ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i1p217-246

Contribuições de uma organização de ensino de sistemas lineares via resolução de problemas no 2º ano do ensino médio

Contributions of teaching linear systems via problem solving in the 2nd year of high school

Aportes de la enseñanza de sistemas lineales a través de la resolución de problemas en el 2do año de secundaria

Apports de l'enseignement des systèmes linéaires par la résolution de problèmes en 2ème année du lycée

João Alessandro da Luz[1]
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Doutor em Ensino de Ciências e Matemática
https://orcid.org/0000-0002-9717-110X

Marcelo Carlos de Proença[2]
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Doutor em Ensino de Ciências e Matemática
https://orcid.org/0000-0002-6496-4912

Resumo

O objetivo deste estudo foi analisar e descrever as contribuições de uma organização de ensino via resolução de problemas para a aprendizagem do conteúdo de sistemas lineares. Os participantes foram 34 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública. Os instrumentos e técnicas de registro de dados foram: gravação e transcrição de áudios, fotografias, folhas de registros dos alunos e notas de campo. A análise de dados baseou-se na pesquisa qualitativa descritiva e interpretativa e abarcou o desempenho e compreensão dos alunos nas quatro etapas da organização de ensino proposta: (1) de uso do problema como ponto de partida; (2) de formação do conceito; (3) de definição do conteúdo; e (4) de aplicação em novos problemas. Os resultados mostraram que inicialmente os grupos de alunos utilizaram mais a estratégia de tentativa e erro, revelando pouca recorrência às representações algébricas. Nas etapas seguintes, os grupos revelaram compreender os aspectos conceituais de equações lineares e sobretudo de sistema de equações, de modo que puderam estabelecer relação entre a linguagem conceitual e a linguagem formal, baseados nas representações algébricas. Na etapa 4, os grupos tiveram bom desempenho, porém constatamos dificuldades nas etapas de execução e monitoramento do processo de resolução de problemas. Concluímos que os alunos

[1] jluz@escola.pr.gov.br
[2] mcproenca@uem.br

demonstraram entendimento da compreensão conceitual e dos processos algorítmicos de sistemas lineares, revelando contribuições da proposta de organização do ensino para o favorecimento da construção do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Ensino de matemática, Sequência didática, Abordagem de ensino, Sistemas lineares.

Abstract

The aim of this study was to analyze and describe the contributions of teaching via problem solving organization to learning the content of linear systems. The participants were 34 2nd year high school students from a public school. The instruments and techniques used to record the data were: audio recording and transcription, photographs, student record sheets and field notes. The data analysis was based on descriptive and interpretative qualitative research and covered the students' performance and understanding in the four stages of the proposed teaching organization: (1) using the problem as a starting point; (2) concept formation; (3) content definition; and (4) application in new problems. The results showed that initially the groups of students used more trial and error, with little recourse to algebraic representations. In the following stages, the groups showed that they understood the conceptual aspects of linear equations and, above all, systems of equations, so that they were able to establish a relationship between conceptual language and formal language, based on algebraic representations. In stage 4, the groups performed well, but we found difficulties in the stages of executing and monitoring the problem-solving process. We conclude that the students surveyed demonstrated an understanding of the conceptual understanding and algorithmic processes of linear systems, revealing contributions from the proposed organization of teaching to encourage the construction of algebraic thinking.

Keywords: Mathematics teaching, Didactic sequence, Teaching approach, Linear systems.

Resumen

El objetivo de este estudio fue analizar y describir las contribuciones de una organización docente a través de la resolución de problemas al aprendizaje del contenido de sistemas lineales. Los participantes fueron 34 alumnos de 2º año secundaria de un centro público. Los instrumentos y técnicas utilizados para registrar los datos fueron: grabación y transcripción de audio, fotografías, hojas de registro de los alumnos y notas de campo. El análisis de los datos se basó en la investigación cualitativa descriptiva e interpretativa y abarcó el desempeño y la comprensión de los alumnos en las cuatro etapas de la organización didáctica propuesta: (1) uso del problema como punto de partida; (2) formación del concepto; (3) definición del contenido; y (4) aplicación a nuevos problemas. Los resultados mostraron que, inicialmente, los grupos de alumnos utilizaron más bien una estrategia de ensayo y error, recurriendo poco a las representaciones algebraicas. En las etapas siguientes, los grupos mostraron una comprensión de los aspectos conceptuales de las ecuaciones lineales y, especialmente, de los sistemas de ecuaciones, de modo que fueron capaces de establecer una relación entre el lenguaje conceptual y el lenguaje formal, basado en representaciones algebraicas. En la etapa 4, los grupos tuvieron buen desempeño, pero encontramos dificultades en las etapas de ejecución y acompañamiento del proceso de resolución de problemas. Concluimos que los alumnos encuestados demostraron comprensión de los procesos de comprensión conceptual y algorítmica de sistemas lineales, revelando aportes de la organización de la enseñanza propuesta para incentivar la construcción del pensamiento algebraico.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas, Secuencia didáctica, Enfoque de enseñanza, Sistemas lineales.

Résumé

L’objectif de cette étude était d’analyser et de décrire les contributions d’une organisation enseignante à travers la résolution de problèmes à l’apprentissage des systèmes linéaires. Les participants étaient 34 élèves de deuxième année de l'enseignement secondaire d'une école publique. Les instruments et les techniques utilisés pour enregistrer les données étaient les suivants : enregistrement et transcription audio, photographies, fiches d'élèves et notes de terrain. L'analyse des données était basée sur une recherche qualitative descriptive et interprétative et couvrait les performances et la compréhension des élèves dans les quatre étapes de l'organisation pédagogique proposée : (1) utiliser le problème comme point de départ ; (2) former le concept ; (3) définir le contenu ; et (4) l'appliquer à de nouveaux problèmes. Les résultats ont montré que, dans un premier temps, les groupes d'étudiants ont plutôt utilisé une stratégie d'essai et d'erreur, avec peu de recours aux représentations algébriques. Dans les étapes suivantes, les groupes ont montré qu'ils comprenaient les aspects conceptuels des équations linéaires et surtout des systèmes d'équations, de sorte qu'ils étaient capables d'établir une relation entre le langage conceptuel et le langage formel, basé sur des représentations algébriques. A l'étape 4, les groupes ont obtenu de bons résultats, mais nous avons constaté des difficultés dans les phases d'exécution et de suivi du processus de résolution de problèmes. Nous concluons que les étudiants ont démontré une compréhension des processus conceptuels et algorithmiques des systèmes linéaires, révélant les contributions de la proposition d'organisation de l'enseignement pour encourager la construction de la pensée algébrique.

Mots-clés : Enseignement des mathématiques, Séquence didactique, Approche pédagogique, Systèmes linéaires.

Contribuições de uma organização de ensino de sistemas lineares via resolução de problemas no 2º ano do ensino médio

A BNCC – Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) orienta que o ensino de álgebra tem como um de seus objetivos o pensamento algébrico, de modo que o aluno venha a compreender, representar e avaliar problemas envolvendo quantidades, de maneira que possa representá-los usando a linguagem de símbolos com letras. Nesse sentido, Coelho e Aguiar (2018) e Kuhn e Lima (2021) defenderam que esse pensamento algébrico venha a possibilitar resolver problemas em diferentes contextos do cotidiano.

No entanto, as provas do Saeb 2019 (Brasil, 2019) e do Pisa 2018 (Brasil, 2021) revelaram baixos índices de proficiência em Matemática dos alunos brasileiros tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio no uso da álgebra. Para Kuhn e Lima (2021), esses resultados evidenciam que possivelmente há um ensino de álgebra fragmentado, mecânico, descontextualizado e que não propicia que o aluno desenvolva habilidades e competências concernentes ao conhecimento algébrico.

Nessa direção, estudos como de Borges (2018) e Proença et al. (2022), ambos de cunho bibliográfico referente ao ensino envolvendo álgebra, mostraram posturas de professores ainda a serem superadas. Borges (2018) indicou que os professores são presos a livros didáticos e técnicas algébricas e que não é apresentado de maneira interdisciplinar e contextualizada. Proença et al. (2022) evidenciaram dificuldades de alunos para compreensão e resolução de problemas, possivelmente ocasionadas por um processo de ensino que se baseia na retomada ou revisão de conteúdos, sendo necessário aproximar-se da incorporação de uma abordagem de ensino que busque em maior grau a formação de conceitos e não apenas de procedimentos.

Especificamente a respeito do ensino e aprendizagem do conteúdo sistemas lineares, estudos tanto no Ensino Fundamental (Battaglioli, 2008; Cataneo & Rauen, 2018; Negromonte et al., 2019; Valenzuela, 2007) quanto no Ensino Médio (Cunha Neto, 2020; Jordão, 2011; Maharani, 2020; Oktaç, 2018) apontaram uma série de obstáculos, tais como: uso de livros didáticos presos a cálculos algébricos e alunos com dificuldades de compreensão de problemas, o que envolve dificuldades na compreensão conceitual e no uso de técnicas algébricas.

Campos (2019) e Campos e Farias (2020) indicam que um caminho para o desenvolvimento do pensamento algébrico (e consequentemente de sistemas lineares), está na proposição de atividades envolvendo aritmética e álgebra com foco na resolução de problemas, haja vista que esta permite estabelecer conexões e relações no caminho para se chegar à solução.

