EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i3p297-321

Aspectos do pensamento diferencial de estudantes do ensino médio com o GeoGebra

Aspects of high school students' differential thinking with GeoGebra

Aspectos del pensamiento diferencial de estudiantes de secundaria con GeoGebra

Aspects de la pensée différentielle des lycéens avec GeoGebra

Ana Rita Domingues[1]
Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Mestrado em Ensino e Processos Formativos
https://orcid.org/0000-0002-4308-0261

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva[2]
Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Doutorado em *Education Studies*
https://orcid.org/0000-0002-5810-2259

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho[3]
Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Doutorado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0003-4012-959X

Resumo

Na pesquisa relatada neste artigo, busca-se explorar aspectos do pensamento diferencial e do pensar-com-GeoGebra emergentes quando estudantes do Ensino Médio investigam atividades sobre o cálculo de áreas e volumes. Incialmente, discutem-se questões sobre pensamento matemático e pensamento diferencial, propondo uma perspectiva sobre pensamento diferencial formada por quatro aspectos: noção de limite e continuidade, noção de infinitésimo, conceito de integral definida e concepção visual-geométrica. Do ponto de vista metodológico, com fundamentação na pesquisa qualitativa, desenvolveram-se experimentos de ensino com seis duplas de alunos de 1ª, 2ª, e 3ª séries do Ensino Médio, considerando a elaboração de uma tarefa composta por cinco atividades. No presente artigo, com base na noção de amostragem na pesquisa qualitativa, discutiu-se a investigação desenvolvida por uma das duplas de 3ª série em relação à atividade intitulada: "O Problema do Volume". Os resultados destacam o papel da visualização e da experimentação-com-tecnologias no desenvolvimento do pensamento diferencial dos estudantes. Em especial, enfatizam-se como os recursos ou potencialidades do

[1] ar.domingues@unesp.br
[2] ricardo.scucuglia@unesp.br
[3] inocencio.balieiro@unesp.br

software ofereceram meios para que os estudantes articulassem os quatro aspectos que compõem o pensamento diferencial na perspectiva proposta. Por fim, este estudo contribui com a produção de conhecimentos acerca do uso de tecnologias digitais em Educação Matemática, em particular com relação ao ensino de Cálculo no Ensino Médio.

Palavras-chave: Educação matemática, Tecnologias digitais, GeoGebra, Cálculo, Pensamento matemático.

Abstract

In the research reported in this article, we seek to explore aspects of differential thinking and thinking-with-GeoGebra that emerge when high school students investigate activities on the calculation of areas and volumes. Initially, we discuss issues about mathematical thinking and differential thinking, proposing a perspective on differential thinking formed by four aspects: Notion of limit and continuity; Notion of infinitesimal; Defined integral concept; Visual-geometric design. From the methodological point of view, based on qualitative research, we developed teaching experiments with 6 pairs of students from the 10, 11 and 12 grades of High School, considering the elaboration of a task composed of 5 activities. In the article, based on the notion of sampling in qualitative research, we discuss the investigation developed by one pair of 12th grades about the activity entitled “The Problem of Volume”. In the data analysis, we highlighted the role of visualization and experimentation-with-technologies in the development of students' thinking. In particular, we emphasize how the resources or potentialities of the *software* offered ways for students to articulate the four aspects that make up differential thinking in the proposed perspective. This study contributes to the production of knowledge about the use of digital technologies in Mathematics Education, in particular to the relation to the teaching of Calculus in High School.

Keywords: Mathematics education, Digital technology, GeoGebra, Calculus, Mathematical thinking.

Resumen

En la investigación reportada en este artículo, buscamos explorar aspectos del pensamiento diferencial y del pensamiento con GeoGebra que surgen cuando los estudiantes de secundaria investigan actividades sobre el cálculo de áreas y volúmenes. Inicialmente, discutimos cuestiones sobre el pensamiento matemático y el pensamiento diferencial, proponiendo una perspectiva sobre el pensamiento diferencial formada por cuatro aspectos: noción de límite y continuidad, noción de infinitesimal, concepto de integral definido y concepción visual-geométrica. Desde un punto de vista metodológico, con base en una investigación cualitativa, desarrollamos experiencias didácticas con 6 parejas de estudiantes de 1°, 2° y 3° de secundaria considerando la elaboración de una tarea compuesta por 5 actividades. En este artículo, a partir de la noción de muestreo en la investigación cualitativa, discutimos la investigación desarrollada por una de las parejas de 3° grado en relación a la actividad titulada: “El Problema del Volumen”. En los resultados destacamos el papel de la visualización y la experimentación con tecnología en el desarrollo del pensamiento diferencial de los estudiantes. En particular, destacamos cómo los recursos o capacidades que ofrece el software significan para los estudiantes articular esos cuatro aspectos que componen el pensamiento diferencial en la perspectiva propuesta. Finalmente, este estudio contribuye a la producción de conocimiento sobre el uso de las tecnologías en la Educación Matemática, particularmente en relación a la enseñanza del Cálculo Integral en la Educación Secundaria.

Palabras clave: Educación matemática, Tecnologías digitales, GeoGebra, Cálculo, Pensamiento matemático.

Résumé

Dans la recherche rapportée dans ce article, nous avons cherché à explorer les aspects de la pensée différentielle et de la pensée avec GeoGebra qui émergent lorsque les élèves du secondaire étudient des activités sur le calcul des aires et des volumes. Dans un premier temps, nous discutons des questions sur la pensée mathématique et la pensée différentielle, en proposant une perspective sur la pensée différentielle formée par quatre aspects : notion de limite et de continuité, notion d'infinitésimal, concept d'intégrale définie et conception visuelle-géométrique. D'un point de vue méthodologique, basé sur une recherche qualitative, nous avons développé des expérimentations pédagogiques auprès de 6 binômes d'élèves de 1ère, 2ème et 3ème année du Lycée en considérant l'élaboration d'une tâche composée de 5 activités. Dans cet article, basé sur la notion d'échantillonnage en recherche qualitative, nous discutons de l'investigation développée par l'un des binômes de 3e année en relation avec l'activité intitulée : « Le problème du volume ». Dans les résultats, nous soulignons le rôle de la visualisation et de l'expérimentation de la technologie dans le développement de la pensée différentielle des élèves. En particulier, nous soulignons comment les ressources ou les capacités du logiciel offert signifient pour les étudiants d'articuler ces quatre aspects qui composent la pensée différentielle dans la perspective proposée. Enfin, cette étude contribue à la production de connaissances sur l'utilisation des technologies dans l'enseignement des mathématiques, notamment en relation avec l'enseignement du calcul intégral au lycée.

Mots-clés : Enseignement des mathématiques, Technologies numériques, GeoGebra, Calcul, Pensée mathématique.

Aspectos do Pensamento Diferencial de Estudantes do Ensino Médio com o GeoGebra

Pesquisas em Educação Matemática têm explorado aspectos diversos do Pensamento Matemático em diversificados níveis de ensino, como na Educação Básica e no Ensino Superior (Henriques, 2010; Wielewski, 2005; Krutetskii, 1976). Muitos conceitos e termos relacionados ao Pensamento Matemático, como o Pensamento Matemático Avançado, surgem na literatura como forma de ampliar as compreensões sobre o pensamento de estudantes e suas complexidades. De acordo com Henriques (2010, p. 19):

> A natureza do pensamento matemático está necessariamente interligada aos processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático. A compreensão, tal como acontece, é um processo ocorrendo na mente do indivíduo. Pode ser rápida, um *click* na mente, mas é, frequentemente, baseada numa longa sequência de atividades de aprendizagem durante as quais uma grande variedade de processos mentais ocorre e interage. Os investigadores em educação matemática têm, por isso, tomado consciência da importância dos processos mentais e as suas interações na compreensão da Matemática avançada.

