

Conhecimentos associados à função afim manifestados por estudantes do Ensino Médio

Knowledge associated with affine functions manifested by high school students

Conocimientos asociados a la función afín expresados por estudiantes de secundaria

Connaissances associées à la fonction connexe exprimées par les lycéens

Fernanda Kelly da Silva Siqueira¹
Universidade Estadual Paraná - Campo Mourão
Mestra em Educação Matemática
<https://orcid.org/0000-0003-1656-6087>

Veridiana Rezende²
Universidade Estadual Paraná - Campo Mourão
Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática
<https://orcid.org/0000-0002-4158-2196>

Resumo

A investigação apresentada neste artigo é parte de uma pesquisa de mestrado realizada pela primeira autora, que investigou as complexidades de subclasses de situações mistas da classe comparação multiplicativa e transformação de medidas, associadas à função afim. Para tanto, foi elaborado um instrumento de pesquisa composto por três situações dessa classe, implementado em uma turma de 34 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de um colégio público na região noroeste do Paraná, Brasil. Os dados foram coletados por meio das resoluções escritas e de gravações em áudio dos diálogos dos estudantes, organizados em duplas ou trios. Especificamente, para este artigo, são apresentadas as análises das estratégias e dos teoremas em ação mobilizados por estudantes do Ensino Médio na resolução de uma situação mista associada à função afim, relacionada às subclasses de comparação multiplicativa (referido desconhecido) e transformação de medidas (transformação positiva com estado final desconhecido). Os resultados revelaram dificuldades na interpretação da taxa da função afim e no cálculo de porcentagem, além de incompreensões relativas ao termo independente da

¹ ferkellysilva@hotmail.com

² rezendeveridiana@gmail.com

função afim. A partir da análise dos esquemas e dos diálogos dos grupos, foram identificados quatro teoremas-em-ação verdadeiros e cinco falsos.

Palavras-chave: Educação matemática, Situações mistas, Função afim, Teorema-em-ação, Complexidade.

Abstract

The investigation presented in this article is part of a master's research project conducted by the first author, which examined the complexities of subclasses of mixed situations within the class of multiplicative comparison and measure transformation associated with affine functions. For this purpose, a research instrument comprising three situations within this category was designed and applied to a group of 34 students enrolled in the third year of high school at a public school in northwestern Paraná, Brazil. Data were collected through students' written solutions and audio recordings of their dialogues while working in pairs or trios. Specifically, this article presents analyses of the strategies and theorems-in-action mobilized by high school students in solving a mixed situation associated with an affine function, related to the subclasses of multiplicative comparison (unknown referent) and measure transformation (positive transformation with an unknown final state). The results revealed difficulties in interpreting the rate of change of the affine function and in calculating percentages, as well as misunderstandings regarding the constant term of the affine function. Based on the analysis of students' schemes and group dialogues, four true and five false theorems-in-action were identified.

Keywords: Mathematics education, Mixed situations, Linear function, Theorem-in-action, Complexity.

Resumen

La investigación presentada en este artículo forma parte de un estudio de maestría realizado por la primera autora, que investigó las complejidades de subclases de situaciones mixtas de la clase de comparación multiplicativa y transformación de medidas, asociadas a la función afín. Para ello, se elaboró un instrumento de investigación compuesto por tres situaciones de esta clase, aplicado en un grupo de 34 estudiantes de 3.º año de la Educación Media de una escuela pública en la región noroeste de Paraná, Brasil. Los datos fueron recolectados mediante las resoluciones escritas y grabaciones de audio de los diálogos de los estudiantes, organizados en parejas o tríos. Específicamente, para este artículo, se presentan los análisis de las

estrategias y de los teoremas en acción movilizados por estudiantes de Educación Media en la resolución de una situación mixta asociada a la función afín, relacionada con las subclases de comparación multiplicativa (referente desconocido) y transformación de medidas (transformación positiva con estado final desconocido). Los resultados revelaron dificultades en la interpretación de la tasa de la función afín y en el cálculo de porcentajes, además de incomprensiones relativas al término independiente de la función afín. A partir del análisis de los esquemas y de los diálogos de los grupos, se identificaron cuatro teoremas-en-acción verdaderos y cinco falsos.