Nesse sentido, o favorecimento do pensamento algébrico pode ser feito pelo uso de uma metodologia de ensino que envolva a resolução de problemas. Proença (2021) indica uma possibilidade para tal, ao apresentar uma proposta de organização de ensino, que tem como base adotar a resolução de problemas com foco no desenvolvimento conceitual, valendo-se das seguintes quatro etapas: uso do problema como ponto de partida, formação do conceito, definição do conteúdo, aplicação em novos problemas. Em termos do que os estudos, citados anteriormente, apontam, seguir essas etapas aparece como uma possibilidade contra o foco do ensino em técnicas e procedimentos matemáticos. Conforme destacaram Proença et al. (2022), essa proposta traz a oportunidade de o professor abordar o desenvolvimento conceitual em sintonia com o conhecimento procedimental de conteúdos matemáticos.

Dessa forma, nosso artigo tem por objetivo responder a seguinte questão norteadora: *que contribuições são elencadas de uma organização de ensino via resolução de problemas para a aprendizagem do conteúdo de sistemas lineares a alunos do 2º ano do Ensino Médio?* Para tal, estruturamos o artigo na seguinte forma: a primeira a seção na qual apresentamos os referenciais teóricos inerentes a nossa pesquisa, na segunda seção descrevemos a metodologia adotada, seguida da terceira seção de discussões de resultados, conclusões e referencias.

O pensamento algébrico para compreender sistemas lineares

Para Ponte, Branco e Matos (2009), o pensamento algébrico se orienta em três demandas de competências e habilidades: (i) representar - que envolve a leitura, compreensão, operação, tradução e representação algébrica em diferentes contextos; (ii) raciocinar – compreendendo a capacidade de realizar generalizações, compreensão de regras e deduções; e (iii) resolver problemas e modelar situações – por meio do uso conhecimentos algébricos, funções, gráficos, de resolução de problemas matemáticos e de outros domínios. Ponte (2006) corrobora com essas ideias enfatizando que o pensamento algébrico deve ainda se preocupar em estabelecer relações e representações entre objetos concretos e abstratos. Para Coelho e Aguiar (2018), o pensamento algébrico deve ter por objetivo propiciar que os alunos construam um pensamento de busca de analogias e padrões ao se depararem com situações problemas do cotidiano.

Nesse contexto, a BNCC – Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) infere que a álgebra deve ter por objetivo a construção do pensamento algébrico em um caminho que o permita compreender, representar e avaliar problemas envolvendo quantidades de modo a representá-los por uma linguagem de símbolos e letras. Kuhn e Lima (2021), ao refletirem sobre a construção do pensamento algébrico na BNCC, inferem que para que ela aconteça, os alunos devem ser capazes formular, empregar e interpretar a matemática em diferentes contextos. Nesse panorama, Pinheiro (2019) orienta para a necessidade de que muitas escolas devem preparar-se de modo a implantar propostas de ensino que garantam a promoção de condições que alcancem as habilidades e competências mencionadas pela BNCC.

Concernente a sistemas lineares, a BNCC chama a atenção de que o aluno deve ser capaz de resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que englobem equações lineares fazendo uso de técnicas algébricas e gráficas. Nesse sentido, Pontes (2021) enfatiza que o ensino de sistemas lineares tem importância na medida que os alunos tenham compreensão e entendimento para resolver problemas matemáticos tendo conhecimento de suas aplicações no contexto do cotidiano.

Dessa maneira, o ensino de sistemas lineares deve permitir uma construção do pensamento algébrico no sentido de que o aluno seja capaz de alcançar as demandas apontadas por Ponte, Branco e Matos (2009) na forma de: **representar** – pela compreensão, entendimento e reconhecimento de situações matemáticas em diferentes contextos que sejam equivalentes a sistemas lineares; **raciocinar** – relativas à capacidade de generalizar e planejar estratégias que permitam resolver sistemas lineares; e, **resolver problemas** de modo a usar métodos algébricos como por exemplo, o Teorema de Cramer e o escalonamento para resolução de sistemas lineares de modo a se chegar a solução de problemas.

No entanto, no Brasil, o ensino de sistemas lineares apresenta um contexto de dificuldades, a começar pelos livros didáticos. Battaglioli (2008) e Cataneo e Rauen (2018) ao analisarem livros didáticos de Matemática para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, apontaram a priorização de cálculos algébricos deixando de lado problemas contextualizados. Além disso, perceberam nos livros a ausência de atividades de elaboração de problemas, interpretação gráfica e de conversões inversas.

No trabalho em sala de aula, Delazari (2017), Negromonte et al. (2019) e Valenzuela (2007) e no Ensino Fundamental e Jordão (2011) no Ensino Médio, apresentam investigações nas quais os alunos pesquisados apresentaram dificuldades em tópicos de sistemas lineares, com entraves em interpretação de enunciados de problemas, na resolução de equações com três incógnitas e para classificar de maneira correta um sistema linear.

Esse panorama brasileiro é semelhante também em apontamentos de pesquisas internacionais tanto no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Ensino Superior. Maharani (2020) e Oktaç (2018) ao pesquisarem alunos de Ensino Médio da Indonésia, observaram alunos com obstáculos para identificarem conceitos e para resolverem problemas que exigiam raciocínio lógico mais elaborado no trabalho com sistemas lineares, dificuldades estas com origem em conteúdos algébricos do Ensino Fundamental. Chegando ao Ensino Superior, também na Indonésia, Dewi et al. (2021) investigaram licenciandos do curso de licenciatura em

Matemática apontando indivíduos com dificuldades para construir relações entre algoritmos algébricos na resolução de sistemas lineares devido a um conhecimento conceitual imaturo. Sobre esse fato elencado, os autores salientam a necessidade de pesquisas envolvendo a compreensão conceitual de conteúdos algébricos, sobretudo de sistema lineares.

No aspecto de ensino e aprendizagem de sistema lineares, a BNCC (Brasil, 2018) orienta que o ensino de sistemas lineares deve tornar o aluno capaz de "resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas". Por outro lado, Proença, Campelo e Santos (2022) enfatizam que a BNCC não traz a resolução de problemas como uma forma de ensino, preocupando-se apenas em levar os alunos a uma aplicação e/ou utilização da matemática aprendida no dia a dia da sala de aula. Nesse sentido, Proença, Campelo e Santos (2022, p. 17) argumentam que "se a resolução de problemas for integrada ao currículo, então deve ser entendida como estratégia de ensino e aprendizagem, e não simplesmente para aplicar conteúdos".

Tendo em vista esse panorama, acreditamos que a abordagem de ensino por meio da resolução de problemas e com viés na formação conceitual pode ser promissora no sentido de mudar esse quadro de percalços apontados no ensino de álgebra e de sistemas lineares. Sobre essa abordagem de ensino é que dissertaremos na próxima subseção.

A resolução de problemas no ensino de matemática

Sobre problema e exercício, Schoenfeld (1985) aponta que um problema gera um impasse intelectual na pessoa que tenta resolvê-lo, enquanto no exercício o esquema de solução é acessado facilmente. Echeverría e Pozo (1998, p. 25) corroboram com essa ideia salientando que para um exercício já "dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam de forma imediata, à solução". Desse modo, percebemos que a função de um exercício no ensino da matemática está atrelada a aplicação de fórmulas, algoritmos, regras e modelos. Sobre tais ideias, Proença (2018, p.17-18) defende que

> [...] uma situação de Matemática se torna um problema quando a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar a uma resposta. Não se trata, assim, do uso direto de uma fórmula ou regras conhecidas – quando isso ocorre, a situação tente a se configurar como um exercício (Proença, 2018, pp. 17-18).

Nesse panorama, Proença (2018) aponta quatro etapas para resolução de um problema e que necessitam do domínio de conhecimentos cognitivos, os quais descrevemos a seguir:

Representação – que diz respeito ao momento no qual o aluno compreende ou interpreta o problema que está tentando solucionar. Para isso, toma posse de seus **conhecimentos linguísticos, semânticos e esquemáticos**. Nesse sentido, os **conhecimentos linguísticos** abarcam a compreensão da língua materna, do reconhecimento das palavras e das relações entre sujeitos e objetos. Já **conhecimentos semânticos** são aqueles necessários para identificação dos termos matemáticos e suas relações. E, por fim, os **conhecimentos esquemáticos** permitem reconhecer a essência do problema com base em conhecimentos matemáticos prévios, verificando assim se o problema é de geometria, álgebra, aritmética, entre outros (Proença, 2018).

Planejamento – envolve a utilização de uma estratégia para resolução do problema. Para tanto, se faz uso de **conhecimentos estratégicos** “[...] que sugere o ato de gerar e monitorar um plano de ação” (Proença, 2018, p. 25). Nesse sentido, o aluno pode traçar estratégias como o uso de tentativa e erro, por desenhos, tabelas etc. *Execução* – é o momento no qual o aluno executa a estratégia proposta para resolver o problema. Desse modo, são necessários o uso de **conhecimentos procedimentais** do indivíduo para usar seu pensamento lógico na busca de estabelecer relações espaciais e quantitativas (Proença, 2018). *Monitoramento* – essa última etapa refere-se à verificação da resposta encontrada em concordância com a pergunta do problema e ao ato de rever a solução seguida (Proença, 2018).

Sobre o ensino de matemática que utiliza a resolução de problemas, apresentaremos a proposta de Proença (2021) de ensino via resolução de problemas, a qual corresponde a uma proposta de organização de ensino, baseada em quatro etapas que correspondem a uma sequência de aulas a serem abordadas pelo professor em sala de aula, a saber:

Etapa 1 – Uso do problema como ponto de partida: essa primeira etapa envolve o trabalho de ensino *via* resolução de problemas, na qual um problema é usado como ponto de partida para um novo conteúdo/conceito/assunto matemático que se queira ministrar. Para essa etapa, tomamos como referência as cinco ações do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP) de Proença (2018), a saber:

(a) *Escolha do problema:* nesta ação, o docente deverá realizar a escolha de uma situação de matemática (possível problema) com objetivo de direcionar os alunos a usarem seus conhecimentos matemáticos prévios, levando-os a construir o conteúdo/conceito/assunto que será introduzido e que propicie que os alunos estabeleçam relações entre os conhecimentos matemáticos que usam e o novo conhecimento ministrado. Ainda sobre essa situação de matemática, Proença (2018) sugere que ela possa apresentar mais de uma resposta e que se busque prever estratégias diferentes a serem adotadas para sua resolução.