Entendemos que Henriques (2010) conceitua o Pensamento Matemático Avançado com o intuito de compreender a Matemática concebida como "avançada" a partir de um quadro teórico que relaciona Pensamento Matemático e Pensamento Matemático Avançado. Na realidade, expressões como Pensamento Matemático Avançado e Pensamento Matemático Elementar passaram a ser discutidas com intensidade em Educação Matemática por um dos grupos de trabalho do *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hardel et al., 2006); autores, como Dreyfus (1991), Tall (1991) e Gray et al. (1999), haviam construído uma visão de que a Matemática explorada por estudantes em idades mais jovens apresenta certa continuidade voltada à Matemática Avançada e esse fato é evidenciado por diversas características presentes na Matemática Avançada. Os autores justificam essa perspectiva por meio da **complexidade** dos processos inerentes ao Pensamento Matemático e as **mudanças cognitivas** que podem ser identificadas no indivíduo em atividade matemática. Desta forma, o pensamento envolvido na aprendizagem de um dado conceito ou objeto matemático perpassa por engendramentos envolvendo o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado. De acordo com Sad (2000):

> (...) muitos dos processos (transição e reconstrução mental, generalização e abstração, intuição, rigor, análise e síntese) do pensar matemático avançado podem ser encontrados em um nível mais elementar, e o que faz a passagem do pensar matemático elementar para o avançado é a transição do descrever para definir e de convencer para provar, de um modo lógico baseado nas definições tomadas. (Sad, 2000, p. 3)

Segundo Reis (2001), de modo implícito ou não, o Pensamento Matemático Avançado traz a discussão sobre a intuição e o rigor presentes nesse Pensamento Avançado. Essa discussão, de natureza epistemológica, aborda dois elementos essenciais na construção do conhecimento matemático como um todo e que, em especial, envolve as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Matemática. Com relação ao Cálculo, podemos afirmar que a abordagem dos temas é fundamentada em uma perspectiva aplicada, com a interpretação intuitiva dos conceitos, com apelo à visualização geométrica, com ressalvas formais e com relação ao rigor. Por outro lado, em Análise Matemática, os tópicos geralmente são tratados segundo uma perspectiva lógico-formal, com a definição rigorosa dos conceitos, várias proposições demonstradas, com pouquíssima visualização geométrica e pouco apelo à intuição e ao rigor.

Na tentativa de compreender essa discussão entre rigor e intuição, Reis (2001) realizou a análise de alguns materiais didáticos e entrevistas semiestruturadas com quatro professores-pesquisadores. São eles: Roberto Ribeiro Baldino e Geraldo Severo de Souza Ávila (entrevistados em 1998); e Djairo Guedes de Figueiredo e Elon Lages Lima (entrevistados em 1999). No que se refere à parte das entrevistas, quando questionados sobre a percepção e o enfrentamento diante dessa relação entre rigor e intuição no ensino da Matemática, os depoentes apresentaram uma visão que considera questões cognitivas, morais e culturais e rompem concepções de rigidez diante dessa relação, destacando a existência de diferentes níveis de rigor que necessitam ser mediados pelos docentes. Enfatizando aspectos relacionados à dicotomia entre Cálculo - Pensamento Diferencial e Análise - Pensamento Analítico, Reis (2001, p. 157) questiona “a possibilidade de existência de um ponto de equilíbrio entre o Pensamento Diferencial intuitivamente construído e o Pensamento Analítico rigorosamente construído”, assumindo que, “por uma pré-concepção equivocada de nossa parte, tentávamos, de qualquer modo, associar a intuição ao pensamento diferencial e o rigor ao pensamento analítico. Como todos os depoentes demonstraram, essa associação não pode ser feita de forma dicotômica ou reducionista” (Reis, 2001, p.157).

Assim, é possível considerar que a intuição e o rigor assumem tanto uma dimensão de antagonismo, quando de complementaridade. Outro elemento a ser destacado nas entrevistas de Reis (2001) é o desdobramento apresentado pelos depoentes com relação ao Pensamento Diferencial. O professor Roberto Ribeiro Baldino admitiu que ainda não possuía uma caracterização completa do Pensamento Diferencial, mas, apesar disso, assumiu que o considera como algo que, por introduzir a decomposição das grandezas, vai além do

Pensamento Algébrico. Baldino também comentou na entrevista que a gênese do Pensamento Diferencial é mais difícil de ser acompanhada a partir do século XIX.

Os professores Djairo Guedes de Figueiredo e Elon Lages Lima não se pronunciaram quanto a uma caracterização, até mesmo histórica, do Pensamento Diferencial e do Pensamento Analítico. Eles optaram por identificar, partindo do ponto de vista didático-pedagógico, diversos elementos de comparação entre Cálculo e Análise. Desse modo:

> Como podemos verificar, pela própria dificuldade de discutir e caracterizar os pensamentos diferencial e analítico demonstrada por nossos depoentes, a tentativa de análise e a dificuldade de realizá-la, por nossa parte, mostram que o domínio conceitual destas duas formas de pensamento é ainda pouco conhecido / explorado na produção da Educação Matemática. (Reis, 2001, p.159)

Em busca de uma explicação acerca de quais elementos estão associados ao Pensamento Diferencial, podemos discutir algumas reflexões propostas por Sad (2000). A pesquisadora, que defendeu sua tese de doutorado em 1998, apresentando uma abordagem epistemológica de aspectos do Cálculo Diferencial e Integral, discorre no artigo *Uma abordagem Epistemológica do Cálculo* sobre a produção de significados e conhecimentos a partir do Cálculo (Sad, 2000). Assim, reforçando o apontamento feito por Wielewski (2005), de que o pensamento é influenciado por vários elementos (internos e externos) e que se manifesta de várias formas, Sad (2000) chama a atenção para o fato de que a "*diversificação* nos modos de produção de significado é feita em relação aparente a um 'mesmo' objeto produzido (...) e simbolicamente representado (...), mas que, contudo, pode reproduzir diferentes significados" (Sad, 2000, p. 1).

Nesse sentido, muitos aspectos têm sido considerados na conceituação de variadas formas de pensamento matemático. Tais aspectos dizem respeito à própria natureza da Matemática, à elementos que constituem conceitos ou conteúdos matemáticos e até mesmo eventos em sala de aula, *designs* de tarefas, resolução de problemas, papéis e saberes de professores e estudantes etc. No âmbito do pensamento matemático envolvendo o Cálculo, Sad (2000) definiu denominações especiais (estipulações locais) para núcleos de campos semânticos relacionados ao Cálculo. Tais denominações se referem às noções de limite, infinitésimos, visualizações geométricas e algoritmos. De maneira específica, apresentamos a categorização proposta por Sad (2000) na Tabela 1.

Tabela 1.

Núcleos associados ao Cálculo (Sad, 2000, p.7-8)

Núcleo de um Campo Semântico	Caracterização
Estipulações locais a respeito de limite	Quando se tem no núcleo a definição Weierstrassiana[4] de limite de uma função de uma variável real.
Estipulações locais a respeito de infinitésimos	Quando se tem no núcleo elementos fundamentados na noção de infinitésimo[5].
Estipulações locais visuais-geométricas	Quando se tem no núcleo princípios ou resultados geométricos, gráficos e desenhos de figuras planas ou espaciais.
Estipulações locais do tipo algoritmos	Quando se tem no núcleo algoritmos (regras, fórmulas, sequências memorizadas "de cor"), sem relacionar ao entendimento e justificativa matemática.

Levando em consideração essas categorias apresentadas por Sad (2000), mas principalmente a natureza dos dados produzidos e analisados na pesquisa relatada no presente artigo, propomos uma nova categorização referente a aspectos que consideramos relevantes e emergentes do Pensamento Diferencial. Tal categorização, apresentada na Tabela 2 a seguir, parte de um cenário de Ensino Médio, mas pode ser conceituada em outros níveis de ensino.

Tabela 2.

