EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i3p373-402

Promovendo o conhecimento especializado de futuros professores de matemática sobre o algoritmo da divisão euclidiana

Promoting the specialized knowledge of prospective mathematics teachers about the euclidean division algorithm

Promoviendo el conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas sobre el algoritmo de la división euclidiana

Promouvoir les connaissances spécialisées des futurs enseignants de mathématiques sur l'algorithme de division euclidienne

Marieli Vanessa Rediske de Almeida[1]
Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA)
Doutora em Ensino de Ciências e Matemática
https://orcid.org/0000-0002-7491-8936

Rian Lopes[2]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)
Doutor em Matemática
https://orcid.org/0000-0003-3700-8682

Resumo

Neste artigo, relatamos a experiência de um formador de professores, que é matemático, ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana em uma disciplina de Teoria dos Números para futuros professores de Matemática. Considerando que o conhecimento do professor que ensina Matemática é especializado, do ponto de vista do modelo *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*, pretendemos identificar quais conhecimentos são mobilizados pelo formador e evidenciados pelos licenciandos quando o formador aborda esse resultado algébrico. Algumas atividades foram conduzidas pelo docente na tentativa de compreender como os licenciandos realizavam a divisão de números inteiros antes, durante e após conhecer o teorema; nossa análise foca esses diferentes momentos. Nos licenciandos, foi possível observar prioritariamente conhecimentos relacionados a procedimentos envolvendo o algoritmo. Não obstante, ao longo das atividades realizadas, eles foram capazes de estabelecer diferentes conexões envolvendo o algoritmo da divisão euclidiana. Com relação ao formador, destacamos que seu conhecimento matemático e pedagógico, aliado ao objetivo

[1] marieli.almeida@outlook.com.
[2] rian.lima@unioeste.br.

de efetivamente formar futuros professores de Matemática, tem o potencial para promover nos licenciandos um conhecimento especializado sobre o assunto.

Palavras-chave: Conhecimento especializado, Teorema do algoritmo da divisão euclidiana, Teoria dos números, Formação de professores de matemática, Conhecimentos especializados dos professores de matemática.

Abstract

In this paper, we report the experience of a mathematics teacher educator, who is a mathematician, while teaching the Euclidean Division Algorithm Theorem in a Number Theory course for prospective mathematics teachers. Considering that the knowledge of a Mathematics teacher is specialized, from the perspective of the Mathematics Teachers' Specialised Knowledge model, we intended to identify which knowledge is mobilized when the teacher educator addresses this algebraic result. Some activities were conducted by the professor in an attempt to understand how the prospective teachers performed the division of integers before, during, and after knowing the theorem; our analysis focuses on these different moments. Regarding the prospective teachers' knowledge, it was possible to observe, primarily, knowledge related to procedures involving the algorithm. However, throughout the conducted activities, they were able to establish different connections concerning the Euclidean Division Algorithm Theorem. About the teacher educator, we emphasize that his mathematical and pedagogical knowledge, combined with the goal of effectively prepare future Mathematics teachers, has the potential to promote specialized knowledge in the prospective teachers regarding the subject matter.

Keywords: Specialised knowledge, Euclidean division algorithm theorem, Number theory, Mathematics teacher education, Mathematics teachers' Specialised knowledge.

Resumen

En este artículo reportamos la experiencia de un formador de profesores, quien es matemático, al enseñar el Teorema del Algoritmo de la División Euclidiana en un curso de Teoría de Números para futuros profesores de Matemáticas. Considerando que el conocimiento del profesor que enseña Matemáticas es especializado, desde el punto de vista del modelo *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge,* se pretende identificar qué conocimientos moviliza el formador y cuáles conocimientos evidencian los futuros profesores cuando el formador presenta este resultado algebraico. Algunas actividades fueron conducidas por el formador, en un intento de comprender cómo los estudiantes realizaban la división de números enteros antes, durante y después de conocer el teorema; nuestro análisis se centra en estos diferentes momentos. En cuanto al conocimiento de los futuros profesores, fue posible observar principalmente conocimientos relacionados con los procedimientos que involucran el algoritmo. Sin embargo, a lo largo de las actividades realizadas, pudieron establecer diferentes conexiones involucrando el algoritmo de la división euclidiana. Sobre el formador, destacamos que sus conocimientos matemáticos y pedagógicos, combinados con el objetivo de formar efectivamente a los futuros profesores de Matemática, tienen el potencial de promover, en los estudiantes, un conocimiento especializado de la materia.

Palabras clave: Conocimiento especializado, Teorema del algoritmo de la división euclidiana, Teoría de números, Formación del profesorado de matemáticas, Conocimientos especializados de los profesores de matemáticas.

Résumé

Dans cet article, nous rapportons l'expérience d'un formateur d'enseignants, qui est mathématicien, lors de l'enseignement du Théorème de l'Algorithme de la Division Euclidienne dans un cours de Théorie des Nombres destiné aux futurs professeurs de mathématiques. En considérant que la connaissance du professeur enseignant les mathématiques est spécialisée, du point de vue du modèle *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*, nous cherchons à identifier quelles connaissances sont mobilisées par le formateur et quelles connaissances sont mises en évidence par les étudiants en licence lorsque le formateur aborde ce résultat algébrique. Plusieurs activités ont été menées par l'enseignant afin de comprendre comment les étudiants en licence effectuaient la division des nombres entiers avant, pendant et après avoir pris connaissance du théorème ; notre analyse se concentre sur ces différents moments. En ce qui concerne la connaissance des étudiants en licence, on a pu observer principalement des connaissances liées aux procédures impliquant l'algorithme. Néanmoins, tout au long des activités réalisées, ils ont été capables d'établir différentes connexions impliquant l'algorithme de la division euclidienne. En ce qui concerne le formateur, nous soulignons que sa connaissance mathématique et pédagogique, associée à l'objectif de former efficacement les futurs professeurs de mathématiques, a le potentiel de promouvoir chez les étudiants en licence une connaissance spécialisée sur le sujet.

Mots-clés : Connaissances spécialisées, Théorème de l'algorithme de division euclidienne, Théorie des nombres, Formation de professeur de mathématiques, Connaissances spécialisées des enseignants de mathématiques.

Promovendo o conhecimento especializado de futuros professores de Matemática sobre o algoritmo da divisão euclidiana

É consenso que uma educação de qualidade passa pela formação de bons professores, e várias discussões são realizadas a fim de definir o que vem a ser um “bom” professor. Uma característica que nos parece fundamental para que qualquer professor desempenhe suas funções adequadamente se refere a possuir o conhecimento do conteúdo, isto é, conhecer profundamente o assunto que deverá ensinar.

O conhecimento do conteúdo integra o conhecimento profissional docente, defendido por Shulman (1986, 1987) como componente fundamental na atuação dos professores em geral e, com o tempo, expandido e discutido em áreas específicas, como a Educação Matemática. Nessa direção, autores como Ball et al. (2008) e Carrillo et al. (2018) apresentam propostas específicas para a modelação do conhecimento do professor que ensina Matemática, sempre argumentando que ele seja vasto e aprofundado, de modo a envolver conhecimento sobre o conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo.

No escopo da formação de professores de Matemática, destaca-se a formação inicial como momento ímpar para o desenvolvimento do conhecimento do professor. Aqui, focaremos a Licenciatura em Matemática, explorando potencialidades do ensino de Teoria dos Números para o conhecimento e a prática de futuros professores na educação básica.

Por tratar de assuntos que podem ser considerados elementares, a disciplina de Teoria dos Números nem sempre tem seu papel devidamente reconhecido na formação (Oliveira & Fonseca, 2017; Resende & Machado, 2012). Apesar do conteúdo de números inteiros ensinado na escola ser considerado básico, a Teoria dos Números é uma área de alta complexidade na Matemática, e a disciplina homônima ministrada nos cursos de Licenciatura em Matemática solidifica muitos conceitos elementares por meio de definições e demonstrações. Muitas discussões matemáticas e pedagógicas aprofundadas podem ser realizadas no escopo dessa disciplina, por exemplo na Divisão Euclidiana, que é ensinada nos Anos Iniciais e é fator integrante na trajetória escolar de todos os discentes, porém a demonstração (nada trivial) de tal resultado só é ensinada e discutida na disciplina de Teoria dos Números.