(b) *Introdução do problema:* essa ação envolve o momento de contato do professor com os alunos no ambiente de sala de aula no qual é sugerido a divisão dos alunos em grupos menores. Tal fato auxilia os indivíduos a compartilharem suas ideias, conhecimentos e experiências vivenciados anteriormente. O comando do docente é para que os alunos tentem resolver da maneira que quiserem ou acreditarem ser mais conveniente, sendo o momento que a situação de matemática pode se configurar como um problema.

(c) *Auxílio aos alunos durante a resolução:* Nessa terceira ação, o professor deve auxiliar os alunos sobre suas dúvidas frequentes, interpretações equivocadas e a racionalidade da resposta no caminho de resolução. É um momento no qual o professor atua como observador, incentivador e direcionador do processo de aprendizagem. Caso se faça necessário, o docente poderá auxiliar os alunos por meio de estratégias de resolução pré-estabelecidas na primeira ação (de escolha do problema).

(d) *Discussão das estratégias dos alunos:* essa ação abarca a socialização das resoluções adotadas pelos grupos. Proença (2021) infere que esse momento é propício para que os alunos possam perceber e construir relações entre os conhecimentos que utilizaram. Nessa ação, o docente deve apontar dificuldades e equívocos cometidos durante a resolução e levar os alunos para sintetizar o que compreenderam e aprenderam.

(e) *Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo:* nessa última ação, o professor deverá buscar articular as estratégias usadas pelos alunos ao conteúdo/conceito/assunto matemático que queira introduzir. Sobre esse momento, Proença (2018, p. 52) enfatiza que se busque por pontos centrais na estratégia(s) para articular ao novo conteúdo, discutindo com os alunos a relação existente.

Etapa 2 – Formação do conceito: Essa é a etapa na qual os alunos desenvolverão seus *construtos mentais*, os quais são inerentes a construção da aprendizagem de cada pessoa. Proença (2021, p. 04) salienta que para esse momento "deve-se partir de alguns exemplos e não exemplos e elaborar uma atividade para envolver os alunos na identificação de características que fazem parte do conceito". Nesse sentido, o autor enumera alguns pontos a serem seguidos nas atividades a serem desenvolvidos pelos alunos como:

> a) explorarem exemplos e não exemplos do conceito para explorar suas características; b) apresentarem uma definição para o conceito (construto mental), o que evidenciará as características do conceito que eles mencionam; c) apresentarem outros tipos ou variações do conceito, ou seja, apresentar exemplos do conceito; d) apresentarem não exemplos do conceito, o que permite ampliar a compreensão conceitual, pois, por exemplo, para saber o que é uma equação de segundo grau, também é importante saber o que não é (Proença, 2021, p. 09).

Etapa 3 – Definição do conteúdo: Essa terceira etapa envolve o trabalho do professor com relação à definição e apresentação dos algoritmos que dizem respeito ao conteúdo. Proença (2021) aponta que nesse momento, deve-se abordar a definição do conceito matemático e dos procedimentos algorítmicos de resolução. O autor orienta que nessa etapa deve-se ter uma preocupação em estabelecer a relação entre a linguagem matemática formal e a linguagem adotada nas atividades de formação conceitual da segunda etapa, com um foco no debate coletivo sobre seus entendimentos sobre a estrutura matemática até chegar a uma síntese entre as representações adotadas.

Etapa 4 – Aplicação em novos problemas: Proença (2021) infere que essa quarta e última etapa é aquela na qual o docente elabora suas aulas com base no uso de novas e diferentes situações que compreendam novos problemas ou possíveis problemas objetivando a transferência de aprendizagem dos alunos do conceito matemático e dos processos algorítmicos estudados. Nessa etapa, orienta-se em uma abordagem de ensino *para* resolução de problemas, porém o foco decorre da formação conceitual, devendo-se observar e avaliar os alunos no processo de resolução de problemas. Por fim, Proença (2021) salienta que para essa etapa, as situações de matemática trabalhadas devem ser contextualizadas envolvendo temas do cotidiano, vida social, política, econômicas e de diferentes áreas das ciências.

Metodologia

A presente pesquisa envolve o ambiente de sala de aula, em que o pesquisador (primeiro autor) era o professor da turma envolvida. Assim, o estudo teve como participantes 34 alunos (22 do gênero feminino e 12 do gênero masculino) do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública no Estado do Paraná. Esses participantes e seus responsáveis legais assinaram o TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e o TALE – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido. Tal processo foi acompanhado previamente pelo Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Estadual de Maringá – Paraná, sob o parecer consubstanciado número 5.716.066 concedido pelo órgão. Nesse sentido, a identidade de todos os alunos investigados foi preservada, em que atribuímos a nomenclatura A1, A2, A3 e assim por diante.

Os instrumentos de coleta e registro de dados adotados foram: gravação e transcrição das aulas, fotos das realizações das atividades, folha de atividades dos alunos e notas de campo. Nesse panorama, Duranti (1997) enfatiza que a gravação e transcrição de áudios abrem caminhos para o entendimento de como os indivíduos usam a fala e outros instrumentos do cotidiano. Segundo Martins (2008), o uso de fotografias em pesquisas sociais ajuda no entendimento e compreensão dos fenômenos humanos e sociais em um processo que abre caminhos para análises de questionamentos e experimentos. Por fim, Godoy (1995, p. 29) justifica que o uso de notas de campo permite que o pesquisador identifique "dimensões, categorias, tendências, padrões e relações, desvelando-lhes o significado".

Em sala de aula, elaboramos e desenvolvemos uma proposta de ensino sobre o conteúdo de sistemas lineares, tomando como norte as quatro etapas da organização de ensino via resolução de problemas, propostas por Proença (2021). A Tabela 1 mostra o cronograma com as atividades trabalhadas nas aulas em cada etapa:

Tabela 1.

Cronograma das atividades que foram realizadas em sala de aula (Elaborada pelos autores 2025)

Etapas de Proença (2021)	**Aulas**	**Conteúdos matemáticos**	**Descrição das atividades realizadas**
Uso do problema como ponto de partida	1, 2, 3 e 4	• Sistemas lineares com 3 equações e 3 incógnitas	***Situação 1:*** Resolver o problema equivalente a um sistema linear do tipo 2x2. ***Situação 2:*** Resolver o problema equivalente a um sistema linear escalonado 3x3.
Formação do Conceito	5 e 6	• Equação linear e suas características. • Solução de uma equação linear.	***Atividades 1:*** Dado o Quadro 1 com equações lineares e o Quadro 2 com equações não lineares, apontar as características observadas de uma equação linear e de uma equação não linear. ***Atividades 2:*** Dados os itens a, b e c, assinalar as equações que são lineares e justificar as que não são. ***Atividades 3:*** Discutir o significado de solução de uma equação linear.
	7 e 8	• Sistema linear e suas características. • Solução de um sistema linear.	***Atividades 4:*** Retomar os sistemas lineares das situações 1 e 2 e apontar as características observadas. ***Atividades 5:*** Dar exemplos de sistemas lineares do tipo 2x2 e do tipo 3x3. ***Atividades 6:*** Apresentar a definição do conceito da solução de um sistema linear e analisar um exemplo. ***Atividades 7:*** Realizar a síntese de dos conceitos estudados de equação linear, sistema linear e de suas soluções.
Definição do Conteúdo	9 e 10	• Sistema linear mxn. • Solução de um sistema linear.	***Atividade 8:*** Ler a definição formal de: um sistema linear mxn; da solução de um sistema linear; e de um sistema linear 3x3. Apresentar as classificações

		• Sistema linear 3x3. • Classificação de um sistema linear. • Teorema de Cramer.	de um sistema linear. Resolver sistemas lineares usando o Teorema de Cramer.
	13 e 14	• Escalonamento de sistemas lineares.	***Atividade 9:*** Resolver sistemas lineares usando o Escalonamento.
Aplicação em novos problemas	15 e 16	Problemas envolvendo sistemas lineares	***Atividade 10:*** Resolver problemas diversos equivalentes a sistemas lineares.

A Tabela 2 a seguir mostra sobremaneira as atividades propostas aos alunos durante as aulas de nossa organização de ensino:

Tabela 2.

Atividades desenvolvidas nas 4 etapas da organização de ensino (elaborada pelos autores 2025)

ETAPA 1 – USO DO PROBLEMA COMO PONTO DE PARTIDA

Situação 1: Na Livraria A, Paulo fez dois orçamentos:

Orçamento 1: uma borracha da marca Pitágoras e um lápis da marca Newton. **Total:** R$ 8,00.

Orçamento 2: duas borrachas da marca Pitágoras e quatro lápis da marca Newton. **Total:** R$ 27,50.

Qual o preço da borracha Pitágoras e do lápis Newton na Livraria A?

Situação 2: Já na Livraria B, Paulo fez mais três orçamentos:

Orçamento 1: uma borracha da marca Pitágoras, dois lápis da marca Newton e uma caneta da marca Leibniz. **Total:** R$ 9,00.