Palabras-clave: Educación matemática, Situaciones mixtas, Función afín, Teorema en acción, Complejidad.

Résumé

La recherche présentée dans cet article fait partie d'une étude de master menée par la première auteure, qui a examiné les complexités de sous-classes de situations mixtes de la classe de comparaison multiplicative et de transformation de mesures, associées à la fonction affine. À cette fin, un instrument de recherche composé de trois situations de cette classe a été élaboré et mis en œuvre auprès d'un groupe de 34 élèves de troisième année de l'enseignement secondaire d'un établissement public situé dans la région nord-ouest de l'État du Paraná, au Brésil. Les données ont été recueillies à partir des productions écrites ainsi que des enregistrements audio des dialogues des élèves, organisés en binômes ou en trinômes. Plus précisément, pour cet article, sont présentées les analyses des stratégies et des théorèmes-en-action mobilisés par des élèves de l'enseignement secondaire lors de la résolution d'une situation mixte associée à la fonction affine, liée aux sous-classes de comparaison multiplicative (réfèrent inconnu) et de transformation de mesures (transformation positive avec état final inconnu). Les résultats ont révélé des difficultés dans l'interprétation du taux de variation de la fonction affine et dans le calcul de pourcentages, ainsi que des incompréhensions relatives au terme constant de la fonction affine. À partir de l'analyse des schémas et des dialogues des groupes, quatre théorèmes-en-action vrais et cinq faux ont été identifiés.

Mots-clés: Enseignement des mathématiques, Situations mixtes, Fonction affine, Théorème en action, Complexité.

Conhecimentos associados à função afim manifestados por estudantes do Ensino Médio

Introdução

A função afim é uma das primeiras funções estudadas na Educação Básica e envolve diferentes noções matemáticas, tais como gráfico de reta, colinearidade de pontos, taxa de variação constante, coeficiente linear, crescimento, decrescimento, função constante, função linear, função identidade e translações do gráfico, entre outras. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o estudo das funções é formalizado no 9º ano do Ensino Fundamental, momento em que se espera que os estudantes desenvolvam habilidades necessárias para compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e utilizem esse conceito para analisar situações funcionais (Brasil, 2018). No Ensino Médio, tais conhecimentos devem ser consolidados e ampliados, de modo que os estudantes sejam capazes de resolver problemas mais complexos, que demandam níveis mais elevados de reflexão e abstração (Brasil, 2018).

No entanto, o ensino desse conceito apresenta desafios, em razão da diversidade de ideias e de situações relacionadas à função afim, o que pode levar a erros e a dificuldades por parte dos estudantes. Estudos realizados por Fonseca (2011), Rezende, Nogueira e Calado (2020), Bernardino (2022) e Calado (2020) evidenciaram a presença de estratégias incorretas na resolução de situações envolvendo função afim, manifestadas por estudantes concluintes do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio. Nesse sentido, faz-se necessário desenvolver outras pesquisas que investiguem o ensino e a aprendizagem da função afim na Educação Básica.

Segundo Vergnaud (1996), a compreensão de um conceito ocorre ao longo do processo educacional, por meio da vivência de diferentes situações que envolvem outros conceitos, símbolos, representações, propriedades e teoremas, interconectados no que o autor denomina de Campo Conceitual. Para entender as situações que envolvem as estruturas aditivas e multiplicativas, Vergnaud e colaboradores definiram dois Campos Conceituais específicos: o das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas.

No Campo Conceitual das Estruturas Aditivas, são consideradas situações que envolvem uma ou várias adições ou subtrações. Esse campo compreende um conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar e resolver tarefas matemáticas relacionadas a essas situações (Vergnaud, 1993). Desse modo, para que os estudantes

compreendam esse campo, devem ser capazes de resolver diferentes tipos de situações pertencentes a essa estrutura. Vergnaud (1993) estabelece seis classes de situações nesse campo, sendo elas a composição de duas medidas em uma terceira, a transformação de uma medida inicial em uma medida final, a relação de comparação entre duas medidas, a composição de duas transformações, a transformação de uma relação e a composição de duas relações.

No Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, são consideradas situações que envolvem uma ou várias multiplicações ou divisões. Esse campo também inclui um conjunto de conceitos e teoremas para analisar e resolver tarefas matemáticas relacionadas a essas situações. Vergnaud (1993) estabelece cinco classes de situações nesse campo, abrangendo o isomorfismo de medidas ou proporção simples, a comparação multiplicativa em um único espaço de medidas, o produto de medidas ou produto cartesiano, a função bilinear e a proporção múltipla.

Situações que envolvem simultaneamente adição (ou subtração) e multiplicação (ou divisão) são chamadas de problemas mistos por Vergnaud (2009). Essas situações estão associadas à função afim, uma vez que sua expressão algébrica, $f(x) = ax + b$, articula simultaneamente uma componente multiplicativa e uma componente aditiva. Miranda (2019) apresenta uma classificação composta por nove (09) classes para situações mistas relacionadas à função afim. Diante disso, verifica-se a importância de investigar a complexidades dessas situações, além das estratégias e teoremas mobilizados por estudantes do Ensino Médio em sua resolução.

A pesquisa aqui apresentada é resultado da dissertação de mestrado da primeira autora. Nela, foi elaborado um instrumento de pesquisa com três situações mistas, associadas ao conceito de função afim, da classe de comparação multiplicativa e transformação de medidas, que foram resolvidas por 34 estudantes do 3º ano do Ensino Médio. O estudo buscou identificar a complexidade entre as subclasses de problemas mistos do tipo comparação multiplicativa e transformação de medidas, analisando as estratégias utilizadas pelos estudantes e os teoremas associados à função afim mobilizados por eles.

Para tanto, neste texto, são apresentadas as estratégias e os teoremas-em-ação mobilizados pelos estudantes na situação e subclasse de menor complexidade, a saber: comparação multiplicativa (referido desconhecido) – transformação de medidas (transformação positiva com a busca pelo estado final). Essa subclasse foi selecionada, no presente artigo, por apresentar a maior quantidade de respostas e de estratégias

manifestadas pelos estudantes. Na sequência, são expostos os aspectos teóricos e metodológicos da pesquisa, seguidos da análise e da discussão dos resultados obtidos.

Aspectos teóricos metodológicos

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), do psicólogo francês Gérard Vergnaud, é uma teoria cognitivista que busca compreender as filiações e rupturas entre os conhecimentos adquiridos, proporcionando uma estrutura de análise para o estudo do processo de aprendizagem de conceitos entre crianças e adolescentes (Vergnaud, 1993).

Para o estudo de um conceito, Vergnaud (1990) defende que é necessário considerar não apenas sua definição formal, mas também outros conceitos relacionados, situações, símbolos, representações, propriedades e teoremas que estão interligados. Esses elementos constituem o que o autor denomina Campo Conceitual, uma estrutura complexa formada por diferentes elementos interconectados, cuja articulação possibilita uma compreensão abrangente do conceito.

Na TCC, os conceitos são constituídos por um conjunto de situações que lhes conferem significado, isto é: um conjunto de invariantes operatórios (propriedades do conceito), que são subjacentes ao raciocínio, e um conjunto de símbolos utilizados em sua representação (Vergnaud, 2017). O desenvolvimento das competências e das concepções ocorre por meio das experiências do indivíduo com diversas situações, tanto no contexto escolar quanto fora dele. Segundo Magina *et al.* (2008), ao ser exposto a uma nova situação, o estudante mobiliza conhecimentos construídos em experiências anteriores e procura adaptá-los às demandas da nova situação.

Para compreender a organização invariante das ações ou operações realizadas pelos estudantes em relação a uma classe de situações, torna-se necessário entender o conceito de esquema. Na visão de Vergnaud (1993), o esquema é composto por metas e antecipações, regras de ação, invariantes operatórios (conceitos e teoremas em ação) e inferências. Esses componentes conferem ao esquema um caráter cognitivo que orienta e sustenta sua utilização. As metas e antecipações correspondem aos objetivos que orientam a ação do sujeito; as regras de ação são os procedimentos ou diretrizes que guiam o comportamento do sujeito ao lidar; os invariantes operatórios dizem respeito aos elementos conceituais e teóricos mobilizados na ação; e as inferências referem-se aos raciocínios e conclusões produzidos a partir desses elementos.