Aspectos do Pensamento Diferencial (elaboração dos autores)

Aspecto	Caracterização
Noção de limite e continuidade	Quando há manifestação de raciocínios e conclusões envolvendo um processo de aproximação a um valor máximo ou mínimo, apresentando uniformidade nos elementos de investigação construídos.
Noção de infinitésimo	Quando há a manifestação de ideias relacionadas à redução no tamanho de uma medida até que ela fique o mais pequena possível, mas sem se anular. Essa redução implica no aumento de repartições de um intervalo ou no número de lados de um polígono (inscrito e/ou circunscrito), por exemplo.
Conceito de integral definida	Quando há a manifestação de propostas envolvendo o cálculo de área e/ou volume por meio de intervalos bem definidos.
Concepção visual-geométrica	Quando há a manifestação de construção de figuras planas e/ou espaciais, bem como a análise de figuras para a manifestação de raciocínios e conclusões.

Portanto, a pesquisa relatada neste artigo compreende **aspectos do Pensamento Diferencial,** como a manifestação de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral emergentes

---

[4] $\lim_{x \to c} f(x) = L \coloneqq (\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \land \varepsilon \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists \delta)(\delta > 0 \land \delta \in \mathbb{R} \land (\forall x)(x \in \mathbb{R} \land x \neq c \land 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon))$

[5] Sad (2000) explica a noção de infinitésimo como a concebida desde Newton (de mônadas infinitesimais, de incrementos infinitamente pequenos), ou como para Leibniz (uma classe de números menores do que qualquer outro designado, às vezes também expresso como diferenciais ou como distâncias infinitamente pequenas).

de maneira formal e/ou intuitiva em estudantes do Ensino Médio ao investigarem atividades que envolvem o cálculo de área e volume mediante o *software* GeoGebra. Esse processo enfatiza a noção de pensar-com-GeoGebra proposta por Borba et al. (2018), que destacam o papel das mídias (como o GeoGebra) na produção de conhecimentos. Tal perspectiva é fundamentada no conceito denominado *seres-humanos-com-mídias*, proposto por Borba e Villarreal (2005). Embora a temática "ensino de Cálculo" venha sendo explorada há décadas na área de Educação Matemática, existem diversos estudos atuais que suscitam questões ou inquietações consideradas muito pertinentes (Trevisan & Araman, 2021; Santos et al., 2022), incluindo especificidades no âmbito do Ensino Médio (Siple et al., 2023).

Aspectos Metodológicos

A realização desta pesquisa foi aprovada por Comitê de Ética em Pesquisa (CAAE: 20196619.8.0000.5466). Com o objetivo de investigar aspectos do Pensamento Diferencial emergentes em um grupo de estudantes do Ensino Médio ao pensarem-com-GeoGebra atividades que envolvem a investigação de área de regiões limitadas por eixos e curvas e o cálculo do volume de regiões limitadas por superfícies planas e curvas, buscou-se respostas para a seguinte pergunta de pesquisa: "Quais aspectos do Pensamento Diferencial e do pensar-com-GeoGebra emergem quando estudantes do Ensino Médio investigam atividades sobre o cálculo de áreas e volumes?"

Bicudo (1993) afirma que pesquisar em Educação Matemática não é pesquisar em Matemática, nem em Educação. Mesmo que aborde algo pertinente a ambas, é expressar a preocupação "com o compreender a Matemática, com o fazer Matemática, com as interpretações elaboradas sobre os significados sociais, culturais e históricos da Matemática" (Bicudo, 1993, p. 19-20). Para essa tarefa, nesta pesquisa, buscou-se percorrer um caminho que explora as atividades propostas para além de uma única resolução, com foco em proporcionar momentos de descobertas e revelações, previstas ou não, e que valorizam a compreensão que os participantes têm sobre conteúdos matemáticos explorados em tarefas específicas. Esse percurso apresenta indícios da metodologia de pesquisa proposta por Steffe e Thompson (2000), denominada como Experimento de Ensino.

A metodologia de experimentos de ensino é direcionada à exploração e explicação da atividade segundo a Matemática dos estudantes que, estando imersos em um cenário colaborativo, têm a liberdade de compartilhar e explorar conjecturas, negociar metas e objetivos comuns. Nessa metodologia, Steffe e Thompson (2000) compreendem sessão de ensino como uma sequência de encontros que seguem alguns critérios específicos: em cada encontro, além da presença do agente de ensino (pesquisador) e de um ou mais estudantes, inclui-se uma testemunha, um método de gravação do ambiente e das atividades desenvolvidas, além de ser sugerida pelos autores a duração de um semestre ou ano. Essas sessões de ensino compõem a metodologia de pesquisa Experimento de Ensino (Steffe & Thompson, 2000).

O cenário para a produção de dados foi organizado em duas sessões de ensino com cada uma das seis duplas participantes (12 estudantes). Cada sessão de ensino contemplou uma dupla por vez. As observações de todas as sessões de ensino foram registradas por meio de filmagens do ambiente e do *software* OBS Studio[6]. Além disso, todas as construções feitas no s*oftware* GeoGebra pelos estudantes foram salvas separadamente; elas serviram como registro da produção de dados. A Tabela 3, a seguir, apresenta os instrumentos usados para a produção de dados desta pesquisa, seguidos da justificativa.

Tabela 3.

Instrumentos de produção de dados (elaboração dos autores)

Instrumentos	**Justificativa**
Filmagem	A escolha de registrar os dados por meio da filmagem, ciente de que esse instrumento não é imune a problemas, compactua com a ideia de que o vídeo pode capturar comportamentos valiosos dos participantes, manifestos verbais e não verbais e permite a revisitação contínua do pesquisador.
Arquivo gerado no GeoGebra	Apresenta toda a construção, organização e avanço de pensamento dos estudantes. Pode ser revisitado de modo cruzado com os arquivos audiovisuais e/ou anotações em papel.
Diário de Campo	Mesmo não sendo recorrente em todas as sessões de ensino e/ou duplas, esse instrumento complementa o processo de revisitação e esclarecimento de possíveis pensamentos e estratégias abordadas pelos participantes.

As sessões de ensino foram realizadas durante o ano de 2019, em uma Escola Pública Estadual, em cidade do interior do estado de São Paulo, onde a primeira autora do artigo atua como professora. No respectivo ano, ela ministrava aulas de Matemática para as três turmas de 3ª série que havia na escola e uma turma de 2ª série. O contato que tinha com os estudantes das demais turmas (outra de 2ª e duas de 1ª série) ocorria por meio de diálogos em momentos esporádicos. Mesmo diante do mencionado, o convite para participar da produção de dados desta pesquisa foi estendido a todos os estudantes da escola. Dentre os que manifestaram interesse no prazo estipulado, 12 foram selecionados por meio de um sorteio, sendo 4 de cada série do Ensino Médio. Durante o desenvolvimento e fechamento deste estudo, participaram da produção de dados efetivamente 11 estudantes, que se dividiram em 5 duplas e 1 individual (um

[6] *Software* gratuito que fornece captura de fonte e dispositivo em tempo real, composição de cena, codificação, gravação e transmissão ao vivo. Disponível em: <https://obsproject.com/pt-br/download>. Último acesso em: 28 abr. 2021.

dos participantes de uma das duplas da 2ª série teve um imprevisto no dia da primeira sessão de ensino, mas o outro integrante se propôs a desenvolver as atividades individualmente), segundo o agrupamento: 2 duplas com estudantes de 1ª série; 1 dupla e 1 individual com estudantes da 2ª série; 2 duplas com estudantes da 3ª série.

Optou-se por esse tipo de agrupamento e em desenvolver duas sessões de ensino com cada dupla no período da tarde, em dias diferentes e isoladamente, para que os dados produzidos pudessem ser os mais detalhados possíveis, visto que existia uma quantidade limitada de equipamentos eletrônicos e as aulas na escola só aconteciam no período matutino. Além do que, por colocar os participantes em um cenário ao qual não estavam habituados, considerou-se que esse modelo traria um maior conforto e diálogo entre os envolvidos.