Orçamento 2: dois lápis da marca Newton e duas canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 11,00.

Orçamento 3: três canetas da marca Leibniz. **Total:** R$ 10,50.

Qual o preço da borracha Pitágoras, do lápis Newton e da caneta Leibniz na Livraria B?

ETAPA 2 – FORMAÇÃO DO CONCEITO

Atividade 1:

a) No quadro 1 abaixo, observamos exemplos de equações que podemos chamar de lineares:

QUADRO 1
$I)\ x + 4y = 10$
$\mathrm{II})\ \mathrm{a} + 2\mathrm{b} + \mathrm{c} = \frac{-1}{5}$
$III)\ \frac{m}{2} - 4n = -2{,}5$
$IV)\ \sqrt{3}\,\mathrm{x} - 1{,}15\,\mathrm{y} + \pi \mathrm{z} = 7$

Quais características você observa que uma equação linear **PODE** ter?

b) Agora, no quadro 2 temos equações que **NÃO SÃO** lineares:

QUADRO 2

$I)\ x\,.\,y.z = 8$

$II)\ a^2 + 2b^3 + c = -9$

$III)\ \frac{5}{t} + 10u - v^3 = 0$

$IV)\ \sqrt{3}\,d^2 - 9{,}5w + \pi z = 7$

Quais características você observa que uma equação linear **NÃO PODE** ter?

Atividade 2: Assinale quais equações abaixo são lineares, em seguida justifique porque as demais equações não são lineares.

$A)\ (\ \ )\ x + y + z = 10$

$B)\ (\ \ )\ a^2 + b^3 + \sqrt{c} = 25$

$C)\ (\ \ )\ m + np = 10$

$D)\ (\ \ )a^3 + b^2 = 10$

$E)\ (\ \ )x + y - 9z = \frac{3}{5}$

$F)\ (\ \ )\ \frac{10}{a} + b = 6$

$D)\ (\ \ )a^3 + b^2 = 10$

$E)\ (\ \ )x + y - 9z = \frac{3}{5}$

$F)\ (\ \ )\ \frac{10}{a} + b = 6$

Atividade 3

a) Na equação linear $x + y = 10$, quais valores para x e para y tornam a equação linear uma sentença verdadeira?

b) E na equação linear $a + b - c = 0$, quais valores para a, b e c tornam a equação linear uma sentença verdadeira?

c) O que significam para as equações lineares os valores numéricos que as tornam em sentenças matemáticas verdadeiras?

d) Observando os itens a e b o que você pode observar em relação a quantidade de soluções de uma equação linear?

Atividade 4: Vamos retomar os sistemas de equações lineares que vimos nas aulas anteriores:

Sistema linear da Situação 1:

$$\begin{cases} b + l = 8 \\ 2b + 4l = 27{,}50 \end{cases}$$

Sistema linear da Situação 2:

$$\begin{cases} b + 2l + c = 9 \\ 2l + 2c = 11 \\ 3c = 10{,}50 \end{cases}$$

Responda: Quais características você observa na forma matemática de um sistema linear?

Atividade 5: Dê um exemplo:

a) De um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.

b) De um sistema linear com três equações e três incógnitas.

Atividade 6:

Na aula anterior você compreendeu o conceito de solução de uma equação linear, agora como você explicaria o que é a solução de um sistema linear?

Atividade 7:

Tendo por base o que você estudou nas duas últimas aulas. Escreva com suas palavras, o que você compreende por:

a) Equação linear.

b) Solução de uma equação linear.

c) Sistema Linear.

d) Solução de uma equação linear.

ETAPA 3 – DEFINIÇÃO DO CONTEÚDO

Sistema Linear m x n

Um conjunto de **m** equações lineares e **n** incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é chamado **sistema linear m** x **n** (IEZZI et al., p. 103, 2016).

Solução de um sistema linear

Dizemos que a sequência de números reais $(\alpha_1\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é **solução de um sistema linear** de **n** incógnitas se é solução de cada uma das equações do sistema (IEZZI et al., p. 103, 2016).

Classificação de um Sistema Linear

A tabela a seguir apresenta as classificações, abreviaturas possíveis de um sistema linear em relação a sua solução:

Classificação	Abreviatura	Solução

Sistema Possível e Determinado	SPD	Admite uma única solução.
Sistema Possível e Indeterminado	SPI	Admite infinitas soluções.
Sistema Impossível	SI	Não admite soluções.

Atividade 8: Resolva os sistemas lineares abaixo usando o Teorema de Cramer

$A)\begin{cases} x+y+z = 6 \\ 2x+y-z = 1 \\ 4x+y+2z = 12 \end{cases}$ $B)\begin{cases} x+2y+z = 9 \\ 3x+y = -5 \\ 2y+z = 11 \end{cases}$ $C)\begin{cases} 2x-y+z = 3 \\ x+y+2z = 9 \\ -x+3y+z = 7 \end{cases}$

Atividade 9: Escalone, classifique e resolva os sistemas lineares abaixo:

$A)\begin{cases} x+2y+z = 8 \\ 2x+5y-z = 9 \\ 3x+y+z = 8 \end{cases}$ $B)\begin{cases} 2x+y-z = 8 \\ x-3y = 0 \\ 3x-2y-z = 2 \end{cases}$ $C)\begin{cases} x+y+z = 6 \\ 3x-y+z = 2 \\ 4x+4y+4z = 2 \end{cases}$

$D)\begin{cases} x+2y+z = 9 \\ 2x+y-z = 3 \\ 3x-y-2z = -4 \end{cases}$ E) $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ 2x+y-3z = 4 \\ 3x+2y-2z = 5 \end{cases}$

ETAPA 4 – APLICAÇÃO EM NOVOS PROBLEMAS

Atividade 10: Transforme os enunciados das questões a seguir em um sistema linear (naqueles que ainda não tem). Em seguida, resolva os sistemas usando o teorema de Cramer ou a técnica algébrica de escalonamento que você aprendeu nas aulas anteriores.

A) (FUVEST/1992 - Adaptada)

Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

- Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;
- Carlos e Andreia pesam 123 kg;
- Andreia e Bidu pesam 66 kg.

Determine o peso de cada um deles.

B) (UFMS/2018 - Adaptada) O sistema a seguir foi construído com base nas vendas mensais de três vendedores (A, B e C), em que os valores de x, y e z são as quantidades vendidas por cada vendedor.

$$\begin{cases} A: x+2y+3z = 14 \\ B: 2x-3y+2z = 2 \\ C: -2x+y-5z = -15 \end{cases}$$

Determine, o produto das vendas dos três vendedores.

C) (ENEM/2020-Adaptada) Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos *leves* e *médias* acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação. Qual é a razão entre o número de infrações do tipo *leve* e o número de infrações do tipo *média* cometidas por esse motorista?

D) (UFRN/2001- Adaptada) Três amigos, denominados X, Y e Z, utilizam o computador todas as noites. Em relação ao tempo em horas, em que cada um usa o computador, por noite, sabe-se que: • O tempo de X mais o tempo de Z excede o de Y em 2; • O tempo de X mais o quádruplo do tempo de Z é igual a 3 mais o dobro do tempo de Y; • O tempo de X mais 9 vezes o tempo de Z excede em 10 o tempo de Y. Determine soma do número de horas de utilização do computador, pelos três amigos, em cada noite.

Conforme resume a Tabela 1, destacamos que ocorreram 16 aulas de 50 minutos, divididas em duas aulas diárias nas terças e quintas-feiras entre os meses de julho a setembro de 2022. Entretanto, esses dias abarcaram um período chuvoso no qual não foi possível estabelecer o mesmo número de equipes participantes nas 4 etapas pesquisadas, devido à falta de alunos nos dias de nossa pesquisa. Por esse motivo, os quadros de análises da próxima seção apresentaram diferentes números de equipes participantes para cada etapa analisada.

Diante das aulas realizadas em nossa proposta de organização de ensino, a presente pesquisa é de abordagem qualitativa, tendo em vista que os dados coletados visaram às compreensões dos alunos do conceito de sistemas lineares, é de caráter indutivo e descritivo, em que o professor da turma é o principal ator, devido suas interpretações (Bogdan; Biklen, 1994). Com isso, os procedimentos de análise dos dados gerados por nosso estudo pautaram-se na análise descritiva e interpretativa. Para Gil (2007), a pesquisa descritiva objetiva sobretudo realizar a descrição das características de um fenômeno ou de uma população ou das relações que se estabelecem entre elas. Já o caráter interpretativo, segundo Rosenthal (2014), traz novas possibilidades ao investigador, permitindo-lhe outros olhares para os fenômenos investigados, reconstruindo correlações e os sentidos de casos particulares concretos.

Resultados e discussões

Nesta seção, apresentaremos os resultados e discussões encontradas em nossa pesquisa. Para tanto, separamos as análises por etapas de modo a contribuir com melhor entendimento ao leitor.

Análise da etapa 1 – usando o problema como ponto de partida para o ensino de sistemas lineares

Em relação aos resultados da etapa 1 de *uso do problema como ponto de partida* de nossa organização de ensino, a Tabela 3 a seguir mostra como se deu o desempenho das 15 equipes participantes relativas às situações 1 e 2, no qual o número na frente de cada item representa a quantidade de equipes referentes a esse item:

Tabela 3.