De acordo com Vergnaud (1993), é nos esquemas que se encontram os conhecimentos-em-ação do sujeito, incluindo o conceito-em-ação e o teorema-em-ação, que podem ser considerados como "invariantes operatórios". O conceito-em-ação refere-se a um conceito julgado pertinente no curso da ação, enquanto o teorema-em-ação é uma proposição considerada verdadeira pelo sujeito durante a ação (Vergnaud, 2009). Esses elementos cognitivos, presentes nos esquemas, permitem que a ação do sujeito seja operatória e contribuem para a compreensão e resolução de situações-problema.

Para analisar as classes de situações que dão sentido aos conceitos matemáticos nas estruturas aditivas e nas estruturas multiplicativas, Vergnaud estabeleceu dois Campos Conceituais. O Campo Conceitual das Estruturas Aditivas abrange as situações que envolvem adições e subtrações e contém, segundo Vergnaud (1993, p. 13), seis classes: "[...] composição de duas medidas em uma terceira; transformação de uma medida inicial em uma medida final; relação de comparação entre duas medidas; composição de duas transformações; transformação de uma relação; e composição de duas relações".

A classe de situações denominada *transformação de medidas* é a segunda descrita no Campo Conceitual das Estruturas Aditivas e é a que fundamenta o instrumento de produção de dados desta pesquisa. Por essa razão, tal classe será apresentada de forma mais detalhada. Nessa classe, ocorre uma transformação dinâmica da medida inicial para uma medida final. De acordo com Magina *et al.* (2008), as situações de transformação estão relacionadas a ideias temporais, nas quais há uma quantidade inicial que sofre transformações – como perda, ganho, acréscimo, decréscimo – resultando em uma quantidade final diferente da inicial. Tais situações envolvem a noção de variação e exigem a compreensão das transformações que ocorrem ao longo do tempo. Para essa classe, existem seis subclasses distintas, que se diferenciam pelas relações estabelecidas entre o estado inicial, a transformação e o estado final, a saber:

1. Conhecendo-se o estado inicial a e a transformação positiva $+b$, determina-se o estado final c : nessa situação, são fornecidos a medida inicial a e o acréscimo $+b$. O objetivo é determinar o estado final c após a aplicação dessa transformação.
2. Conhecendo-se o estado inicial a e o estado final c , determina-se a transformação positiva $+b$: nesse caso, tanto o estado inicial a quanto o estado final c são conhecidos, sendo necessário identificar a transformação positiva $+b$ que ocorreu para chegar do estado inicial ao estado final.

3. Conhecendo-se a transformação positiva $+b$ e o estado final c , determina-se o estado inicial a : aqui, a transformação positiva $+b$ e o estado final c são fornecidos. O objetivo é descobrir o estado inicial a a partir do qual a transformação positiva leva ao estado final.
4. Conhecendo-se o estado inicial a e a transformação negativa $-b$, determina-se o estado final c : nessa situação, a medida inicial a é dada, juntamente com a transformação negativa $-b$. O objetivo é determinar o estado final c após a aplicação dessa transformação negativa.
5. Conhecendo-se o estado inicial a e o estado final c , determina-se a transformação negativa $-b$: aqui, são conhecidos o estado inicial a e estado final c , sendo possível determinar a transformação negativa $-b$ que ocorreu entre eles.
6. Conhecendo-se a transformação negativa $-b$ e o estado final c , determina-se o estado inicial a : nesse caso, a transformação negativa $-b$ e o estado final c são fornecidos. O objetivo é descobrir o estado inicial a a partir do qual a transformação negativa leva ao estado final.

Vergnaud propõe esquemas relacionais (esquemas sagitais) que auxiliam na análise da estrutura e na classificação das classes de situações. Esses esquemas fornecem um quadro conceitual para entender as relações entre as medidas, as transformações e os estados inicial e final envolvidos. Portanto, o esquema relacional proposto por Vergnaud organiza as subclasses da classe de transformação de medidas a partir da relação entre três grandezas, conforme a Figura 1.

Figura 1

Esquema relacional da classe transformação de medidas



Nota. Adaptado de Vergnaud, 2009.

Dessa forma, as situações da classe transformação de medidas podem ser resolvidas de acordo com a seguinte equação: $x = a + (\pm b)$.

O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas abrange as situações que envolvem multiplicações e divisões. Dentro desse campo conceitual, Vergnaud (2009,

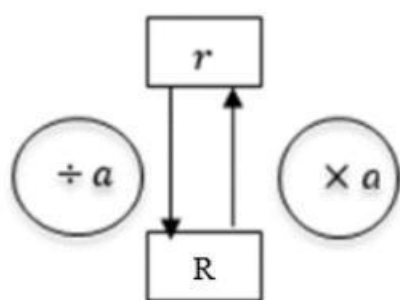
p. 13) estabelece cinco classes de situações que são relevantes para as estruturas multiplicativas: “[...] isomorfismo de medidas ou proporção simples; comparação multiplicativa, caso de um único espaço de medidas de mesma natureza; produto de medidas ou produto cartesiano; função bilinear; e proporção múltipla”.

Nesta pesquisa, é considerada, como instrumento de análise, a classe *comparação multiplicativa* (Figura 2). Nessa classe, são abordadas situações em que apenas duas grandezas de mesma natureza são comparadas de forma multiplicativa por meio de um escalar, como uma razão ou relação. Dentro da classe de comparação multiplicativa, podem ser identificadas três subclasses:

1. Comparação multiplicativa com o referente desconhecido: nessa situação, conhece-se o referido (r) e a relação (razão), mas o referente (R) é desconhecido. O objetivo é determinar o valor do referente a partir da relação estabelecida.
2. Comparação multiplicativa com o referido desconhecido: nesse caso, conhece-se o referente (R) e a relação (razão), mas o referido (r) é desconhecido. O objetivo é determinar o valor do referido com base na relação estabelecida.
3. Comparação multiplicativa com a relação desconhecida: nessa situação, conhece-se o referente (R) e o referido (r), mas a relação (razão) é desconhecida. O objetivo é determinar a relação entre as grandezas por meio da comparação multiplicativa.

Figura 2

Esquema relacional da classe comparação multiplicativa



Nota. (Miranda, 2009, p.64).

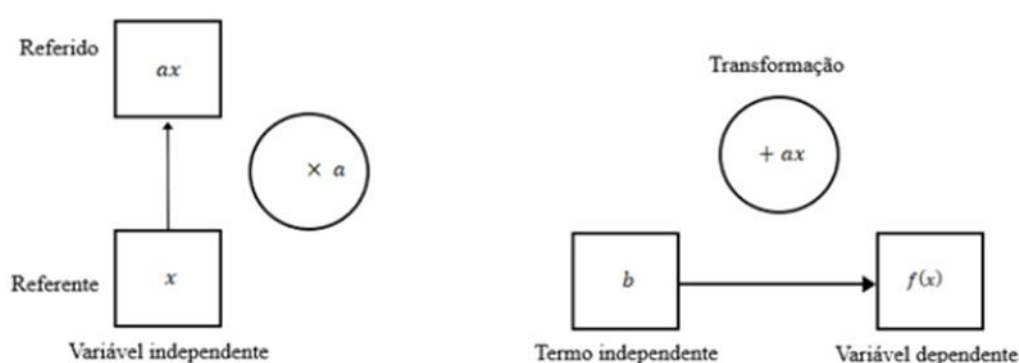
Diante disso, a equação que representa essa classe é dada por $r = R \times a$. Assim, obtêm-se seis (06) subclasses de situações relacionadas à comparação – vezes mais ($\times a$) e à comparação – vezes menos ($\div a$). Nesta pesquisa, são utilizadas apenas essas variações da comparação – vezes mais.

As situações que envolvem, simultaneamente, em sua resolução, ao menos uma operação do campo aditivo (adição/subtração) e ao menos uma operação do campo multiplicativo (multiplicação/divisão) são denominadas por Vergnaud (2009) como *problemas mistos*.

Considerou-se, para esta pesquisa, a classe de problemas mistos do tipo comparação multiplicativa e transformação de medidas, a qual é composta por uma relação ternária do campo multiplicativo e uma relação ternária do campo aditivo. De acordo com Miranda (2019), essas situações assumem a forma analítica da função afim $y = f(x) = b + a \cdot x$, com $a, b \in R$ e $a > 0$. Uma vez que Vergnaud não apresenta uma classificação para situações mistas, Miranda (2019) identificou e classificou esses problemas associados à função afim. Desse modo, com base nessa proposta, apresenta-se o esquema sagital da Figura 3 para a organização das medidas, indicando as relações estabelecidas entre elas.