No total, foram elaboradas nesta pesquisa cinco atividades ou tarefas fundamentadas no uso do GeoGebra: duas explorando regiões limitadas e três explorando sólidos de revolução. Todas as atividades foram pensadas para que os estudantes se voltassem ao diálogo, à manipulação e investigação matemática, visando uma aproximação e generalização para os problemas apresentados. As atividades foram propostas na sequência[7]:

1ª série do Ensino Médio

- Atividade 1: Quadratura do círculo (investigação da área do círculo);
- Atividade 2: Cubatura da esfera (investigação do volume da esfera).

2ª e 3ª série do Ensino Médio

- Atividade 3: O problema da área (investigação da área sob a curva da parábola);
- Atividade 4: O problema do volume (investigação do volume do paraboloide);
- Atividade 5: A relação entre os volumes (investigação da relação entre o volume do cilindro, cone e paraboloide, todos de mesma base e altura).

Neste artigo, discutimos, especificamente, alguns resultados emergentes a partir da exploração da Atividade 4 realizada pela dupla formada pelos estudantes Janaína e Matheus da terceira série. A escolha por essa dupla se baseou na noção denominada **amostra de conveniência** (Marshall, 1996), a qual envolve a seleção de assuntos mais acessíveis, o que a torna menos rigorosa. Também, pela **amostra de julgamento** (também conhecida como amostra proposital), a qual é a mais comum entre as técnicas de amostragem para pesquisas

[7] Além da compreensão do Pensamento Diferencial, esta pesquisa buscou nas produções de Baron (1985) e Edwards (1979) vestígios de aspectos do Pensamento Diferencial em problemas históricos envolvendo o cálculo de áreas e volumes. Diversos problemas importantes da história do Cálculo Integral influenciaram diretamente o *design* das atividades elaboradas nesta pesquisa. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular se fez presente para o entendimento quanto ao escasso trabalho no Ensino Médio explorando os elementos do Cálculo Diferencial e Integral.

qualitativas e permite que o pesquisador selecione ativamente a amostra mais produtiva para responder à pergunta de pesquisa (Marshall, 1996). Por fim, consideramos ainda a **amostra teórica**, que geralmente é conduzida pela teoria para uma maior ou menor extensão e requer a construção de teorias interpretativas dos dados emergentes (Marshall, 1996).

A análise de dados foi significativamente fundamentada no modelo de análise de vídeos proposto por Powell et al. (2004). Esse modelo é composto pelos seguintes procedimentos não lineares: (a) familiarização com os dados: assistir aos registros de vídeos várias vezes; (b) descrição: elaboração de registros escritos que descrevam os eventos registrados; (c) transcrição: elaboração de registros que representem rigorosamente a fala e os gestos dos estudantes e dos participantes das sessões; (d) identificação de eventos críticos: um evento é crítico quando representa uma evidência para as perguntas diretrizes propostas; (e) codificação: criação de códigos para a diversidade de momentos críticos que auxiliam na identificação de padrões e unidades de significados no processo analítico; (f) criação de episódios e do enredo: refere-se ao texto que compila os vários momentos críticos e ao processo de contraste com outras fontes de dados como notas de campo; (g) composição da narrativa: interpretação particular do todo usando os dados como evidência, produzindo, dessa forma, uma narrativa escrita.

Resultados e Discussões

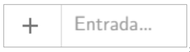
O objetivo proposto na atividade **O problema do volume** é de levar para o ambiente tridimensional (3D) a investigação que ocorreu anteriormente em **O problema da área**, mas agora com o objetivo de determinar o volume compreendido entre a superfície do paraboloide gerado pela revolução da curva dada por $y = x^2$ com $x \in [-1,1]$ e o plano dado por $y = 1$. Assim como nas atividades **Quadratura do círculo** e **Cubatura da esfera**, esta pesquisa propõe e recomenda que as atividades O problema da área e O problema do volume sejam trabalhadas de modo sequencial, mas essa ideia não é fixa e permite adaptações por parte da pessoa que pretende desenvolvê-la. Na segunda sessão de ensino, realizada em 13 de novembro de 2019, houve um momento de **socialização** com o GeoGebra (duração de 17 minutos e 37 segundos), focado no ambiente 3D. A troca de ambientes (Janela 2D para Janela 3D), o campo Entrada (+ Entrada...) e as ferramentas Mover ( ), Ponto (A), Cilindro (Cilindro), Esfera ( ), Cone (Cone), Volume (cm³ Volume) foram alguns dos elementos explorados na socialização.

Ao iniciar a atividade da sessão de ensino, a professora-pesquisadora questionou os estudantes quanto à curva da parábola trabalhada no dia anterior; então, retornando à Janela 2D do GeoGebra, a dupla construiu novamente a curva $y = x^2$, com $-1 \leq x \leq 1$. Com a construção visual finalizada, foi proposto aos estudantes que imaginassem a curva rotacionando em torno do eixo y e qual seria o resultado visual dessa ação. Na primeira tentativa, Matheus associou a uma "panela" e Janaina a uma "antena", revelando elementos acerca da importância do pensamento metafórico/analógico em cenários voltados ao Pensamento Matemático. Como os objetos que foram mencionados eram 3D, esse momento foi conduzido solicitando que a dupla, ainda nesse mesmo arquivo do GeoGebra e sem alterar o elemento presente na Janela 2D, abrisse a Janela 3D. Em seguida, solicitou-se que os estudantes olhassem a Etapa 1 (Tabela 4) da atividade impressa que receberam um pouco antes da *socialização com o GeoGebra* e desenvolvessem os itens dessa etapa.

Tabela 4.

Etapa 1 – Instrução para início da atividade "O problema do volume"

1. *Construção da superfície de revolução no intervalo $-1 \leq x \leq 1$ utilizando o GeoGebra.*

a) *Clique no campo "Entrada"* 

, digite "Função", escolha a opção 

clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses "$x^2, -1{,}1$". Pressione a tecla "Enter"  .

b) *Abra a janela de visualização 3D clicando em*  *, presente no canto superior direito, seguido de*  *e escolha a opção "Janela de Visualização 3D"* 

.

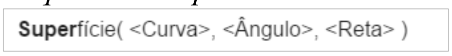
c) *Oculte a "Janela de Visualização" clicando em*  *, seguido de "Fechar"* 

.

d) *Posicione o Eixo Y como vertical. Para isso clique em*  *, seguido de*  *e selecione a opção* 

. Acesse também o ícone  *, escolhendo a opção*  .

e) *Clique no campo "Entrada"* 

, digite "Superfície", escolha a opção 

*clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses "$\boldsymbol{nome\ da\ fun}$**ção** $\boldsymbol{do\ item\ 1 gerado\ pelo\ GeoGebra}, 2\pi, EixoY$". Pressione a tecla "Enter"*  .

Executando os passos descritos na tarefa, os estudantes conseguiram concluir a plotagem do paraboloide no GeoGebra (Figura 1).

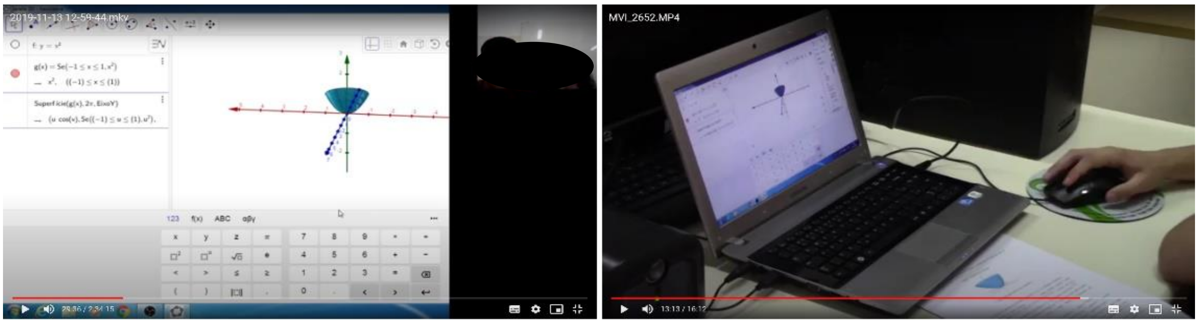


Figura 1.