Desempenho das 15 equipes na resolução das situações 1 e 2 da etapa 1 (Elaborada pelos autores 2025)

	Etapas de Resolução de Problemas					
Atividade	*Representação*	*Planejamento*	*Execução*	*Monitoramento*	Estratégia e procedimento de execução	SF
Situação 1	✓ 14 x 00 NF 01	✓ 14 x 00 NF 01	✓ 14 x 00 NF 01	✓ 14 x 00 NF 01	TE: 10 EQ+TE+TAB: 01 SL+MS: 02 TE+SL+MS: 01	✓ 14 NF 01
Situação 2	✓ 14 x 00 NF 01	✓ 14 x 00 NF 01	✓ 14 x 02 NF 01	✓ 14 x 02 NF 01	TE: 10 EQ+MS: 04 NF: 01	✓ 12 x 02 NF 01

Legenda:
EQ: Equação; MS: Método da Substituição; TE: Tentativa e Erro; TAB: Tabela;
SF: Solução Final; ✓: Correta; x: Incorreta; NF: Não fez.

A Tabela 3 mostra que das 15 equipes participantes, 14 acertaram a situação 1, obtendo sucesso nas quatro etapas de resolução de problemas (Proença, 2018). Dentre a estratégia e procedimento de execução adotadas: 10 equipes utilizaram a estratégia por tentativa e erro: duas equipes escreveram um sistema linear e utilizaram o método da substituição para resolvê-lo; e duas equipes utilizaram mais de uma estratégia como caminho para encontrar a solução. Por fim, uma equipe deixou de realizar a resolução da situação 1.

Em relação à situação 2, verificamos que 12 das 15 equipes participantes fizeram corretamente sua resolução chegando à solução final correta. Entretanto, assim como ocorreu com a situação 1, na situação 2 também 10 equipes privilegiaram a estratégia de resolução por tentativa e erro de modo a chegarem à resolução correta do problema proposto. Também tivemos a ocorrência de quatro equipes que escolheram escrever equações para o problema proposto e usar o método da substituição para resolvê-lo. Entretanto, ainda observamos que duas equipes tiveram dificuldades em **conhecimentos procedimentais** na etapa de *execução* e, ainda na etapa *monitoramento* da resolução de problemas ao não reverem a racionalidade da resposta encontrada, de modo que não conseguiram chegar à solução final correta. Por fim, apenas uma equipe não conseguiu realizar a atividade de resolução da situação 2.

Sobre os resultados dessa etapa, vemos que prevaleceu o uso da estratégia da tentativa e erro, seguida por 10 das 15 equipes participantes para a resolução das situações 1 e 2. Nesse sentido, Maharani (2020), em sua pesquisa com 40 alunos do Ensino Médio da Indonésia, verificou alunos com limitações para escolher estratégias para resolver problemas de sistemas lineares. Falcon (2009), ao investigar nove alunos de Ensino Médio do Estado do Texas nos Estados Unidos, observou que preferiam usar a estratégia de tentativa e erro para resolução de problemas equivalente a sistemas lineares antes de terem contato com tal conteúdo. Nesse panorama, Töman e Gökburun (2022) ao investigaram 82 alunos de Ensino Médio da Turquia quanto ao conhecimento de álgebra e ao estabelecimento do pensamento algébrico, perceberam alunos com baixo nível de pensamento algébrico associado a entraves na transição da aritmética para a álgebra.

Já em nossa pesquisa, a dificuldade do pensamento algébrico se deu nas três demandas preconizadas por Ponte, Branco e Matos (2009): na demanda de **representar,** pois os alunos não foram capazes de traduzir as informações da língua materna para a linguagem algébrica usando seus conhecimentos prévios; na demanda de **raciocinar,** pois tiveram dificuldades de relacionar a situação proposta a um conteúdo algébrico; e, por fim, na demanda de **resolver problemas,** em virtude de não adotarem seu conhecimento algébrico para a resolução dos problemas propostos. Sobre esse fato, Töman e Gökburun (2022) sugerem com ênfase a necessidade de um processo de ensino e aprendizagem com conexão entre os conteúdos algébricos pautados em estudos feitos nessa direção.

Análise da etapa 2 – formando conceitos de sistemas lineares

A etapa 2, de *formação do conceito*, contou com um momento que os alunos puderam apontar as características, os exemplos e não exemplos, a definição do conceito e suas variações para conteúdo de equações lineares e suas soluções e de sistemas lineares e suas soluções. A Tabela 4 abaixo elucida como se deu o desempenho e a compreensão das 14 equipes participantes ao realizarem as atividades 1 a 7 da etapa 2:

Tabela 4.

Desempenho e compreensão das 14 equipes nas atividades da etapa 2 (Elaborada pelos autores 2025)

Atividades	Aspectos do Conceito	Respostas/ideias apontadas	NE
Atividade 1			
Apontar características de EL	Características pertinentes	*A variável deve ter expoente 1.*	11
		Os coeficientes numéricos são números reais	10
		As EL podem ter operação de adição e subtração entre os termos.	8
	Características irrelevantes	*Podemos usar letras diferentes em uma EL.*	8
		As variáveis podem ficar no numerador.	5
		Temos sinais positivos e negativos na EL.	4
Apontar características de equações não-lineares	Características pertinentes	*As variáveis podem ter expoente diferente de 1.*	12
		As variáveis podem estar no denominador.	10
		Podemos multiplicar as variáveis.	10
Atividade 2			
2.1 Assinalar as EL e justificar as equações que não são lineares	Compreensão pertinente	Assinalaram corretamente o item a.	14
		Justificaram corretamente os itens b e c.	10
2.2 Assinalar as EL e justificar as equações que não são lineares	Compreensão pertinente	Assinalaram corretamente o item e.	12
		Justificaram corretamente os itens d e f.	12
2.3 Assinalar as EL e justificar as equações que não são lineares	Compreensão pertinente	Assinalaram corretamente os itens h e i.	11
		Justificaram corretamente o item g.	11
Atividade 3			
a) Apontar a solução de uma EL	Compreensão pertinente	Apresentaram respostas corretas.	14
b) Apontar a solução de uma EL	Compreensão pertinente	Apresentaram respostas corretas.	13
c) Apontar significados dos valores que tornam uma EL em uma sentença matemática verdadeira	Características pertinentes	*Tornam a equação verdadeira.*	2
		As soluções das equações.	10
		Encontrou o resultado.	1
	Sem resposta	Não respondeu.	1

d) Apontar a quantidade de soluções que uma EL possui	Características pertinentes	*Possui infinitas soluções.*	8
		Possui várias soluções.	3
		Tem mais de uma solução.	1
		São várias e diversas soluções.	1
	Sem resposta	Não respondeu.	1
Atividade 4			
Apontar as características observadas nos SL	Características pertinentes	*SL são formados por EL.*	10
		As EL do SL são agrupadas por chaves.	9
Atividade 5			
a) Apresentar um exemplo de um SL 2x2	Compreensão pertinente	Apresentaram o exemplo corretamente.	11
		Apresentaram o exemplo parcialmente correto.	4
b) Apresentar um exemplo de um SL 3x3	Compreensão pertinente	Apresentaram o exemplo corretamente.	14
	Compreensão parcial	Apresentaram o exemplo parcialmente correto.	1
Atividade 6			
Apontar o conceito de solução de um SL	Características pertinentes	*A solução torna todas as equações verdadeiras.*	4
		É deixar verdadeira todas as equações.	4
		A solução de um SL é a solução de todas as equações desse sistema.	2
		Torna uma sentença verdadeira.	2
		Você descobrir as incógnitas.	1
		A solução é deixar todas as sentenças verdadeiras.	2
Atividade 7			
a) Apresentar com suas próprias palavras o que é uma EL	Características pertinentes	*São equações do 1º grau.*	13
		Contém operações de adição e subtração.	5
		Variável fica no numerador de uma fração.	5
		Não pode existir multiplicação entre as incógnitas.	4
	Características irrelevantes	*Podemos usar diferentes letras para as incógnitas.*	3
b) Apresentar com suas próprias palavras o que é a solução de uma EL	Características pertinentes	*Torna a equação verdadeira.*	15
		Substituição de números por incógnitas que tornam o resultado verdadeiro.	3
c) Apresentar com suas próprias palavras o que é um SL	Características pertinentes	*É um conjunto de EL.*	14
		Agrupados por uma chave.	3
d) Apresentar com suas próprias palavras o que é a solução de um SL	Características pertinentes	*Torna todas as EL do SL verdadeiras.*	13

Legenda:
NE: Número de equipes que responderam; EL: Equação linear; SL: Sistema linear.

A Tabela 4 nos permite verificar que por meio das sete atividades propostas, as equipes pesquisadas puderam realizar o apontamento de diferentes características, exemplos e não exemplos tanto de equações lineares e suas soluções como de sistemas lineares e suas soluções, de modo que ao final apresentaram a definição do conceito (construto mental) desse conteúdo estudado. Por outro lado, em um olhar para literatura, Dewi et al. (2021) e Oktaç (2018) ao pesquisarem alunos de Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior apontaram indivíduos com obstáculos de identificação de conceitos de sistemas lineares e entraves ao estabelecer relações entre os algoritmos inerentes a esse conteúdo. Sobre esse fato, os autores imputam como principal causa o conhecimento conceitual imaturo dos alunos inerentes ao conteúdo de sistemas lineares. Nesse sentido, acreditamos que essa etapa 2 de *formação conceitual* permitiu amenizar essas dificuldades haja vista que a compreensão e entendimento dos diferentes conceitos elencados pelo Quadro 4.

Nesse contexto, tal etapa ainda permitiu avançar no desenvolvimento do pensamento algébricos de nossas equipes investigadas. Isso pode ser observado na demanda de **representar** apontada por Ponte, Branco e Matos (2009), haja vista que os alunos puderam reconhecer e interpretar os conceitos de sistemas lineares em diferentes contextos, desde características, apresentação de exemplos e não exemplos e da definição para o conceito (construto mental). Nesse panorama, ainda observamos o avanço na demanda de **raciocinar**, pois as equipes pesquisadas puderam generalizar o conceito de sistemas lineares por meio do apontamento de exemplos e não exemplos do que era e do que não era um sistema linear.