Dessa forma, nosso foco no presente texto será o ensino do Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE), o qual garante a existência e unicidade do quociente e do resto na divisão entre dois números inteiros, como segue: **Dados dois números $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{Z}$, com $\boldsymbol{b \neq 0}$, existem únicos $\boldsymbol{q, r} \in \mathbb{Z}$, tais que $\boldsymbol{a = bq + r}$ satisfazendo $\boldsymbol{0 \leq r < |b|}$**. A partir do trabalho com esse resultado em uma disciplina voltada ao estudo de estruturas algébricas, discutimos o conhecimento pretendido e evidenciado por futuros professores de Matemática, bem como o mobilizado pelo formador.

Revisão de literatura e referencial teórico

Os números são introduzidos na vida da criança desde a Educação Infantil, e seu estudo vai sendo formalizado ao longo da educação básica. Na Educação Infantil, de acordo com a BNCC (Ministério da Educação, 2018), os números aparecem relacionados, por exemplo, com a contagem (objetos, pessoas, livros), as quantidades e o registro de quantidades utilizando numerais.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, especificamente nos três primeiros, o foco são os números naturais, e a divisão é introduzida a partir das noções de metade e terça parte no segundo ano. A partir do terceiro, são introduzidos os significados da divisão (repartição em partes iguais e medida), relacionados com a habilidade EF03MA08 “Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais” (Ministério da Educação, 2018, pp. 286-287), bem como os significados de metade, terça, quarta, quinta e décima partes, associados à habilidade EF03MA09 “Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes” (Ministério da Educação, 2018, pp. 286-287).

Nos Anos Finais, precisamente no sétimo ano, de acordo com a BNCC, são apresentados os números inteiros. Esse documento preconiza a discussão dos inteiros a partir de seus usos, de sua ordenação, de sua história, de sua associação com pontos na reta numérica e das operações, incluindo a divisão de números inteiros. A partir daí, o assunto deixa de figurar explicitamente no escopo da educação básica.

Já no ensino superior, na Licenciatura em Matemática, a divisibilidade é formalizada, geralmente no âmbito da Teoria dos Números (Resende, 2007). Diz-se que um número inteiro b é divisível por outro número inteiro a se existe um número inteiro c tal que $b = ac$. Nesse contexto, o algoritmo da divisão de Euclides é apresentado formalmente como o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana.

A Teoria dos Números (TN) pressupõe um ambiente favorável para o desenvolvimento de importantes ideias matemáticas relacionadas com os números naturais e inteiros (Resende, 2007). Entretanto, ainda que os conhecimentos envolvidos nessa disciplina sejam de grande relevância para uma ampla compreensão da Matemática e de seus processos, as pesquisas focadas no ensino de TN, especialmente no contexto da formação de professores, são escassas (Bair & Rich, 2011; Oliveira & Fonseca, 2017).

Ainda assim, algumas investigações vêm sendo conduzidas para compreender como a disciplina de Teoria dos Números da Licenciatura em Matemática pode contribuir com a formação de professores (Almeida, 2020; Sinclair et al., 2003; Smith, 2002; Zazkis & Campbell, 1996a) e trataremos de algumas delas a seguir. De acordo com Zazkis e Campbell (1996a), por incluir tópicos como a divisibilidade, os números primos ou as congruências lineares, que propiciam ao estudante revisitar processos matemáticos básicos, o estudo da TN pode levá-lo a refletir sobre o próprio conhecimento matemático.

Essa reflexão, no entanto, nem sempre acontece espontaneamente, cabendo ao formador a responsabilidade de fomentá-la. Conforme Smith (2002), ainda que muitos tópicos da TN possuam relação direta com a Matemática da educação básica, a maior parte dos licenciandos não consegue estabelecer estas relações, acabando por compreender os tópicos da TN de forma totalmente desvinculada da matemática escolar. Esse, muitas vezes, é o caso da divisibilidade, que costuma ser tratada pelos futuros professores como um truque ou procedimento a ser realizado, e não como uma relação entre números inteiros (Sinclair et al., 2003).

Entre as possibilidades de conexões entre conteúdos da TN e da matemática escolar, Almeida (2020) aponta a

> divisibilidade e divisão, a formalização de resultados apresentados intuitivamente na escola (estrutura dos números e suas propriedades aritméticas, o estudo da teoria dos números primos com rigor matemático, a formalização de critérios de divisibilidade apresentados na escola), o estudo das estruturas de conjuntos que são apresentados na escola, aritmética modular e representação de conjuntos finitos (criptografia) (p. 24).

A despeito dessas possibilidades, a literatura aponta variadas dificuldades encontradas pelo futuro professor em muitos conteúdos presentes na TN, por exemplo, em compreender a divisibilidade (Brown et al., 2002; Zazkis et al., 2013), a primalidade e o Teorema Fundamental da Aritmética (Oliveira & Fonseca, 2017; Zazkis & Campbell, 1996b), assim como nas propriedades dos números primos (Zazkis & Liljedahl, 2004).

Entendemos que um dos caminhos para enfrentar tais dificuldades durante a formação inicial de professores de Matemática é trabalhar conceitos da TN relacionando-os à matemática escolar. A partir disso, podemos buscar desenvolver nos futuros professores um conhecimento especializado sobre o assunto, o qual discutiremos na próxima seção.

O conhecimento especializado do professor que ensina Matemática

Para abordar o conhecimento dos futuros professores de Matemática, nos apoiaremos nas ideias de Carrillo et al. (2018), os quais defendem a existência de um conhecimento especializado do professor que ensina Matemática. Esse conhecimento especializado inclui o conhecimento que é relevante especificamente aos professores de/que ensinam Matemática, excluindo conhecimentos necessários a outros profissionais que apenas utilizam a Matemática como ferramenta de trabalho – como engenheiros, arquitetos e tantos outros.

A partir de pesquisas realizadas, os autores elaboraram um modelo, denominado *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK), apresentado na Figura 1. O MTSK é composto por três domínios, incluindo o conhecimento matemático (*Mathematical Knowledge*), o conhecimento pedagógico do conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge*) e as crenças do professor (*Beliefs*) sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem.

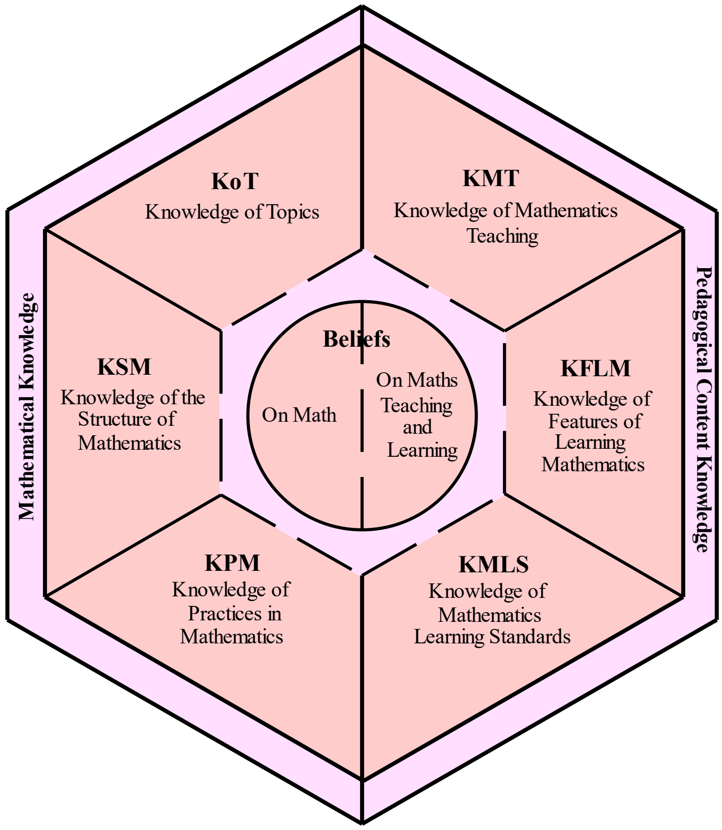

Figura 1.

Modelo Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (Carrillo et al., 2018, p. 241)

Situado no lado esquerdo do modelo, o *Mathematical Knowledge* é subdividido em três subdomínios, incluindo o *Knowledge of Topics* (KoT), o *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e o *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM).