Construção do ambiente de investigação – Janaina e Matheus. Fonte: Dados da Pesquisa.

Após a construção feita pela dupla, houve continuidade do diálogo. Esse momento é representado pela transcrição a seguir.

> Pesquisadora: Então nós vamos calcular o volume dessa figura... Então a atividade, que chama “O problema do volume”, consiste em determinar o volume do paraboloide... Então essa imagem tem esse nome, tá?... Paraboloide... Obtido pela revolução em torno do eixo y, da curva $y = x^2$, com $-1 \leq x \leq 1$... Que foi tudo o que a gente já tinha feito de construção, tá bom? E agora, como que vocês acham que a gente vai conseguir calcular o volume pra essa construção?
> Janaina: Será que tem alguma ferramenta?
> Matheus: É, tem aquela do volume que a gente usou...
> [Matheus segue selecionando a ferramenta Volume  que foi explorada anteriormente, clica na imagem do paraboloide e a dupla percebe que nada apareceu]
> Janaina: Eu acho que não vai...
> [Matheus repete a ação feita anteriormente, mas nada muda]
> Matheus: Tenta você [passando o mouse para a Janaina] ... Tenta a sorte... [Janaina assume o controle do mouse]
> Pesquisadora: O que vocês acham que está acontecendo?
> Janaina: Não tá dando certo...
> Matheus: Não tá indo...
> Pesquisadora: Por que que não tá dando certo a ferramenta do cálculo de volume?
> Janaina: Porque ela é aberta... Talvez...
> Pesquisadora: Hum... Sim... Porque essa imagem que nós construímos... Essa imagem que nós construímos, na verdade, é a casquinha do nosso paraboloide... É a superfície, não é todo o espaço preenchido dentro. Mas, a gente vai usar essa casquinha como base para calcular o volume que estaria dentro dela. Tudo bem? Então, e agora? Se a gente não consegue usar a ferramenta Volume que o GeoGebra traz, qual ou quais estratégias vocês acham que dá pra ser utilizada pra resolver o que está sendo proposto, que é encontrar esse volume?
> Janaina: Ahm, deixa eu ver...
> Matheus: A gente pode desenhar outro... O cilindro, alguma coisa... Um quadrado... Mas acho que é melhor você ver... [Matheus continua a sua fala, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]

[Janaina e Matheus continuam a dialogar, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]
Matheus: Se a gente fizer um cilindro aqui, é igual ontem, fazendo por eliminação...
Janaina: Uhum...
Matheus: Por incrível que pareça, é isso! [Matheus continua a sua fala, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]
(Diálogo entre pesquisadora e estudantes, 2019).

Nesse trecho transcrito é possível perceber a agilidade com que os estudantes trouxeram para a atividade a estratégia de usar a aproximação para calcular o volume desejado, assim como foi feito na atividade anterior. Por isso, consideramos relevante a recomendação de trabalhar as atividades de modo sequencial, pelo menos para estudantes do Ensino Médio, uma vez que elementos do Cálculo Diferencial e Integral são poucos explorados nessa etapa da Educação Básica. O diálogo entre os estudantes seguiu e as primeiras ideias foram construídas com GeoGebra, como é possível observar na Figura 2 a seguir.

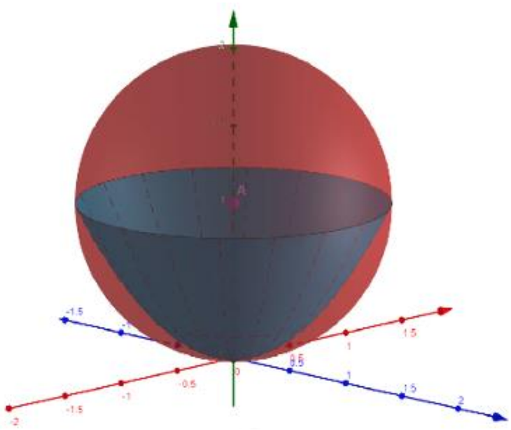


Figura 2.

Construção concluída: Aproximação volume do paraboloide (Janaina e Matheus, 1ª tentativa).

Após a construção, a dupla trabalhou com o *zoom* do GeoGebra para aproximar os objetos e comparar os volumes. Depois de alguns minutos, iniciou-se um diálogo entre os presentes.

Pesquisadora: Vocês acham que é quanto, comparado com a esfera?
Matheus: Metade...
Janaina: É...
Matheus: Ou menos da metade?
Janaina: Um pouco menos da metade.
Matheus: Menos da metade, porque se fosse metade, seria tudo isso... [movimentando o mouse sobre a imagem construída e indicando o que seria uma semiesfera] Então seria em torno de dois... dois e dez...
[Janaina comenta algo, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio. Após Pesquisadora solicitar que a estudante falasse um pouco mais alto, o diálogo seguiu]

Janaina: É... Eu acho que vai ser uns dois e... É, eu dou dois... Eu tiro esses noventa e cinco...
Matheus: Eu dou dez... Dois e dez!
Janaina: Eu dou dois! Ou menos de dois, não sei...
(Diálogo entre professor-pesquisador e estudantes, 2019).

Nessa primeira tentativa de aproximação feita pela dupla, é possível perceber a emersão dos seguintes aspectos do Pensamento Diferencial: **Noção de limite e continuidade**, por terem construído uma esfera circunscrita ao paraboloide; e **Concepção visual-geométrica**, por terem feito a construção de um objeto para comparação. Ao se questionar os estudantes sobre qual figura eles acreditavam que, ao ser feita a construção, o volume ficaria mais próximo daquele que estávamos investigando, Matheus trouxe o cone para discussão, argumentando como ele apareceria visualmente na janela do GeoGebra, enquanto passava o *mouse* sobre algumas ferramentas do *software*. Outra ideia que a dupla tinha comentado anteriormente e que veio à tona nesse momento foi a possibilidade de desenvolver a aproximação por meio do cilindro. Então, na segunda tentativa realizada, Janaina e Matheus optaram por seguir o caminho do cilindro, como é possível observar na Figura 3, a seguir.

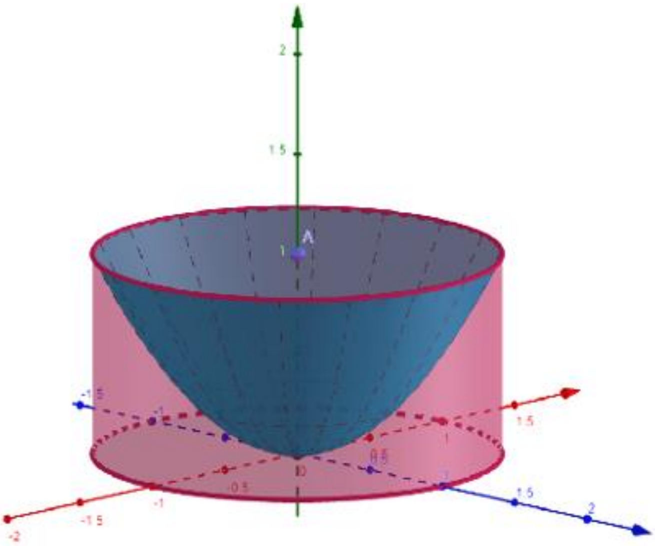


Figura 3.
Construção concluída - Aproximação volume do paraboloide – Janaina e Matheus (2ª tentativa).

Pesquisadora: E agora, o que vocês podem falar sobre o volume do paraboloide comparado ao volume do cilindro, então? Quais são as aproximações que vocês vão fazer?
Janaina: O duro é que esse aí ficou sobrando muito...
Matheus: Muito mais!
Janaina: Tá bem maior.
Matheus: Aí sobraria muito espaço então...

Janaina: Será que se a gente tirar os dois vai fazer alguma diferença?
Matheus: O quê? Como você fala?
Janaina: Assim, subtrair o valor que a gente achou no cilindro com o cilindro, com esse... Que nem a gente fez na outra... Eu acho que não, né?
Matheus: Tem que pensar no seguinte... Calma aí que vou ligar o outro [tirando a opção de omitir que estava aplicada na esfera] ... Qual é a dif...Ó... [movimentando os objetos para mudar o ângulo de visão]
Janaina: Hum... É não vai interferir em muita coisa...
Matheus: Porque o que mais chega aqui perto é a esfera, né?
Janaina: É, é a esfera tá bem melhor.
(Diálogo entre pesquisadora e estudantes, 2019).

Nesse momento, mesmo que os estudantes não tenham apresentado uma nova aproximação para o volume do paraboloide, é possível identificar a conclusão de um raciocínio por aproximação baseado novamente nos aspectos do Pensamento Diferencial de **Noção de limite e continuidade** e **Concepção visual-geométrica**. Em busca de novas ideias para explorar com o GeoGebra e durante um momento de conversa entre os estudantes, Janaina recorreu à atividade impressa que estava sobre a mesa e, folheando as páginas, identificou a palavra Cone. Nesse momento, a dupla lembrou que não tinha construído esse cenário e optou por desenvolvê-lo, como é possível observar na Figura 4[8]. O diálogo iniciado após a construção é apresentado a seguir.

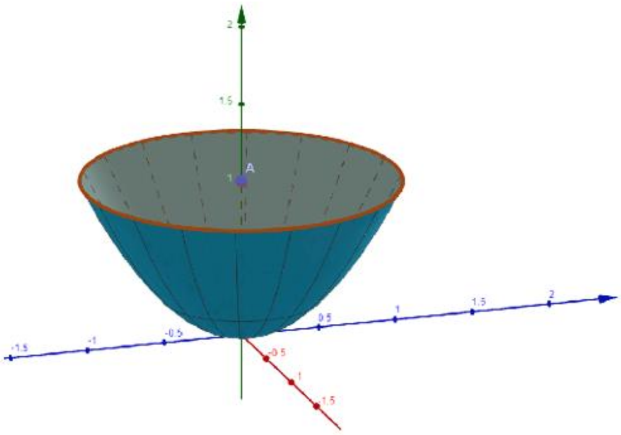


Figura 4.

Construção concluída - Aproximação volume do paraboloide – Janaina e Matheus (3ª tentativa).

Matheus: Meu Deus! Está quase igual!
Janaina: É, coube! Nossa... que coisa linda!

[8] Devido a pouca transparência presente na construção do paraboloide realizada pelos estudantes e, tendo que o volume do cone é menor que o volume do paraboloide (ambos de mesma base e altura), não é possível ver o corpo do cone que está sendo explorado, apenas a sua base.

Após orientar os estudantes quando a redução da transparência de objetos construídos no GeoGebra, e a aplicação do exposto no paraboloide, a conversa seguiu.
Janaina: Olha, é o espaço da circunferência! Não é?
Matheus: Oi?
Janaina: Esse é o espaço da circunferência que estava faltando, não é? Não? Será?
Matheus: Então a gente tem que achar... Calma aí... [Matheus movimenta a barra de rolagem da janela de álgebra do GeoGebra]
Matheus: O cone... O cone tem um e cinco! [fazendo referência ao volume do cone que foi apresentado pelo GeoGebra: 1,05]
Janaina: Um e cinco...
Matheus: Você falou dois... [fazendo referência ao resultado aproximado por Janaina na primeira tentativa]
Janaina: Eu falei dois...
Matheus: Então...
Pesquisadora: Quanto será que vocês acham que vai ser o volume do paraboloide?
Janaina: Á, eu ainda fico entre o dois mesmo...
Matheus: Eu vou ficar... [olhando para a imagem enquanto pensava] Um e oitenta!
Janaina: Um e oitenta... Entre um e oitenta e dois. Tá ai!
(Diálogo entre pesquisadora e estudantes, 2019).

Assim como nas tentativas anteriores, essa abordagem explorada pela dupla e toda a proposta de aproximação, que foi trilhada até o momento, apresentaram indícios da emersão dos aspectos do Pensamento Diferencial: **Noção de limite e continuidade** e **Concepção visual-geométrica**. Janaina e Matheus seguiram pensando em como aproximar mais os resultados que estavam obtendo ao valor do volume do paraboloide. Optaram por deixar visível na Janela 3D do GeoGebra o paraboloide, o cone e a esfera (construída na primeira tentativa). A dupla seguiu a estratégia de trabalhar a diferença entre os volumes e realizaram o cálculo: $Volume_{semiesfera} - Volume_{cone} = 2{,}095 - 1{,}05 = 1{,}045$. Diante do resultado, a dupla ficou refletindo, tentando fazer alguma interpretação sobre o valor encontrado. Os estudantes voltaram a observar os objetos construídos no GeoGebra, omitiram a esfera, alteraram o ângulo de visão que estavam tendo do paraboloide e do cone, dialogaram e, então, concluíram que o volume desejado seria um valor entre 1,15 (aproximação feita por Matheus) e 1,20 (aproximação feita por Janaina). Mesmo sem fazer novas construções no GeoGebra, mas pensando-com-o-*software*, os estudantes conseguiram pensar e propor uma nova aproximação para o que estavam investigando, sendo emergente nesse processo o aspecto do Pensamento Diferencial de **Noção de limite** e **continuidade**. Quando a dupla finalizou o raciocínio anterior, sugeriu-se que iniciassem uma nova estratégia, buscando identificar um valor ainda mais próximo do esperado. Diante da dúvida que pairava sobre os estudantes em como seguir com a investigação, Janaina e Matheus retomaram a leitura da atividade impressa e, diante das figuras que estavam presentes, decidiram seguir a mesma estratégia, que consistia em inscrever e circunscrever cilindros ao paraboloide. A quarta tentativa construída pelos estudantes gerou o objeto apresentado na Figura 5:

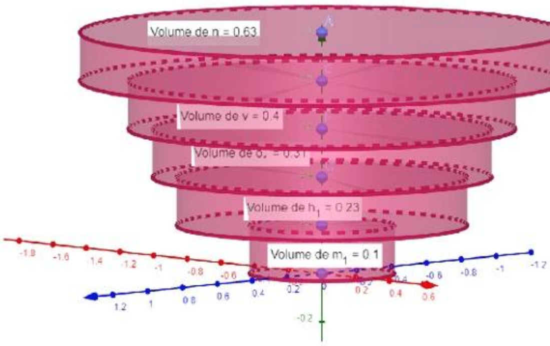


Figura 5.

Construção concluída - Aproximação volume do paraboloide – Janaina e Matheus (4ª tentativa).

Ao somar os valores dos volumes dos cilindros que foram construídos, o seguinte diálogo ocorreu:

> Janaina: Deu um e sessenta e sete!
> Pesquisadora: Hum... E aí, será que tá bom esse negócio?
> Matheus: Não...
> Pesquisadora: Mas vocês acham que tá mais próximo?
> Janaina: Tá! Bem mais próximo...
> Pesquisadora: Vocês estimam que vai ser quanto então? Mais do que esse valor? Menos do que esse?
> Janaina: Menos...
> Pesquisadora: Quanto que vocês acham que vai ser?
> Janaina e Matheus: Vai ser menos!
> Janaina: Então eu acho que vai ser um e...
> Matheus: Quarenta... Um e quarenta pra cinquenta...
> Janaina: É... Entre um e quarenta e um e cinquenta.
> (Diálogo entre professor-pesquisador e alunos, 2019).