Análise da etapa 3 – realizando a definição do conteúdo de sistemas lineares

Essa etapa de nossa organização buscou trazer a definição formal e os processos algorítmicos concernentes ao conteúdo de sistemas lineares. Nesse sentido, buscamos, segundo orienta Proença (2021), estabelecer relações entre a linguagem matemática dessa etapa com a linguagem matemática da etapa de formação conceitual (etapa 2) de modo a promover debates coletivos sobre os entendimentos da estrutura matemática e das diferentes representações.

Sobre as aulas da etapa 3, de maneira a apresentar as definições formais e os processos algorítmicos inerentes a sistemas lineares, o professor explanou na lousa o item *a* da atividade 8, referente ao Teorema de Cramer e, da mesma maneira, os itens *a*, *b* e *c* da atividade 9 abarcando o processo resolutivo do escalonamento. Dessa maneira, os alunos ficaram com os itens *b* e *c* da atividade 8 e com os itens *d* e *e* da atividade 9 como atividades propostas e analisadas para essa etapa. A Tabela 5 abaixo mostra o desempenho das 10 equipes de alunos na realização dos itens propostos nas atividades 9 e 10:

Tabela 5.

Desempenho das 10 equipes na resolução das atividades da etapa 3 (Elaborada pelos autores 2025)

Atividades	Desempenho	NE	Dificuldades
Atividade 8 Resolver e classificar o SL 3x3 usando o TC			
	Resolução correta	7	-

b) $\begin{cases} x+2y+z = 9 \\ 3x+y = -5 \\ 2y+z = 11 \end{cases}$	Não fizeram	3	-
c) $\begin{cases} 2x-y+z = 3 \\ x+y+2z = 9 \\ -x+3y+z = 7 \end{cases}$	Resolução correta	5	-
	Resolução incorreta	3	Erros em cálculos algébricos.
	Não fizeram	2	-
Atividade 9 Resolver e classificar o SL 3x3 usando o ME			
d) $\begin{cases} x+2y+z = 9 \\ 2x+y-z = 3 \\ 3x-y-2z = -4 \end{cases}$	Resolução correta	5	-
	Resolução parcialmente correta	1	Não escreveu a solução e não classificou o SL.
	Resolução incorreta	4	Erros em cálculos algébricos.
e) $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ 2x+y-3z = 4 \\ 3x+2y-2z = 5 \end{cases}$	Resolução correta	5	-
	Resolução parcialmente correta	1	Não escreveu solução e não classificou o SL.
	Resolução Incorreta	4	Erros em cálculos algébricos.

Legenda:

NE: Número de equipes; SL: Sistema Linear; TC: Teorema de Cramer; Método do escalonamento.

Por meio da Tabela 5, vemos que na atividade 8, 7 das 10 equipes participantes fizeram a resolução correta do item b, sendo que 3 equipes deixaram de fazer sua resolução. Já para o item c, 5 equipes realizaram a resolução correta, 2 deixaram de fazê-la e 3 equipes fizeram o processo resolutivo de maneira equivocada apontando para entraves em **conhecimentos procedimentais**. A Figura 1 abaixo, mostra a dificuldade de resolução da equipe 3 no item c dessa atividade 8:

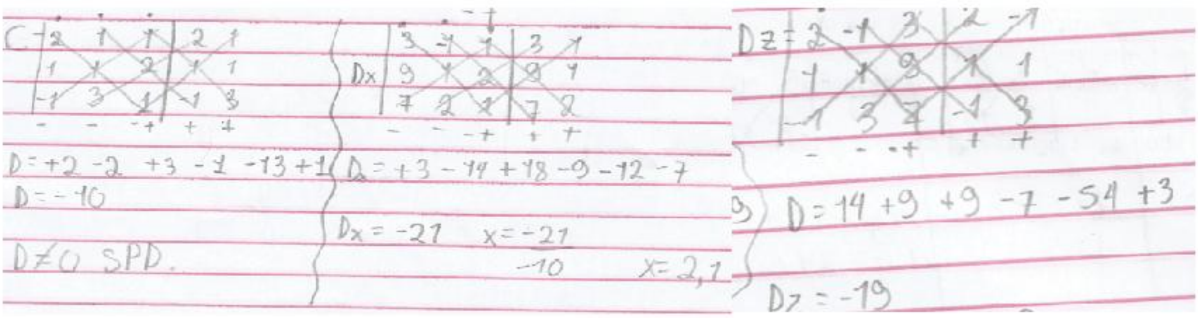

Figura 1.

Dificuldades da equipe 3 na atividade 8-c (Elaborada pelos autores 2025)

Por meio da Figura 1, vemos que a equipe 3 errou o cálculo dos determinantes D, Dx e Dz. No determinante D, o erro ocorreu ao colocar o coeficiente 1 para a o monômio -y na primeira linha. Em Dx, o equívoco se deu na terceira linha na qual o coeficiente correto do monômio 3y era 3 e não 2 como anotou a equipe. Já o erro do determinante Dz ocorreu em virtude de erro de sinal do termo -7 cujo correto seria +7.

Avançando para atividade 9 que envolveu a resolução de sistemas lineares por meio do método algébrico do escalonamento, vemos no Quadro 5 que 5 das 10 equipes pesquisadas realizaram de maneira correta a resolução dos itens d e e. Por outro lado, uma equipe deixou de apresentar a solução e a classificação dos sistemas lineares dos itens d e e ocasionando em uma solução parcialmente correta para atividade. Ainda tivemos 4 equipes que realizaram a resolução incorreta desses itens indicando obstáculos também em **conhecimentos procedimentais.** A Figura 2 a seguir, mostra os erros de manipulação algébrica da equipe 2 na resolução do item e da atividade 9:

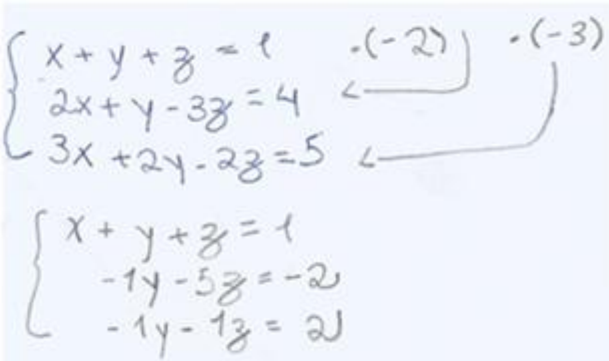

Figura 2.

Dificuldades das equipes 2 na atividade 9-e (Elaborada pelos autores 2025)

Na Figura 2 acima verificamos que a equipe 2 cometeu equívocos na eliminação da incógnita x na segunda e na terceira linha do sistema linear o que levou a encontrar a equação -1y-5z=2 na equação II cujo termo independente correto é -2. Do mesmo modo, a equipe apontou a -1y-1z=2 para equação III cuja equação correta seria -1y-5z=2. Todos esses erros de manipulações algébricas nas atividades 8 e 9 apontam para dificuldades dos alunos pesquisados convergentes em **conhecimentos procedimentais.**

Do mesmo modo, dentro desse contexto de dificuldades encontrados por nosso estudo, Cury (2013) e Freitas e Guadagnini (2013) ao investigarem conteúdos algébricos com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental apontaram para alunos com erros algébricos oriundos de manipulação algébrica. Para Cury (2013, p. 17) esses resultados "mostram que esses alunos ainda não desenvolveram o pensamento algébrico, pois não sabem expressar abstrações e generalizações". Avançando para o Ensino Médio, Fonseca (2016) em sua pesquisa com o conteúdo de progressão aritmética com alunos do 2º ano do Ensino Médio, encontrou erros em cálculos algébricos nas atividades propostas. Sobre esse fato, a autora aponta para a necessidade de trabalhos futuros que venham a contornar tais entraves apontados.

Para nossa pesquisa, acreditamos que os entraves encontrados na resolução das atividades feitas pelas equipes pesquisadas nas atividades 8 e 9, podem ser contornados por meio da melhoria da construção do pensamento algébrico dos alunos na demanda de **raciocinar** preconizada por Ponte, Branco e Matos (2009). Haja vista a necessidade da compreensão de regras e algoritmos necessários para a manipulação algébrica exigidas pelo método do Teorema de Cramer e do escalonamento na resolução de sistemas lineares.

Análise da etapa 4 – aplicação em novos problemas de sistemas lineares

Sobre este momento, os alunos fizeram a resolução da atividade 10 que envolveu a resolução de problemas que exigiam uso de sistemas lineares. A Tabela 6 a seguir apresenta o desempenho das 15 equipes que participaram dessa etapa na atividade 10. Nessa Tabela 6, o número na frente de cada item representa a quantidade de equipes referentes a esse item:

Tabela 6.