O KoT se refere a que e como o professor conhece os tópicos que ensina. Está relacionado com o conhecimento de procedimentos (“Como fazer? Quando fazer?”), definições, propriedades e fundamentos, fenomenologia e aplicações, assim como registros de representação do tema abordado. Um conhecimento relacionado ao TADE, no âmbito do KoT, é conhecer como usar o algoritmo e o momento de interromper as divisões e subtrações sucessivas (quando se obtém o resto).

No KSM são abordadas as conexões matemáticas, as quais podem ser temporais ou interconceituais. As conexões do tipo temporal relacionam o conteúdo abordado com conteúdos anteriores (conexões de simplificação) ou posteriores (conexões de complexificação). As conexões interconceituais se dividem em auxiliares, que dizem respeito ao emprego de um conceito matemático em outro (por exemplo, o entendimento de função como uma equação, no cálculo de suas raízes); e transversais, incluindo o conhecimento sobre conteúdos inter-relacionados através de um conceito subjacente (por exemplo, os conceitos de continuidade, derivada e integral definida são conectados por uma ideia subjacente, a noção de limite).

Por sua vez, o KPM contempla conhecimentos relacionados com a criação e produção matemáticas, a linguagem matemática e as demonstrações. De acordo com Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2019), esse subdomínio inclui formas de proceder, validar, e explorar, gerar conhecimento em Matemática e comunicar Matemática. Como exemplo no âmbito do KPM, citamos conhecer como demonstrar teorema de existência e unicidade.

O domínio *Pedagogical Content Knowledge*, situado no lado direito do modelo, inclui três subdomínios, a saber, *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT), *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS). No KMT, são considerados conhecimentos do professor relacionados com o ensino de Matemática, como o de recursos materiais e virtuais para o ensino, estratégias, técnicas, tarefas e exemplos para ensinar Matemática, além do conhecimento de teorias, formais ou pessoais, sobre o ensino de Matemática.

O KFLM engloba o conhecimento relacionado às características inerentes à aprendizagem da Matemática, enfocando o conteúdo matemático como objeto de aprendizagem. Nesse subdomínio, são considerados conhecimentos de teorias sobre a aprendizagem matemática, potencialidades e dificuldades dos alunos ao aprender Matemática, formas como os alunos interagem com o conteúdo matemático, bem como aspectos emocionais imbricados na aprendizagem da Matemática.

Por sua vez, o KMLS se refere ao conhecimento sobre o que o aluno deve atingir em determinado nível, em conjunção com o que estudou anteriormente e com o que estudará no futuro. Nesse subdomínio, estão inclusos resultados de aprendizagem esperados, nível esperado de desenvolvimento conceitual e procedimental, e sequenciamento de tópicos.

Obviamente, desenvolver esse tipo de conhecimento durante a formação inicial, articulando conhecimentos matemáticos e conhecimentos pedagógicos, é uma tarefa complexa para os futuros professores e demanda a participação dos diversos profissionais que atuam na licenciatura – os formadores. Com vistas a desenvolver um conhecimento especializado nos licenciandos, o formador necessita possuir um conhecimento especializado próprio, o qual idealmente abrange o conhecimento especializado do professor, mas deve ir além, em termos de amplitude e profundidade (Escudero-Ávila et al., 2021; Zopf, 2010), conforme discutiremos na próxima seção.

O conhecimento especializado do formador de professores de Matemática

Os formadores de professores, de acordo com Jaworski (2008), "são profissionais que trabalham com professores e/ou futuros professores para desenvolver e melhorar o ensino de matemática" (p. 1). Essa perspectiva vai ao encontro daquela apresentada por Contreras et al. (2017), os quais apontam como formadores de professores de Matemática os matemáticos, os educadores matemáticos e os professores de Matemática que recebem e orientam os alunos da licenciatura nas escolas.

Ainda que o interesse pelo conhecimento do formador de professores de Matemática se destaque em pesquisas recentes (Beswick & Goos, 2018), mesmo aquelas investigações que se propõem a investigar os conhecimentos ou saberes desses sujeitos geralmente não discriminam os saberes ou os conhecimentos específicos ao formador, necessários para sua atividade profissional. Além disso, não indicam se ou como o conhecimento desses profissionais difere do conhecimento dos professores formados por eles (Coura & Passos, 2017).

O conhecimento do formador pode ser pensado a partir do conhecimento especializado que se pretende promover nos futuros professores (Carrillo et al., 2019). Nessa perspectiva, Escudero-Ávila et al. (2021), buscam delimitar um conhecimento especializado do formador de professores de Matemática, com base nas especificidades necessárias ao trabalho desse profissional.

Assim, é necessário, por exemplo, que o conhecimento matemático do formador abranja o conhecimento matemático do professor, mas não esteja limitado a ele; ao formador, é necessária uma visão geral do conhecimento matemático, com ênfase em conexões e na profundidade desse conhecimento. Escudero-Ávila et al. (2021) apontam três diferenças entre o conhecimento matemático do formador e o do professor:

- O conhecimento do formador se torna mais amplo e aprofundado por resultar de um processo de crescimento no qual a Matemática atinge maior complexidade, permitindo ao formador o estabelecimento de mais relações entre diferentes conceitos.
- O formador atribui maior importância aos aspectos sintáticos do conhecimento matemático e compreende, por exemplo, a essência das demonstrações, o rigor da linguagem matemática, além do significado de definições e teoremas.
- O formador possui uma compreensão mais clara das ideias estruturantes da Matemática, bem como de conexões que permitam simplificar ou aumentar a complexidade de um tópico (Montes et al. 2016), sendo capaz de promover a construção do conhecimento de professores e futuros professores.

Do ponto de vista do conhecimento pedagógico, Escudero-Ávila et al. (2021) consideram conhecimentos do formador sobre o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática, sobre o ensino do conteúdo nos cursos de formação inicial e sobre os padrões curriculares em diferentes cursos de formação de professores, inicial e/ou continuada.

O conhecimento do formador sobre o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática inclui aspectos sobre a caracterização desse desenvolvimento profissional, dificuldades mais prováveis na especialização do professor e do futuro professor, sequências ou focos mais apropriados para a construção do conhecimento e sobre o que os professores sabem ao ingressar na formação. O conhecimento sobre o ensino do conteúdo nos cursos de formação inicial envolve conhecer repertórios de atividades para desenvolver conhecimentos específicos à atividade docente, conhecer potencialidades e limitações de tarefas a serem exploradas na licenciatura, diferentes metodologias de avaliação e características mais importantes de cada tópico.

Por sua vez, o conhecimento sobre padrões curriculares em diferentes cursos de formação de professores inclui não apenas conhecer os padrões curriculares do curso em que atua como formador, mas também dos níveis de ensino em que os professores formados lecionarão. Na perspectiva de Escudero-Ávila et al. (2021), o conhecimento requerido ao formador associa-se com os objetivos da formação, isto é, com o conhecimento especializado que se pretende promover durante a formação.

Neste artigo, discutimos a condução de uma atividade empregada na formação inicial de professores de Matemática, com o objetivo de promover o conhecimento especializado sobre o TADE. A questão de pesquisa a que pretendemos responder é: *que conhecimento especializado é posto em jogo quando o formador aborda o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana em uma disciplina de Teoria dos Números na formação inicial de professores de Matemática?*

Metodologia

Nas universidades brasileiras, assim como em muitos outros países, geralmente os responsáveis pela formação matemática dos futuros professores são os matemáticos. Esses profissionais atuam como formadores, ainda que não se percebam nesse papel (Leikin et al., 2018).

As informações aqui discutidas foram obtidas no âmbito de um curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), no ano letivo de 2022. Um dos autores, matemático, foi o formador responsável pela disciplina de Estruturas Algébricas, ofertada no terceiro ano do curso, momento em que apresentou o TADE aos alunos. A outra autora, educadora matemática, colaborou com a análise das atividades realizadas.

A disciplina de Estruturas Algébricas do referido curso é anual e composta por duas partes, uma tratando sobre a Teoria dos Números e outra sobre Teoria de Grupos e Teoria de Anéis. O TADE foi discutido com os alunos na primeira parte da disciplina.

Algumas atividades foram conduzidas pelo professor formador, na tentativa de compreender como os licenciandos realizavam a divisão de números inteiros antes, durante e após conhecer o TADE. Tais atividades serão descritas detalhadamente na próxima seção.

As atividades realizadas não foram pensadas e desenvolvidas, inicialmente, com o objetivo de realizar uma investigação acadêmica. Após seu desenvolvimento, no entanto, foram consideradas como uma experiência interessante a ser relatada e como importante fonte para uma discussão sobre o conhecimento especializado dos licenciandos e do formador. Assim, a presente investigação se coloca como uma pesquisa qualitativa, do tipo descritiva (Gil, 2002), isto é, tem como objetivo principal descrever características de determinado fenômeno – o ensino e aprendizagem do TADE na licenciatura em Matemática na perspectiva do MTSK.

Assim, as fontes de dados se constituem nas notas de aula do professor formador, em fotografias da lousa e na reprodução de cálculos apresentados pelos licenciandos. A turma possuía, no total, nove licenciandos; destes, cinco estiveram presentes no primeiro momento de realização das atividades; por esse motivo, suas respostas foram selecionadas para discussão neste artigo. A discussão sobre conhecimentos mobilizados pelos licenciandos e pelo formador é apoiada no modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) e no conhecimento especializado do formador, conforme Escudero-Ávila et al. (2021), respectivamente.

Análise e discussão

Para que o leitor possa melhor compreender a ordem cronológica de realização das atividades, optamos por dividir a análise em momentos. Primeiro, o formador propõe que os estudantes realizassem algumas divisões com números inteiros antes de trabalhar o TADE. Depois, o formador apresenta e demonstra o teorema, discutindo os casos que dele decorrem. Num terceiro momento, os estudantes são convidados a realizar novas divisões, desta vez, a partir da discussão do teorema. No final, dois meses após o terceiro momento, discutimos o conhecimento sobre o TADE revelado pelos estudantes ao realizar a primeira avaliação escrita da disciplina.

Momento I: Divisões antes do TADE ser ensinado

Na aula anterior, o docente apresentou e demonstrou um Lema, o qual é a versão particular do TADE que considera o divisor como um número inteiro positivo: Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, então existem $q, r \in \mathbb{Z},$ tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$. Esse Lema inclui a divisão euclidiana que se ensina nos Anos Iniciais, a qual considera dividendo e divisor positivos, e costuma ser demonstrado antes da discussão do TADE, porque se trata de uma versão inicial e, portanto, mais simplificada do teorema (KSM - conexões de complexificação), e porque o Lema é utilizado na demonstração do teorema (KPM - formas de proceder em Matemática).

No início da presente aula, o docente comenta que o lema provado na aula anterior permite realizar divisões cujo dividendo é negativo e que, na verdade, a divisão em si reside no fato de poder escrever $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$ (KoT - propriedades e fundamentos). Nesse sentido, o docente propôs aos discentes que efetuassem, da forma como considerassem coerente, as seguintes divisões: 123 por $15,$ 37 por -4, -218 por 22 e -1328 por -116. A seguir, reproduzimos as resoluções dos discentes:

Discente 1

$$\begin{array}{r|l} 123 & \underline{\;15\;} \\ -120 & 8 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & \underline{\;-4\;} \\ -\ 36 & -9 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -218 & \underline{\;22\;} \\ +198 & -9 \\ \cline{1-1} -20 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -1328 & \underline{\;-116\;} \\ 1392 & 12 \\ \cline{1-1} 64 & \end{array}$$

Discente 2

$$\begin{array}{r|l} 123 & \underline{\;15\;} \\ -120 & 8 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & \underline{\;-4\;} \\ -\ 36 & -9 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -218 & \underline{\;22\;} \\ 198 & -9 \\ \cline{1-1} 20 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -1328 & \underline{\;-116\;} \\ 1276 & 11 \\ \cline{1-1} 52 & \end{array}$$

Discente 3

$$\begin{array}{r|l} 123 & \underline{\;15\;} \\ -120 & 8 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & \underline{\;-4\;} \\ -\ 36 & -9 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -218 & \underline{\;22\;} \\ +198 & -9 \\ \cline{1-1} -20 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -1328 & \underline{\;-116\;} \\ +116 & 11 \\ \cline{1-1} -0168 & \\ +116 & \\ \cline{1-1} -052 & \end{array}$$

Discente 4

$$\begin{array}{r|l} 123 & \underline{\;15\;} \\ & 8 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & \underline{\;-4\;} \\ & -9 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -218 & \underline{\;22\;} \\ & -9 \\ \cline{1-1} 20 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -1328 & \underline{\;-116\;} \\ & 11 \\ \cline{1-1} 52 & \end{array}$$

Discente 5

$$\begin{array}{r|l} 123 & \underline{\;15\;} \\ -120 & 8 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & \underline{\;-4\;} \\ -\ 36 & -9 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -218 & \underline{\;22\;} \\ +22 & -10 \\ \cline{1-1} 18 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -1328 & \underline{\;-116\;} \\ +116 & 12 \\ \cline{1-1} -168 & \\ +232 & \\ \cline{1-1} 64 & \end{array}$$

Figura 2.

Respostas dos discentes no momento I

Analisando os cálculos apresentados, notamos que todos os discentes procederam corretamente com a divisão de 123 por 15, obtendo quociente 8 e resto 3 (KoT – procedimentos, como fazer a divisão euclidiana de dois números naturais), mostrando que dominam o algoritmo da divisão euclidiana ensinado desde os Anos Iniciais. A divisão de 37 por -4 também foi solucionada adequadamente, sendo que a maioria diminuiu 36 de 37 para obter resto 1 (KoT – procedimentos, como dividir um número natural por um inteiro negativo), mostrando que, mesmo com um divisor negativo, conseguiram adaptar o algoritmo usualmente aplicado a números positivos (KSM – conexões de complexificação).

No terceiro cálculo, divisão de -218 por 22, na qual o dividendo é negativo, todos os discentes conseguiram perceber que, em vez de diminuir um valor de -218, eles deveriam somar, demonstrando um domínio em relação ao jogo de sinais inerente ao algoritmo da divisão (KoT - procedimentos, porque algo é feito dessa forma), ou seja, perceberam que o dividendo negativo e o divisor positivo resultam em um quociente negativo. Entretanto, apenas três discentes efetuaram o cálculo de maneira correta.

Somente o discente 5 obteve o quociente -10, de forma que, multiplicado por 22 resulta em -220, o qual subtraído a -218 resulta numa soma positiva. Isso mostra que, além de conhecer o algoritmo, ele sabe que o resto deve ser maior ou igual a zero e menor do que o divisor, uma consequência teórica do TADE que geralmente não é pontuada no ensino da divisão euclidiana na escola (KoT - procedimentos, características do resultado).

Na divisão de -1328 por -116, todos chegaram a um quociente positivo, demonstrando novamente dominar o jogo de sinais (implícito) que há no TADE. Os discentes 1 e 5 obtiveram restos positivos, o que mostra que o discente 1 conseguiu repensar o algoritmo em relação ao cálculo feito anteriormente (KoT - procedimentos, características do resultado e KSM - conexões de complexificação). Os discentes 2 e 4 não obtiveram quociente e resto compatíveis com a decomposição do TADE.

O discente 4 não sentiu a necessidade de operar nenhum valor com os dividendos, escrevendo somente o quociente e o resto no formato por chaves. Isso demonstra que ele obteve os valores através de tentativa e erro usando a igualdade $a = bq + r$. Os demais discentes também procederam por tentativa e erro, sempre considerando a estrutura do próprio algoritmo (KoT - procedimentos, como fazer). Todos conseguiram estabelecer um paralelo do algoritmo representado por chaves com a igualdade $a = bq + r$ de natureza algébrica proveniente do TADE (KoT – registros de representação).

Os discentes 3 e 5 procederam a divisão de -1328 por -116 de forma similar àquela ensinada na escola (que usa a expressão "baixar" um número). Isso demonstra que não usaram tão somente tentativa e erro, mas adaptaram o algoritmo de forma plena (KoT - procedimentos, porque é feito dessa forma, e KSM - conexões auxiliares, subtrações sucessivas no algoritmo para obter a divisão euclidiana), mesmo com o discente 3 obtendo um resto incompatível.

É possível observar que os discentes, em geral, têm o conhecimento de que o quociente deve ter um sinal obtido de acordo com os sinais do dividendo e do divisor (KoT – procedimentos, características do resultado). Ademais, a maioria deles evidencia conhecer a conexão entre divisão e subtração imbricada no algoritmo (KSM – conexões auxiliares). A maioria dos discentes, no entanto, não demonstrou saber as condições impostas sobre o resto, exceto o discente 5.

Também podemos identificar, no momento I, alguns elementos do conhecimento pedagógico do formador: ele sabe que o algoritmo da divisão com números positivos é ensinado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e que, nos Anos Finais, é introduzida a divisão de números inteiros, trabalhada com base no jogo de sinais. Pensando nisso, o formador escolhe uma sequência de ensino que considera mais apropriada para abordar o TADE, partindo de um exemplo de divisão com números positivos e chegando a um com dividendo e divisor negativos, para apenas depois enunciar o teorema em sua versão geral. Tais conhecimentos fazem parte do conhecimento do formador sobre o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática.

Ao propor a tarefa do momento I, o formador objetiva que os discentes explorem o algoritmo habitualmente usado em números positivos, de forma que entendam e alcancem individualmente a versão do algoritmo para números negativos, a qual eles ainda não conheciam. Assim, o formador busca desenvolver nos alunos um conhecimento relacionado com formas de explorar em Matemática, no âmbito do KPM. Dessa maneira, o docente também evidencia conhecer as potencialidades da tarefa explorada (Conhecimento sobre o ensino do conteúdo da formação inicial).

Momento II: Ensinando o TADE

O momento II se inicia imediatamente após o momento I, em que o docente questiona a turma se é possível realizar a divisão euclidiana com números negativos. Os discentes já esperam uma resposta positiva devido aos cálculos propostos no momento anterior. O TADE é apresentado de forma a dar ênfase às hipóteses e teses do teorema, é qualificado como um teorema de existência e unicidade, deixando explícitas as diferenças deste com o Lema apresentado anteriormente. O formador comenta que esse tipo de teorema (existência e unicidade) é demonstrado em duas partes: existência, exibir quociente e resto apropriados; e unicidade, geralmente se supõe que existem dois elementos e se prova que são iguais (KPM - formas de validar).

Após a apresentação da demonstração do TADE (que não será explorada neste artigo[3]), o docente expõe os casos triviais do teorema: 1) em que o dividendo é zero, nesse caso, o resto e o quociente são zero ($0 = 0b + 0$); e 2) em que o módulo do dividendo é maior do que zero e menor do que o módulo do divisor, nesse caso, o quociente é zero e o resto é o próprio dividendo ($a = 0b + a$) (KoT - fundamentos). Por conseguinte, são apresentados quatro exemplos considerando as possibilidades de sinais do divisor e do dividendo, e as resoluções destes são feitas por tentativa e erro, para satisfazer a tese de que $a = bq + r$ com $0 \leq r < |b|$. Comparativamente, o docente mostra como dispor esse cálculo no algoritmo canônico, utilizando o método da chave (KoT - registros de representação).

Em cada exemplo apresentado a seguir, considerou-se os seguintes requisitos na resolução (KoT - fundamentos):

i) o resto deve ser maior ou igual a zero e menor do que o módulo do divisor;

ii) o jogo de sinais entre o dividendo e o divisor.

Notamos que o formador mobiliza conhecimento matemático e pedagógico ao demonstrar preocupação com os exemplos escolhidos e com os casos triviais (Conhecimento sobre o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática). São exemplos de natureza simples em sua formulação, porém geralmente confundem os discentes, uma vez que estes costumam descartar a possibilidade de o quociente ser zero.

Fica evidente a intenção do docente em desmistificar a crença de que o algoritmo da divisão só é utilizado para números positivos, crença essa proveniente do período escolar. Aqui, o formador novamente evidencia conhecimento sobre o desenvolvimento profissional dos futuros professores, que precisam ultrapassar essa crença para construir um conhecimento especializado sobre o algoritmo da divisão euclidiana. O formador observa, em todos os exemplos com números negativos, a importância de procurar por quocientes compatíveis com os sinais envolvidos e a forma como isso impacta na disposição do algoritmo (KoT - procedimentos, como fazer).

[3] Uma discussão aprofundada sobre o conhecimento especializado mobilizado por um formador ao demonstrar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana pode ser encontrada em Almeida, Ribeiro e Fiorentini (2021).

No decorrer do momento II, o docente enfatiza que o algoritmo da divisão euclidiana é um dispositivo atrelado a um teorema, o qual possui hipóteses e teses, principalmente no que diz respeito ao resto, que deve ser maior ou igual a zero e menor do que o módulo do divisor. Dessa maneira, o formador deixa claro que o algoritmo só tem utilidade quando se sabe quais números podem ser considerados no dividendo e divisor e quais teses permitem cessar o uso do algoritmo, demonstrando a preocupação em indicar a importância dos conceitos teóricos (do teorema) subjacentes ao uso prático do algoritmo (Conhecimento sobre o ensino do conteúdo da formação inicial - características mais importantes de cada tópico).

Na Figura 3, a seguir, apresentamos os exemplos a e b. O exemplo a foi apresentado considerando divisor e dividendo positivos, é o caso habitual e presumidamente conhecido pela turma desde os Anos Iniciais.

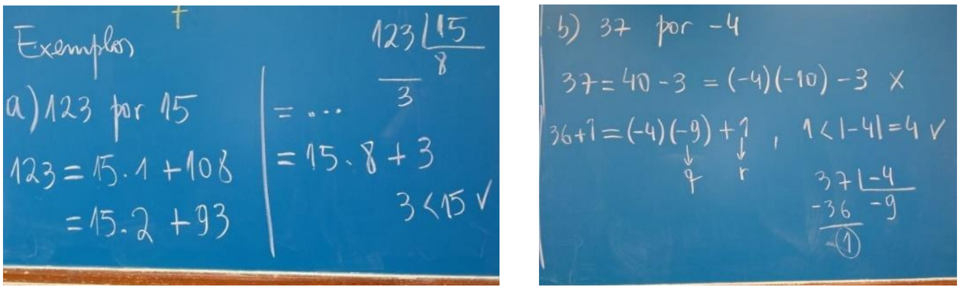

Figura 3.

Exemplos de divisão a) e b) propostos aos licenciandos no momento II

Na divisão de 123 por 15, o formador sabe, de acordo com o jogo de sinais, que o quociente deve ser positivo. Dessa forma, testa os valores $1, 2, \ldots, 8$ até obter um resto positivo e menor do que $|15| = 15$, o qual é 3. Assim, no exemplo a o docente procede por tentativa e erro, começando por q igual a 1 até 8 e observando qual desses valores se enquadra nas condições do TADE. Tal método foi utilizado com frequência pelos discentes no momento I.

No exemplo b, o docente inicia a divisão euclidiana de 37 por -4 apontando que, pelo jogo de sinais, o quociente deve ser negativo. A primeira tentativa foi escrever $37 = 40 - 3 = (-4)(-10) - 3$, porém -3 não se encaixa como o resto na tese do TADE. A segunda tentativa considerou $37 = 36 + 1 = (-4)(-9) + 1$, em que, pela unicidade imposta pelo TADE, o quociente é -9 e o resto é $1 < |-4| = 4$.

Assim, o docente parte do fato de que $37 = 40 - 3$ e organiza essa expressão de acordo com a equação $a = bq + r$ até obter q e r nas condições do TADE, demonstrando conhecer mais de um ponto de partida para se utilizar o algoritmo (KoT - procedimentos, como fazer)

Os exemplos c e d são apresentados na Figura 4. O exemplo c ilustra o caso em que o dividendo é negativo e o divisor é positivo, o que resultará em um quociente também negativo. No quadro escrito pelo docente (Figura 4), observamos a divisão de -218 por 22.

