ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p439-458

El papel de las relaciones entre la función solución y su variación en el esquema de solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales

The role of the relationships between the solution function and its variation in the solution scheme of systems of differential equations

Le rôle des relations entre la fonction solution et sa variation dans le schéma de solution des systèmes d'équations différentielles

O papel das relações entre a função solução e sua variação no esquema de solução de sistemas de equações diferenciais

María Trigueros Gaisman[1]
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Doctora en Educación por la Universidad Complutense de Madrid
https://orcid.org/0000-0001-7527-6704

Resumen

En este artículo contribuye al conocimiento sobre el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones diferenciales desde el punto de vista de los sistemas dinámicos. Se analiza la evolución del Esquema de sistemas dinámicos de dos variables en estudiantes universitarios, después de terminar un curso de sistemas dinámicos diseñado con la teoría Acción Proceso Objeto Esquema (APOE) como sustento del diseño de actividades utilizadas a lo largo del mismo. En particular, este estudio se enfoca en la forma en que los estudiantes dan significado a las estrategias que se utilizan para representar e interpretar los sistemas de ecuaciones diferenciales y las relaciones que establecen entre las estructuras que conforman el Esquema de sistemas de ecuaciones y en particular las relaciones entre la función y su derivada a través de las diferentes representaciones que se utilizan para estudiarlos. Este trabajo contribuye también a enriquecer la noción de Esquema y de interacción entre Esquemas de la teoría APOE, así como al análisis de las relaciones entre los distintos conceptos involucrados en y entre las diversas representaciones de las soluciones que juegan un papel en el contexto de los sistemas de ecuaciones diferenciales y, de manera importante en la comprensión de las funciones paramétricas.

Palabras clave: Sistemas de ecuaciones diferenciales, Cálculo, Teoría APOE, Sistemas dinámicos, Funciones paramétricas, Esquema.

[1] mtriguerosg@gmail.com

Abstract

This article contributes to the knowledge about the learning of systems of differential equations from the point of view of dynamical systems. It analyzes the evolution of the Schema of dynamic systems of two variables in university students, after finishing a course of dynamic systems designed with the Action Process Object Object Schema (APOE) theory as a support for the design of activities used throughout the course. In particular, this study focuses on how students give meaning to the strategies used to represent and interpret systems of differential equations and the relationships they establish between the structures that make up the Systems of Equations Schema and in particular the relationships between the function and its derivative through the different representations used to study them. This work also contributes to enrich the notion of Schema and interaction between Schemas of the APOE theory, as well as to the analysis of the relationships between the different concepts involved in and between the different representations of the solutions that play a role in the context of systems of differential equations and, importantly, in the understanding of parametric functions.

Keywords: Systems of differential equations, Calculus, APOE theory, Dynamical systems, Parametric functions, Scheme.

Résumé

Cet article contribue à la connaissance de l'apprentissage des systèmes d'équations différentielles du point de vue des systèmes dynamiques. Il analyse l'évolution du schéma des systèmes dynamiques à deux variables chez des étudiants universitaires après avoir suivi un cours sur les systèmes dynamiques conçu sur la base de la théorie du schéma, des objets, du processus, d'action (APOE) comme fondement de la conception des activités utilisées tout au long du cours. En particulier, cette étude se concentre sur la manière dont les étudiants donnent du sens aux stratégies utilisées pour représenter et interpréter les systèmes d'équations différentielles et les relations qu'ils établissent entre les structures qui composent le schéma des systèmes d'équations et en particulier les relations entre la fonction et sa dérivée à travers les différentes représentations utilisées pour les étudier. Ce travail contribue également à enrichir la notion de schéma et d'interaction entre les schémas dans la théorie APOE, ainsi qu'à l'analyse des relations entre les différents concepts impliqués dans et entre les différentes représentations des solutions qui jouent un rôle dans le contexte des systèmes d'équations différentielles et, surtout, dans la compréhension des fonctions paramétriques.

Mots clés : Systèmes d'équations différentielles, Calcul, Théorie APOE, Systèmes dynamiques, Fonctions paramétriques, Schéma.

Resumo

Este artigo contribui para o conhecimento sobre o aprendizado de sistemas de equações diferenciais do ponto de vista dos sistemas dinâmicos. Ele analisa a evolução do esquema de sistemas dinâmicos de duas variáveis em estudantes universitários após a conclusão de um curso sobre sistemas dinâmicos elaborado com a teoria Action Process Object Schema (APOE) como base para a elaboração das atividades usadas ao longo do curso. Em particular, este estudo se concentra na maneira como os alunos dão significado às estratégias usadas para representar e interpretar sistemas de equações diferenciais e as relações que estabelecem entre as estruturas que compõem o Esquema de Sistemas de Equações e, em particular, as relações entre a função e sua derivada por meio das diferentes representações usadas para estudá-las. Este trabalho também contribui para enriquecer a noção de Esquema e de interação entre Esquemas na teoria APOE, bem como para a análise das relações entre os diferentes conceitos envolvidos e entre as várias representações das soluções que desempenham um papel no contexto dos sistemas de equações diferenciais e, principalmente, na compreensão das funções paramétricas.

Palavras-chave: Sistemas de equações diferenciais, Cálculo, Teoria APOE, Sistemas dinâmicos, Funções paramétricas, Esquema.

El papel de las relaciones entre la función solución y su variación en el esquema de solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales

A partir del surgimiento de métodos cualitativos para el estudio del comportamiento de sistemas dinámicos complejos y no lineales y del desarrollo de la tecnología los cursos de esta disciplina han dejado atrás el foco en los métodos de solución para dar lugar al análisis cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales y de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales en el marco de lo que hoy llamamos sistemas dinámicos. Dada la presencia de fenómenos dinámicos en distintas disciplinas, este cambio se ha visto acompañado por la introducción del estudio de las ecuaciones diferenciales y los problemas dinámicos en diferentes licenciaturas, desde las matemáticas y la física hasta la ingeniería, la economía y las ciencias sociales.

Al mismo tiempo que los cambios en los programas de los cursos de ecuaciones diferenciales han progresado, las experiencias que utilizan modelos en estos cursos han proliferado (e.g. Chaachua & Saglam, 2006; Rowland, 2006; Martin Bracke & Lantau, 2017; Lopes, 2021; Perez Campos & Da Silva Reis, 2022). Estos acercamientos muestran cómo el uso de problemas cercanos a la experiencia de los estudiantes motiva no solo su interés en la materia en estudio sino también su reflexión en las estructuras matemáticas involucradas en los problemas. Este interés aunado a la reflexión sobre sus propias acciones y la discusión con sus compañeros ha mostrado ser un elemento importante en la comprensión de los conceptos matemáticos relacionados con los modelos (Trigueros, 2014).

Los estudios sobre el aprendizaje y la enseñanza de las ecuaciones diferenciales han ido aumentando en el transcurso del tiempo (i.e. Zandieh & McDonald, 1999; Arslan, 2010,;Vajravelu, 2018; Kwon, 2020), no se puede decir lo mismo, sin embargo, de la atención a los sistemas de ecuaciones diferenciales en general y al papel de la construcción de los conceptos relacionados con los sistemas dinámicos (Trigueros, 2000; Trigueros 2004; Blumenfeld, 2006). Los problemas que se han estudiado en relación a estos sistemas tienen que ver, por una parte, con la comprensión de la noción de solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, por una parte, y, por otra parte, con la comprensión del comportamiento de la solución en diferentes escenarios y en varias ocasiones en el contexto de la modelación (i.e. Trigueros, 2000; Dana-Picard & Kidron, 2008; Trigueros 2021).

Todas estas investigaciones dan cuenta de la complejidad del aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y, en la mayoría de los casos proponen distintas estrategias didácticas, como la modelación, la exploración, la reflexión y el trabajo en equipo. Casi todas estas propuestas buscan que los sistemas dinámicos adquieran sentido para los estudiantes y las relacionen con otros conocimientos.

Si bien se ha avanzado en la investigación, queda aún trabajo por hacer. La investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de los sistemas de ecuaciones diferenciales, o sistemas dinámicos, como se mencionó anteriormente ha recibido menos atención que las ecuaciones de primer orden. En particular, se ha investigado poco en el papel que juegan la comprensión de las funciones paramétricas, funciones con dominio en los reales y codominio en R^n, si bien en este trabajo nos restringiremos a R^2. Existen pocos estudios que han tomado en consideración esta componente (Trigueros, 2000; 2004) que, a mi parecer, juega un papel fundamental en una cabal comprensión de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Una comprensión sólida y rica de los sistemas de ecuaciones diferenciales requiere del entendimiento profundo de las relaciones de estas funciones y de las relaciones que se entretejen entre ellas y las características de su variación. Este trabajo constituye un seguimiento del realizado en (Trigueros, 2000) ahora utilizando nuevos datos y la descripción del Esquema en términos de las relaciones que los estudiantes muestran haber construido a la luz de sus respuestas al instrumento de investigación.

El objetivo de este estudio consiste justamente en estudiar la forma en que intervienen estas relaciones en la solución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones. En particular se enfoca en el análisis de la construcción de dichas relaciones cuando los estudiantes han seguido un curso diseñado utilizando las estructuras de la teoría APOE, en particular, la de Esquema y su evolución.

Marco teórico

En este estudio se usó la teoría APOE como marco teórico. En particular, dado el interés por analizar las relaciones entre los conceptos involucrados en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, se emplea la noción de Esquema y la de evolución del Esquema (Arnon, et al. 2014), en este caso consideraremos el Esquema de sistemas de ecuaciones diferenciales. Dado que el interés de este estudio es determinar las relaciones entre la noción de solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales y la forma en que el conocimiento de las funciones paramétricas interviene en las posibilidades de desarrollo de dicho Esquema, consideramos que el Esquema de sistemas de ecuaciones diferenciales es el resultado de la interacción de dos Esquemas, el Esquema de solución y el Esquema de funciones paramétricas, al que llamaremos Esquema paramétrico. Para describir la evolución conjunta de estos dos Esquemas se utiliza la noción de "doble triada".

Un Esquema en la teoría APOE se define como una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas conjuntamente con el conjunto de relaciones que se establecen entre las estructuras que un individuo genérico utiliza para enfrentar y resolver problemas relacionados con los sistemas de ecuaciones diferenciales y que representa para dicho individuo una estructura coherente. La coherencia se pone de manifiesto a través de la posibilidad del individuo de determinar aquellas situaciones en las que es posible utilizar diche Esquema.

Los Esquemas están en constante evolución. La dinámica de esta evolución se puede concretar, de acuerdo con Piaget y García (1982) en tres niveles que conforman lo que denominan Triada y que quedan determinados por el tipo de relaciones que el individuo muestra haber construido. En el nivel Intra- los componentes del Esquema están relacionados principalmente mediante relaciones de correspondencia que son aquellas que los individuos utilizan para comparar las componentes del Esquema unas con otras en términos de semejanzas y diferencias. En el nivel Inter- las relaciones de transformación aparecen con mayor frecuencia. Estas relaciones se desarrollan cuando el individuo da cuenta de que una o más componentes del Esquema cambian cuando otra cambia e incluso pueden agrupar ciertas componentes que comparten propiedades. El nivel Trans- se caracteriza por la aparición de transformaciones de equivalencia que involucran la conservación de propiedades y en las que las estructuras dependen unas de otras, es decir que se construye implícita o explícitamente una estructura subyacente de manera el individuo coordina y entiende las relaciones construidas en el nivel Inter-. En este nivel aparece la coherencia del Esquema, que se refiere a la posibilidad de decidir si el Esquema puede o no aplicarse a una nueva situación. Cuando es posible hacer Acciones sobre el Esquema, éste se tematiza en un Objeto.

Un Esquema puede también desarrollarse mediante los mecanismos de asimilación y acomodacíón que guían el proceso de equilibración del Esquema (Fuentealba et al., 2022). Estos mecanismos entran en juego cuando es necesario incorporar una nueva estructura para comprender una nueva situación. Cuando el individuo puede asimilar dicha componente y reacomodar las componentes mediante cambios en las relaciones existentes, se habla de asimilación. Cuando, cambio, esa reestructuración implica la necesidad de reconstruir el Esquema para incorporar un nuevo componente, el mecanismo involucrado es la acomodación. Cuando los estudiantes abordan problemas complejos es posible que puedan encontrarse dos respuestas distintas a un mismo problema. Esto sucede cuando estas respuestas provienen del uso de dos diferentes Esquemas (Baker et al., 2000; Trigueros, 2000). Es necesario, en estas condiciones establecer la forma en que éstos interactúan. Dado que cada uno de ellos puede involucrar distintas formas de razonamiento en su construcción cada uno de ellos sigue su propio proceso de evolución misma que puede describirse por la doble triada (Arnon et al.

2014).

En este estudio, consideramos que dos Esquemas interactúan en la solución de un problema relacionado con los sistemas de ecuaciones diferenciales (y las ecuaciones lineales de orden superior a uno). Nos referimos a ellos como el Esquema de solución y el Esquema de función paramétrica al que nos referiremos como Esquema paramétrico.

Las preguntas de investigación propuesta para este estudio son ¿Qué construcciones muestran estudiantes que han seguido un curso de sistemas dinámicos utilizando actividades diseñadas con la descomposición genética? ¿Es necesario refinar la descomposición genética?

Metodología

Descomposición genética

La teoría APOE incluye entre sus componentes la necesidad de establecer un modelo hipotético predictivo, utilizando las estructuras y los mecanismos de la teoría, que hipotetiza la forma en que un ante genérico podría seguir para construir el o los conceptos en estudio. Este modelo se conoce como Descomposición Genérica (DG) y se utiliza en el diseño de instrumentos de investigación y en el diseño de actividades para enseñar el concepto en cuestión y debe probarse de manera empírica. Dependiendo de los resultados de la experiencia la DG puede verificarse, puede refinarse utilizando los resultados de la investigación o puede desecharse. Es importante considerar que la DG, al ser un modelo hipotético, no es única. Distintos investigadores pueden construir una DG diferente. Lo importante es la puesta a prueba de este modelo y su validación experimental.

La DG diseñada en este trabajo consiste en un refinamiento de una anteriores presentada en (Trigueros, 2000). El desarrollo del Esquema de representación de las funciones implica la construcción de relaciones entre la función como vector, la representación paramétrica de las funciones, curvas, derivada de las funciones, tangente a una curva y la triada correspondiente se describe de la siguiente manera:

Las componentes del Esquema de las funciones paramétricas son: función, función paramétrica, dominio, rango, gráfica, gráfica en el plano fase, vector, derivada de funciones paramétricas.

En el nivel Intra- paramétrico los estudiantes relaciona alguna representación de las funciones en términos de cada una de las componentes como función del parámetro siempre y cuando las funciones se presenten en un registro algebraico, en esas condiciones son capaces de seguir un procedimiento para eliminar el parámetro cuando es posible y representa el resultado en el plano bidimensional XY. Ante una representación en este espacio, las relaciones de correspondencia construidas permiten interpretar la gráfica solamente en situaciones simples.

En el nivel Inter- paramétrico los estudiantes interpretan la función como una función de R en R2 en el caso que nos interesa en este trabajo, son capaces de transformar las funciones para cambiar el espacio en el que se representan y pueden identificar el comportamiento de las funciones en distintas representaciones en casos simples.

En el nivel Trans- paramétrico los estudiantes pueden describir la función y sus diferentes representaciones en términos del parámetro considerado. Han construido relaciones de conservación en el sentido de que identifican las representaciones como relativas a la misma función entre distintas representaciones La coherencia del esquema se demuestra por la habilidad de los estudiantes de describir cuáles representaciones paramétricas son posibles para describir la función dada.

El desarrollo del esquema de la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales involucra la relación entre el conjunto solución como una familia de funciones, la curva solución y el proceso seguido para encontrar el conjunto solución, su relación con conceptos del algebra lineal y puede describirse mediante los siguientes niveles.

Nivel Intra- solución: Los estudiantes pueden resolver un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas y en ocasiones no autónomas, pueden relacionar el sistema de ecuaciones con su solución mediante sustitución en el sistema de ecuaciones, es decir, mediante una relación de correspondencia. Reconoce el significado de las soluciones en línea recta, aunque no la relación de ésta con las propiedades de una base en el espacio vectorial correspondiente. La relación con las representaciones de la solución sigue criterios memorizados que no funcionan en todos los casos.

El nivel Inter- solución se caracteriza por la construcción de relaciones de transformación entre las distintas soluciones del conjunto solución. Relaciona el significado de las soluciones en línea recta y su papel en el comportamiento de otras soluciones en el conjunto solución. Establece algunas relaciones de transformación entre algunas representaciones gráficas del conjunto solución, aunque en otros casos no establece la relación inversa para decidir cuándo una representación es conveniente e incluso posible para algunos sistemas de ecuaciones diferenciales. En general, las relaciones que construye entre el conjunto solución y las propiedades de una base son relaciones de correspondencia. No es claro para los estudiantes cuándo una representación es conveniente o incluso posible para algunos sistemas de ecuaciones.

En el nivel Trans- solución los estudiantes muestran haber construido relaciones de conservación al ser capaces resolver, interpretar y describir gráficamente diferentes sistemas de ecuaciones y de relaciones de conservación entre las soluciones en línea recta, otras soluciones, las propiedades del sistema y el papel de la base del espacio vectorial. La coherencia del Esquema se demuestra mediante la habilidad del estudiante de discriminar entre aquellos sistemas en los que el uso de los métodos analíticos es más apropiado de aquellos para los cuales las representaciones gráficas son más adecuadas y por su capacidad de determinar cuándo y por qué las soluciones de un sistema forman la base de un espacio vectorial.

La experiencia

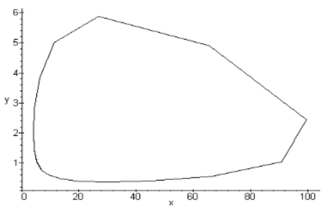
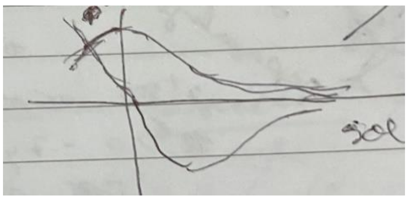
La investigación se realizó con un grupo de 24 estudiantes de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas durante el cuso de Sistemas Dinámicos en una universidad mexicana, Las actividades que se utilizaron en el curso se diseñaron en términos de la DG antes descrita. La profesora del grupo conocía las actividades a utilizar, aceptó emplearlas y siguió durante todo el curso la metodología didáctica de la teoría APOE. Es decir, utilizó el ciclo ACE (Actividades en pequeños equipos, Discusión del profesor con el grupo, Ejercicios de tarea complementarios) y diseñó preguntas para los exámenes coherentes con lo realizado en clase.

Al terminar el curso se llevó a cabo un examen final. La profesora, conjuntamente con la autora del presente trabajo, analizaron las respuestas de los estudiantes en dicho examen a la luz de los niveles de evolución del Esquema de sistemas de ecuaciones diferenciales y decidieron el nivel de evolución de cada uno de ellos en términos de la evolución de cada uno de los componentes del Esquema. Posteriormente se eligieron 8 estudiantes para entrevistar con el fin de profundizar en el análisis de la construcción del Esquema antes mencionado y para determinar con mayor certidumbre las relaciones construidas entre los elementos del Esquema y, por ende, su nivel de evolución. Se describe a continuación las tres tareas, distintas a las empleadas en los exámenes del curso, que se utilizaron en la entrevista., conjuntamente con su análisis preliminar.

Tabla 1.

Tareas utilizadas en la entrevista y su análisis.

Pregunta 1 Analiza el comportamiento de las soluciones del sistema en el espacio fase. Representa algunas soluciones y resuelve el sistema.	Se busca analizar las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales propuestos y cómo relacionan la solución con distintas representaciones.

$-3x + y = 0$ $-x - y = 0$ (Blanchard et al. 2011)	
Pregunta 2 Esta curva representa en el espacio fase una solución obtenida para un modelo de competencia entre especies. Dibuja e interpreta las gráficas que muestran el crecimiento de las poblaciones predador-presa. Dibuja las gráficas que representan el comportamiento de las poblaciones en el tiempo. Dibuja además otra u otras posibles curvas en el espacio fase que describan el comportamiento de las poblaciones para otra condición inicial.  (Trigueros,2000)	Se pretende obtener información sobre las relaciones que los estudiantes hacen entre las distintas representaciones de las soluciones de un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales y su interpretación de las posibles soluciones estables de equilibrio y su estabilidad.
Pregunta 3 Un compañero dibujó estas curvas solución de un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales. Dibuja la curva solución en el espacio fase. ¿Tiene el sistema una solución de equilibrio? Si es así ¿cuál sería? 	. Se busca analizar cómo los estudiantes enfrentan el Proceso inverso al que hacen frecuentemente y las relaciones que establecen entre la función paramétrica que representa a la solución del sistema no lineal y la representación en el plano y en el espacio de las curvas paramétricas asociadas a la solución, así como la forma en que describen su comportamiento.

Análisis

Las respuestas de los estudiantes en el examen final fueron analizados a la luz de la descomposición genética de manera discutieron hasta llegar a un acuerdo. Posteriormente se eligieron 8 estudiantes de manera que representaran independiente por la profesora del grupo y la investigadora. Las discrepancias en el análisis se lo mejor posible la distribución de los estudiantes en el examen final. Las entrevistas fueron grabadas en audio y la producción escrita de los alumnos fue recogida. Los datos obtenidos fueron analizados por un investigador en formación conocedor de la teoría APOE quien aceptó apoyar en esta parte de la investigación y la autora de este trabajo. El análisis se enfocó en las relaciones construidas por los estudiantes a la luz de la descomposición genética y fue discutido entre los investigadores hasta llegar a un acuerdo. A continuación, se muestran los resultados obtenidos del análisis del examen final y posteriormente se muestran los resultados de la entrevista de dos estudiantes, uno de ellos que mostró una construcción del Esquema a nivel Inter- paramétrico- Inter- solución y otro que mostró una construcción del Esquema a nivel Inter- paramétrico- Trans- solución.

Resultados obtenidos

La tabla siguiente muestra el número de estudiantes en cada nivel de desarrollo del Esquema de los 24 estudiantes mostrado en las respuestas al examen final.

Tabla 2.

Clasificación de los Estudiantes de acuerdo a sus respuestas en el examen final

Nivel	Intra- solución	Inter- solución	Trans- solución
Intra- paramétrico	1	4	0
Inter- paramétrico	3	9	4
Trans- paramétrico	0	1	2

El hecho de que únicamente un estudiante diera muestra de in Esquema al nivel Intra paramétrico- Intra- solución y que la mayoría haya desarrollado Esquemas en los niveles Inter- y Trans- de los Esquemas que componen el Esquema de Sistemas de Ecuaciones diferenciales da indicios de que el trabajo durante el curso promovió el desarrollo del Esquema de los estudiantes. De hecho, se observa en la tabla 9 alumnos evidenciaron un esquema Inter- paramétrico- Inter- solución, y 6 estudiantes construyeron uno de los dos Esquemas o ambos a nivel Trans-, ello indica que las actividades basadas en la descomposición genética conjuntamente con el uso de la didáctica de la teoría APOE favorecieron la evolución del Esquema de sistema de ecuaciones de los estudiantes. Al compararlo con el comportamiento de los estudiantes en el estudio previo, en el cual se utilizó el mismo texto, pero no se hizo uso de la teoría APOE en el desarrollo de las actividades y en la didáctica empleada (Trigueros 2000, 2004) es otro indicador del que en el curso se favoreció la reflexión de los estudiantes y con ello una mejor comprensión del contenido del mismo.

Resalta en la tabla 2 el hecho de que el desarrollo del Esquema paramétrico se quedara atrás al del desarrollo del Esquema de solución. La revisión de las respuestas de los estudiantes mostró con claridad que estos estudiantes dieron evidencia de una construcción de la componente relacionada con el Esquema de funciones como funciones reales de variable real. Un somero análisis del contenido del curso correspondiente a las funciones multivariadas, mostró que en éste se trabajan las funciones paramétricas, sin embargo, no reciben la misma atención que las funciones multivariadas. Estos resultados muestran que es necesario poner más atención en este tipo de funciones para promover una evolución más balanceada del Esquema de funciones de los estudiantes.

Resultados de la entrevista

Por falta de espacio se muestran en este artículo los resultados de la entrevista de dos estudiantes. Para ello se eligió un estudiante clasificado en el nivel Inter- paramétrico- Inter-solución que representa el nivel que caracterizó a 9 estudiantes y un estudiante clasificado en el nivel Inter- paramétrico- trans- solución que representa a 4 estudiantes en este nivel.

En términos generales, la clasificación de los estudiantes en términos de la evolución del Esquema mostrado durante la entrevista mostró congruencia con la clasificación mostrada en el examen final. Únicamente, una estudiante mostró un nivel distinto al del examen, construido probablemente durante la entrevista y es por ello que se seleccionó para mostrar en este artículo.

El caso de Raúl

Raúl es un estudiante entre los que mostraron la construcción del Esquema de sistemas de ecuaciones que tuvo algunos problemas de comprensión al inicio del curso, pero, poco a poco mostró mayor interés en el uso de los modelos y en el curso en general. Mostró fluidez en sus respuestas al problema 1. Raúl analiza el sistema lineal en términos del comportamiento de las variables en diferentes regiones del plano fase, distingue las isoclinas cero o nulcinas, pero muestra dificultades para encontrar la dirección de las curvas solución en distintas regiones del plano:

> R: Esto me cuesta, ya tengo las nulclinas que dividen el plano son 3x y -x. Supuestamente con desigualdades puedo encontrar las direcciones… pero bueno, puedo también dar valores a las variables de esas distintas partes de la gráfica. Así puedo completar la representación del sistema en el espacio fase, las flechitas te indican la

dirección (las dibuja)… para esta ecuación todas las soluciones van hacia la solución de equilibrio que queda en el cero porque el sistema es lineal y homogéneo.
E: ¿Cómo es la función? No me queda claro…
R:… la función se puede dibujar, es una función que depende de una variable pero la función tiene dos variables, la x y la y ambas funciones de t. Se pueden dibujar en una gráfica que en el eje vertical tiene a x y también a y y en el eje horizontal el tiempo. Pero en el espacio fase, también se tiene que encontrar las isoclinas cero, para ver qué regiones quedan después de dibujarlo y se puede ver que dependiendo de las condiciones iniciales, cambian diferente siguiendo la dirección de las regiones por las que pasan.
R: En esta región del plano fase, ahí está la condición inicial, se ve que la x crece pero la y decrece. En distintas regiones del plano tiene una dirección que cambia en otras regiones (dibuja isoclinas cero y las direcciones). Aquí ahora se ve que el flujo, o sea las funciones que son solución de la ecuación diferencial, sigue a las flechitas, como torciéndose y acercándose al punto de equilibrio que es el origen…y todas van hacia allá. El cero es un punto de equilibrio de tipo sumidero.
E: Y ¿Cómo representas esta función en el espacio tridimensional?
R: Bueno, a ver, es difícil imaginar, también dibujar… es que… En esta parte del espacio está la condición inicial. Como la t no aparece, porque es autónomo… y la función que representa la solución tiene dos variables en el rango y cada una depende del tiempo t, no sé como dibujarlas, se pueden dibujar la x contra t y la y contra t en la misma gráfica, así ves las dos curvas como van, pero si estás en R^3 y te mueves como hacia enfrente conforme avanza la t, pero la verdad no lo puedo describir ni dibujar….
Resuelve el sistema sin problema y describe la solución del sistema en forma vectorial. Liga en su explicación la solución con la representación en el plano fase para distintas condiciones iniciales. Sin embargo, aunque entiende el comportamiento de las soluciones y sabe que puede encontrar más de una solución y las debe sumar, no puede argumentar sobre esa suma y su significado:
R: Cuando resuelvo ese sistema lineal me da una solución repetida, entonces necesito escribirla dos veces, pero a la segunda la multiplico por t…
E: ¿Por qué sumas las dos soluciones?
R: Porque cuando haces la combinación lineal te da la solución de forma más general.
E: Y ¿por qué tienes que multiplicar por t a la segunda?
R: Porque necesitamos dos soluciones que tienen que ser distintas, que no se pueden repetir, por eso hay que poner la t.

Raúl muestra haber construido relaciones de transformación de las funciones paramétricas al representar la función en el plano fase y explicar claramente su comportamiento. No habla, sin embargo, de las soluciones en línea recta y su papel en la solución y en el plano fase. Es capaz de explicar el comportamiento de las curvas en una gráfica cartesiana. En su explicación describe el carácter vectorial de la función al hablar de que cada componente de la función cambia de distinta manera cuando cambia el tiempo y describir ese comportamiento en el espacio le es muy difícil, pero describe que x e y se moverían hacia enfrente en R^3. Sin embargo, aunque sabe qué tiene que sumar las dos funciones solución encontradas multiplicadas por una constante, no tiene claro la importancia de la independencia lineal de las soluciones del problema.

En la pregunta 2, Raúl afirma:
R. Esa solución parece la de un modelo de depredador- presa. Como está cerrada, parece que es una solución de equilibrio para la condición inicial que le corresponde.
E: Cómo sería la representación de la función solución.
R: Igual que antes dibujas x e y contra t en la misma gráfica… pero, bueno, como da vueltas, ahí en el plano fase sería como periódica, pero…
E: ¿La podrías dibujar?
R: Bueno no en R^3 pero son dos curvas una para x contra t y otra para y contra t. Siguiendo la gráfica debería poder imaginar la solución para cada variable dependiente, pero… es como cíclica, periódica pero no se bien, cada una de ellas hace como ondas al mismo tiempo.
E: ¿Podrías dibujar en el espacio fase otra curva solución para ver el comportamiento al largo plazo?
R: Como no tengo la ecuación no puedo saber, en la de antes sí porque tenía la información completa en las ecuaciones, pero en esta, podría ser que en otra condición inicial también fuera como redonda cerrada, pero en otra posición, por afuera de la gráfica dada o por dentro.
E: ¿Sería siempre periódica, cerrada? o ¿podría pasar algo más?
R: Es lo que me imagino. Todas las soluciones serían así, creo.
E: y ¿Qué representación te parece más conveniente?
R: Yo prefiero la representación de las componentes de la función contra t porque así puedo ver cómo se comporta exactamente y no nada más en general.

Nuevamente puede observarse que Raúl relaciona el significado de la solución y es capaz de imaginar que el comportamiento, al cambiar las condiciones iniciales, guardaría la estabilidad, aunque ese no es el único caso posible. podría ser la solución estable a la cual otras soluciones se acercarían o tener un comportamiento diferente en la zona interior a la curva dada y en el exterior. Nuevamente Raúl muestra que puede explicar cómo se transforma la función solución al cambiar las condiciones iniciales, además de que puede imaginar el comportamiento de la solución como periódica sin tenerlo claro, no puede transformar el comportamiento de la curva en el plano fase al plano cartesiano más allá de identificar que las funciones que representan a la solución podrían ser periódicas.

Al trabajar con la tercera pregunta puede rápidamente determinar que el cero es una solución de equilibrio estable mediante observación del comportamiento de las curvas al largo plazo, pero afirma:

R: Las soluciones, tienden a cero, y se juntan en el largo plazo, pero no dice cuál es x y cual es y.
E: Puedes elegirlas ¿Se pueden encimar o cruzar las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales?
R: Creo que sí, porque, así como en esta que estamos viendo, se juntan y se siguen juntas hacia adelante
E: y, ¿por qué se suman, encontraste dos soluciones?
R: La verdad creo que sí porque ahí en el dibujo puedes ver que como que se vuelven una misma. Pero no sé. Ah! No… las curvas son las componentes de una solución. Si

tuviera dos soluciones… Algo recuerdo de que deben ser linealmente independientes y por eso, lo que no dije antes en la pregunta del principio, tienes que multiplicar por t, algo así, no lo tengo muy claro.

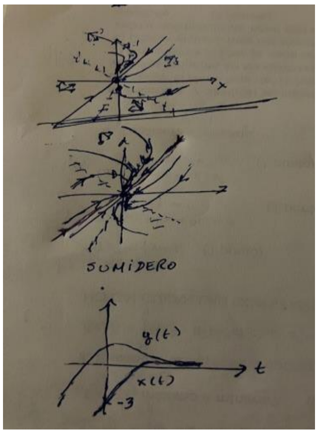
Se observa en la respuesta de Raúl que aunque puede describir las soluciones, se r efiere a las curvas solución como dos soluciones. Al tratar de recordar se confunde y no es capaz de resolver el problema

Después del análisis del trabajo completo de Raúl durante la entrevista, se llegó a la conclusión de que Raúl construyó un Esquema de nivel Intra- paramétrico- Intra solución durante el curso.

El caso de Ana

El esquema de Ana fue clasificado como Intra- paramétrico- Trans solución. En esta categoría hubo tres estudiantes más y Ana se consideró como una buena representante de las respuestas dadas por sus compañeros que mostraron la construcción del mismo nivel de Esquema.

En la Pregunta 1 Ana muestra flexibilidad en el uso de la representación de las soluciones en el espacio fase y puede describir el comportamiento de las curvas solución:



A: Aquí para ver el plano fase dibujo primero las nulclinas y luego puedo resolver las ecuaciones para los eigenvalores y eigenvectores… solo hay uno…es 2 entonces lo dibujo aquí y como puedo obtener los vectores dirección acá en cada región entre las nulclinas y ya veo como pueden ir las curvas… Dibuja correctamente el espacio fase.
E: ¿Por qué multiplicas por t la segunda solución?
A: Es que como solo hay un eigenvalor pero está repetido, se necesita encontrar otra solución linealmente independiente y eso se logra multiplicando por t la primera solución… es que se necesita una base para que con esas soluciones se puedan generar todas las demás como combinaciones lineales.

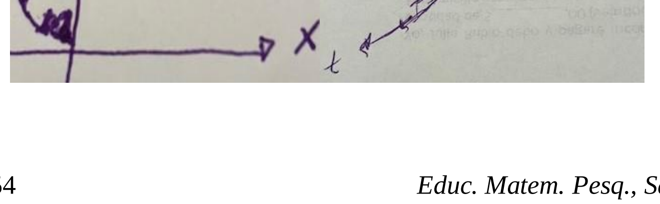
Ana muestra en esta parte que ha construido relaciones de conservación entre los elementos del Esquema solución al poder explicar cómo se comportan las soluciones en el espacio fase y por qué en este caso requiere una nueva solución que sea linealmente independiente de la primera. En relación a las curvas solución es capaz de transformar la información del plano fase al plano cartesiano para una condición inicial y describir el comportamiento de las componentes x(t) y y(t), pero cuando trata de describir el comportamiento de una curva solución en el espacio tridimensional, duda y a pesar de recordar algo desarrollado durante el curso, no intenta aplicarlo al problema en cuestión.

Sus respuestas a la pregunta 2 son también muy claras en cuanto a la descripción de la solución presentada y es capaz de transformar con facilidad esa representación al plano para cada componente, aunque nuevamente muestra que no ha construido la representación de las curvas paramétricas en el espacio tridimensional:

A: Esa curva es cerrada, eso indica que el comportamiento tanto de x como de y es cíclico. Las gráficas de x(t) y de y(t) son periódicas tienen ondas que no son iguales en x y en y pero son ondas en relación al tiempo.
E: ¿Puedes imaginarte o dibujar en este caso el comportamiento de la curva en el espacio?
A: ¡Ay, no! Aquí esta más complicado que antes… pero me acuerdo que cuando estudiamos el oscilador la maestra dijo algo así como que era como un resorte que iba hacia adelante… pero no entendí eso tampoco muy bien.

En la tercera pregunta, que resultó difícil para la mayoría de los estudiantes por tratarse de llevar a cabo un proceso de transformación inverso. Ana revisa la gráfica y se da el siguiente intercambio con la entrevistadora:

A: Creo que representa la solución de un sistema no lineal…No se sabe cuál curva representa a x de t y cuál a y. ¿Cómo lo hago? lo necesito.
E: Cierto, puedes elegir como quieras, solo indícame tu elección.
A: Bien pues…da igual, digamos que la de arriba es la y la de abajo es la x hasta t = 0 y luego decrece, converge a cero y x también entonces en el espacio fase hay una solución de equilibrio a la que llega esta solución. Entonces, lo que veo es que y crece, tiene un máximo en x=0 y luego, más bien x decrece hasta, digamos, -4, pero cuando y tiene el máximo x va bajando y vale como 1 para hacerlo fácil porque no tiene escala… Está difícil sin tener la x’ y la y’… aunque de la gráfica debería poder…eso nunca me lo preguntaron… a ver, con lo que dije y apunté antes… creo que lo más fácil es leer puntos de esa gráfica… empieza, condición inicial digamos (4,2), se va a (1,4), luego (0,3.5), (-2,2). (-1,1), (-.5,.2) y (-0,0)… los junto y tengo esta gráfica
E: ¿Qué significa el punto (-0,0)¿Se pueden cruzar las soluciones, como en la gráfica que estás trabajando?
A: Significa que x se acerca a 0 por abajo, y por arriba. No es correcto, pero así entiendo mejor por donde se acerca al equilibrio. Lo otro, no sé si entendí… en la gráfica contra la variable independiente de las soluciones si porque son las componentes y cuando se cruzan solo indica el punto en el que están en ese momento, pero en el espacio fase no se pueden cruzar sólo se acercan mucho a la solución de equilibrio.
E: ¿Te animarías a dibujar la gráfica de la solución en tres dimensiones?
A: No sé, es que no me sale…
E: Intenta, no pasa nada si no sale.



A: Bueno…a lo mejor con los puntitos me sale…los voy poniendo… pero aquí, está difícil porque es negativa ya la x pero bueno ahí lo marco y la curva es como un hilito que va para enfrente en la dirección de t y que converge a cero con la x negativa y la y

positiva… no sé si se entiende pero
creo que va así…

Con esta respuesta Ana de evidencia que es capaz de transformar el mismo objeto matemático a distintas representaciones, muestra que comprende la función paramétrica y es capaz de explicar con claridad su comportamiento. Es posible que al intentar responder las preguntas de la entrevistadora haya construido, durante la entrevista, las relaciones de conservación que indican la construcción de un Esquema Trans- paramétrico- Trans- solución, porque en el examen no dio evidencia de esa construcción.

Discusión

En los resultados de este estudio es posible apreciar que el uso del Esquema de Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales permite hacer un análisis detallado de las implicaciones de la comprensión de la manera en que los estudiantes pueden comprender las distintas facetas involucradas en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales que van más allá de la simple memorización de métodos de solución. Este Esquema permite, por una parte, diseñar actividades que fomenten la exploración en diferentes representaciones de las ecuaciones en el sistema y por otra el análisis de su solución, ambas utilizando distintas representaciones. También permite un análisis cuidadoso del trabajo de los estudiantes que facilita la detección de problemas puntuales que suelen presentarse a los alumnos y que, al comprenderlos mediante la teoría, permiten al profesor discutir aquellos factores específicos que podrían apoyar a los estudiantes en la superación de sus dificultades. Los resultados obtenidos dieron cuenta de manera satisfactoria de las construcciones de los estudiantes en esta experiencia, por lo que se consideró que no es necesario refinarla. Los resultados obtenidos validan esta descomposición genética. Los estudiantes entrevistados en este estudio dan evidencia de que es posible que los estudiantes comprendan a mayor profundidad las distintas posibilidades de solución de un sistema de ecuaciones y que puedan representarlas en distintos registros de representación para poder explicar el comportamiento de fenómenos que se estudian mediante este tipo de sistemas, tanto lineales como no lineales. Por otra parte, las entrevistas ponen de manifiesto que no es fácil comprender a profundidad funciones distintas a las que conocen bien, las funciones reales de variable real, pero que es posible, incluso dibujar su gráfica. Esto se ha encontrado en el caso de funciones de dos variables (Martinez Planell & Trigueros, 2012; Trigueros & Martinez Planell, 2010) y en este estudio se pone claramente de manifiesto, pero se muestra también que mediante una enseñanza basada en actividades diseñadas con una DG y en un curso donde se favorece el trabajo colaborativo, como cuando se usa el ciclo ACE de la teoría APOE, los estudiantes logran aprendizajes más profundos de las matemáticas en estudio, como se ha mostrado también en el caso de las funciones de dos variables (Martinez Planell & Trigueros, 2019). Los estudiantes que logran esta construcción enriquecen al mismo tiempo su Esquema de función. La diferencia de los resultados obtenidos en este estudio en relación a aquellos obtenidos en el estudio previo, del cual se utilizó una pregunta (Trigueros, 2000) es patente, en él se utilizó el mismo texto (Blanchard, et al. 2011), pero no actividades diseñadas con una DG ni el ciclo ACE.