Desempenho das 15 equipes na resolução da atividade 10 da etapa 4 (Elaborada pelos autores 2025)

	Etapas de Resolução de Problemas					
Atividade 10	*REPRES*	*PLAN*	*EXEC*	*MONIT*	Estratégia e procedimento de execução	SF
Item a SL esperado $\begin{cases} x+y=87 \\ x+z=123 \\ y+z=66 \end{cases}$	✓ 12 x 00 NF 03	✓ 12 x 00 NF 03	✓ 08 x 04 NF 03	✓ 08 x 04 NF 03	SL + MS: 09 SL + ME: 01 SL + TE: 01 SL + TC: 01 NF: 03	✓ 08 x 04 NF 03
Item b Resposta esperada: Produto: x.y.z = 6	✓ 15 x 00 NF 00	✓ 15 x 00 NF 00	✓ 13 x 02 NF 00	✓ 01 x 14 NF 00	SL + ME: 15	✓ 01 x 14 NF 00
Item c SL e resposta esperada: $\begin{cases} L+M=5 \\ 3L+4M=17 \end{cases}$ $\frac{L}{M}=\frac{3}{2}$	✓ 13 x 00 NF 02	✓ 13 x 00 NF 02	✓ 11 x 02 NF 02	✓ 04 x 09 NF 02	SL + MA: 08 SL + MS: 01 SL + TC: 02 TE: 02 NF: 02	✓ 04 x 09 NF 02
Item d SL e resposta esperada: $\begin{cases} x+z=y+2 \\ x+4z=3+2y \\ x+9z=y+10 \end{cases}$ $x+y+z=6$	✓ 14 x 00 NF 01	✓ 14 x 00 NF 01	✓ 14 x 00 NF 01	✓ 04 x 10 NF 01	SL + ME: 14 NF: 01	✓ 04 x 10 NF 01

Legenda:
SL: Sistema Linear; MA: Método da Adição; MS: Método da Substituição;
ME: Método do Escalonamento; TE: Tentativa e Erro; TC: Teorema de Cramer.
SF: Solução Final; ✓: Correta; x: Incorreta; NF: Não fez.

Pela Tabela 6, verificamos que no item a, 12 das 15 equipes participantes tiveram sucesso nas etapas de *representação* e de *planejamento* de resolução do problema proposto. Porém, apenas oito equipes lograram êxito nas etapas de *execução* e *monitoramento* sendo que quatro equipes tiveram dificuldades em cálculos algébricos, indicando obstáculos em **conhecimentos procedimentais**. Por outro lado, nove equipes adotaram a estratégia de escrever um sistema linear e utilizar o método da substituição para resolução do problema, indicando um amadurecimento nas demandas de **representar, raciocinar** e **resolver problemas** na construção do pensamento algébrico, preconizadas por Ponte, Branco e Matos (2009).

Esse amadurecimento ficou mais evidente no item b, em que percebemos que as 15 equipes adotaram a estratégia de escrever um sistema linear equivalente ao problema proposto para, em seguida, usarem o método resolutivo do escalonamento para sua resolução, sendo que todas as 15 equipes tiveram sucesso nas etapas de *representação* e de *planejamento* de resolução do problema proposto. Entretanto, ao chegarem na etapa de *execução,* duas equipes cometeram erros em cálculos algébricos, revelando, mais uma vez, dificuldades no uso de **conhecimentos procedimentais.** Já na etapa de *monitoramento,* 14 das 15 equipes investigadas não se atentaram ao fato de o enunciado exigir o valor do produto x.y.z e acabaram errando a solução final do proposto ao não reverem se a resposta encontrada estava de acordo com o comando exigido pelo enunciado.

Semelhantemente no item c, 13 equipes tiveram sucesso nas etapas de *representação* e de *planejamento* de resolução do problema proposto e, mais uma vez, 2 equipes tiveram obstáculos na etapa de *execução* e 9 equipes na etapa de *monitoramento* ao não apresentarem a razão entre o número de multas leves e média conforme solicitava o enunciado.

Por fim, no item d observamos que 14 das 15 equipes adotaram a estratégia de escrever um sistema linear e resolvê-lo por meio do escalonamento fazendo de maneira correta as etapas de *representação, planejamento* e *execução* da resolução do problema. Todavia, mais uma vez ocorreram entraves na etapa de *monitoramento,* na qual 10 equipes erraram a resposta final ao não observarem que o problema solicitava o valor da soma das variáveis x+y+z.

Sobre as dificuldades na etapa de *execução* (uso de **conhecimentos procedimentais**) na atividade 10, observamos de forma semelhante que Ramos e Curi (2015) ao trabalharem conteúdos de álgebra com alunos do 1º ano do Ensino Médio também apontaram investigados com obstáculos para a execução de cálculos algébricos. Do mesmo modo, Amka (2020) pesquisou alunos do Ensino Médio da Indonésia quanto a resolução de problemas que abarcavam sistemas lineares com três equações e três incógnitas, indicando alunos com obstáculos no processo de execução do escalonamento e que não conseguiam substituir variáveis, não cumprindo assim, a estratégia de resolução planejada para resolução completa e correta do problema.

Nesse contexto, Rakhmawati et al. (2019) também fizeram uma investigação semelhante com 30 alunos do Ensino Médio da Indonésia e apontaram alunos com dificuldades para resolução de cálculos matemáticos (etapa de *execução* da resolução de problemas) e para verificar a veracidade da resposta encontrada (etapa de *monitoramento).* Sobre esse fato, acreditamos que tais entraves precisam investigados e tratados por pesquisas futuras de modo a serem entendidos e tratados. Como forma de controle dessas dificuldades, Lima (2019) aponta a necessidade do uso de metodologias diferentes das tradicionais com resgate de conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e Ramos e Curi (2015) enfatizam a demanda de um trabalho focado na análise de erros de modo que o professor possa auxiliar seus alunos na superação dificuldades.

Sobre as dificuldades da etapa de *monitoramento* nos itens b, c e d, Roberts e Le Roux (2019, p. 13, tradução nossa) ao investigarem alunos de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental da África do Sul, apontaram que "para todos os alunos, o término do cálculo é a aparência da solução". Nesse sentido, vemos ser necessária a intervenção e auxílio do professor na abordagem de ensino de modo que os alunos possam superar esses obstáculos.

Em uma visão geral dos resultados dessa etapa 4, observamos um caminho rumo a construção do pensamento algébrico dos alunos pesquisado ocasionado pela transferência de aprendizagem dos conteúdos provenientes de nossa abordagem de ensino nas etapas 2 (*formação do conceito)* e na etapa 3 (*definição do conteúdo).* Tal fato é observado pela escolha da maioria das equipes da estratégia de escrever um sistema linear e usar um método algébrico para a resolução dos problemas propostos, o que caminha sobremaneira para as demandas de **representar, raciocinar** e **resolver problemas** apontadas por Ponte, Branco e Matos (2009). Entretanto, as dificuldades encontradas nas etapas de *execução e monitoramento* na resolução de problemas com obstáculos em **conhecimentos procedimentais** necessitam ser pesquisadas de maneira a serem contornadas e reconstruídas.

Conclusões

Esse trabalho teve por objetivo responder a seguinte questão norteadora: *que contribuições são elencadas de uma organização de ensino via resolução de problemas para a aprendizagem do conteúdo de sistemas lineares a alunos do 2º ano do Ensino Médio?* Assim, nossa pesquisa teve como norte as quatro etapas de organização de ensino via resolução de problemas, proposta por Proença (2021).

A primeira etapa, de *uso do problema como ponto de partida*, apontou para equipes que, em sua maioria, optaram por estratégias de resolução de problemas por meio da tentativa e erro, sendo ausente a demanda de **representar** do pensamento algébrico orientada por Ponte, Branco e Matos (2009). Nesse sentido, tivemos duas equipes com dificuldades nas etapas de *execução* e de *monitoramento* na resolução dos problemas propostos com entraves em **conhecimentos procedimentais**. Todavia, vimos que 14 e 12 equipes acertaram, respectivamente, a resolução das situações 1 e 2 mostrando sucesso em todas as etapas de resolução de problemas.

Avançando para a segunda etapa, de *formação do conceito*, pudemos observar que os alunos foram capazes de apresentar uma definição (construto mental) do conceito de sistema linear, revelando o desenvolvimento do pensamento algébrico no âmbito do **representar**. Isso foi evidenciado na realização das atividades, nas quais alunos indicaram sua compreensão e entendimento ao apontarem de maneira correta características, exemplos e não exemplos desse conceito aprendido.

Partindo para a terceira etapa, de *definição do conteúdo*, verificamos que os alunos conseguiram estabelecer relações entre a linguagem matemática formal e a linguagem matemática usada na etapa de formação conceitual, o que podemos apontar que ampliou a compreensão desses alunos do **representar** do pensamento algébrico. Entretanto, os entraves em manipulações algébricas com origem no uso de **conhecimentos procedimentais** (próprios de cálculos algorítmicos) foram encontrados nas atividades realizadas. Essas dificuldades ocorreram prioritariamente no trabalho do processo resolutivo de sistemas lineares com três equações e três incógnitas ao se usar os algoritmos do escalonamento e da Regra de Cramer, revelando dificuldades referentes ao **raciocinar** do pensamento algébrico.

Por fim, a quarta e última etapa, de *aplicação em novos problemas*, mostrou que a maioria dos alunos adotaram a estratégia de escrever um sistema linear orientando para construção da demanda de **representar** do pensamento algébrico. Em seguida, para resolução dos problemas propostos, vemos que as equipes adotaram em sua maioria uma estratégia algébrica (Teorema de Cramer, escalonamento, método da adição ou da substituição) demonstrando a construção da demanda **raciocinar** do pensamento algébrico. Por último, a maioria das equipes pesquisadas realizou a resolução percorrendo as etapas de *representação*, *planejamento*, *execução* e *monitoramento* da resolução de problemas de modo a chegar à solução do problema matemático orientando, assim, para as demandas de **raciocinar** e **resolver problemas** rumo a construção do pensamento algébrico.