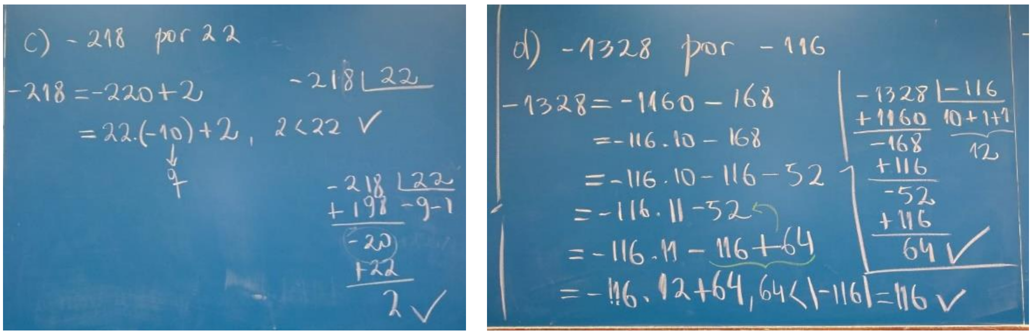

Figura 4.

Exemplos de divisão c *e* d *propostos aos licenciandos no momento II*

No exemplo *c*, o docente procede a resolução de maneira similar à anterior, obtendo de forma proposital um candidato a resto que é negativo (-20), tal qual os discentes obtiveram no Momento I. Nesse ponto, ele destaca a importância de somar mais uma vez o divisor à conta feita abaixo do dividendo para obter um resto positivo. Assim, ele demonstra conhecer os erros típicos que os discentes cometem nesse tipo de divisão, caracterizando seu Conhecimento sobre o desenvolvimento profissional dos futuros professores.

O exemplo *d* fecha os casos considerando dividendo e divisor, ambos, negativos, obtendo, dessa maneira, quociente positivo. Para realizar a divisão de -1328 por -116, o docente escolhe um múltiplo trivial de -116, no caso $-1160 = -116 \times 10$, e intera com -168 até obter -1328. Na sequência, o formador retira múltiplos de -116 de -168 até obter um resíduo de 64, que se encaixa no TADE como sendo o resto. Ele também demonstra saber como agrupar os números até encontrar o quociente e o resto – isso é obtido por meio da experiência em sala de aula, uma vez que a demonstração do TADE não dá um caminho para obter q e r.

Nos exemplos *c* e *d*, o docente pontua a importância de perceber que o produto do quociente pelo divisor é negativo, o que implica que tal produto deve ser somado ao dividendo e não diminuído como de costume. Já nos exemplos *a* e *b* esse produto é positivo, o que permite subtraí-lo de maneira usual do dividendo.

Em todos os exemplos, o docente mostra, em paralelo, como proceder com o algoritmo por chaves (KoT – registros de representação), o que demonstra a preocupação em estabelecer conexões entre a parte teórica e a parte prática do TADE, com procedimentos feitos desde os anos iniciais. O docente também enfatiza, em todos os cálculos, a necessidade de obter um resto r satisfazendo $0 \leq r < |b|$. Essa ênfase provém de seu conhecimento sobre dificuldades comuns dos futuros professores ao trabalharem com o TADE – característica evidenciada por eles inclusive no momento III, após terem visto o teorema.

O docente demonstra de forma prática saber quando se deve adicionar ou diminuir uma unidade no quociente de forma a produzir o resto adequado. Considerando o momento I, revela estar preocupado em estabelecer conexões com o conteúdo ministrado na disciplina e o que é ensinado na escola, a fim de alicerçar generalizações para a divisão euclidiana nos números inteiros. Assim, o formador evidencia conhecer o currículo dos níveis de ensino em que os futuros professores.

Ao propor a atividade inicial com as divisões discutidas no momento I, em conjunto com os exemplos do momento II, o formador evidencia conhecimento sobre a potencialidade desse tipo de tarefa na licenciatura, mobilizando conhecimento sobre o ensino do conteúdo nos cursos de formação inicial.

Momento III: Divisão após conhecer o TADE

O momento III ocorre no início da próxima aula, no dia seguinte aos momentos I e II. Nele, o formador propõe que os quatro discentes presentes nessa aula efetuem a divisão euclidiana de -615 por -73. Os discentes 1, 2 e 4 procederam conforme a seguinte reprodução:

$$\begin{array}{r|l} -615 & -73 \\ \cline{2-2} 657 & 9 \\ \cline{1-1} 42 & \end{array}$$

Figura 5.

Respostas dos discentes 1, 2 e 4 no momento III

Já o discente 3 efetuou o cálculo como segue:

$$
\begin{array}{r|l}
-615 & -73 \\ \cline{2-2}
+584 & \;-8 \\ \cline{1-1}
-031 &
\end{array}
$$

Figura 6.

Resposta do discente 3 no momento III

Nesse momento, os discentes 1, 2 e 4 demonstram ter adquirido o conhecimento de que o resto deve ser maior do que zero e menor do que o módulo do divisor (KoT - fundamentos). Esses discentes preferem usar somente tentativa e erro, testando valores para o quociente q até o momento em que a expressão $(-73) \times q$ seja menor do que $|-615| = 615$ (KoT - procedimentos, como fazer). O discente 3, no entanto, evidencia ainda não ter construído tal conhecimento.

Momento IV: Avaliação escrita

O momento IV considerado para a análise acontece durante a realização da primeira avaliação escrita da disciplina. Entre as questões propostas, duas foram específicas sobre o TADE:

i) Enuncie o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana.

ii) Nas condições do TADE, divida -1061 por -45.

A seguir, apresentamos as respostas dadas pelos 5 discentes:

Discente 1

i) Se $a|b$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}^*, a = bq + r$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < b$.

ii) O discente efetuou multiplicações sucessivas de 45 por $2, 3, 4, \ldots, 24$ até obter:

$$
\begin{array}{r|l}
-1061 & -45 \\ \cline{2-2}
+1080 & \;\;24 \\ \cline{1-1}
19 &
\end{array}
$$

Figura 7.

Resposta do discente 1 na questão ii do momento IV

Discente 2

i) $a = bq + r$, onde $0 \leq r < |b|$. O TADE garante que o dividendo é igual ao divisor vezes o quociente mais o resto, de modo que o resto é menor ou igual a 0 e menor que o módulo de b, ou seja, o resto é positivo.

ii) O discente efetua a multiplicação de -45 por 24 e obtém:

$$\begin{array}{r|l} -1061 & -45 \\ \cline{2-2} +1080 & \ \ 24 \\ \cline{1-1} 19 & \end{array}$$

Figura 8.

Resposta do discente 2 na questão ii) no momento IV

Discente 3

i) $a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|, \quad r = resto, q = quociente, b = dividendo, a = divisor.$

ii) O discente multiplica 45 por 24 e subtrai esse resultado de -1061, escrevendo:

$$-1061 = (-45).24 + 19$$

Discente 4

i) Dados $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, existem únicos inteiros q e r tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$.

ii) O discente procede da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} -1061 & -45 \\ \cline{2-2} +1035 & \ 23+1 \\ \cline{1-1} -26 & \\ +45 & \\ \cline{1-1} 19 & \end{array}$$

Figura 9.

Resposta do discente 4 na questão ii no momento IV

Discente 5

i) Sendo $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, temos únicos q e r que satisfazem $a = bq + r$, sendo $0 \leq r < |b|$.

ii) Sabendo que, pelo TADE, a divisão deverá ser na forma $a = bq + r$, neste caso a divisão de -1061 por -45 pode ser escrita como $-1061 = (-45).24 + 19$.

$$\begin{array}{r|l} -1061 & -45 \\ \cline{2-2} +1080 & \;\; 24 \\ \cline{1-1} 19 & \end{array}$$

Figura 10.

Resposta do discente 5 na questão ii no momento IV

É possível observar que todos os discentes procederam a divisão de -1061 por -45 de forma correta (KoT - procedimentos), considerando o resto entre 0 e 45. Assim, revelaram conhecer não só o algoritmo, mas também suas condições (KoT - fundamentos). Com exceção do discente 4, os demais dispuseram a decomposição $-1061 = 24 \times (-45) + 19$ do TADE em chaves. Com isso, indicaram relacionar o teorema com a forma usual de expressá-lo (KoT - registro de representação).

Todos os discentes obtiveram o quociente por tentativa e erro (KoT - procedimentos), mostrando a preferência e domínio no uso dessa técnica. Por esse motivo, é possível perceber que os discentes preferem verificar a identidade do algoritmo até obter a igualdade em vez de proceder pela disposição por chaves.

Na questão i, observa-se o reforço de algumas crenças:

1) O discente 1 manifesta a crença de que o algoritmo é válido somente quando se considera o divisor como um número natural. Ele também evidencia a crença de que a divisão euclidiana é uma divisão exata quando utiliza a notação $a|b$.

2) Para enunciar um teorema, basta exibir uma equação ou fórmula associada, no caso $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$, entendendo que as hipóteses são secundárias. Podemos observar isso nas respostas dos discentes 2 e 3.

Os discentes 4 e 5 demonstram saber que o TADE é um teorema de existência e unicidade ao evidenciar que o quociente e o resto são únicos (KoT - fundamentos). O discente 4 foi o único que reproduziu o TADE com suas hipóteses e teses, de forma a enunciar o quociente e o resto como sendo inteiros. Isso é importante, pois um teorema sobre números sempre delimita o conjunto onde estes estão contidos. Tal discente demonstra saber enunciar o teorema de maneira lógica (implicação) e utiliza terminologia e notação usuais e precisas da Matemática (KoT - fundamentos). À exceção do discente 1, que expressa uma versão particular do TADE, os demais demonstram saber que o resto é limitado pelo módulo do divisor (KoT - definições, propriedades e fundamentos).

Um componente observável do conhecimento do formador no momento IV se refere à utilização de uma metodologia de avaliação, no caso a prova escrita, que faz parte de seu conhecimento sobre o ensino do conteúdo nos cursos de formação inicial. Ao focar no enunciado do teorema, o formador pretende avaliar se os licenciandos conseguiram apreender o TADE em sua essência, considerando as hipóteses e teses.

Tabela 1.

Indicadores de conhecimento especializado dos licenciandos

Subdomínios	**Categorias**	**Indicadores**	**Momento**
KoT	Definições, propriedades e fundamentos	Conhecer que na divisão euclidiana o resto deve ser maior ou igual a zero e menor que o módulo do divisor	III e IV
		Conhecer o TADE como um teorema de existência e unicidade	IV
		Conhecer o enunciado do TADE	IV
	Procedimentos	Como fazer a divisão euclidiana de dois números naturais na divisão de 123 por 15	I
		Como dividir um número natural por um inteiro negativo na divisão de 37 por -4	I
		Como usar o jogo de sinais na divisão euclidiana de -218 por 22	I
		Conhecer as características do resto no TADE para saber o momento de parar o uso do algoritmo na divisão de -218 por 22	I
		Como usar o jogo de sinais na divisão euclidiana de dois inteiros negativos	I
		Como usar o algoritmo através de tentativa e erro considerando a igualdade $a = bq + r$	I e IV
		Como usar o algoritmo através de subtrações	I
		Conhecer que o quociente está associado com o jogo de sinais entre o dividendo e o divisor	I
		Conhecer como proceder com a divisão euclidiana de -615 por -73 através de tentativa e erro	III
		Conhecer como proceder com a divisão euclidiana de -1061 por -45 através da identidade $a = bq + r$	IV

		Conhecer como proceder a divisão euclidiana de -1061 por -45 através de tentativa e erro	IV
	Registros de representação	Conhecer a representação por chaves do algoritmo e relacioná-la com a expressão algébrica $a = bq + r$ do TADE	I e IV
		Conhecer como escrever a identidade $-1061 = 24 \times (-45) + 19$ do TADE pela representação por chaves	IV
KSM	Conexões de complexificação	Entender a divisão de inteiros negativos a partir da divisão de inteiros positivos e de um positivo por um negativo	I
	Conexões auxiliares	Conhecer que subtrações sucessivas são utilizadas no algoritmo	I
		Conhecer que a divisão euclidiana está relacionada com a subtração de acordo com o TADE	I

Podemos observar que o *KoT - procedimentos* se manifesta predominantemente no momento I, enquanto o *KoT definições, propriedades e fundamentos* se manifesta com mais frequência no momento IV (avaliação). Esse fato mostra que os discentes constituíram conhecimentos acerca dos fundamentos do TADE para além dos procedimentos evidenciados no momento I. Também é possível observar que, após a aula sobre o TADE (momento II), os discentes abandonaram as subtrações sucessivas na divisão euclidiana e passaram a utilizar a identidade $a = bq + r$ como norte para o algoritmo.

Na Tabela 2, por sua vez, compilamos o conhecimento mobilizado pelo formador ao abordar o TADE.

Tabela 2.

Indicadores de conhecimento especializado do formador

Subdomínios	**Categorias**	**Indicadores**	**Momento**
KoT	Definições, propriedades e fundamentos	Conhecer que a divisão euclidiana com divisor positivo é realizada ao escrever $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$	I
		Conhecer os casos triviais do TADE ($0 = 0b + 0$ e $a = 0b + a$)	II
		Conhecer que o resto deve ser maior ou igual a zero e menor do que o módulo do divisor	II
		Conhecer o jogo de sinais implícito ao TADE	II

	Procedimentos	Conhecer como o sinal do quociente afeta a operação (adição ou subtração) realizada no dividendo no algoritmo	II
		Conhecer como usar o algoritmo através de tentativa e erro a partir da igualdade $a = bq + r$	II
		Conhecer como abordar a divisão de 37 por -4 e de -218 por 22 mediante uma diferença/soma inicial de números redondos, sem utilização de tentativa e erro	II
		Conhecer como manipular uma identidade numérica para explicitar o resto apropriado ao TADE	II
	Registros de representação	Conhecer como representar a identidade do TADE ($a = bq + r$) na disposição por chaves do algoritmo	II
KSM	Conexões de complexificação	Conhecer que o TADE é uma generalização da divisão euclidiana para divisor positivo	I
	Conexões auxiliares	Conhecer que subtrações/adições sucessivas são utilizadas no algoritmo	II
		Conhecer os casos triviais do TADE	II
KPM	Formas de proceder	Conhecer que o Lema é utilizado na demonstração do TADE	I
		Conhecer como demonstrar teoremas de existência e unicidade	II
Conhecimento sobre o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática	Sequências de ensino	Conhece uma sequência de ensino partindo de divisões de números positivos e gradativamente aborda a divisão para números negativos, culminando no TADE	I
	Representações não convencionais	Conhece e aborda os casos triviais ($0 = 0b + 0$ e $a = 0b + a$) do TADE com o objetivo de apresentar representações não convencionais do algoritmo	II
	Ponto de partida ao ingressar na formação	Conhece o ponto de partida em que os estudantes se encontram em relação à divisão euclidiana, no caso a divisão de números positivos	II
		Sabe que os discentes chegam à formação inicial com a crença de que o algoritmo da divisão só vale para números naturais, o que pode acarretar dificuldades na compreensão do TADE	II
	Erros típicos	Conhece os erros típicos dos discentes na execução do algoritmo, por	II

		exemplo, considerar números negativos como o resto	
Conhecimento sobre o ensino do conteúdo da formação inicial	Potencialidades da tarefa	Conhece e busca desenvolver nos alunos um conhecimento relacionado com formas de explorar (a divisão euclidiana) em Matemática	I
	Características mais importantes de cada tópico	Sabe que as hipóteses e teses do TADE são importantes para desenvolver o conhecimento (nos discentes) de quando e por que o algoritmo funciona e cessa.	II
	Diferentes metodologias de avaliação	Conhece a prova escrita como metodologia de avaliação	IV
Conhecimento sobre padrões curriculares em diferentes cursos de formação de professores	Currículo dos níveis de ensino em que os futuros professores irão atuar	Sabe que o algoritmo da divisão euclidiana é introduzido nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e que a divisão de números inteiros é abordada, nos Anos Finais, geralmente sem conexão com esse algoritmo, apenas com base no jogo de sinais	II

Em conformidade com a tabela acima, podemos observar que os conhecimentos evidenciados pelo formador aconteceram prioritariamente durante o momento II, o que já era esperado, uma vez que esse momento é a aula sobre o TADE. Ainda, percebemos que o KPM é mobilizado exclusivamente pelo docente, tal conhecimento é típico do formador e não é evidenciado nos conhecimentos dos futuros professores. O formador demonstra os três subdomínios do conhecimento pedagógico, com predominância do Conhecimento sobre o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática, o que mostra a preocupação do docente com a formação pedagógica dos discentes em relação ao tema e serve como exemplo para desmistificar a crença de que os formadores que ministram disciplinas de Matemática Avançada se preocupam/envolvem somente com o conteúdo matemático.

Considerações finais

Neste artigo, buscamos investigar quais conhecimentos foram mobilizados e evidenciados quando um formador aborda o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana em uma disciplina de Teoria dos Números na formação inicial de professores de Matemática. Os resultados apontam para conhecimentos de natureza diversa. No caso dos licenciandos, há predominância de conhecimentos no âmbito do *Knowledge of Topics*, principalmente na categoria *Procedimentos*, o que se justifica por estarem trabalhando com o algoritmo da divisão euclidiana e pelo formador ter proposto diversos exemplos de cálculos utilizando o algoritmo.

É perceptível, também, que, a partir da sequência de atividades proposta pelo formador, os licenciandos conseguiram estabelecer conexões entre a divisão de números positivos e a divisão de números negativos (conexões de complexificação) e entre a divisão e a subtração na utilização do algoritmo (conexões auxiliares).

O conhecimento matemático mobilizado pelo formador abarca o conhecimento dos professores que ele forma. E vai além, por exemplo, quando evidencia seu *Knowledge of Practices in Mathematics*, sabendo que o Lema é utilizado na demonstração do TADE e indicando como demonstrar teoremas de existência e unicidade (formas de proceder).

Destacamos o conhecimento pedagógico do formador no âmbito do TADE, que também se mostrou diversificado, contemplando os três subdomínios propostos por Escudero-Ávila et al. (2021). No escopo do Conhecimento sobre o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática, destacamos a sequência de ensino escolhida, que parte da divisão de números positivos, ajuda os licenciandos a estabelecer conexão entre esta e a divisão de números negativos e, então, apresenta o TADE. Neste mesmo subdomínio, o formador explicita conhecer o ponto de partida dos licenciandos ao ingressarem na formação: conhecem o algoritmo da divisão euclidiana para números naturais e têm a crença de que o algoritmo vale apenas para esses números, o que ocasiona o erro típico de considerar números negativos como possíveis restos na divisão euclidiana.

Com relação ao Conhecimento sobre o ensino do conteúdo da formação inicial, o formador evidencia, por exemplo, conhecer potencialidades da tarefa escolhida, tendo optado por explorar a divisão euclidiana gradualmente, por meio de tarefa introdutória, para depois trabalhar com o teorema. Ele identifica características mais importantes do TADE, a saber, as hipóteses e teses do teorema, e conhece sua importância para que os licenciandos compreendam os porquês de o algoritmo funcionar e cessar.

Além disso, o Conhecimento sobre padrões curriculares em diferentes cursos de formação de professores também foi manifestado pelo formador. Este evidencia saber como e em que momento da escolaridade são introduzidos o algoritmo da divisão euclidiana e a divisão de números inteiros, isto é, conhece o currículo dos níveis de ensino em que os futuros professores atuarão.

Em Almeida (2020), uma das limitações apontadas pela autora na investigação realizada se referiu à ausência de sujeitos de pesquisa, matemáticos, que se identificassem com o papel de formadores. É perceptível que, ao pretender a formação de futuros professores, os objetivos do formador que é matemático vão além da transmissão de conhecimento matemático aos licenciandos, buscando, por exemplo, que estes estabeleçam conexões entre a Matemática contemplada na disciplina de Teoria dos Números e a escolar.

Além disso, a abordagem do TADE escolhida pelo formador busca promover nos licenciandos um conhecimento especializado sobre o assunto. Isso inclui a discussão de casos particulares da divisão euclidiana, dos porquês relacionados com o funcionamento do algoritmo, de diferentes formas de resolução (método da chave, tentativa e erro), das condições impostas pelo teorema, de representações não convencionais do algoritmo e da importância das hipóteses e teses em um teorema.

Embora tenham passado muito tempo cursando disciplinas de Matemática durante a graduação, muitos professores em atuação consideram que estas possuem pouca relação e relevância para sua prática pedagógica (Zazkis & Leikin, 2010). Consideramos que analisar e compreender o conhecimento envolvido nessas aulas pode, por um lado, trazer compreensão sobre as diversas possibilidades de abordagem de resultados matemáticos em disciplinas da licenciatura e, por outro lado, auxiliar formadores de professores a refletirem sobre as possibilidades de suas práticas em sala de aula e sobre os tipos de conhecimento que desejam auxiliar os futuros professores a construírem.

Referências

Almeida, M. V. R. (2020). *Conhecimento especializado sobre divisibilidade do formador de professores que ensina Teoria dos Números para estudantes de Licenciatura em Matemática* [Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática]. Universidade Estadual de Campinas. https://hdl.handle.net/20.500.12733/1640658

Almeida, M. V. R, Ribeiro, M., & Fiorentini, D. (2021). Mathematical specialized knowledge of a mathematics teacher educator for teaching divisibility. *PNA*, *15*(3), 187–210. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.15778

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bair, S. L., & Rich, B. S. (2011). Characterizing the Development of Specialized Mathematical Content Knowledge for Teaching in Algebraic Reasoning and Number Theory. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(4), 292–321. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.608345

Beswick, K., & Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here? *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(5), 417–427. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9416-4

Brown, A., Thomas, K., & Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. In S. R. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 41–82). Westport, CT: Ablex Publishing.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Montes, M., Codes, M., Contreras, R. C., & Climent, N. (2019). El conocimiento didáctico del contenido del formador de profesores de matemáticas: su construcción a partir del análisis del conocimiento especializado pretendido en el futuro profesor. In F. Imbernón, A. Shigunov Neto, I. Fortunato (Eds.), *Formação permanente de professores: experiências ibero-americanas* (pp. 324-341). São Paulo: Edições Hipótese.

Contreras, L. C., Montes, M., Muñoz-Catalán, M. C., & Joglar, N. (2017). Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. In J. Carrillo & L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 11–25). Huelva: CGSE.

Coura, F. C. F., & Passos, C. L. B. (2017). Estado do conhecimento sobre o formador de professores de Matemática no Brasil. *Zetetiké*, *25*(1), 7–26. https://doi.org/10.20396/zet.v25i1.8647556

Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2019). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(1), 567–587. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Escudero-Ávila, D., Montes, M., & Contreras, L. C. (2021). What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. In M. Goos, & K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: international perspectives and challenges* (pp. 23-40). Springer International. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8

Gil, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In B. Jaworski, & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 335–361). Rotterdam: Sense Publishers.

Leikin, R., Zazkis, R., & Meller, M. (2018). Research mathematicians as teacher educators: focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(5), p. 451-473. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9388-9

Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação.

Montes, M., Ribeiro, C., Carrillo, C., & Kilpatrick, J. (2016). Understanding mathematics from a higher standpoint as a teacher: an unpacked example. In *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 315–322). Szeged, Hungary.

Oliveira, G. P., & Fonseca, R. V. (2017). A teoria dos números na formação de professores de matemática: (In)compreensões acerca da primalidade e do teorema fundamental da Aritmética. *Ciência & Educação*, *23*(4), 881–898. https://doi.org/10.1590/1516-731320170040015

Resende, M. R. (2007). *Re-Significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na licenciatura* [Tese de doutorado em Educação Matemática]. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11207

Resende, M. R., & Machado, S. D. A. (2012). O ensino de matemática na licenciatura: a disciplina Teoria Elementar dos Números. *Educação Matemática Pesquisa*, *14*(2), 257–278. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/9077

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–22. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Sinclair, N., Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2003). Number Worlds: Visual and Experimental Access to Elementary Number Theory Concepts. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *8*, 235–263. https://doi.org/10.1023/B:IJCO.0000021780.01416.61

Smith, J. C. (2002). *Connecting undergraduate Number Theory to High School Algebra: A study of a course for prospective teachers*. Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, Crete, Greece.

Zazkis, R., & Campbell, S. R. (1996a). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers' Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 540–563. https://doi.org/10.2307/749847

Zazkis, R., & Campbell, S. R. (1996b). Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 207–218.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced Mathematical Knowledge in Teaching Practice: Perceptions of Secondary Mathematics Teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(4), 263–281. https://doi.org/10.1080/10986061003786349

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(3), 164–186. https://doi.org/10.2307/30034911

Zazkis, R., Sinclair, N., & Liljedahl, P. (2013). *Lesson Play in Mathematics Education*. New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3549-5

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education*. [Tese de Doutorado]. University of Michigan. http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/77702/1/dzopf_1.pdf