Si bien los resultados de este estudio muestran que es posible introducir a los estudiantes a la complejidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales en un curso en el que se acercan por primera vez a las ecuaciones diferenciales desde el punto de vista de los sistemas dinámicos. También es posible que los estudiantes comprendan las funciones paramétricas a través de actividades diseñadas con ese fin. En este estudio se muestra que las dificultades persisten, como se observa en la tabla y en algunas partes de las entrevistas presentadas aquí. Esto indica que es necesario comprender mejor este fenómeno que tiene una incidencia fundamental en la comprensión de los sistemas de ecuaciones diferenciales, en particular y en otras aplicaciones de la matemática, mediante nueva investigación.

Los resultados de este estudio contribuyen también a mostrar cómo las estrategias de enseñanza basadas en la investigación y que utilizan el trabajo colaborativo entre los estudiantes y con el profesor favorecen un ambiente rico que hace posible que los estudiantes se comprometan con su propio aprendizaje y que da resultados positivos en relación a la comprensión de los estudiantes.

Referencias

Arnon, I, Cottril, J, Dubinsky, E. Roa Fuentes, S , Trigueros, M, Weller, K (2014). APOS Theory: Framework for research and curriculum development in Mathematics Education, Springer.

Arslan, S. (2010). Do students really understand what an ordinary differential equation is? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(7), 873-888. doi.org/ 10.1080/0020739X.2010.486448

Baker, B., L. Cooley and M. Trigueros. (2000). The Schema Triad: A Calculus Example. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 31, No. 5, 557-578.

Blanchard, P., Devaney, R. L. & Hall, G. R.& Hall G. R. (2011). *Differential Equations*, 4th Edition. Brooks and Cole.

Blumenfeld, H. L. (2006). Student's reinvention of straight-line solutions to systems of linear ordinary differential equations. San Diego State University. Retrieved from http://faculty.sdmiramar.edu/faculty/sdccd/hblumenf/thesis.pdf

Chaachoua, H. & Saglam, A. (2006). Modelling by differential equations. Teaching mathematics and its applications, 25, 15–22. Oxford University Press.

Dana-Picard T, Kidron I (2008) Exploring the phase space of a system of differential equations: different mathematical registers. Int J Sci Math Educ 6(4):695–717

Fuentealba C., Trigueros, M., Sánchez-Matamoros, G. & Badillo, E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. en Gloria Sánchez Matamoros y María Trigueros (Eds.). El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la universidad.. Avances De Investigación En Educación Matemática, (21), 23–44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241

Kwon, O.N. (2020). Differential Equations Teaching and Learning. In: Lerman, S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100023

Lopes, A. (2021). Modelagem Matemática e Equações Diferenciais: um mapeamento das pesquisas em Educação Matemática. REnCiMa: Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 12(4), 16–31. https://doi.org/10.26843/rencima.v12n4a16

Martin Bracke, J. & Lantau, M. (2017). Mathematical modelling of dynamical systems and implementation at school. CERME10, Dublin, Ireland. hal-01933489

Martínez Planell, R. & Trigueros, M. (2019) "Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables". The Journal of Mathematical Behavior, Vol. 55, 100687. ISNN: 0732-3123.

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2013). "Graphs of functions of two variables: results from the design of instruction". International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 44, No. 5, pp. 663-672. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2013.780214

Perez Campos, A. & Da Silva Reis, F. (2022). Contributions of Mathematical Modelling for Learning Differential Equations in the Remote Teaching Context. Acta Sci. (Canoas), 24(3), 184-215. ISSN: 2178-7727

Piaget J. & García, R. (1982). Psicogénesis e Historia de la Ciencia, SigloXXI ed.

Rasmussen, C. L. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. The Journal of Mathematical Behavior, 20(1), 55-87. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00062-1

Rowland, D. R. (2006). Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37(5), 553-558. https://doi.org/10.1080/00207390600597690

Trigueros, M., & Martínez Planell, R. (2010). "Geometrical representations in the learning of two-variable functions" in Educational Studies in Mathematics, Vol. 73, Issue 1, pp. 3-19. Published on line: 24 June 2009. http://www.springerlink.com/openuri.asp?genre=article&id=doi:10.1007/s10649-009-9201-5.

Trigueros M. (2021). Un acercamiento a la Física a través de un modelo matemático de variación. Revista UNO 93, 38-49 ISSN:1133-9853

Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. Educación Matemática, 25 años (número especial), 207–226.

Trigueros, M. (2004). Understanding the meaning and representation of straight line solutions of systems of differential equations. In D. McDougall & J. Ross (Eds.), Proceedings of the North American

Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 127-134). Ontario, Canada.

Trigueros, M. (2000). Students' conceptions of solution curves and equilibrium in systems of differential equations. In Fernandez, M. L. (Ed.), Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 93-97). Columbus, OH: ERIC.

Vajravelu, K. (2018). Innovative strategies for learning and teaching of large differential equations classes. International Electronic Journal of Mathematics Education, 13(2), https://doi.org/10.12973/iejme/2699

Zandieh, M. & McDonald, M. (1999). Student understanding of equilibrium solution in differential equations. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 253-258). Columbus, OH: ERIC.