Contudo, em resposta à nossa questão de pesquisa, podemos elencar contribuições do ensino proposto do conteúdo de sistemas lineares que tangem a contribuições para o campo da pesquisa, a saber: a) no ensino da álgebra e para construção do pensamento algébrico, o estudo possibilitou a compreensão e entendimento dos alunos de conceitos matemáticos de EL e de SL e a capacidade de relacioná-los com processos algorítmicos de manipulações algébricas permitindo, assim, a resolução de problemas de diferentes contextos; b) no ensino de sistemas lineares, a contribuição aponta para uma abordagem de ensino não fragmentada, que privilegiou a realização de atividades contextualizadas e não apenas presa a cálculos algébricos, de forma que amenizamos entraves supracitados em nossos referenciais teóricos, culminando para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos; c) em relação à resolução de problemas no ensino, uma das contribuições que observamos é a de formação conceitual proposta pelo trabalho de Proença (2021) e que não foi abordada por outros estudos abarcando o ensino e aprendizagem de sistemas lineares, o que contribuiu fortemente para o desenvolvimento do pensamento algébrico no âmbito do **representar**; c) por fim, uma das contribuições importantes desse estudo foram apontamentos de dificuldades relativas às etapas de *execução* inerentes a **conhecimentos procedimentais** e de *monitoramento* na resolução de problemas de sistemas lineares, as quais necessitam serem estudadas, a fim de serem reconstruídas para um avanço ainda maior nas demandas de **raciocinar** e **resolver problemas** concernentes ao pensamento algébrico.

Sobre os limites encontrados na pesquisa, uma limitação decorreu do fato de que como investigamos alunos do 2º ano do Ensino Médio que tiveram o 9º ano do Ensino Fundamental e grande parte do 1º ano do Ensino Médio por meio do ensino remoto emergencial devido a pandemia de Covid-19, os alunos revelaram dificuldades de mobilizar conhecimentos prévios, sobretudo com uso de estratégias algébricas. Desse modo, os entraves citados por autores de nossa revisão bibliográfica sobre o ensino de álgebra e de sistemas lineares foram, em nosso estudo, revistos e os conhecimentos conceituais e procedimentais foram potencializados.

Portanto, esperamos que esse estudo sirva de base para novas pesquisas que sustentem a investigação na elaboração e realização de propostas de ensino via resolução de problemas nas quatro etapas de organização de ensino de Proença (2021). Isso porque essa organização de ensino serve de base para alicerçar fundamentos do desenvolvimento do pensamento algébrico desde a resolução de um problema como ponto de partida, passando, sobretudo, pela formação conceitual (ainda pouca explorada nas aulas e em trabalhos presentes na literatura científica) e favorecendo o uso do conceito e procedimentos matemáticos na resolução de novos problemas.

Referências

Amka, A. (2020). Problem Solving-Based Learning on Systems of Linear Equation in Three Variables at SMA Srijaya Negara Palembang. *Problem Solving-Based Learning on Systems of Linear Equation in Three Variables at SMA Srijaya Negara Palembang*.

Battaglioli, C. S. M. (2008). *Sistemas Lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos.* [Dissertação de Mestrado em Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo].

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994*). Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Borges, M. E. O. (2018). *Um mapeamento de pesquisas a respeito do estudo de Álgebra nos anos finais do EF e EM (2008 – 2017).* [Tese de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo].

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular. Educação* Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio (versão final). MEC, 2018.

Brasil. Ministério da Educação. (2021). *INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Resultados PISA 2018.* Recuperado em outubro 21, 2021, em http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206.

Brasil. Ministério da Educação. (2021). *INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Resultados SAEB 2019*. Recuperado em outubro 21, 2021, em https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/saeb/desempenho-do-ensino-medio-melhora-no-saeb-2019.

Campos, M. A. (2019). Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do ensino fundamental. [Tese de Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Universidade Federal da Bahia].

Campos, M. A., & Farias, L. M. S. (2020). A Educação Matemática e o ensino de álgebra na perspectiva de desenvolvimento do pensamento algébrico. *Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências,* 9(1), 167-188.

Cataneo, V. I., & Rauen, F. J. (2018). Registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas: uma análise do capítulo Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas do livro Matemática compreensão e prática de Ênio Silveira. *Educação Matemática Pesquisa*, *20*(2), 140-170.

Coelho, F. U., & Aguiar, M. (2018). A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. *Estudos Avançados, 32*, 171-187.

Cury, H. N, & Bortoli, M. F. (2011). Pensamento algébrico e análise de erros: Algumas reflexões sobre dificuldades apresentadas por estudantes de cursos superiores. *Revista de Educação, Ciências e Mathematics*, *1*(1), 101-113.

Delazeri, G. R. (2017). *A competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico: um experimento no 9º ano do ensino fundamental.* [Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil].

Dewi, I. L. K., Zaenuri, Dwijanto & Mulyono (2021). Identification of Mathematics Prospective Teachers' Conceptual Understanding in Determining Solutions of Linear Equation Systems. *European Journal of Educational Research*, *10*(3), 1157-1170.

Duranti, A. (1997). Units of participation. *Linguistic Anthropology*, 280-330.

Echeverría, M. D. P. P., & Pozo, J. I. (1998). *Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* Porto Alegre: ArtMed, 13-42.

Falcon, R. (2009). Algebraic Reasoning in the Middle Grades: A View of Student Strategies in Pictorial and Algebraic System of Equations. *Online Submission*. Recuperado em junho 10, 2023, em httpFs://eric.ed.gov/?id=ED525230.

Freitas, J. L. M., & Guadagnini, M. R. (2013). O uso da fatoração na resolução de equações do 2o grau por alunos do 9o ano do ensino fundamental. *Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática*, *7*(1).

Fonseca, S. J. (2016). *Análise das dificuldades enfrentadas por alunos do ensino médio em interpretar e resolver problemas de matemática financeira.* [Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Sergipe].

Gil, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa* (Vol. 4, p. 175). São Paulo: Atlas.

Godoy, A. S. (1995). Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de empresas*, *35*, 20-29.

Jordão, A. L. I. (2011*). Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do ensino médio.* [Dissertação de Mestrado em Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo].

Kuhn, M., & Lima, E. (2021). Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental: reflexões a partir dos PCN e da BNCC para construção do pensamento algébrico significativo. *REnCiMa. Revista de Ensino de Ciéncias e Matemática*, *12*(3), 1-23.

Lima, K. R. A. S. (2019). *Dificuldades no ensino aprendizagem das equações do 2º grau dos alunos do 1º ano do ensino médio.* [Monografia de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará].

Maharani, N. (2020). Perbandingan Tingkat Pemahaman Mahasiswa STMIK STIKOM Indonesia Pada Metoda Sarrus dan Metoda Cramer pada Penyelesaian Sistem Persamaan Linier. *PENDIPA Journal of Science Education*, *4*(2), 66-73.

Martins, J. D. S. (2008). A fotografia e a vida cotidiana: ocultações e revelações. *Sociologia da fotografia e da imagem.* São Paulo: Contexto.

Negromonte, M. A. O., das Graças Silva, M., de Luna, C. C. A., & Coutinho, D. J. G. (2019). Construção do pensamento algébrio no ensino fundamental: dificuldades. *Brazilian Journal of Development*, *5*(10), 20597-20610.

Oktaç, A. (2018). Conceptions about system of linear equations and solution. *Challenges and strategies in teaching linear algebra*, 71-101.

Pinheiro, B. R. M. (2019). *Uma abordagem da álgebra dentro do currículo do EF: mudanças e proposta para sala de aula.* 2019. [Dissertação de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – Profmat, Universidade Federal do Semi-Árido].

Ponte, J. P. D. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. *XIV EIEM-Encontro de Investigação em Educação Matemática*, 5-27.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). Álgebra no ensino básico. Lisboa: DGIDC.

Pontes, E. A. S. (2021). Noção intuitiva no ato de ensinar e aprender matemática por meio de uma atividade de ensino de sistemas lineares com coeficientes positivos. *Revista Baiana de Educação Matemática*, 2(01), e202106-e202106.

Proença, M. C. (2018). Resolução de Problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. *Maringá: Eduem.*

Proença, M. C. (2021). Resolução de Problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos. *Revista de Educação Matemática (REMat)*, *18*, 1-14.

Proença, M. C., Maia-Afonso E. J., Mendes, L. O. R & Travassos, W. B. (2022). Dificuldades de Alunos na Resolução de Problemas: análise a partir de propostas de ensino em dissertações. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *36*, 262-285.

Proença, M. C., Campelo, C. D. S. A., & dos Santos, R. R. (2022). Problem Solving in BNCC: reflections for its insertion in the curriculum and in Mathematics teaching at Elementary School. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 13(6), 1-19.

Ramos, M. L. P. D., & Curi, E. (2015). Análise de erros em resoluções de equação e inequação exponencial: revelando as dificuldades dos alunos. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *11*(44).

Rakhmawati, I. A. & Saputro, D. R. S. (2019). An analysis of problem-solving ability among high school students in solving linear equation system word problems. In *Journal of Physics: Conference Series*, 1211(1), IOP Publishing, 1-10.

Roberts, A., & Le Roux, K. (2019). A commognitive perspective on Grade 8 and Grade 9 learner thinking about linear equations. *Pythagoras*, *40*(1), 1-15.

Rosenthal, G. (2014). *Pesquisa social interpretativa: uma introdução*. EdiPucrs.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Töman, U., & Gökburun, Ö. (2022). What Was and Is Algebraic Thinking Skills at Different Education Levels? *World Journal of Education*, *12*(4), 8-20.

Valenzuela, S. T. F. (2007). *O uso de dispositivos didáticos para o estudo de técnicas relativas a sistema de equações lineares no EF*. [Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul].