

O processo de validação em atividades de modelagem matemática: em busca de um *framework*

The validating process in modelling activities: looking for a framework

El proceso de validación en las actividades de modelación matemática: en busca de una estructura

Le processus de validation dans les activités de modélisation mathématique : à la recherche d'un cadre

Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Pós-Doutorado em Educação Matemática
<https://orcid.org/0000-0001-8952-1176>

Rosangela Maria Kowalek
Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Doutoranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática
<https://orcid.org/0000-0002-2750-4829>

Resumo

O artigo dirige-se à investigação da validação em atividades de modelagem matemática, tendo como objetivo a organização de um *framework* relativo à validação nessas atividades mediante uma triangulação de dados para dar coerência e coesão aos resultados. Para a organização do *framework* um quadro teórico relativamente à temática é capturado. Além disso, uma pesquisa empírica é realizada com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. A reunião dos dados empíricos e da estrutura teórica permite caracterizar entendimentos, a importância e modos de realizar a validação na modelagem matemática. Embora possa ser reconhecida como etapa final nos ciclos de modelagem, não se pode pensar a validação como processo cumulativo que só se inicia ao final da atividade e do qual apenas decorre aceitação ou refutação. Ao invés disso, ela pode atuar como agente de iteratividade e orientar os processos decisórios dos alunos, sendo que mecanismos de validação podem ser ativados em diferentes etapas da atividade. O que se pode concluir, portanto, é que, ainda que ações pontuais sejam reconhecidas, é na validação da totalidade da modelagem que reside a eficiência da validação como meio de gerar confiabilidade no que se pode dizer de uma situação da realidade por meio da matemática.

Palavras-chave: Educação matemática, Modelagem matemática, Modelo matemático, Validação.

Abstract

The article aims to investigate validation in mathematical modelling activities with the objective of organizing a framework related to validation in these activities through data triangulation to give coherence and cohesion to the results. For the organization of the framework, a literature review regarding the theme is realized. In addition, an empirical research is carried out with students of a Mathematics Degree course. The gathering of empirical data and the theoretical structure allow to characterize understandings, the importance and ways of carrying out validation in mathematical modelling. Although it can be recognized as the final step in the modelling cycles, validation cannot be thought of as a cumulative process that only begins at the end of the activity and from which only acceptance or refutation results. Instead, it can act as an iterative agent and guide students' decision-making processes, and validation mechanisms can be activated at different stages of the activity. What can be concluded, therefore, is that, even if specific actions are recognized, it is in the validation of the totality of the modelling that the efficiency of validation resides as a means of generating reliability in what can be said about a situation of reality by using mathematics.

Keywords: Mathematics education, Mathematics modelling, Mathematical model, Validation.

Resumen

El artículo aborda la investigación de la validación en actividades de modelación matemática. Por intereses de investigación en delinear una estructura de validación en estas actividades, se utiliza la triangulación de datos como una alternativa para dar coherencia y cohesión a lo que se pretende hacer. Para la organización de la estructura, se captura un marco teórico referente al tema. Además, se realiza una investigación empírica con estudiantes de un curso de Grado en Matemáticas. La recopilación de datos empíricos y el marco teórico permite caracterizar los entendimientos, la importancia y las formas de llevar a cabo la validación en la modelación matemática. Si bien puede reconocerse como el paso final en los ciclos de modelación, la validación no puede pensarse como un proceso acumulativo que solo comienza al final de la actividad y del cual solo resulta la aceptación o la refutación. En cambio, puede actuar como un agente iterativo y guiar los procesos de toma de decisiones de los estudiantes, y los mecanismos de validación pueden activarse en diferentes etapas de la actividad. Lo que se puede concluir, por tanto, es que, aunque se reconozcan acciones concretas, es en la validación de la totalidad de la modelización donde reside la eficacia de la validación como medio de

generar fiabilidad en lo que se puede decir sobre una situación de la realidad a través de las matemáticas.

Palabras clave: Educación matemática, Modelación matemática, Modelo matemático, Validación.

Résumé

L'article porte sur l'investigation de la validation dans les activités de modélisation mathématique. Pour les intérêts de recherche dans la définition d'un cadre de validation dans ces activités, la triangulation des données est utilisée comme alternative pour assurer la cohérence et la cohésion de ce qui est censé être fait. Pour l'organisation du cadre, un cadre théorique concernant le thème est capturé. De plus, une recherche empirique est menée auprès d'étudiants d'un cours de Licence de Mathématiques. La collecte de données empiriques et la structure théorique permettent de caractériser les compréhensions, l'importance et les manières d'effectuer la validation en modélisation mathématique. Bien qu'elle puisse être reconnue comme l'étape finale des cycles de modélisation, la validation ne peut être pensée comme un processus cumulatif qui ne commence qu'à la fin de l'activité et dont il ne résulte que l'acceptation ou la réfutation. Au lieu de cela, il peut agir comme un agent itératif et guider les processus de prise de décision des étudiants, et des mécanismes de validation peuvent être activés à différentes étapes de l'activité. Ce que l'on peut donc conclure, c'est que, même si des actions spécifiques sont reconnues, c'est dans la validation de la totalité de la modélisation que réside l'efficacité de la validation comme moyen de générer de la fiabilité dans ce qui peut être dit d'une situation de réalité par les maths.

Mots-clés : Éducation mathématiques, Modélisation mathématique, Modèle mathématique, Validation.

A validação em atividades de modelagem matemática: em busca de um *framework*

Nas últimas décadas vêm sendo percebidos diferentes movimentos visando à introdução da modelagem matemática em aulas de Matemática. A estruturação de um currículo orientado pelo desenvolvimento de competências e em que a modelagem¹ é uma delas, como é o caso da Alemanha (Ferri, 2018), a inclusão de uma disciplina de Modelagem Matemática em cursos de Licenciatura em Matemática e a indicação do uso da modelagem por documentos que orientam o ensino de Matemática e a formação para professores em exercício da docência, como é o caso do Brasil (Bassanezi, 2002; Mutti & Klüber, 2018; Brasil, 2018), são exemplos desses movimentos.

O que a modelagem matemática visa, de modo geral, é entender, explicar ou prever especificidades relativamente a uma situação da realidade, sendo este entendimento, explicação ou previsão mediados por um modelo matemático (Geiger et al. 2022; Blum, 2015). Ou seja, a partir do uso da Matemática, os modeladores (que no âmbito da sala de aula são alunos e professores) propõem uma solução para um problema de ordem não-matemática.

Para prover à modelagem esta caracterização, reconhece-se a necessidade de um conjunto de procedimentos, não desvinculados de alta demanda cognitiva (Blum, 2015), e indicados por meio de etapas. A identificação destas etapas vem sendo apresentada por meio de construções analíticas denominadas *ciclo de modelagem*. Estes ciclos, por um lado, são úteis como modelo de referência epistemológica para especificar estes procedimentos. Por outro lado, muito eles têm sido usados quando o que se pretende é olhar para a performance do aluno ao fazer modelagem (Barquero & Jessen, 2020).

Os modelos matemáticos produzidos no decorrer de etapas deste ciclo funcionam então como unidades de conhecimento coerentemente estruturadas e é a partir deles que as inferências, as previsões, as explicações e inclusive os julgamentos relativos à situação, são explicitados (Hestenes, 2010). Estes modelos, têm um *status* epistemológico aberto ao debate e são eles a verbalização da relação entre a realidade, entendida como o *mundo como experienciado pelo sujeito* (Hestenes, 2010). Assim sendo, podem ser descrições simplificadas dessa realidade consoante à visão do modelador, idealizações de uma realidade possível, sendo, entretanto, sempre submetidos a comparações com a realidade em questão. Estas comparações estão, portanto, integradas às etapas de um ciclo de modelagem e, em geral, aí identificadas como *validação*.

¹ No texto, a palavra *modelagem* sempre é referente à modelagem matemática.

Mas o que é *validar*? Segundo dicionário da língua brasileira (Houaiss, 2021, p. 1), validar vem do latim *validare* e significa, “fazer com que se torne válido a partir das regras em vigor” A palavra validação se associa, assim, a ação ou intenção de tornar algo válido e, como sugere outro dicionário (Ferreira, 2009), tornar legítimo, legitimar.

Validar em atividades de modelagem parece se constituir, todavia, uma etapa bastante desafiadora para os alunos, podendo ser justamente a ela atribuído o caráter dinâmico da atividade e a natureza iterativa proporcionada pelo ver e rever de procedimentos (Czocher, 2018; Galbraith & Stillman, 2006).

Czocher (2013), Ikeda (2013), Czocher (2018), Czocher; Stillman; Brown (2018), ponderam que a validação é etapa relevante da modelagem, mas ainda pouco se tem investigado visando apontar para como ela pode ser realizada pelos alunos e como pode ser estimulada pelo professor, por exemplo, uma vez que é por meio dela que fragilidades de um modelo ou a falta de credibilidade de uma resposta podem ser revistas.

Face a estas considerações apresentadas sobre a validação na modelagem matemática, no presente artigo temos como objetivo investigar o entendimento, as finalidades e o modo como se dá esta validação. A partir do quadro teórico relativo à validação e dos resultados de uma pesquisa empírica, construímos um *framework*² apontando possibilidades, finalidades e modos de realizar a validação em atividades de modelagem matemática.

Aspectos metodológicos

Para os interesses da presente pesquisa em esboçar um *framework* relativo à validação na modelagem matemática, mostra-se pertinente uma estratégia de triangulação³ de dados (Duarte, 2009) como alternativa capaz de construir coerência e coesão relativamente ao que se pretende realizar. Segue-se assim, um paradigma construtivista, em que, segundo Duarte (2009), a realidade é múltipla e construída, sendo o sujeito e o objeto de observação inseparáveis, e prevalece a pesquisa qualitativa como atividade situada em que, para entender a dinâmica do que se pretende pesquisar, se vai a campo para captar esse objeto a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas (Godoy, 1995)

² Um *framework* é um conjunto de possibilidades, ideias ou crenças usadas para lidar com algum assunto, sendo assim apontada como possível estrutura conceitual relativa a esse assunto. (Eisenhart, 1991).

³ Segundo Duarte (2009), a triangulação de dados diz respeito à consideração de diferentes dimensões de tempo, de espaço, de contexto e de nível analítico a partir dos quais o pesquisador busca as informações para sua pesquisa. Trata-se, portanto da exposição simultânea de realidades múltiplas por aquele que investiga.

Com esse viés metodológico, no artigo o olhar para a validação em atividades de modelagem, por um lado, se dirige a um quadro teórico relativamente a este objeto e por outro lado se fundamenta em uma pesquisa empírica que investiga como alunos entendem a validação, que importância lhe atribuem e o modo como a realizam em atividades de modelagem. Neste sentido, o sujeito que pesquisa (as autoras do artigo) e o objeto de observação (a validação em atividades de modelagem) se interligam mediante um processo interpretativo.

A estruturação do quadro teórico é referente a publicações em periódicos científicos da área de Educação Matemática em âmbito nacional e internacional a respeito da validação em atividades de modelagem e inclui o material pesquisado em Kowalek (2021) referente ao ato de validar em atividades de modelagem matemática. Resultados da pesquisa de Kowalek (2021), no mesmo sentido de Czocher (2013), Ikeda (2013), Czocher (2018), Czocher; Stillman; Brown (2018), apontam para a discussão ainda incipiente a respeito da validação em atividades de modelagem matemática.

A pesquisa empírica, por sua vez, foi realizada com alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática no decorrer da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva de Educação Matemática ministrada por uma das autoras do presente artigo no segundo semestre do ano de 2021.

Conjuntamente, o que já está posto na literatura pesquisada e os dados obtidos da pesquisa empírica viabilizam organizar o *framework* pretendido para sinalizar um estado atual da investigação a respeito da validação em atividades de modelagem matemática.

Modelagem matemática e validação

A premissa de que a modelagem matemática busca entender, explicar ou propor previsões para uma situação da realidade e de que essas ações são mediadas por um modelo matemático (Geiger et al. 2022) permeia o que se propõe a discutir o presente artigo.

Estas ações, entretanto, sempre se vinculam a interpretações particulares do modelador e os resultados refletem suas hipóteses sobre como a *realidade funciona*⁴. Ou seja, o que se observa não é propriamente a realidade, mas a realidade revelada ao método de interpretação do modelador. Assim, a modelagem é uma prática humana em que, em certa medida, para modelar, o sujeito modifica essa realidade e não a tem como estática e completamente representável. Todavia, a despeito de admitir que existe um mundo real independente da nossa

⁴ A expressão *funcionamento da realidade* refere-se à possibilidade idiossincrática de se referir e ponderar sobre como a realidade é (Hestenes, 2010).

compreensão, Bunge (1985, p. 167) afirma: “se não crêssemos na existência do mundo externo nem na possibilidade de conhecê-lo, mesmo que em parte, não nos esforçaríamos por fazer teorias nem experimentos, ou ao menos não alcançaríamos nenhum êxito em nossa exploração”. De fato, como Bunge (1969) também já menciona, Galileu, embora bem referido como *pai da modelagem matemática*, efetivamente, não matematizou a natureza, mas sim as técnicas experimentais que usou para entendê-la.

No contexto educacional, a modelagem matemática, ainda que não rigorosa e univocamente caracterizada, em termos gerais, segue um *design* de atividades que incluem etapas bem definidas (em geral associadas a um ciclo de modelagem): (1) entender a situação da realidade; (2) simplificar o que for necessário (ou conveniente) nesta situação; (3) matematizar a situação; (4) construir um modelo matemático e realizar resoluções matemáticas; (5) Interpretar a solução e a resposta; (6) Validar o modelo e a resposta; (7) comunicar, na sala de aula, os resultados obtidos (Almeida, 2022).

Administrar as expectativas de que o aluno inclua essas etapas em seu *fazer* modelagem e como ele se movimenta ao percorrê-las é relevante para o professor que vislumbra entender e identificar as ações dos alunos. Não obstante essa expectativa, o professor precisa considerar que há uma certa idiosincrasia dos alunos na sequência dessas etapas (Ferri, 2018) e que experiências anteriores com modelagem bem como com a Matemática usada na atividade influenciam as ações dos alunos (Almeida, 2018; Niss, 2010).

Os modelos matemáticos, como unidades de conhecimento resultantes da *manipulação* da realidade, podem constituir o que Bunge (1969), denomina de *metáforas sugestivas*. Mas, conforme sugere Almeida (2010), o pensamento metafórico é valioso para a modelagem matemática e os modelos dele resultantes são gerados de forma recursiva e com recorrências a dois domínios, a Matemática e a realidade. Modelos matemáticos assim construídos são, segundo Lesh et al. (2000), sistemas que: (a) incluem variáveis; (b) incluem relações entre variáveis; (c) requerem operações que indicam como essas variáveis se relacionam; (d) seguem regras e padrões bem definidos.

Esses modelos, por um lado, refletem decisões dos modeladores relativamente às simplificações, às variáveis, à matematização consideradas para a situação da realidade e, por outro lado, são os instrumentos em que se baseiam as interpretações e as respostas matemáticas e não-matemáticas para o que se pretende conhecer relativamente à essa situação. Considerando o modelo, o processo de sua construção e a resposta por ele produzida, a validação na modelagem tem nesses aspectos o seu objeto principal e é ela (a validação) um procedimento crucial dentre as etapas de um ciclo de modelagem.

Mas em que consiste a validação? Como realizá-la? Qual a sua finalidade na atividade de modelagem? Deliberar sobre respostas a estas questões é um caminho para orientar as buscas por modos de realizar a validação na modelagem matemática.

Para além do significado expresso em dicionários “fazer com que se torne válido a partir das regras em vigor” (Houaiss, 2021, p.1) e tornar algo legítimo (Ferreira, 2009), a validação tem recebido significações em áreas como a Matemática, a Computação, a Filosofia e, a que mais diretamente nos interessa, a Modelagem Matemática.

Thacker et al. (2006), referindo-se à validação no âmbito da Matemática, sugerem que se trata de um processo que visa quantificar a eficiência de técnicas, métodos e resultados matemáticos em relação ao que se propõe avaliar ou medir. Essas técnicas e métodos podem ser como ferramentas que subsidiam a construção de modelos (matemáticos) e assim, indiretamente, constituem a totalidade a que se dirige algum tipo de julgamento do modelo.

Mas, como sugere Parker (2020), os modelos, inclusive os modelos matemáticos, não podem ser validados considerando as premissas de sua construção como certas e invariavelmente verdadeiras e nem se pode validá-los usando sua boa performance em situações anteriores para lhes garantir eficiência em novas situações. Ainda que possam se tornar confiáveis quando os resultados que proporcionam se ajustam aos dados observados, o que os modelos indicam são sempre respostas *inerentemente parciais* e, como sugerem Almeida, Sousa e Tortola (2021), são respostas provisórias de modo que, no que se pode dizer de uma situação da realidade a partir de um modelo matemático há uma certa temporalidade.

A questão, a partir da qual Parker (2020, p. 4) apresenta uma interpretação por ele denominada de *filosófica* para a validação é: o que se deveria avaliar –e, portanto, confirmar, ou refutar no processo de validação de um modelo se não o próprio modelo em si? Suas ponderações sobre a validação levam o autor a deliberar que para a validação (sob esta perspectiva filosófica), o que o modelador deve ter em mente é denominado de *adequação ao propósito* de modo que a validação do modelo se dá mediante um “processo de decisão para definir sob quais circunstâncias e quando o modelo é adequado para um determinado propósito” (Parker, 2020, p. 5). Isso implica, então, em ponderar que a validação não pode focar somente no modelo e tampouco somente na resposta, devendo levar em consideração a pergunta, ou seja, o que o modelo deve responder, isto é, o propósito de sua construção.

Alvarado (2017), na mesma linha das assertivas de Parker (2020), não desvincula a validação do modelo com os propósitos de sua construção. Para o autor, como estímulo ao pensamento crítico, a validação é relativa ao “um domínio de aplicabilidade e dentro de uma faixa satisfatória de precisão” (Alvarado, 2017, p. 32), sendo a validade do modelo determinada

em concordância com os propósitos da própria modelagem da qual esse modelo é resultante. Neste sentido, este mesmo autor também sugere que “a validação absoluta não existe, mas existem técnicas particulares que são estabelecidas para validar aspectos da atividade” (Alvorado, 2017 p. 33).

Esta visão mais ampla para validação parece estar sinalizada em trabalhos que tratam da temática na Matemática e na Computação, por exemplo. Com efeito, Thacker et al. (2006), Hallerstede et al. (2018) Pace (2004), Marchi (2015) e Elaasar (2018), identificam dois procedimentos distintos na avaliação de modelos matemáticos e de seu processo de construção: a validação e a verificação. A primeira diz respeito à quantificação da precisão do modelo quando avaliado em relação aos dados experimentais ou em relação à situação da realidade a que ele se associa, considerando o que dessa situação foi incluído no modelo; a segunda visa avaliar e remover erros numéricos ou conceituais e, em geral, internos ao modelo e à Matemática em que está baseado. Assim, o modelo em si não é o único objeto ao qual se dirige a validação, mas ela também inclui o próprio processo de modelagem em que ele é construído.

No âmbito da modelagem matemática compreendida como atividade cuja realização segue algumas etapas, a validação é reconhecidamente incluída como uma delas, sendo identificada, entretanto, tradicionalmente, como etapa final e interpretada, na maior parte das vezes, como checagem dirigida tanto ao modelo quanto à resposta por ele produzida (Blum & Leisß, 2007; Ferri, 2018; Almeida, Silva & Vertuan, 2012; Ferreira & Silva, 2019).

Hidiroğlu e Güzel (2013) indicam que o foco da validação na modelagem matemática deve ser a análise de quão bem o modelo e a solução se ajustam às particularidades da situação a qual se dirige o modelo. Esses autores também identificam a verificação, sendo essa dirigida à avaliação do modelo e, decorre dela a avaliação da resposta, sendo, portanto, na visão dos autores, a verificação um subprocesso da validação. Da pesquisa empírica realizada, os autores concluem que os professores participantes, em termos gerais, esperam dos seus alunos procedimentos de comparação, tanto do modelo com os dados experimentais quanto da resposta obtida para o problema em relação a expectativas dos próprios alunos e do professor.

Pesquisas recentes, como por exemplo Geiger et al. (2022) e Castro e Almeida (2023), têm evidenciado que a tomada de decisão permeia as diferentes etapas da modelagem como atividade orientada por um objetivo e sem esquemas e respostas *a priori* vislumbradas. Estes processos decisórios já são também sinalizados na pesquisa de Czoher (2018), tendo essa autora caracterizado a validação como um processo contínuo que se alastra por diferentes etapas da modelagem e fomenta essas tomadas de decisão dos alunos.

Considerando essa expansão do processo de validação, Czocher (2018), com base em uma pesquisa empírica com estudantes de um curso de engenharia, caracteriza cinco tipos distintos de validação (V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , e V_5), os aloca às ações dos alunos entre diferentes etapas de um ciclo de modelagem (Figura 1) e os caracteriza assim: no tipo V_1 as ações incidem sobre os resultados matemáticos e o que é avaliado são os cálculos e procedimentos matemáticos; no tipo V_2 as ações incluem avaliar o modelo matemático, seus parâmetros e variáveis bem como a sua articulação com o que no ciclo de modelagem se caracteriza como modelo da situação e corresponde à situação idealizada; no tipo V_3 estão ações diferem daquelas de V_2 uma vez que avaliam o modelo matemático em relação às características do problema real; no tipo V_4 as ações visam avaliar a resposta obtida em relação à situação da realidade considerando as expectativas empíricas e as informações sobre a situação; por fim o tipo V_5 compreende ações de avaliar os resultados em relação aos dados e as informações conhecidas sobre a situação da realidade.

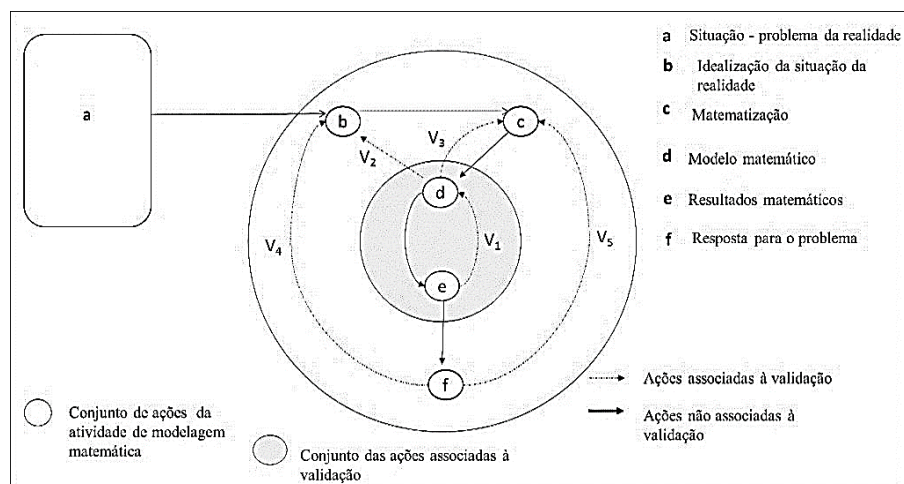


Figura 1.

Tipos de validação (adaptado de Czocher, 2018 p. 151)

A validação se figura desse modo, como um processo para analisar os procedimentos, o modelo, os resultados e a resposta para o problema relativo à situação que está em estudo.

Ishibasshi e Uegatani (2019) a partir de atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos da Educação Básica em escolas do Japão e buscando identificar os tipos de validação apontados por Czocher (2018), concluíram que os alunos parecem criar o que os autores denominam de *mundo fictício* e validar os resultados obtidos pela modelagem em relação a esse mundo de modo que uma situação idealizada passa a ser o parâmetro de análise da precisão do modelo. Dando continuidade a essa pesquisa, em Ishibasshi e Uegatani,

(2022), esses mesmos autores, concluem que, ainda que se possa falar em validação em um mundo fictício, o validar pode ser fonte de sentido para os alunos, não apenas no domínio pessoal, mas também no domínio social, de modo que a modelagem matemática extrapola a sala de aula.

As ações multifacetadas indicadas nos estudos apontados, nem sempre são espontaneamente realizadas pelos alunos. Assim, é fundamental que se reconheça que a validação requer do aluno, procedimentos complexos que, sem a intervenção do professor podem não ser bem-sucedidos (Cakmak & Bekdemir, 2022). Ou seja, a validação não pode ser negligenciada pelo professor, mas ele, em alguma medida, pode oferecer meios para que na atividade de modelagem o aluno valide, verifique e tome decisões.

A pesquisa empírica

A pesquisa empírica foi realizada com alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática no decorrer da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva de Educação Matemática ministrada por uma das autoras do presente artigo no segundo semestre do ano de 2021, tendo a outra autora participado de todas as aulas como estagiária de docência no Ensino Superior⁵. O cenário pandêmico do Covid-19 vigente à época levou à realização de aulas em ambiente virtual utilizando os recursos *Google Meet* e *Google Classroom*. Os dados em que se apoia o processo analítico foram obtidos pelas transcrições das gravações das aulas geradas pelo *Google Meet*, pelos relatórios das atividades entregues pelos alunos no *Google Classroom* e das respostas dos alunos a um questionário respondido pelos grupos imediatamente após o desenvolvimento de cada atividade e também entregues neste ambiente virtual.

Participaram das atividades os vinte e quatro alunos matriculados na disciplina os quais são identificados por A_i , $1 \leq i \leq 24$ e que formaram sete grupos identificados como G_i , com $1 \leq i \leq 7$. Uma atividade foi desenvolvida por todos os grupos e, além disso, os alunos também se organizaram em grupos para desenvolver uma atividade específica por grupo. Considerando a extensão possível para o texto bem como a quantidade de dados obtidos com cada grupo, referimo-nos a duas dessas atividades, especificadas na Tabela 1.

Tabela 1.

As atividades de modelagem matemática (produzida pelas autoras)

⁵ Trata-se de atividade obrigatória para alunos de programas de mestrado e doutorado e beneficiados com bolsa de estudo da CAPES.

Temática da atividade	Alunos
Atividade 1 O movimento da maré na praia de Camboriú	A ₁ e A ₂ (G ₁) A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ (G ₂) A ₁₀ , A ₁₁ , A ₁₂ (G ₃) A ₁₃ , A ₁₄ (G ₄) A ₁₅ , A ₁₆ , A ₁₇ , A ₁₈ (G ₅) A ₁₉ , A ₂₀ , A ₂₁ (G ₆) A ₂₂ , A ₂₃ , A ₂₄ (G ₇)
Atividade 2 O zíper gigante	A ₅ , A ₁₃ , A ₁₄ , A ₁₉ , A ₂₀

Atividade 1: o movimento da maré na praia de camboriú⁶

Esta foi a primeira atividade de modelagem desenvolvida pelos alunos na disciplina. Entretanto, eles já haviam lido textos relativos à modelagem matemática bem como haviam conhecido atividades já realizadas por outros alunos, tendo assim informação sobre possíveis etapas de uma atividade de modelagem, por exemplo. A temática foi sugerida aos alunos pela professora. Face às notícias sobre o alargamento da praia na cidade de Camboriú, prontamente os alunos se interessaram pelo tema, mesmo que, em um primeiro momento, não tenham identificado na situação do movimento da maré um problema passível de abordagem por meio da Matemática.

A possibilidade de entender, explicar ou prever especificidades relativamente a esta situação foi sendo percebida pelos alunos na medida em que informações e dados sobre a obra de alargamento foram sendo compartilhadas. Um aspecto fundamental para que, conjuntamente professora e alunos, identificassem um problema nesta situação foi a informação (Figura 2) sobre o monitoramento da obra por meio de câmeras instaladas pelo poder público daquela cidade ao longo da extensão da obra. Da interação com estas informações e dos diálogos entre todos os participantes da aula, foi definido o problema: considerando a altura da maré, em que horário os operários podem progredir mais intensamente nas obras de alargamento da faixa de areia da praia?

⁶ Camboriú é uma cidade praiana do estado de Santa Catarina - Brasil

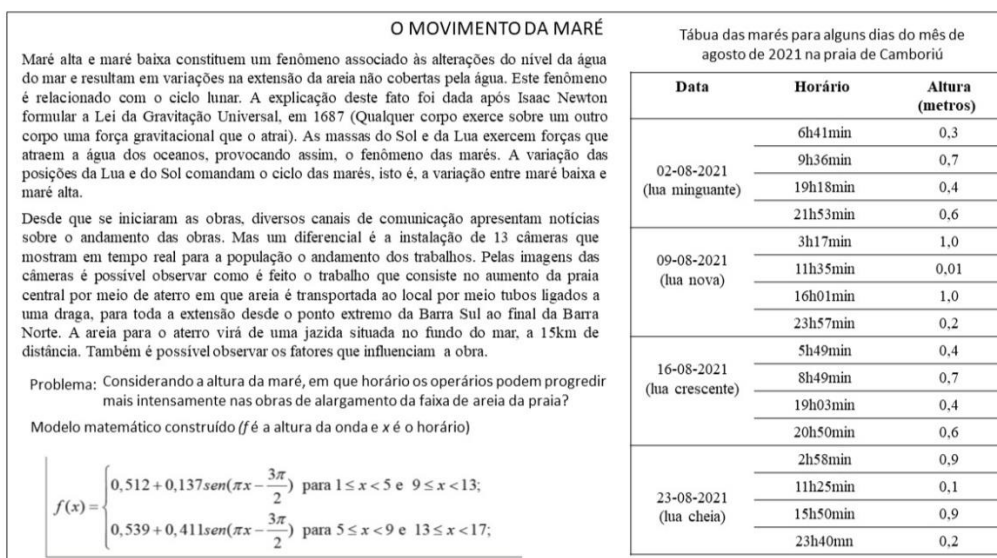


Figura 2.

Informações da atividade 1 (produzida pelas autoras)

A partir da definição do problema os alunos formaram sete grupos. No decorrer de seis aulas (realizadas duas à cada semana) estes grupos progrediram no desenvolvimento da atividade. Em cada dia de aula, parte do horário era com todos os grupos e outra parte era para o trabalho específico de cada grupo em salas criadas no *Google Meet* e cuja gravação era disponibilizada à professora.

O processo analítico dirigido aos dados (transcrições das gravações das aulas, relatório entregue pelos grupos e respostas ao questionário) nesta atividade visa buscar indícios em cada grupo em relação: (i) ao o que alunos entendem por validação; (ii) à importância que atribuem à validação; (iii) ao modo como realizam a validação.

Para inferir sobre o que entendem por validação, olhamos para o relatório entregue uma vez que foram solicitados a incluir neste texto o que foi referente à cada etapa da modelagem que identificaram. Na Tabela 2 consta a informação de cinco grupos. Dois grupos não incluíram essa informação no relatório.

Tabela 2.

O que alunos entendem por validação (relatórios entregues pelos grupos)

Grupo	Trecho do relatório
G1	Podemos dizer que a validação é um momento para tomar consciência de erros que passaram despercebidos tanto na parte matemática quanto na formulação da resposta para o problema.
G2	A validação consiste em um meio de análise da resposta encontrada e de mostrar a pertinência das hipóteses e simplificações.
G4	A validação envolve a análise crítica da resposta para o problema, para evidenciar se ela é consistente e adequada para o problema.
G6	A validação é a etapa da modelagem em que se faz necessária a análise da representação matemática, o modelo matemático, encontrado para o problema.

G7	A validação consiste em uma revisão olhando para os dados iniciais juntamente com as hipóteses e os processos matemáticos utilizados no desenvolvimento do modelo. O modelo deve ser aplicável e compreensível.
-----------	---

Considerando os dados da Tabela 2, podemos concluir que nesta atividade os alunos entendem que a validação: (a) constitui um momento para detectar possíveis equívocos, seja na matematização da situação, seja na elaboração da resposta para o problema (G₁); (b) consiste na avaliação da resposta obtida para o problema (G₂,G₄); (c) consiste na análise do modelo matemático (G₆); (d) deve incluir uma revisão mais ampla, incluindo os dados e os processos matemáticos usados (G₇).

Para capturar a importância que os alunos atribuem à validação, analisamos as respostas de cada questionário respondido imediatamente após o término da atividade. Respostas dos alunos constam na Tabela 3.

Tabela 3.

Importância da validação na atividade de modelagem matemática (respostas dos alunos ao questionário)

Grupo	Resposta ao questionário
G1	A validação é importante para corrigir erros, principalmente na elaboração do modelo, já que o modelo deve ter o comportamento semelhante aos dados reais que se conhece. Por isso, a validação permite obtermos uma garantia de que os resultados encontrados estão condizentes, não só pela matemática, mas também para o problema resolvido pela modelagem.
G2	A validação é necessária porque a avaliação feita pode nos levar a retomar etapas, reanalisando os dados, alterando hipóteses ou modificando o modelo, podendo, portanto, ser realizada diversas vezes durante a atividade.
G3	É importante validar os resultados encontrados para o problema, mas para isso é necessário verificar se o modelo matemático está correto. Pois se o modelo não é bom, então não serve para responder ao problema.
G4	É importante validar os resultados obtidos para evidenciar que a solução encontrada é razoável e consistente, sendo, portanto, confiável e adequada para o problema.
G5	Os resultados da validação são importantes porque detectam que modelo pode não ser o mais adequado para essa situação; ele pode se ajustar apenas a uma parte dos dados, podendo gerar resultados diferentes dos esperados.
G6	Validar os resultados encontrados para o problema está intimamente ligado com a validação do modelo matemático; caso os resultados não sejam satisfatórios de acordo com a situação real, precisa-se rever o modelo, corrigir ou reconstruir, de modo que os resultados por ele obtidos sejam mais próximos dos dados reais.
G7	A validação do modelo é necessária para viabilizar a percepção de erros e a realização de ajustes necessários.

De modo geral, os alunos associam a importância da validação à necessidade de validar o modelo matemático e os resultados por ele obtidos. Alguns grupos também se referem à análise dos procedimentos usados na construção do modelo. A necessidade de validar procedimentos no decorrer da atividade e não somente ao final, também foi mencionada por um grupo. Outro grupo se refere à importância da validação como meio que oferece a *garantia*

de que o modelo bem como a resposta são adequados. Em todas as respostas a importância da validação é dirigida à resposta do problema e à verossimilhança dos resultados do modelo com os dados observados, como se fosse uma comparação.

Finalmente, com relação ao modo como os alunos realizam a validação, nosso movimento analítico considera as informações do relatório entregue e um ciclo de modelagem matemática que os alunos foram solicitados a incluir no relatório, especificando o que foi realizado em cada etapa (Tabela 4).

Tabela 4.

Modos de realização da validação pelos alunos (elaborada pelas autoras)

Grupo	Modo de avaliação																																																																		
G ₁	Validamos o modelo matemático de modo a obter o erro entre os dados observados e os dados estimados pelo modelo. Também interpretamos e analisamos a resposta para o problema proposto e a validamos a partir da comparação com os dados da internet obtidos pelas câmeras instaladas em toda a extensão em que estavam acontecendo as obras.																																																																		
G ₂	Como resultados encontramos que: Para dias de lua minguante e de lua crescente os horários em que o trabalho dos operários pode ser mais eficiente e intenso é: entre 6h41 min e 8h8min e entre 14h30 min e 20h 36 min. Para dias de lua cheia e de lua nova os horários em que o trabalho dos operários pode ser mais eficiente e intenso é: entre 7h26min e 13h 47min e 20h e 23h 57 min. Isso é o que nós obtivemos pelo modelo, mas na interpretação nós ficamos em dúvida se nesse horário da lua nova o trabalho acontecia de noite mesmo. Então nós só validamos o modelo por comparação.																																																																		
G ₃	Nós validamos o modelo para as quatro fases da lua. (o quadro aqui inserido é da lua minguante e da lua crescente) e aí nós olhamos para o relatório do trabalho dos operários para ver se trabalhavam nos horários que nós encontramos. O modelo está bom, aí então nós supomos que a resposta que ele vai dar também é.																																																																		
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Data</th> <th></th> <th>Horário (horas/minutos)</th> <th>Horári</th> <th>Altura (metros)</th> <th>Média</th> <th>x</th> <th>Erro</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="4">02/08/2021</td> <td>1</td> <td>6:41</td> <td>6,68</td> <td>0,3</td> <td>0,375</td> <td>0,375</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>9:36</td> <td>9,6</td> <td>0,7</td> <td>0,65</td> <td>0,649</td> <td>0,15%</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>19:18</td> <td>19,3</td> <td>0,4</td> <td>0,375</td> <td>0,375</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>21:53</td> <td>21,88</td> <td>0,6</td> <td>0,65</td> <td>0,649</td> <td>0,15%</td> </tr> <tr> <td rowspan="4">16/08/2021</td> <td>9</td> <td>5:49</td> <td>5,81</td> <td>0,4</td> <td>0,375</td> <td>0,375</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>8:49</td> <td>8,81</td> <td>0,7</td> <td>0,65</td> <td>0,649</td> <td>0,15%</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>19:03</td> <td>19,05</td> <td>0,4</td> <td>0,375</td> <td>0,375</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>20:50</td> <td>20,83</td> <td>0,6</td> <td>0,65</td> <td>0,649</td> <td>0,15%</td> </tr> </tbody> </table>	Data		Horário (horas/minutos)	Horári	Altura (metros)	Média	x	Erro	02/08/2021	1	6:41	6,68	0,3	0,375	0,375	0	2	9:36	9,6	0,7	0,65	0,649	0,15%	3	19:18	19,3	0,4	0,375	0,375	0	4	21:53	21,88	0,6	0,65	0,649	0,15%	16/08/2021	9	5:49	5,81	0,4	0,375	0,375	0	10	8:49	8,81	0,7	0,65	0,649	0,15%	11	19:03	19,05	0,4	0,375	0,375	0	12	20:50	20,83	0,6	0,65	0,649	0,15%
Data		Horário (horas/minutos)	Horári	Altura (metros)	Média	x	Erro																																																												
02/08/2021	1	6:41	6,68	0,3	0,375	0,375	0																																																												
	2	9:36	9,6	0,7	0,65	0,649	0,15%																																																												
	3	19:18	19,3	0,4	0,375	0,375	0																																																												
	4	21:53	21,88	0,6	0,65	0,649	0,15%																																																												
16/08/2021	9	5:49	5,81	0,4	0,375	0,375	0																																																												
	10	8:49	8,81	0,7	0,65	0,649	0,15%																																																												
	11	19:03	19,05	0,4	0,375	0,375	0																																																												
	12	20:50	20,83	0,6	0,65	0,649	0,15%																																																												
G ₄	Nós fizemos: Interpretação e validação da resposta para o problema - comparação dos horários de trabalho dos operários obtidos pelo modelo com aqueles das câmeras instaladas pela prefeitura. Validação do modelo: análise do erro da altura das marés (dados observados) em relação aos resultados obtidos pelo modelo para esta altura.																																																																		
G ₅	A validação do modelo foi feita por uma comparação entre os dados da realidade e os encontrados pelo modelo e ocorreu na fase interpretação de resultados e validação. Vimos que o modelo é eficiente para responder ao problema proposto, pois chegamos a um erro de menos de 1%, o que é aceito, e deixamos claro que desconsideramos os dias em que há mudanças climáticas que são fatores para que o horário de trabalho dos operários mude por conta das marés. Para a resposta nós olhamos alguns dias da câmera e aí vimos que no dia 14 de setembro mostrou que as máquinas estavam realizando trabalhos de alargamento no período da manhã até por volta de 15h e isso coincide com o deu no modelo entre lua crescente e lua cheia.																																																																		

G ₆	Validamos a resposta utilizando dados de como os operários trabalhavam; o modelo validamos comparando valor encontrado e valor observado. Mas é importante lembrar que há outros fatores que podem interferir nos resultados, mas consideramos o modelo obtido adequado.
G ₇	Para a validação do modelo e a confirmação da resposta realizamos as seguintes etapas: - Revisão dos dados iniciais juntamente aos processos matemáticos utilizados no desenvolvimento do modelo; - Analisamos se o modelo é aplicável e compreensível; - Comparando os dados encontrados no início da atividade e os dados obtidos pelo modelo observamos pouca ou nenhuma variação; - Concluímos que a implementação do modelo é confiável, assim a resposta para o problema é confiável.

Os excertos dos relatórios e do ciclo de modelagem construído para essa atividade indicam que em suas ações referentes à validação, os alunos incluem a avaliação do modelo matemático bem como a avaliação da resposta. Relativamente à validação do modelo, os alunos comparam os resultados com os dados referentes à altura da maré nas diferentes fases da lua obtidos no início da atividade.

Para a validação da resposta, todavia, as informações que lhes dariam condições de validar (ou não) a resposta, eram externas à atividade. De fato, os resultados obtidos com o modelo foram submetidos à uma comparação com informações que estavam disponíveis no *site* da prefeitura da cidade. Neste sentido, há nesta etapa da atividade um alto grau de autenticidade, conforme indicam Almeida e Omodei (2022). A validação se volta ao propósito da construção do modelo: determinar o horário de trabalho dos operários da obra. Não houve, entretanto, para a resposta em particular, um olhar sobre a precisão dessa resposta, mas, frente a técnica disponível de avaliar a resposta em termos das imagens de vídeos disponíveis sobre o horário dos trabalhadores, a validação, embora não absoluta, foi um momento de decisão e de reflexão sobre a situação em estudo.

Em termos gerais, os dados obtidos, indicam que as ações referentes à validação ocorreram no momento final da atividade. Usaram, entretanto a expressão *verificação* para se referir à análise do modelo matemático. Na Figura 3 apresentamos uma síntese relativa aos três aspectos analisados nessa atividade.

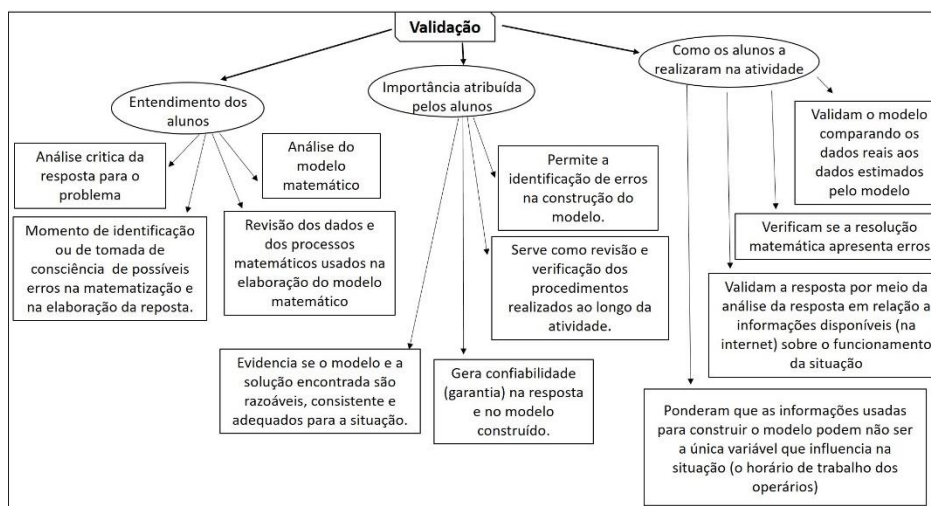


Figura 3.

Aspectos da validação investigados na atividade 1 (produzido pelas autoras)

Atividade 2: o zíper gigante

A atividade com a temática *O zíper gigante* foi sugerida pela professora para o grupo de seis alunos (A₅, A₁₃, A₁₄, A₁₉, A₂₀ e A₂₁). A situação se refere a um monumento situado na entrada da cidade de Cianorte⁷, conhecida como Capital do Vestuário. O monumento é conhecido como Portal da Moda e contém um zíper aberto sobre a rodovia PR-323 sustentado em um lado por uma agulha e um alfinete e no outro lado por um cone.

Os alunos já tinham experiências anteriores com modelagem e para a atividade foi disponibilizada ao grupo de alunos a imagem (Figura 4) juntamente com algumas questões entre as quais está: qual é o comprimento desse zíper? Reunidos em sala do *Google Meet*, cuja gravação foi disponibilizada à professora, no primeiro dia de aula os alunos se inteiraram do tema e definiram encaminhamentos tais como a busca de dados auxiliares necessários, hipóteses, simplificações, possíveis resoluções bem como deliberaram sobre como sua resposta poderia ser validada. Os alunos se reuniram mais duas vezes fora do horário da aula, coletaram dados complementares sobre a rodovia em que se localiza o portal, propuseram uma resolução e uma resposta para o problema, validaram-na e, posteriormente, em uma terceira aula, fizeram uma apresentação para os demais alunos da disciplina.

⁷ Cianorte é uma cidade do norte do estado do Paraná, estado da região sul do Brasil. Uma das principais atividades econômicas da cidade é a confecção de roupas. Provavelmente por essa razão na entrada da cidade há um portal que inclui vários utensílios do ramo da costura.



Figura 4.

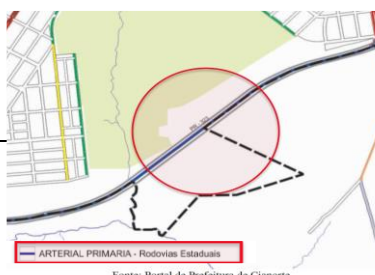
A temática da atividade de modelagem (dados da pesquisa)

Para esta atividade o olhar, dirigido às gravações das aulas e dos encontros dos alunos do grupo, ao relatório entregue e ao questionário respondido imediatamente após a última aula, visa capturar o modo como os alunos realizaram a validação uma vez que os dois outros itens (o que entendem por validação e qual é a sua importância em atividades de modelagem) esses alunos já haviam respondido na atividade relativa ao movimento das marés.

Tabela 5.

Modos de avaliação dos alunos (organizado pelas autoras)

Fonte do dado	Finalidade e ação	Descrição
Transcrição da Gravação	Definir a medida de referência	<p>A20: Esse valor parece estar errado! Não pode ser só isso.</p> <p>A5: É, usar a altura do radar não vai dar certo. (A5 se refere ao radar que aparece na imagem da Figura 4)</p> <p>A20: Não! Eu acho que o radar está antes do portal, então dá essa diferença na proporção.</p> <p>A5: Verdade! São distâncias diferentes.</p> <p>A10: Acho que o radar estando mais à frente, não é um bom ponto de referência.</p> <p>A20: É, temos que considerar outro ponto de referência</p> <p>A10: Tem que ser a largura da rodovia, veja na foto (referindo-se à imagem da figura 3).</p>
Relatório	Definir a medida de referência	<p>Para determinar o comprimento real do zíper, com base na imagem dada, é necessário, primeiramente, estabelecer um referencial, que será base para a determinação das medidas necessárias para resolver o problema. Inicialmente pensamos em tomar o radar como referência, porém verificamos que a medida do comprimento do radar não seria o mais adequado visto que, na imagem, o radar se encontra em uma posição a frente do portal, o que possivelmente altera seu tamanho na foto. Por isso nós pesquisamos e encontramos os dados sobre a rodovia.</p>



Relatório	Determinar largura da rodovia	Para verificar os procedimentos de medição usados na imagem para obter a largura da rodovia buscou-se encontrar a largura real da via. Para tanto, inicialmente pesquisamos a localização/ endereço do portal. Os resultados da pesquisa apontaram que a via está localizada na PR-323 - Zona 3, Cianorte - PR, 87200-000 (Rodovia João Jorge Saad). Sabendo que o portal se encontra na PR-323, isto é, em uma via urbana estadual, procurou-se determinar qual o tipo desta via. [...]. Determinou-se, assim, que a largura de cada faixa de rolamento da via arterial corresponde a 3,50 m.
-----------	-------------------------------	--

Relatório	Validar a resposta	Assim, sabendo que o comprimento real da via é de $3,5+3,5=7$ m, fizemos as proporções com as medidas obtidas na imagem e obtivemos que o comprimento do zíper é de aproximadamente 28 m. Para validar o tamanho do zíper utilizamos o <i>Google Earth</i> pelo qual encontramos o comprimento real do zíper, utilizando a régua do próprio sistema. Foi obtido o valor de aproximadamente 28,05m, o que se aproxima do comprimento obtido através dos cálculos de proporção realizados.
-----------	--------------------	---



Transcrição de gravação	Explicar validação	a A validação foi primeiro dos nossos procedimentos para obtenção da medida de 28m e fizemos isso de duas maneiras (o grupo se referia às duas resoluções, uma usando régua para obter as medidas e outra inserindo a imagem no software Geogebra). Depois nós usamos a medição pelo <i>Google Earth</i> para conferir essa medida. Porque nosso interesse era saber mesmo se estava correto porque 28m é bastante para um portal que fica sobre uma rodovia de 7m. Mas aí tem uma coisa que a professora falou para nós: será que a nossa modelagem não serve para validar a medida do <i>Google Earth</i> ?
--------------------------------	--------------------	---

As informações da Tabela 5 indicam que indícios de validação podem ser observados desde o início da atividade, ainda que isso possa ter se dado de forma inconsciente pelos alunos. Nestes momentos, entretanto, os alunos se refeririam a verificações (de informações e de procedimentos). Validar a resposta obtida (28m) foi importante para o grupo, considerando que o valor por si só, não tinha um significado para eles, mas associá-lo com o tamanho da rodovia, por exemplo, dava um indício do tamanho do portal. Para a validação da resposta propriamente dita, o grupo recorreu também a uma

informação externa – a medição usando o *Google Earth*. A reflexão a partir de uma questão da professora foi importante também para o grupo valorizar seus procedimentos e gerar confiança nos métodos usados para a obtenção da resposta.

Resultados - em busca de um *Framework*

A reunião de argumentos já compartilhados na literatura, trazidos à discussão no presente artigo, com os resultados da pesquisa empírica dirigida à validação em atividades de modelagem matemática, sustenta a organização do *framework* relativo a entendimentos, importância e modos de realizar a validação em atividades de modelagem matemática.

Os resultados relativos a como os alunos entendem a validação, que importância lhe atribuem e como a realizam nas atividades de modelagem que desenvolveram, em alguns aspectos refletem elementos já apontados em pesquisas anteriores, mas em outros trazem à tona especificidades da validação ainda não sinalizadas.

Os entendimentos e a importância da validação para os alunos, investigados nas atividades por eles desenvolvidas, refletem, por um lado, ações sinalizadoras de verificação, como identificação de erros e sua correção dirigida a procedimentos matemáticos bem como à análise de adequação de dados e hipóteses. Por outro lado, revelam a ênfase que os alunos dão à validação, conferindo-lhe expressões como garantia, confiabilidade e pertinência dos meios usados e da resposta obtida.

Aspectos sinalizadores de que os modelos matemáticos produzem resultados *inerentemente parciais*, como adverte Parker (2020), de que não há validação absoluta como indica Alvarado (2017) e de que a modelagem é relativa ao mundo como *experenciado pelo modelador* (Hestenes, 2010), conferindo ao modelo uma certa temporalidade, como advertem Almeida, Sousa e Tortola (2021), não foram identificados nos dados coletados com os alunos, ainda que possam ter sido, implicitamente, considerados por eles.

Há, todavia, uma manifestação de entusiasmo pelos alunos o que os faz, por meio dos modos com que realizam a validação, fomentar suas decisões com base nos meios que usam para validar. Em ambas as atividades, o modelo matemático é construído com atenção às especificidades da situação, como por exemplo as fases da lua na atividade do movimento das marés e a busca por informações confiáveis sobre a largura da rodovia na atividade do portal da cidade de Cianorte. Em ambas as atividades, modelo e resposta são validados e incluem procedimentos específicos. Enquanto na validação do modelo nas duas atividades os alunos consideram aspectos matemáticos e aspectos da situação, na validação da resposta o fazem

associado a pesquisas para além da modelagem em si, mas buscando informações em contextos externos à sala de aula e pertinentes à situação em estudo.

Assim, a validação ao mesmo tempo em que levou os alunos a validar seus procedimentos internos e o produto final deles decorrentes (modelo e resposta), os levou a reflexões sobre fatores externos relativos à atividade, como é o caso de informações em *site* da prefeitura e do *Google Earth*. Este aspecto da validação não foi identificado nas pesquisas da literatura, sendo, portanto, especificidade da pesquisa empírica aqui realizada e oposta ao que sugere o trabalho de Ishibasshi e Uegatani (2019) em que mundos fictícios sustentaram o processo de validação.

O que a pesquisa empírica sinaliza é que a eficácia do modelo é associada a um propósito (determinar o horário de trabalho dos operários e determinar o tamanho do zíper) e a validação deve apontar evidências de que ele atende a este propósito. Ou seja, a aceitação ou a refutação do modelo depende dos propósitos de sua construção. Esta questão desloca o foco da validação do modelo em si para a validação do processo de modelagem como um todo, uma vez que o que se poderia considerar como *propósito* é algo definido, ou mesmo conjecturado, no decorrer das diferentes etapas da atividade de modelagem matemática, sendo assim, a totalidade da modelagem a quem se deve dirigir a validação.

Ainda que a análise das atividades de modelagem aqui referidas não se tenha dirigido à identificação de tipos de validação como especificados em Czocher (2018), as informações da Tabela 4 e da Tabela 5, fornecem elementos que sinalizam que os alunos validaram procedimentos, matemáticos e não-matemáticos, no decorrer da atividade, verificaram cálculos e dados usados, validando aspectos pontuais da modelagem para além da resposta obtida.

Um *framework* relativo à validação em atividades de modelagem incluindo as estratégias de pesquisa empreendidas no artigo é apresentada na Figura 5, revelando dos entendimentos, da importância e dos modos de realizar a validação em atividades desse tipo.

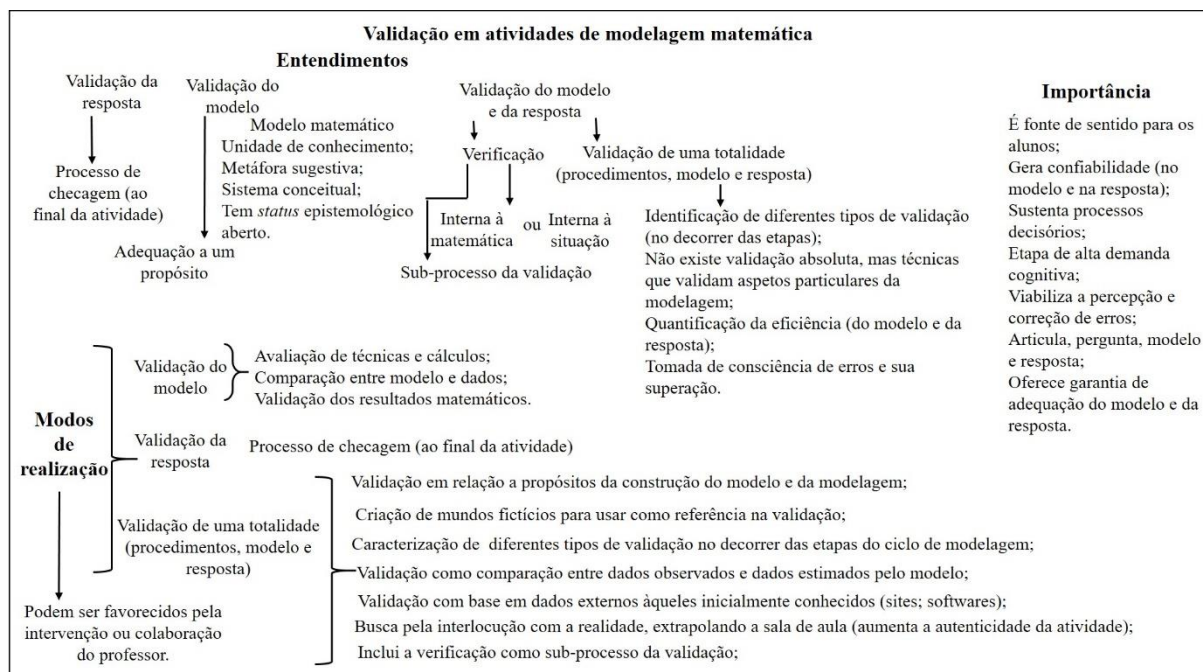


Figura 5.

Framework para a validação na modelagem matemática (produzido pelas autoras)

O *framework* aqui construído mostra qualificações e modos de fazer a validação. O que se pode observar é que, por um lado, ele engloba diferentes pontos de vista, incluindo justificativa para alguns, mas não para outros. Assim, pode servir de guia para estudos posteriores relativos à validação em atividades de modelagem matemática. Por outro lado, os elementos desse *framework* podem também ser objeto de problematização em pesquisas futuras para, no âmbito das pesquisas em modelagem matemática, manter a flexibilidade e o debate.

De fato, baseado em várias teorizações já percebidas na literatura e em práticas de modelagem, o *framework* da validação em atividades de modelagem aqui proposto indica o que sobre ela se diz no atual momento histórico, cultural e reflete a rede argumentativa que decorre da presente pesquisa.

Considerações finais

Embora sejam reconhecidos movimentos para promover a inclusão da modelagem matemática na sala de aula, essa inclusão, como proposta que requer construções e decisões para as quais não há esquemas *a priori* definidos (Geiger et al. 2022; Almeida, 2018), ainda encontra resistência, inclusive em indicações, que podem ser observadas em materiais didáticos para o ensino de Matemática (Doerr & Lesh, 2011; Mutti & Klüber, 2021).

Trazer para discussão e conhecimento o *design* cíclico, de modo geral, associado às atividades de modelagem, pode ser uma maneira de combater essa resistência, colaborando para o enfrentamento dos desafios que a modelagem propõe. Mesmo tendo cada etapa do ciclo suas

próprias especificidades, a validação, em alguma medida, funciona como ação reguladora que demanda tomadas de decisão e da qual decorrem julgamentos. Assim, se a modelagem matemática busca entender, explicar ou propor previsões para uma situação da realidade, quão bem essa explicação e previsões são efetivadas é o que a validação vai indicar.

O propósito do artigo de organizar e apresentar um *framework* é viabilizado a partir de uma triangulação de dados que acrescenta ao que já é reconhecido na literatura relativamente à validação, resultados de uma pesquisa empírica em que, com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática foram coletados dados mediante diferentes tipos de instrumentos. O resultado aponta para entendimentos, modos de fazer e a importância que a validação tem na modelagem matemática.

Embora a validação possa ser reconhecida como etapa final nos ciclos de modelagem, não se pode tê-la como processo cumulativo que só se inicia ao final da atividade e do qual apenas decorre aceitação ou refutação. Ao invés disso, a validação pode atuar como agente de iteratividade e promover reflexão, crítica, retomadas, revisões e pode fomentar o sucesso dos alunos.

De fato, os resultados apontam que mecanismos de validação podem ser ativados em diferentes etapas do ciclo de modelagem e podem se dirigir, em alguns momentos mais aos procedimentos e avaliações matemáticas, em outros mais à resposta e em outros ainda articular, como é pretendido, as análises da matemática e sua repercussão sobre a resposta. Assim, se distingue o processo de verificação do processo de validação.

O modelo matemático construído, embora apoiado na premissas e hipóteses relativas à situação só se torna a estrutura sistêmica que precisa ser a partir de operações e regras da matemática que, de forma não arbitrária, levam em consideração as especificidades da situação a partir das conjecturas dos alunos modeladores. Neste sentido, são aproximações da realidade e, portanto, têm *status* epistemológico aberto à crítica e à avaliação. A validação atua então como quantificação da eficiência do modelo.

O que se pode concluir, entretanto é que, ainda que ações pontuais sejam reconhecidas como processos de validação, é na validação da totalidade (que inclui a pergunta a ser respondida, o modelo, sua construção e a resposta que ele é capaz de produzir) que reside a eficiência da validação como meio de gerar confiabilidade e, na expressão dos alunos modeladores, *garantia* de que o que se pode dizer de uma situação da realidade mediante a modelagem matemática constitui uma resposta adequada, ainda que essa adequação possa ser circunstancial e provisória.

Referências

- Almeida, L. M. W. (2010). Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. *Zetetiké*, 18, p. 387-414. DOI: 10.20396/zet.v18i0.8646663
- Almeida, L. M. W. (2018). Considerations on the use of mathematics in modelling activities. *ZDM*, 50, p. 19-30. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-017-0902-4>
- Almeida, L. M. W.; Silva, K. P.; Vertuan, R. E. (2012) *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto.
- Almeida, L. M. W., Sousa, B. N. P. A., & Tortola, E. (2021). The Formulation of Hypotheses in Mathematical Modelling Activities. *Acta Scientiae*, 23(5), p.66-93. <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/6492>
- Almeida, L. M. W. & Omodei, L. B. C. (2022) Autenticidade em Atividades de Modelagem Matemática: em busca de um design. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo,24(3), p.108-144.
- Alvarado, C. S. M. (2017). *Estudo e implementação de métodos de validação de modelos matemáticos aplicados no desenvolvimento de sistemas de controle de processos industriais* [Doctoral dissertation, Universidade de São Paulo]. <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3139/tde-05092017-092437/en.php>
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto.
- Barquero, B., Jensen, B.E. (2020) Impact of theoretical perspectives on the design of mathematical modelling tasks. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, p. 98–113. DOI: 10.35763/aiem.v0i17.317
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). Springer International Publishing.
- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In C. Haines, Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling: Education, engineering, and economics* (pp. 222–231). Chichester: HorwoodBRASIL.
- Ministério da Educação. (2018), *Base Nacional Comum Curricular*. Educação é a base, Brasília, Ministério da Educação.
- Bunge, M. (1985). *Racionalidad y realismo*. Madrid: Alianza.
- Bunge, M. (1969). *La Investigación Científica*. Barcelona: Ariel.
- Castro, E. M. W. & Almeida, L. M. W. (2023) The Individual and the Collaborative Nature of Metacognitive Strategies and Their Unfoldings for Mathematical Modelling. *Acta Sci. (Canoas)*, 25(3), 1-25.
- Czocher, J. A. (2013). *Toward a description of how engineering students think mathematically* [Doctoral dissertation, The Ohio State University]. https://etd.ohiolink.edu/apexprod/rws_olink/r/1501/10?clear=10&p10_accession_num=osu1371873286
- Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process?. *Educational Studies in Mathematics*, 99, 137-159.

- Czocher, J., Stillman, G., & Brown, J. (2018). Verification and Validation: What Do We Mean?. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.
- Doerr, H. M. & Lesh, R. (2011) Models and Modelling Perspectives on teaching and learning mathematics in the twenty-first century. In: Kaiser, G.; et al. (Eds.). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*. New York: Springer, p. 247-268.
- Duarte, T. (2009) A possibilidade da investigação a 3: reflexões sobre triangulação (metodológica). CIES e-WORKING PAPER N. 60/2009. *Centro de Investigação e Estudos de Sociologia*. ISSN 1647-0893). http://www.cies.iscte.pt/destaques/documents/CIES-WP60_Duarte_003.pdf
- Elaasar, M. (2018). Definition of modeling vs. programming languages. In *Leveraging Applications of Formal Methods, Verification and Validation. Modeling: 8th International Symposium, ISoLA 2018, Limassol, Cyprus, November 5-9, 2018, Proceedings, Part I 8* (pp. 35-51). Springer International Publishing.
- Ferreira, A. B. D. H. (2009). Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa. In *Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa* pp. 2120-2120.
- Ferreira, P. E. A., & Silva, K. A. P. D. (2019). Modelagem matemática e uma proposta de trajetória hipotética de aprendizagem. *Bolema*, 33, p. 1233-1254. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/kYQxKL96N3mgVdhLZhfygYf/?format=pdf&lang=pt>
- Ferri, B. R. *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Picassoplatz, Switzerland: Springer, 2018, p. 13 – 39.
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM*, 38, pp. 143-162. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02655886>
- Geiger, V., Galbraith, P., Niss, M., & Delzoppo, C. (2022). Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), pp. 313-336.
- Godoy, A. S. (1995b) Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de empresas*, v. 35, n. 3, pp. 20-29.
- Cakmak Gurel, Z., & Bekdemir, M. (2022). The Teacher and Peer Intervention for Pre-Service Mathematics Teachers on the Validity of Mathematical Models. *Pedagogical Research*, 7(2).
- Hallerstede, S., Larsen, P. G., & Fitzgerald, J. (2018). A Non-unified view of modelling, specification and programming. In *Leveraging Applications of Formal Methods, Verification and Validation. Modeling: 8th International Symposium, ISoLA 2018, Limassol, Cyprus, November 5-9, 2018, Proceedings, Part I 8* (pp. 52-68). Springer International Publishing.
- Hestenes, D. (2010). Modeling Theory for Math and Science Education. In: R. Lesh et al. (eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*, 13, Springer Science+Business Media, LLC. DOI 10.1007/978-1-4419-0561-1_3, C
- Eisenhart, M. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education rese. In: *Proceedings of Thirteenth Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education*. Blacksburg, Virginia, USA. Robert Underhill (ed.). pp-200-220.

- Hidiroglu, Ç. N., & Bukova Güzel, E. (2013). Conceptualization of Approaches and Thought Processes Emerging in Validating of Model in Mathematical Modeling in Technology Aided Environment. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 13(4), pp. 2499-2508.
- Houaiss, A. (2021) *Dicionário de Língua Portuguesa*. São Paulo: Objetiva. <https://houaiss.uol.com.br/pub/apps/www/v3-3/html/index.php#3>. Parker, WS (2020). Avaliação do modelo: Uma visão de adequação ao propósito. *Filosofia da Ciência*, 87 (3), p. 457-477.
- Ikeda, T. (2013). Pedagogical reflections on the role of modelling in mathematics instruction. *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice*, pp. 255-275.
- Ishibashi, I., & Uegatani, Y. (2019). Creation of possible fictional worlds as a process of validation in mathematical word problem-solving and mathematical modeling activities. *JSSE Research Report*, 34(3), pp.165-170.
- Ishibashi, I., & Uegatani, Y. (2022). Cultural relevance of validation during mathematical modeling and word problem-solving: Reconceptualizing validation as an integration of possible fictional worlds. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, 100934.
- Kowalek, R. (2021). *A validação em atividades de modelagem matemática*. [Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Universidade Estadual de Londrina].
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In A. E. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–645). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mutti, G. S. L.; Klüber, T. E. (2018). Aspectos que constituem práticas pedagógicas e a formação de professores em modelagem matemática. *Alexandria*, 11, p. 85-107.
- Niss, M. (2010). Modelling a crucial aspect of students' mathematical modelling. R. Lesh et al. (Eds.), *Modelling Students' Mathematical Modelling Competencies*, (ICTMA 13) (pp 43--60). New York: Springer.
- Pace, D. K. (2004). Modeling and simulation verification and validation challenges. *Johns Hopkins APL technical digest*, 25(2), pp. 163-172.
- Thacker, B. H., Anderson, M. C., Senseny, P. E., & Rodriguez, E. A. (2006). The role of nondeterminism in model verification and validation. *International Journal of Materials and Product Technology*, 25(1-3), p.144-163.