A partir desse ponto, os estudantes seguiram com a ideia de cilindros inscritos e circunscritos ao paraboloide, mas buscando o aprimoramento dos objetos construídos (ajuste de raio a partir da curva dado por $y = x^2$ com $x \in [-1,1]; = x^2$; quantidade de cilindros; entre outros), bem como o uso simultâneo dos cenários para trabalhar a aproximação a partir da média aritmética entre a soma dos volumes dos cilindros inscritos (V_i) e a soma dos volumes dos cilindros circunscritos (V_c). A Figura 6, a seguir, mostra o desenvolvimento da quinta tentativa feita pela dupla Janaina e Matheus:

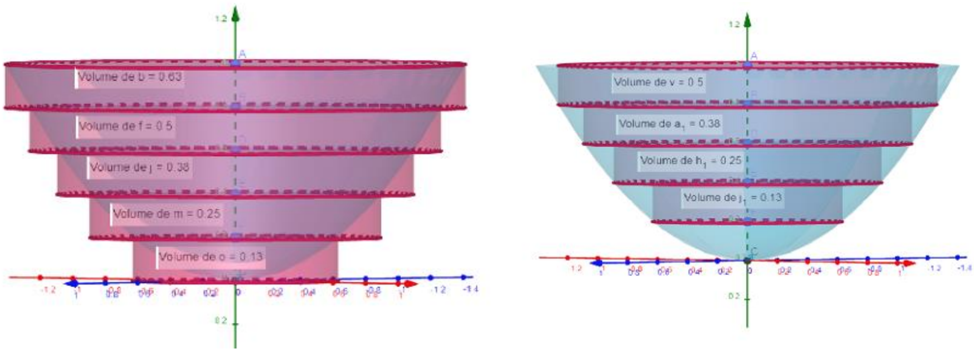


Figura 6.

Construção concluída - Aproximação volume do paraboloide – Janaina e Matheus (5ª tentativa – Parte I).

Ao calcular a média aritmética mencionada anteriormente, os estudantes chegaram no valor 1,59. Resgatando mentalmente as construções que foram exploradas nessa tentativa, Matheus passou a acreditar que o volume do paraboloide seria de 1,40, e Janaina de 1,45. Nesse sentido, nessa etapa faz-se presente os seguintes aspectos do Pensamento Diferencial: ***Noção de limite e continuidade***; ***Noção de infinitésimo***; ***Conceito de integral definida***; e ***Concepção visual-geométrica***. De acordo coma transcrição apresentada após a Figura 7, quando se questionou se era possível chegar mais próximo do valor desejado, Janaina e Matheus reconheceram que sim. Então foi feita uma nova pergunta pela pesquisadora, agora buscando compreender qual estratégia a dupla poderia adotar. Os estudantes imediatamente responderam que seria necessário diminuir os espaços e fazer mais figuras, como no dia anterior. E assim iniciou-se a sexta tentativa de investigação de Janaina e Matheus, agora construindo o dobro de cilindros em cada cenário (inscrito e circunscrito), conforme a Figura 7 a seguir.

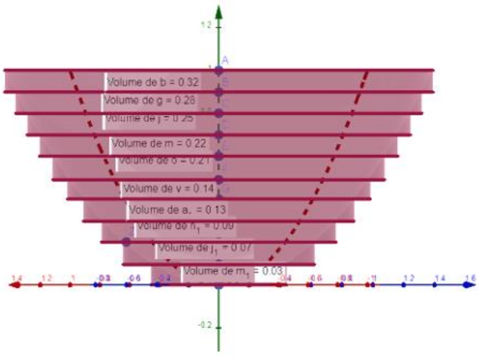


Figura 7.

Construção concluída - Aproximação volume do paraboloide – Janaina e Matheus (6ª tentativa – Parte I).

Após calcularem a média aritmética para essa tentativa, iniciou-se o diálogo transcrito a seguir:

Pesquisadora: E agora, vocês acham que está se aproximando de qual valor o volume então?
Janaina: Um e cinquenta e cinco...
Matheus: Ahm... Vai ser um e cinquenta e oito... cinco mil oitocentos e poucos... Quase chegando no cinquenta e nove.
Pesquisadora: Ó, nós tínhamos cinco cilindros, deu um e cinquenta e nove a nossa média, né? Depois, dez cilindros, um e cinquenta e oito. Vocês acham que se a gente continuar aumentando o cilindro esse valor vai diminuir muito?
Matheus: Não! Eu acho que ele vai manter. No máximo um e cinquenta e seis, assim...
Janaina: É...
Matheus: Cinquenta e sete, estourando...
Pesquisadora: Tá bom, beleza! Então ok, é um outro jeito que a gente tem de trabalhar volume por aproximação, igual área, tá? A gente não precisa ter a fórmula para calcular o volume do paraboloide... Se eu sei calcular o volume de uma outra figura, eu posso ir trabalhando ela várias vezes dentro ou fora, e trabalhar a média nesse nosso último caso, né? [Janaina acena que sim com a cabeça]
Pesquisadora: Ahm... Então vocês vão fechar em quê? Estourando qual valor pro nosso volume?
Matheus: Vai arriscar no cinquenta e sete ou cinquenta...? [perguntando para Janaina]
Janaina: [Janaina comenta algo que não foi possível transcrever por problemas de áudio] Um e cinquenta e sete mesmo [Matheus acena com a cabeça concordando]. Um e cinquenta e sete! A gente fechou em um e cinquenta e sete!
(Diálogo entre professor-pesquisador e alunos, 2019).

Portanto, diante do resultado que a dupla decidiu assumir como aproximação do volume do paraboloide, a investigação dessa atividade terminou. Nessa sexta e última tentativa feita pelos estudantes, é notória a emersão dos quatro aspectos do Pensamento Diferencial: **Noção de limite e continuidade**; **Noção de infinitésimo**; **Conceito de integral definida**; e **Concepção visual-geométrica**. Ao todo, foi aproximadamente 1 hora entre o início da primeira tentativa e o desfecho da sexta tentativa. Como é uma contagem de tempo alta, e as tentativas 5 e 6 seguem exatamente a mesma proposta da tentativa 4, além de apresentar a emersão dos mesmos aspectos do Pensamento Diferencial, o tempo decorrente da tentativa 1 a 4 foi transformado no diagrama apresentado na Figura 8, o qual traz uma coluna para cada minuto de investigação dentre as tentativas selecionadas e evidencia, com a cor verde, os aspectos do Pensamento Diferencial que emergiram dentro de cada um desses minutos. A cor laranja, além de evidenciar a emersão do aspecto do Pensamento Diferencial, indica a troca de ferramenta (uso) no GeoGebra. Já a cor roxa, além de sinalizar tudo o que as outras cores representam, indica um tempo prolongado de repetição de alguma ação feita pelos estudantes.

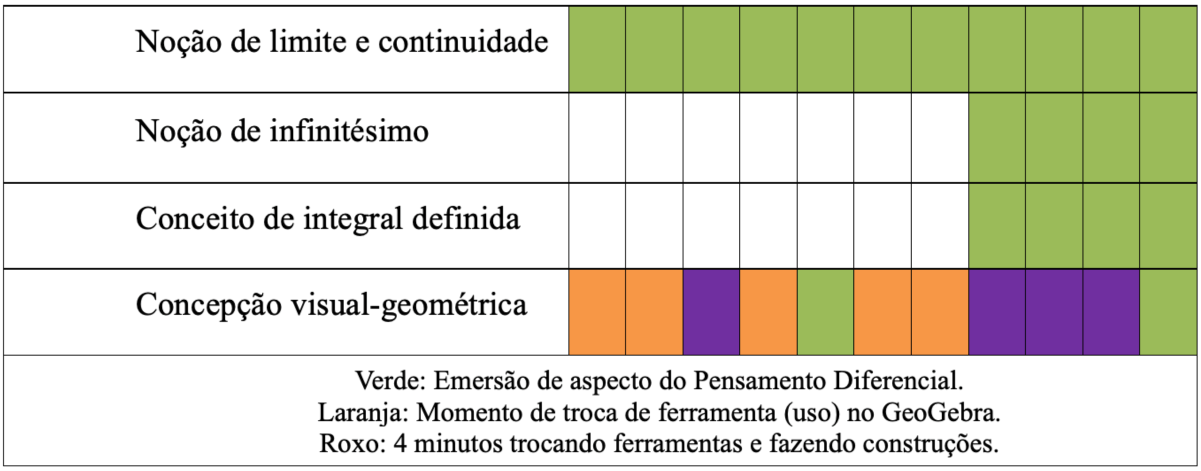


Figura 8.

Aspectos do Pensamento Diferencial que emergiram na exploração de O problema do volume – Janaina e Matheus (1ª a 4ª tentativa de investigação).

A partir do diagrama podemos verificar a constante emersão dos aspectos do Pensamento Diferencial de **Noção de limite e continuidade** e de **Concepção visual-geométrica**. Os aspectos do Pensamento Diferencial de **Noção de infinitésimo** e de **Conceito de integral definida** emergiram a partir da quarta tentativa feita pela dupla (vale ressaltar que as tentativas 5 e 6 não foram representadas no diagrama por seguirem a mesma proposta da tentativa 4 e apresentarem a emersão dos mesmos aspectos do DP), pois a abordagem foi diferente das realizadas anteriormente e tais tentativas estavam diretamente relacionadas. Os recursos do GeoGebra, nesse episódio, ofereceram meios para que fossem explorados todos os aspectos do Pensamento Diferencial, mas com destaque a dois deles: a noção de limite e continuidade e a concepção visual-geométrica. A visualização e a dinamicidade do *software* que permite realizar simulações e testes, nesse sentido, foram fundamentais para o desenvolvimento do Pensamento Diferencial dos estudantes.

Considerações finais

Este estudo foi iniciado com o intuito de identificar quais aspectos do Pensamento Diferencial emergiam em um grupo de estudantes do Ensino Médio durante a investigação de atividades envolvendo o cálculo de áreas e volumes. Para isso, houve o desenvolvimento de sessões de ensino (Steffe & Thompson, 2000) com estudantes da 1ª, 2ª e 3ª série do Ensino Médio. Durante essas sessões, os estudantes, organizados em duplas, exploraram as atividades propostas utilizando o *software* GeoGebra. Nesse contexto, a pergunta que guiou este estudo foi: "Quais aspectos do Pensamento Diferencial e do pensar-com-GeoGebra emergem quando estudantes do Ensino Médio investigam atividades sobre cálculo de áreas e volumes?" Para refletir sobre a compreensão do Pensamento Diferencial, perpassamos por outros pensamentos presentes na Matemática e nos fundamentamos obtidos a partir das concepções de Sad (2000), Reis (2001), Wielewski (2005) e Henriques (2010), que afirmam que o Pensamento Diferencial é um tipo de Pensamento Matemático e que, mesmo com algumas particularidades, esses e outros pensamentos se complementam. A compreensão que esse estudo teve quanto aos aspectos do Pensamento Diferencial, também alicerçada nos autores citados, é de manifestação de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral emergentes de maneira formal e/ou intuitiva, associados à ideia de pensar-cálculo.

A investigação matemática (Ponte et al., 2016) e o pensar-com-GeoGebra (Borba et al., 2018) foram utilizados neste estudo. Nesse processo de pensar-com-GeoGebra, os autores pontuam que a tecnologia digital escolhida e empregada tem um propósito além do uso comum como ferramenta, mas é inserida como base da investigação. Optamos por trabalhar com o *software* GeoGebra fundamentados na facilidade de acesso, exploração e visualização. Ainda na produção dos dados, foram utilizadas filmagens das sessões de ensino, gravação da tela do computador e *webcam*, arquivos gerados no GeoGebra e anotações em folha de papel.

O estudo confirma o entendimento de que desenvolver atividades ou tarefas que integrem as ideias fundamentais do cálculo, por meio da resolução de resolução de problemas, "possibilita aos alunos desenvolverem habilidades voltadas às capacidades de investigação, de formulação, de explicações e argumentos, (...), constituindo assim uma oportunidade para o desenvolvimento de habilidades de ordem superior" (Siple et al., 2023, p. 110). Especificamente, na pesquisa relatada no presente artigo, o GeoGebra foi fundamentalmente importante na representação visual e movimentação dos objetos, uma vez que o *software* possibilitou a rápida execução das propostas de investigação feitas pelos estudantes e auxiliou na descoberta de novas relações e construções. O GeoGebra, associado ao processo de ensino e aprendizagem, mostrou-se um eficiente aliado no desenvolvimento cognitivo de estudantes do Ensino Médio. Ele permitiu a produção de conhecimentos matemáticos relacionados a elementos do Cálculo Diferencial e Integral, trazendo sutileza a conceitos que são apresentados e estudados no Ensino Superior. O pensar-com-GeoGebra surgiu ao longo da investigação das atividades. Os estudantes, por não estarem familiarizados com a manipulação do *software*, iniciaram as conjecturas e verificações apenas falando e detalhando as etapas que estavam executando. Essa abordagem também possibilitou a emersão de aspectos do Pensamento Diferencial, mas com um maior intervalo de tempo e a descontinuidade dos aspectos de **Noção de limite e continuidade** e **Concepção visual-geométrica**. Diante disso, é possível concluir que o pensar-com-GeoGebra potencializou a emersão dos aspectos do Pensamento Diferencial.

Agradecimentos: Ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Processos: 428323/2018/-9 e 307278/2022-0).

Referências

Baron, M. E. (1985). *Origens e Desenvolvimento do Cálculo.* Unidade 1 - A Matemática Grega. Tradução de José R. B. Coelho. Editora UnB.

Bicudo, M. A. V. (1993). Pesquisa em Educação Matemática. *Revista Pro-Posições, 1*, 18–23.

Borba, M. C., Scucuglia, R., & Gadanidis, G. (2018). *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. 2. *1*. reimp. Autêntica.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication Technologies, modeling, experimentation and visualization*. Springer.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking. In D. Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking processes* (pp. 25–41). Kluwer.

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. Springer-Verlag.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. In D. Tirosh (Org.), *Forms of Mathematical Knowledge* (pp. 111–133). Springer.

Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking: some PME perspectives. In A. Gutiérrez & P. Boero (Orgs.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers.

Henriques, A. C. C. B. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de atividades de investigação*. 462f. [Tese de Doutorado em Educação, Instituto de Educação Universidade de Lisboa, Portugal].

Marshall, M. N. (1996). Sampling for qualitative research. *Family Practice*, *13*(6), 522–525. https://doi.org/10.1093/fampra/13.6.522.

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oilveira, H. (2016). *Investigações matemáticas na sala de aula.* 3. ed. rev. ampl.; 2. reimp. Autêntica.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2004). Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. *Bolema*, *21*, 81–140.

Reis, F. S. (2001). *A tensão entre rigor e intuição no Ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.* 302f. [Tese de Doutorado em Educação, Faculdade de Educação Universidade Estadual de Campinas].

Sad, L. A. (2000). Uma abordagem epistemológica do cálculo. In *Anais da 23ª ANPEd.* CD.

Santos, J. N., Carvalho, L. S., Silveira, R. de S., & Pinheiro, J. M. L. (2022). Uma revisão sistemática sobre a presença das tecnologias digitais frente às problemáticas do ensino e da aprendizagem do cálculo no ensino superior. *Revista Brasileira De Educação Em Ciências*

E Educação Matemática, *6*(1), 110–132. https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2022.v.6.n.1.27791

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Erlbaum.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, p. 3-21. Kluwer.

Trevisan, A. L. & Araman, E. M. (2021) Argumentos Apresentados por Estudantes de Cálculo em uma Tarefa de Natureza Exploratória. *Educação Matemática Pesquisa*, *23*(1), 591-612. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p591-612.

Zuchi Siple, I., Bar de Figueiredo, E., & Sabatke Herbst, J. (2022). Ideias fundamentais do cálculo no Ensino Médio: uma abordagem da PG à luz da resolução de problemas. *Com a Palavra, O Professor*, *7*(18), 89–116. https://doi.org/10.23864/cpp.v7i18.810.

Revisora: Márcia Aparecida Mariano da Silva Pina.