros quaisquer, com o divisor não nulo.

Observe, no caso do algoritmo da divisão, que se $r = 0$ (divisão exata), então $D = dq$, ou seja, D é divisível por d, e, se $0 < r < d$ (divisão com resto), então $D = dq + r$. Quando $D \geq d > 0$, aplicando-se a D e d o algoritmo da divisão baseado em repetidas diferenças, tem-se que a quantidade de passos dados (iterações) até chegar numa diferença menor do que ou igual a zero, é igual a i (essas diferenças são representadas por D_{i+1}). Assim, o quociente q e o resto r, obtidos pelo uso do algoritmo da divisão de D por $d > 0$ são, $q = i$ e $r = D_{i+1} = 0$; quando $D_{i+1} < 0$, tem-se $q = i - 1$ e $0 < r = D_i < d$.

Feita essa breve reflexão sobre a presença e formas de abordar o algoritmo da divisão no contexto da Teoria dos Números na formação inicial para o ensino de Matemática, apresentamos, a seguir, o caso específico de um grupo de licenciandos para somar à nossa compreensão sobre o tema. É necessário, todavia, apresentar o percurso metodológico da investigação realizada, ao que se dedica a próxima seção.

Delineamento do instrumento de produção de dados, participantes e *lócus* do estudo

Os dados em análise na presente discussão são oriundos de um questionário composto por questões abertas (Fiorentini & Lorenzato, 2009) aplicado a licenciandos(as) em Matemática de uma universidade estadual pública, no interior do Ceará. A escolha por esse instrumento de produção de dados teve em vista captar a capacidade de raciocínio e argumentação escrita dos professores em formação. O questionário realizado constou de quatro questões relacionadas à divisibilidade, à divisão de dois números inteiros, ao algoritmo da divisão euclidiana e ao algoritmo da divisão baseado em repetidas diferenças. Nele, procurou-se questionar sobre o significado da divisão, sua relação com o dispositivo comumente usado para efetuá-la e o procedimento adotado para realização da divisão através desse dispositivo.

Foram participantes um grupo de 18 (dezoito) discentes do curso de licenciatura em Matemática da referida universidade, que se voluntariaram para participar deste estudo. Destes, oito estavam no início do curso e ainda não haviam cursado a disciplina de Teoria dos Números; sete estavam se aproximando do final do curso e, portanto, já haviam cursado essa disciplina há um certo tempo; e os três restantes estavam cursando a disciplina no período da pesquisa. A escolha por essa diversidade de sujeitos teve o intuito de levantar distintas compreensões sobre o tema, relacionadas à experiência prévia dos estudantes e às trajetórias na formação inicial.

Antes de passarmos às respostas dos estudantes, todavia, cumpre caracterizarmos o *lócus* da pesquisa, isto é, o curso em que esta investigação teve lugar, discutindo brevemente o Projeto Pedagógico do Curso (PPC), especificamente no que diz respeito à composição da disciplina de Teoria dos Números, que aparece no 4º semestre. Datado de 2008 (o que revela um considerável descompasso, visto que, desde então, duas novas DCN para a formação inicial de professores foram promulgadas), o PPC apresenta apenas uma disciplina obrigatória relativa ao tópico matemático em tela, denominada "Teoria dos Números I". Não possui pré-requisitos para sua matrícula, podendo qualquer licenciando a partir do segundo semestre cursá-la, ao passo em que é pré-requisito para cursar as disciplinas de Estruturas Algébricas I (5º semestre) e Teoria dos Números II, sendo esta última optativa e, diante de nossa experiência desde a criação do curso, nunca havendo sido ofertada.

No programa da disciplina, apresenta-se como ementa "Números naturais e números inteiros. Indução matemática. Divisibilidade. Números Primos. Congruência", sendo seu objetivo "Dar aos alunos um corpo organizado logicamente dos números inteiros, ainda que incompleto". A expressão "ainda que incompleto" sinaliza o aprofundamento proposto na disciplina de Teoria dos Números II, a qual tem como ementa "Divisores de um inteiro. Funções Aritméticas. Função e Teorema de Euler. Números perfeitos, números de Fibonacci e ternos Pitagóricos. Classes residuais. Raízes primitivas".

Em Teoria dos Números I, tem-se, dentre os conteúdos programáticos, o tópico de divisibilidade, que compreende: "*Definição, propriedades e algoritmo da divisão de Euclides*; divisores comuns de dois inteiros, máximo divisor comum de dois números, algoritmo de Euclides para o mdc, existência e unicidade do mdc, propriedades do mdc, mdc de vários inteiros; múltiplo comum de dois inteiros, mínimo múltiplo comum de dois inteiros, relação entre mdc e mmc" (grifo nosso). Nesse sentido, se faz pertinente considerarmos o conceito e o algoritmo da divisão euclidiana, em seus aspectos operacionais e didáticos, como tema de interesse e de formação dos futuros professores de Matemática nesse programa.

A observação revela que a ementa da disciplina mostra conteúdos adequados, que permitem uma consistente formação matemática para esses futuros professores. Desde que sejam feitas abordagens adequadas, é possível que no final do primeiro curso de Teoria dos Números os licenciandos sejam capazes de resolver os problemas presentes no questionário aplicado, que são problemas presentes no dia a dia de alunos e professores. Isso requer, todavia, que o formador que atua na licenciatura tenha uma visão e postura que o permitam se colocar no lugar de quem está sendo formado, compreendo os propósitos formativos.

Outras informações que saltam aos olhos no programa da disciplina, contudo, são as relativas ao caráter metodológico. Em se tratando dos procedimentos (metodologias, estratégias etc.) e da avaliação na disciplina, o PPC indica "aulas teóricas expositivas, com resolução de exercícios" e "provas escritas individuais e trabalho individual ou coletivo". Tais informações reforçam a percepção de Resende (2007) de que os métodos didáticos e avaliativos dos cursos de Teoria dos Números acentuam o caráter formalista-clássico dessa formação.

Considerando esse preâmbulo suficiente para compreendermos em linhas gerais o contexto dos quais emergem as respostas, passamos às respostas ao questionário.

Resultados e discussão

Para a discussão que se propõe, apresentaremos o enunciado de cada questão e, em seguida, anunciaremos respostas de alguns licenciandos, comentando-as e apresentando sugestões didáticas que possam contribuir para dirimir erros e problemas identificados, visando a qualificação da formação do futuro professor de Matemática. Naturalmente, a fim de conservar o anonimato dos participantes, sendo nosso foco suas respostas, estes foram denominados de Estudante 01, Estudante 02, ..., Estudante 18.

De início, tivemos:

Questão 01: Com base no que você aprendeu sobre divisão de inteiros, desde o Ensino Fundamental, responda:

a) O que significa divisibilidade?

b) Há relação entre o que você estudou no Ensino Fundamental e o que foi estudado agora, em Teoria dos Números? Se sim, como se dá essa relação?

Os Estudantes 01, 02, 04 e 16 estavam no 1º semestre do curso, e, destes, os Estudantes 02, 04 e 16, não responderam a esta questão, o que pode ser justificado pelo fato de ainda não haverem cursado a disciplina de Teoria dos Números, tendo no Ensino Fundamental ou Médio apenas contato com a noção de divisibilidade no conjunto numérico dos naturais. A menos que o aluno tenha participado de treinamentos olímpicos no âmbito do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), onde são estudados vários tópicos de Teoria dos Números, como a noção de divisibilidade no conjunto dos números inteiros, esse primeiro contato se dá somente na licenciatura em Matemática, numa disciplina de Teoria Elementar dos Números.

Este é o caso do Estudante 01, que deu a seguinte resposta: “Significa método para facilitar o processo de divisão entre números inteiros. Abordando propriedades e princípios específicos para números pares, primos etc.”. Em sua resposta, esse licenciando considerou a divisibilidade como um método para efetuar uma divisão de números inteiros, e não uma condição. Na verdade, um número inteiro, não nulo, é divisor de outro inteiro, se, e somente se, existir um terceiro inteiro que multiplicado pelo primeiro seja igual ao segundo. Esta é a relação de divisibilidade entre dois inteiros.

Os oito estudantes que estão no início do curso e não cursaram a disciplina de Teoria dos Números mostraram não saber efetivamente o que significa divisibilidade, sempre associando-a ao método para efetuar a divisão ou à própria operação de divisão entre dois inteiros. Dentre as respostas que seguem essa linha de raciocínio, estão: “Uma melhor maneira de dividir inteiros e mostrar se um inteiro é divisor de outro” (Estudante 02), “Repartição de algo” (Estudante 05), “É a partição de um número em partes iguais, sendo o divisor e o dividendo” (Estudante 06), “É dividir um número por outro, onde o resultado é um número inteiro e o resto é zero” (Estudante 13) e “Repartir algo em partes iguais, sendo o resultado exato ou não” (Estudante 16). Chama-nos atenção à falta de menção aos critérios de divisibilidade por 2, 3, 5, 10, por exemplo, que são estudados no Ensino Fundamental. Ao contrário, tivemos o seguinte relato do Estudante 18: “Não sei, não ouvi essa palavra durante meu Ensino Fundamental”, que nos causa reflexões acerca da problemática.

Dos três estudantes que estavam cursando a disciplina no momento da pesquisa, que haviam tido, recentemente, contato com as primeiras noções de divisibilidade, o Estudante 14 não respondeu e o Estudante 10 deu a seguinte resposta: “É uma propriedade que alguns números possuem de serem divididos por outro sem que haja resto”. A Estudante 03, por sua vez, deu resposta parecida, mas com maior detalhamento, conforme vemos a seguir:

> Divisibilidade é a propriedade matemática que permite a um número ser dividido por outro sem deixar resto, ou seja, a divisão é exata. Um número é divisível por outro se o resultado da divisão é um número inteiro e não apresenta resto. Por exemplo, 6 é divisível por 2, pois a divisão 6:2 é exata e não sobre resto nenhum. Já o número 9 não é divisível por 2, pois a divisão sobre resto. (Estudante 03)

Dos sete licenciandos que já haviam cursado a disciplina de Teoria dos Números, três deram respostas que pouco ou nada se relacionavam com o conceito de divisibilidade, como, por exemplo: “Significa saber quantas vezes pode-se somar um mesmo número de forma que o resto seja zero” (Estudante 08), “Divisibilidade significa descobrir o máximo de vezes que podemos somar uma quantidade por ela mesma almejando uma outra quantidade maior ou igual a primeira” (Estudante 11), e “É uma forma de equação que trabalha a forma de dividir...” (Estudante 15). Dois a confundiram com a própria operação de divisão ou com um método para efetuar a divisão, e suas respostas foram: “A divisão de um número inteiro por outro, ou seja, ‘quebrar’ um número inteiro em partes iguais sem que haja resto” (Estudante 07) e “É uma divisão de um inteiro por outro, ou seja, ‘quebrar’ o número inteiro em partes” (Estudante 09). Apenas dois forneceram respostas que, apesar de suscintas, se aproximaram da definição de divisibilidade: “Divisibilidade é a característica dada a dois números que, ao serem divididos, terão como resto zero” (Estudante 12) e “Dividir um número por outro e deixar resto zero” (Estudante 17).

Nota-se, diante do apresentado, que tais licenciandos associam corretamente o conceito de divisibilidade, demonstrando mobilizarem tal conhecimento, ainda que a forma como expõem isso seja intuitiva, muito relacionada às experiências com divisão na Educação Básica. Com exceção do Estudante 10, que ainda não havia cursado a disciplina em foco, os demais estudantes teoricamente deveriam possuir condições (até por terem tido contato há menos tempo) de conceituar, informalmente, divisibilidade como a relação entre dois números inteiros, sendo um deles não nulo, em que exista um terceiro número inteiro que multiplicado pelo primeiro (o não nulo) seja igual ao segundo. Matematicamente, temos que “dados dois inteiros a e b, com $a \neq 0$, diz-se que a *divide* b quando existir um inteiro c tal que $ac = b$”. Diz-se, ainda, que b é *divisível* por a, ou que, a é *diviso*r de b, estabelecendo-se, assim, a relação de divisibilidade.

Tem-se, assim, que as ideias mais básicas da divisão, como são trabalhadas nas escolas, demonstram-se mais consolidadas em parte dos licenciandos. Por isso, cabe debruçarmo-nos nas respostas do item b), que questionava justamente sobre a relação entre a divisibilidade estudada no Ensino Fundamental e na licenciatura. Naturalmente, aqueles que não cursaram a disciplina não responderam essa pergunta, que considerava suas experiências em Teoria dos Números. Dos dez estudantes que cursaram ou estavam cursando a disciplina, apenas um não respondeu e dois responderam simplesmente “Não”, não evidenciando relacionarem a divisão da Educação Básica com a estudada na licenciatura.

As demais repostas foram como se vê: “Sim, no algoritmo da divisão, na definição de resto, no ‘tirar a prova’ através da multiplicação” (Estudante 07), “Sim; na definição de resto, na tirada de prova” (Estudante 09), “Há sim relação, pois pode-se dizer que o conceito estudado no Ensino Fundamental é a base para Teoria dos Números, que amplia e aprofunda essa compreensão” (Estudante 03), “Sim, há relação entre as duas e que a Teoria dos Números, mostra outras maneiras e demonstra com outros métodos a divisibilidade dois inteiros”

(Estudante 10), “Sim, nas noções e conceitos mais primitivos durante a disciplina” (Estudante 12) e “Sim. No Ensino Superior o algoritmo da divisão é estudado com maior rigor” (Estudante 17).

Diante das respostas, que, certamente, relacionam de algum modo a divisibilidade nesses dois níveis de ensino, com maior ou menor precisão, algumas considerações são possíveis. Enquanto os Estudantes 07 e 09 abordam tópicos semelhantes, como a definição do resto e a “prova”, o Estudante 10 aponta a diferença de métodos com que tratam o conteúdo. Já os Estudantes 12 e 17, distinguem as noções abordadas na Educação Básica e na licenciatura pela primitividade e rigor, afirmando que a divisão é tratada com mais rigor no Ensino Superior, o que entendemos como a divisão sendo tratada em seus fundamentos, e que os tópicos de teoria dos Números que se aproximam com os da Educação são aqueles mais primitivos, isto é, aqueles que são matéria de ensino no currículo escolar. Chama atenção também a resposta da Estudante 03, que afirma que os tópicos do Ensino Fundamental são a base para a Teoria do Números estudadas na licenciatura; em nossa compreensão, é essencialmente o inverso: é a Teoria dos Números que embasa os assuntos relativos à operação de inteiros na Educação Básica; embasa e, de fato, amplia e aprofunda essa compreensão.

Vamos agora à análise da Questão 02, que foi:

Questão 02: Para efetuarmos a divisão de números inteiros positivos, digamos $D \geq d > 0$, uma das maneiras que conhecemos é o algoritmo da divisão, que nos garante que existem únicos inteiros q e r, tais que $D = dq + r$ e $0 \leq r < d$. Isto significa que, nessa divisão, o quociente é q (d “cabe” q vezes em D), e r é o resto, $r < d$. Usualmente, quando falamos em divisão de inteiros, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, a associamos ao seguinte dispositivo prático:

$$\begin{array}{l|l} D & \underline{\quad d \quad} \\ & \quad q \\ r & \end{array}$$

com D, d, q e r, satisfazendo as condições $D = dq + r$ e $0 \leq r < d$. Sendo assim, responda:

a) *O que é divisão? O que significa, na prática, dividir dois inteiros?*
b) *Explique o porquê da associação da divisão com o dispositivo supracitado.*
c) *Tem-se que o algoritmo vale, também, quando $D, d \in \mathbb{Z}$, com $|D| > |d|$ e, neste caso, temos que $0 \leq r < |d|$. Neste caso, quem é o quociente (q)? Podemos, ainda, efetuar a divisão de D por d, quando $|D| < |d|$. Nessa situação, quem é o quociente (q) e o resto (r)?*
d) *Considerando as respostas do item c), determine q e r, quando:*

i. $D = 141\ e\ d = 15$;   *ii.* $D = -141\ e\ d = 15$;   *iii.* $D = 141\ e\ d = -15$;   *iv.* $D = -141\ e\ d = -15$.

Esta questão tratou da divisão e da aplicação do algoritmo da divisão a dois inteiros, com o propósito de verificar quais estudantes mobilizavam o conhecimento sobre a divisão de inteiros quaisquer (não apenas os positivos), considerando que aqueles que já cursaram a disciplina de Teoria dos Números tiveram contato com a teorização sobre esses casos de divisão, enquanto aqueles que não cursaram a disciplina poderiam não ter tido tal contato. Na resposta ao item a), quando perguntado "o que é divisão?", tivemos de alguns estudantes que cursaram a disciplina de Teoria dos Números respostas como "repartir, quebrar em partes iguais..." (Estudante 07), "a divisão é a operação inversa à multiplicação" (Estudante 08) ou "o ato de dividir dois números" (Estudante 09), "Dividir é uma operação aritmética que se apresenta como inverso da multiplicação" (Estudante 11) e "Inverso da multiplicação. Separar em partes iguais" (Estudante 17). Nota-se, em tais formulações, ideias subjacentes à concepção de divisão, mas que, além de praticamente repetirem o que afirmaram quanto à divisibilidade, apresentam pouca profundidade, especialmente se considerarmos que os respondentes já cursaram a disciplina em foco.

Já quando perguntados sobre a relação da divisão com o dispositivo prático usual supracitado, de modo geral, não responderam. Isso sugere que os estudantes até conseguem operar a divisão através do dispositivo, mas não mobilizaram, ainda, o conhecimento relativo à distinção entre o algoritmo da divisão e esse mecanismo para efetuá-la. Em outras palavras, nota-se que ainda permanece a percepção de que ao tratar da divisão estamos abordando imediatamente o dispositivo mencionado, como se fossem a mesma coisa. Temos uma exceção apenas, novamente a Estudante 03, que, em relação aos itens a) e b), disse:

> a) A divisão consiste em encontrar quantas vezes um número (o divisor) cabe em outro número (dividendo), sendo que o resultado dessa operação é chamado quociente. Na prática, quando se divide dois inteiros, busca-se saber quantas vezes um número se encontra contido no outro, ou seja, reparte-se um número em partes iguais. Por exemplo, se dividir o número 14 por 7, procura-se saber quantas vezes o número 7 cabe em 14.
>
> b) O dispositivo supracitado é importante para entender melhor como se dá a divisão. A colocação do traço entre o dividendo e o divisor é uma convenção matemática que ajuda a visualizar a operação de divisão. Ele é utilizado como uma ferramenta visual para organizar a operação de divisão e garantir que o resultado seja preciso e correto. (Estudante 03)

Notamos, nessa resposta, a compreensão do algoritmo da divisão, que engloba tanto divisões exatas (com resto zero), quanto inexatas, além da distinção entre o algoritmo da divisão e o dispositivo que serve na organização e melhor visualização do cálculo. Esse entendimento possibilita a fundamentação da futura prática docente da Estudante 03 no ensino da divisão, visto que a ideia do algoritmo, em si, está mobilizada e aparece (deve aparecer) antes do dispositivo. Em outras palavras, primeiro se ensina à criança o conceito, a noção do que significa dividir um número pelo outro, e depois se trabalha as formas (note-se, no plural) de efetuar tal operação. Tanto que o dispositivo mencionado é mais eficaz (isto é, facilita na resolução) para números maiores; se divido 8 por 4, por exemplo, é muito mais prático pensar quantas vezes 4 "cabe" em 8, do que armar e efetuar a operação através do dispositivo.

Na Questão 02, foi, ainda, enunciado o algoritmo da divisão para os inteiros $D \geq d > 0$. No item c), foi perguntado sobre o quociente e o resto nos casos em que $|D| > |d|$, mas $D < 0$ e $d \neq 0$. As respostas, de modo geral, mostraram algumas incompreensões quanto à operação de divisão entre inteiros, evidenciando a não assimilação do algoritmo da divisão, sobretudo no caso daqueles que já cursaram a disciplina de Teoria dos Números. Isto é, não conseguiram entender que dividir um inteiro por outro inteiro não nulo significa encontrar um inteiro (quociente) e um resto (igual ou maior que zero), de modo que multiplicando-se o menor desses números (divisor) pelo quociente e a esse resultado somar o resto obtido encontra-se o maior dos números (dividendo), o que nada mais é do que a aplicação do algoritmo da divisão.

Quanto ao item d) dessa questão, a maior parte dos avaliados mostrou dificuldades em aplicar o algoritmo da divisão nos casos pedidos, principalmente, quando o dividendo é negativo, como no caso do subitem *ii.*, que pede para dividir -141 por 15. Aplicando o algoritmo da divisão aos inteiros 141 por 15, tem-se

$$141 = 15 \times 9 + 6, \tag{5}$$

E, assim, de (5) vem $-141 = 15 \times (-9) + (-6)$. Aqui, alguns, erroneamente, mostrando que não compreenderam o algoritmo da divisão, dizem que o quociente é -9 e o resto -6; todavia, o resto não pode ser negativo, conforme (1). Como se resolve, então, esse problema? A resposta está na Tabela 1; não querendo consultá-la, pode ser feito da seguinte forma:

$$-141 = 15 \times (-9) + (-6) = 15 \times (-9) + (-6) + 15 + (-15) = (-10) \times 15 + 9 \tag{6}$$

sendo, portanto, o quociente $q = -10$ e o resto $r = 9 < 15$.

No caso da divisão de 141 por 15, geralmente, os estudantes entendem que se deve procurar o maior número inteiro que multiplicado por 15 esteja o mais próximo possível de 141 (isto é, quantas vezes 15 "cabe" em 141), no caso, 9. Em seguida, multiplica-se esse 9 por

15, dando 135, e, depois, faz-se a diferença $141 - 135 = 6$, sendo este o resto. Quando se deparam com o problema da divisão em que o primeiro número é negativo (-141, por exemplo), se não for feito como em (6), há certa dificuldade em encontrar o maior número que multiplicado por 15 seja um número o mais próximo possível de -141 e que seja menor do que -141, isto é, que tenha valor absoluto maior do que 141. Assim,

$$\begin{array}{r|l} -141 & 15 \\ \cline{2-2} \underline{150} & -10 \\ 9 & \end{array}$$

isto é, 15 “cabe” -10 vezes em -141 e sobra 9.

Se houver uma compreensão total do algoritmo da divisão (e não apenas da operação do dispositivo), ao aplicá-lo para as demais situações, torna-se mais prático se a busca por q e r for feita como em (6) ou, então, tendo realmente incorporado tal ideia, simplesmente, observando a Tabela 1. Quando isso não acontece, geralmente, os professores em formação não se atentam para o fato de que o resto não pode ser negativo, conforme o próprio algoritmo da divisão em (4). Os licenciandos ingressantes, que ainda não estudaram o algoritmo da divisão, geralmente não percebem que estão diante de um processo ordinário de divisão, com o qual já tiveram contato desde o Ensino Fundamental, e que pode ser efetuado através do dispositivo, mesmo sem conhecer o algoritmo da divisão, bastando apenas ter compreendido o significado da operação de divisão.

A motivação para explorar um pouco o algoritmo da divisão foi a possibilidade de mostrar outras maneiras de abordar tal conteúdo, com algumas sugestões, que julgamos serem formas didáticas de contribuir para a compreensão desse algoritmo por parte dos professores de Matemática em formação. Nesse sentido, procurou-se, ainda, ampliar os conhecimentos sobre divisão e demais processos de divisão de inteiros, fazendo com que esse professor tenha uma base matemática com relação a essa operação. Aproveitou-se, então, o momento para apresentar um novo algoritmo, agora baseado em diferenças repetidas, sugerindo sua aplicação na Questão 03, como se vê a seguir:

Questão 03: Outro algoritmo usado para efetuar a divisão de dois inteiros tem como base o uso de repetidas diferenças. Para dividir os inteiros D e d, digamos $D \geq d > 0$, podemos aplicar repetidas diferenças, procedendo-se da seguinte maneira:

I. Faça $D = D_1$;

II. Calcule $D_{i+1} = D_i - d$;

III. (a) Se $D_{i+1} > 0$, então volte para ii), trocando-se i por $i + 1$;

(b) *Se $D_{i+1} \leq 0$, pare. O resultado será:*

$$D = id, \text{ se } D_{i+1} = 0, \text{ e}$$

$$D = (i-1)d + a_i, \text{ se } D_{i+1} < 0.$$

a) Utilizando esse algoritmo efetue as divisões em i., ii., iii. e iv. da questão 2, item d).

b) Qual a relação entre esse algoritmo e o algoritmo convencional da divisão?

No item a) dessa questão, na divisão i. $D = 141$ e $d = 15$, era esperado que dessem o primeiro passo, isto é, fizessem $D_1 = 141$ e, a partir daí, o próximo passo, $D_2 = D_1 - d = 126$ e, em seguida, todos os passos necessários, até chegar numa diferença menor do que ou igual a zero, no caso, $D_{11} = -9$. Por fim, verificar que a quantidade de passos é igual 10, e que $141 = (10-1) \times 15 + D_{10}$, ou seja, $141 = 9 \times 15 + 6$. Nesse caso, em que os dois inteiros eram positivos, dos três estudantes que estavam cursando a disciplina de Teoria dos Números e já haviam tido contato com esse algoritmo, dois conseguiram respondê-la, deixando algumas imprecisões matemáticas na notação, mas compreendendo e operando corretamente. Um desses três estudantes, todavia, não teve êxito, por não conseguir identificar efetivamente quem eram os D_i ao longo dos passos necessários para se chegar ao quociente e ao resto. Contudo, quando o algoritmo foi aplicado aos dois inteiros quaisquer (divisões *ii*., *iii*. e *iv*.), apenas a Estudante 03 e o Estudante 10 operaram corretamente esse algoritmo.

Quanto ao item b), nenhuma resposta foi obtida, com exceção da Estudante 03, mais uma vez, que disse:

> O algoritmo da divisão baseada em diferenças sucessivas utiliza como base o algoritmo da divisão convencional. O algoritmo da divisão baseada em diferenças sucessivas é uma variação desse método da divisão convencional, onde o divisor é subtraído não apenas do dividendo atual, mas do anterior também. Essa abordagem permite que o algoritmo se aproxime mais rapidamente do resto. (Estudante 03)

Tal resposta se limita a afirmar que esse algoritmo é uma derivação do algoritmo convencional, não estabelecendo relação entre seus elementos, como, por exemplo, que, quando $D \geq d > 0$, o número de passos dados, i, até chegar a uma diferença menor do que igual a zero, isto é, $D_{i+1} = 0$, corresponde ao quociente q no algoritmo da divisão ($q = i$), enquanto o resto $r = D_{i+1} = 0$; quando $D_{i+1} < 0$, tem-se $q = i - 1$ e $0 < r = D_i < d$. Além disso, a Estudante 03 fez uma afirmação não exatamente correta de que o algoritmo das diferenças sucessivas "permite que o algoritmo se aproxime mais rapidamente do resto". Na verdade, o que esse algoritmo faz é operar com subtrações, evitando que tenhamos que lançar mão da típica ideia de "quantas vezes d cabe em D?"; assim, "simplifica" o processo a uma operação mais conhecida e mais simples, que é o caso da subtração, mas aumenta consideravelmente o número de passos, quanto maior for o quociente da divisão.

Finalmente, a última questão tinha como enunciado o seguinte:

Questão 04: Ao efetuar a divisão de 145 *por* 11, *comumente se faz da seguinte forma:*

- *Separam-se os algarismos* 1 *e* 4, *nesta ordem, formando o número* 14 *e, em seguida, divide-se* 14 *por* 11.
- *Em seguida, multiplica-se* 1 *por* 11, *e o resultado subtrai de* 14.
- *Agora baixa-se o algarismo restante,* 5, *colocando-o à direita do resto* 3, *formando o número* 35, *o qual se divide por* 11.
- *Multiplica-se* 3 *por* 11, *e o resultado subtrai de* 35.
- *Como não há mais algarismos para serem baixados, encerra-se a divisão. O quociente é, portanto,* 13 *e o resto é* 2, *pois* $145 = 11 \times 13 + 2$ *e* $0 < 2 < 11$.

Tendo isso em vista, explique por que procedemos dessa forma para realizar a divisão entre dois inteiros.

Essa questão revelou um ponto crítico no entendimento da operação de divisão por parte dos professores em formação. Nenhum dos estudantes respondeu essa questão, evidenciando uma lacuna na formulação dos porquês da execução desse passo a passo tão familiar, inclusive para eles próprios, na Educação Básica. A única exceção foi novamente a Estudante 03 que ilustrou a resolução da conta, em muito repetindo o procedimento exposto na questão, mas sem, de fato, justificar o porquê de tais ações. Ao menos daqueles que estavam cursando a disciplina no momento da pesquisa ou que já haviam cursado, era esperado uma compreensão razoável desse procedimento.

A ideia de separar os algarismos do dividendo surge do fato de que 145, por exemplo, que está na notação posicional, poder ser escrito na forma polinomial

$$145 = 1 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0, \qquad (7)$$

em que 1 é o algarismo de 3ª ordem (centenas), 4 o de 2ª ordem (dezenas) e 5 o de 1ª ordem (unidades). Desta maneira, estão separados os algarismos do dividendo. Como o número formado pelo algarismo 1 (uma centena) é tal que $1 < 11$, não é possível dividi-lo por 11; considera-se, assim, o próximo algarismo, 4, colocando-o à direita do 1, formando o número 14 e $14 > 11$. Em seguida, divide-se 14 (14 dezenas) por 11, encontrando-se para quociente 1 (1 dezena) e resto 3 (3 dezenas), $3 < 11$. Agora, multiplica-se 1 por 11 e, de 14, subtrai-se 1×11, dando 3. Após, baixa-se o algarismo restante 5, colocando-o à direita de 3, formando o número 35; sendo $35 > 11$, divide-se 35 por 11, multiplica-se 3 por 11 e subtrai o reste dessa divisão por 35. Desta forma, como não há mais algarismos para baixar, tem-se: quociente 13 e resto 2, e $145 = 11 \times 13 + 2$, com $0 < 2 < 11$.

Uma outra forma que poderia ser feita é a seguinte: ao separar os algarismos de 145, diante da impossibilidade de se efetuar a divisão de 1 por 11, pois, $1 < 11$, considera-se o próximo algarismo, 4, colocando-o à direita de 1, formando o número 14 (14 dezenas ou 140 unidades). Como $145 = 14 \text{ (dezenas)} + 5 \text{ (unidades)}$, tem-se que

$$\frac{14}{11} = \frac{11+3}{11} = \frac{11}{11} + \frac{3}{11} = 1 + \frac{3}{11}, \tag{8}$$

com $3 < 11$. Aqui, dividimos 14 (dezenas) por 11, que dá 1 (dezena), sobrando 3 (dezenas), de modo que em $\frac{14}{11} = 1 + \frac{3}{11}$, o 1 (parte inteira na divisão de 14 por 11) será o primeiro algarismo do quociente (1 dezena, portanto) e 3 (dezenas), o primeiro resto. À direita de 3, o primeiro resto, coloca-se o algarismo 5 (último algarismo do 145 a ser baixado), formando assim o número 35 (unidades), que será dividido por 11. Procedendo como em (8), tem-se

$$\frac{35}{11} = \frac{33+2}{11} = \frac{33}{11} + \frac{2}{11} = 3 + \frac{2}{11},$$

com $2 < 11$ e, com o sentido do que feito em (8), aqui, o 3 em $\frac{35}{11} = 3 + \frac{2}{11}$ será o segundo algarismo no quociente de 145 por 11, e 2, o resto final. Portanto, o quociente de 145 por 11, será $10 + 3 = 13$ e o resto $2 < 11$.

Em síntese, as respostas obtidas com o questionário evidenciaram que os licenciandos investigados ainda demonstram um conhecimento utilitarista do algoritmo da divisão, isto é, em via de regra sabem operá-lo para encontrar os resultados, mas não compreendem o porquê do procedimento realizado, permanecendo no entendimento mecânico de como fazer, mas sem saber o real sentido do que fazem. Notou-se, ainda, que as noções da operação de divisão estão mais consolidadas nesses licenciandos em se tratando de números inteiros positivos, ou seja, de números naturais; quando transportadas aos números inteiros negativos, há incompreensão de um dos fundamentos do algoritmo da divisão, por exemplo, em que o resto somente pode ser zero ou maior que zero.

Isso corrobora com nossa compreensão de que muitos dos licenciandos chegam ao curso de formação inicial com concepções equivocadas ou inconsistentes sobre o conjunto dos inteiros e a operação de divisão com esses números. Mostra-se, também, que tais incompreensões permanecem, de modo geral, irrefletidas durante a formação inicial; o que quer dizer que, por falta de uma problematização e uma abordagem mais eficaz, o futuro professor chega a concluir o curso mantendo tais concepções equivocadas (*misconceptions*), levando tais saberes (e não-saberes) para a sua futura prática na Educação Básica.

Diante do que foi até aqui discutido, considerando havermos atingido nossos objetivos, seguimos às considerações finais.

Considerações finais

A discussão aqui apresentada certamente não esgota o debate sobre a formação matemática em Teoria dos Números de futuros professores de Matemática. Pelo contrário, ressalta a importância de cada vez mais lançarmos olhares a esse tema, de maneira ampla, refletindo sobre que Matemática devem os licenciandos aprender e, de maneira específica, esmiuçando os conteúdos presentes na formação inicial e direcionando-os ao propósito formativo do curso.