Figura 3

Esquema Sagital da classe comparação multiplicativa e transformação de medidas



Nota. baseado em (Miranda, 2019).

Nas situações do tipo comparação multiplicativa e transformação de medidas, a transformação é formada por uma parte fixa que sofre a alteração de outra variável, em que esta última é resultado de uma comparação de medidas. Nesse contexto, a transformação assume a posição de referido na relação multiplicativa; a variável independente x assume a posição de referente; e a variável dependente y assume o estado final na relação de transformação aditiva. Além disso, a razão de comparação entre as medidas, obtida na comparação multiplicativa, coincide com a taxa "a" da função afim. A equação que representa essa situação é dada por: $f(x) = b + ax$.

As subclasses dessa classe de problema misto consideram uma combinação das subclasses de comparação multiplicativa e da transformação de medidas. Ou seja, considerando as três (3) variações da classe comparação multiplicativa combinadas com as seis (6) variações da classe transformação de medidas, é possível a formação de dezoito (18) subclasses. As variações são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1

Subclasses de problemas mistos do tipo comparação multiplicativa e transformação de medidas

Comparação multiplicativa	Transformação de medidas
Comparação Multiplicativa - Referido desconhecido Comparação Multiplicativa - Referente desconhecido Comparação Multiplicativa - Relação desconhecida	Transformação de medidas (Transformação positiva com estado final desconhecido)
	Transformação de medidas (Transformação positiva com estado inicial desconhecido)
	Transformação de medidas (Transformação positiva com a transformação desconhecida)
	Transformação de medidas (Transformação negativa com estado final desconhecido)
	Transformação de medidas (Transformação negativa com estado inicial desconhecido)
	Transformação de medidas (Transformação negativa com a transformação desconhecida)

Como exemplo para essa classe, há a situação que um vendedor recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R\$ 1.000,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 1% do total de vendas que ele fez durante o mês. Nesta situação, o valor referente às vendas recebido é 1% do valor total da venda, que se trata de uma porção do valor das vendas. Dessa forma, a porcentagem é a relação de uma comparação multiplicativa, isto é, um escalar que separa duas medidas de mesma natureza: o referido e o referente. O referente é, neste caso, o valor total das vendas realizadas no período, e o referido é 1% do valor em questão.

Após a apresentação da fundamentação teórica metodológica, na próxima sessão, são descritos os procedimentos metodológicos.

Procedimentos Metodológicos

Conforme mencionado na Introdução, esta pesquisa foi desenvolvida no segundo semestre de 2022 com estudantes do 3º ano do Ensino Médio de um colégio público da região centro-oeste do Paraná.

Durante o período de dois meses, que compreendia o começo de outubro ao final de novembro, a pesquisadora participou das aulas regulares da turma durante todas as manhãs das segundas e terças-feiras. Desse modo, para familiarizar-se com os estudantes, a pesquisadora participava e auxiliava nas atividades da turma. Por meio da observação participante, a pesquisadora teve a oportunidade de se aproximar dos estudantes, auxiliar a professora regente nas atividades pedagógicas desenvolvidas e identificar as principais características e dificuldades da turma.

Considerando as características da turma, foram realizados dois estudos pilotos com o objetivo de identificar possíveis dificuldades e realizar ajustes necessários no instrumento de pesquisa, antes da implementação do estudo principal.

No primeiro estudo piloto, participaram oito estudantes colaboradores, pertencentes ao mesmo contexto escolar já caracterizado anteriormente, organizados em duplas. Cada dupla recebeu uma das três situações que compunham o instrumento de pesquisa. A pesquisadora explicou aos estudantes que os diálogos, durante a resolução dos problemas, seriam gravados em áudio e esclareceu que não responderia a questionamentos sobre a correção das respostas. A atividade de resolução pelos estudantes teve duração aproximada de uma hora/aula.