Essa é, afinal, a grande sustentação deste escrito: os tópicos matemáticos abordados na licenciatura devem, em maior ou menor medida, fundamentar a prática docente do futuro professor, e, para isso, é necessário atribuir novas perspectivas à Matemática Científica, em articulação com a Matemática Escolar. Nas palavras de Moreira e David (2005, p. 45), “[...] trata-se de pensar o processo de formação do professor a partir do reconhecimento de uma tensão – e não identidade – entre educação matemática escolar e ensino da Matemática Acadêmica elementar”.

Cumpre, nesse sentido, prescrutarmos os currículos da licenciatura, com ênfase, ao que compete esta discussão, na Teoria Elementar dos Números. Embora esteja presente em praticamente todo curso de formação inicial de professores de Matemática, a abordagem dada a essa disciplina é ainda precária e pouco eficaz à preparação do docente (Resende, 2007). Rever as ementas curriculares é, assim, importante, mas é igualmente importante que os formadores reflitam sua prática no ensino desse tópico matemático que fundamenta o trabalho com conjuntos numéricos e operações, base da Matemática Escolar. O formador não pode, afinal, “[...] ignorar, ao trabalhar no curso de licenciatura, o conhecimento pedagógico do conteúdo, as questões históricas e epistemológicas ligadas aos conceitos com os quais trabalha” (Resende, 2007, p. 229).

Faz-se pertinente redimensionarmos e ressignificarmos nossa formação no que compete ao entendimento dos números e da Aritmética básica, desenvolvendo o pensamento numérico e aritmético e refinando nossa compreensão das relações entre os conjuntos e as operações, inclusive a partir de provas e demonstrações. O que não quer dizer, por sua vez, que a abordagem formalista-clássica, puramente axiomática, da Teoria do Números, conforme constatou Resende (2007), seja suficiente nesse intuito. Ao contrário, temos visto que não tem sido.

À guisa de conclusão, diante dos resultados apresentados pelo questionário aplicado a professores em formação de uma universidade pública cearense, notamos que ideias básicas relacionadas à divisão euclidiana, e mais especificamente ao algoritmo da divisão, ainda não estão bem assentadas e articuladas nos licenciandos estudados. Carece, na formação inicial, investirmos na articulação do conhecimento do conteúdo – especialmente considerando os subdomínios indicados por Carrillo-Yañez et al. (2018): conhecimentos dos tópicos, da estrutura e da prática matemática – com o conhecimento pedagógico do conteúdo, integrando a Matemática Científica e a Matemática Escolar, nos termos de Moreira e David (2005), ou, ainda, a Matemática a ensinar e a Matemática para ensinar, como postula Valente (2022), relativa à Teoria dos Números e o ensino da operação de divisão na Educação Básica.

Referências

Almeida, M. V. R., & Ribeiro, M. (2019). Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir a relação de ordem no conjunto dos números inteiros. *Quadrante*, 28(2), 125-148. https://doi.org/10.48489/quadrante.23015

Almouloud, S. A., Figueroa, T. P., & Fonseca, R. V. (2021). Análise epistemológica de Teoria dos Números e Criptografia: importância dessas áreas nos currículos de licenciatura em Matemática. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 10(21), 22-43. https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.21.22-43

Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática*. Edgard Blücher LTDA.

Brasil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. MEC/SEF.

Brasil. (2018). *Base nacional comum curricular.* MEC.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018): The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 1–18. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Fiorentini, D. (2005). A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. *Revista de Educação PUC-Campinas*, 18, 107-115. https://periodicos.puc-campinas.edu.br/reveducacao/article/view/266

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2009). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Autores Associados.

Hefez, A. (2004). *Elementos de Aritmética*. SBM.

Melo, C. I. B., & Moriel Junior, J. G. (2021). Um marco teórico para o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK). *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática*, 5(1). https://doi.org/10.34019/2594-4673.2021.v5.34290

Moreira, P. C., & David, M. M. M. S. (2005). *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar.* Autêntica.

OECD. (2019). *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do.* PISA/OECD Publishing.

https://doi.org/10.1787/5f07c754-en

Pais, L. C. (2002). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.* Autêntica.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.). *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). SEM-SPCE.

Resende, M. R. (2007) Re-significando a disciplina de Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na licenciatura. [Tese de doutoramento, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. Repositório PUCSP.

https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11207

Resende, M. R., & Machado, S. D. A. (2012). O ensino de matemática na licenciatura: a disciplina Teoria Elementar dos Números. *Educação Matemática Pesquisa*, 14(2), 257-278. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/9077

Rodrigues, A. C. (2019). *As quatro operações matemáticas: das dificuldades ao processo ensino e aprendizagem*. [Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"]. Repositório Institucionais UNESP.betim http://hdl.handle.net/11449/181901

Sidki, S. (1975). *Introdução à Teoria dos Números.* IPMA.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. http://www.jstor.org/stable/1175860

Valente, W. R. (2022). História da formação do professor que ensina matemática: etapas de constituição da matemática para ensinar. *Boletim online de Educação Matemática*, 10(19), 10-24. https://doi.org/10.5965/2357724X10192022010