Após a análise inicial das respostas dos estudantes, foram identificadas dificuldades de compreensão nos enunciados dos itens b) e c), em todas as situações. Diante disso, foram realizadas modificações nas situações do instrumento de pesquisa, incluindo a reorganização da ordem dos itens e a alteração de valores numéricos relacionados a salários e pagamentos, com o intuito de evitar complexidade desnecessária nos cálculos. Essas alterações visavam concentrar a atenção dos estudantes nos aspectos centrais da investigação e favorecer a compreensão dos enunciados.

Em seguida, foi realizado o segundo estudo piloto com dois participantes – um estudante do Curso de Administração e um pedagogo, à época doutorando em Educação – ambos pertencentes ao círculo de convivência da pesquisadora. Esse segundo estudo piloto teve como objetivo verificar se as modificações realizadas no instrumento de pesquisa foram suficientes para sanar as dificuldades identificadas no

primeiro estudo piloto. A partir dessa etapa, o instrumento de pesquisa foi considerado adequado e definido para ser utilizado no estudo principal.

A implementação do instrumento de pesquisa com a turma colaboradora ocorreu no dia 8 de novembro de 2022, durante duas horas/aula. Na sala de aula, havia um total de 38 estudantes que concordaram em participar da pesquisa, mediante a entrega do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido. Para o desenvolvimento da atividade, a pesquisadora solicitou que os estudantes se organizassem em duplas; mas dois grupos preferiram trabalhar em trio, e quatro estudantes preferiram realizar a atividade individualmente. Essa organização foi respeitada, de modo a não interferir na dinâmica da sala de aula. No entanto, para fins de análise dos dados, os registros produzidos pelos estudantes que trabalharam individualmente não foram considerados, uma vez que o foco era analisar os diálogos e registros dos grupos.

Para a produção dos dados, foram considerados os registros escritos dos estudantes para as três situações do instrumento de pesquisa, bem como os diálogos realizados durante a resolução dos problemas. Alguns grupos permitiram a gravação das discussões, enquanto outros preferiram enviar áudios, explicando suas estratégias de resolução. A pesquisadora concordou com esse pedido, uma vez que o objetivo principal era compreender as estratégias dos estudantes, e a explicação das estratégias utilizadas contribuiria para a pesquisa.

As situações do instrumento de pesquisa foram entregues em conjunto aos grupos, sendo que cada estudante recebeu três folhas coloridas de sulfite tamanho A4, cada uma correspondendo a uma das situações. As cores diferentes foram utilizadas para diferenciar essa atividade das demais, regulares da sala de aula. Embora cada integrante tenha registrado individualmente seus cálculos e respostas, a análise dos dados foi realizada em nível de grupo, pois os estudantes, ao discutirem coletivamente as situações, apresentaram estratégias de resolução semelhantes.

Considerando o número de grupos e a disponibilidade de recursos tecnológicos, optou-se por uma estratégia híbrida de gravação: alguns grupos utilizaram gravadores disponibilizados pela pesquisadora, enquanto outros realizaram os registros com seus próprios dispositivos móveis. Para viabilizar o envio dos áudios e eventuais explicações adicionais, a pesquisadora registrou na lousa seu e-mail e número de WhatsApp. Além disso, a pesquisadora explicou que estaria disponível para esclarecer dúvidas, mas que não interferiria nas estratégias de resolução dos grupos. Ao finalizarem, os estudantes entregaram as folhas com as respostas à pesquisadora e tiraram fotos de suas

resoluções para que pudessem discuti-las na próxima aula, com a mediação da pesquisadora.

Na aula seguinte à implementação, a pesquisadora apresentou as situações aos estudantes e os incentivou a expor suas resoluções no quadro ou a compartilhar oralmente os procedimentos adotados. A cada apresentação, a pesquisadora questionava se os demais estudantes tinham resolvido de forma diferente ou se queriam fazer comentários ou complementações. Esse processo permitiu a identificação de equívocos e a visualização de diferentes estratégias para a resolução de uma mesma situação. Nesse momento, a pesquisadora também pôde questionar os estudantes sobre suas resoluções e suas impressões em relação às situações. Embora não fosse o objetivo principal da pesquisa, a pedido da professora regente da turma, a pesquisadora formalizou o conceito de função afim, utilizando as situações do instrumento para apresentar a definição e aspectos gerais dessa função, como coeficientes, variáveis, domínio, gráfico e zeros da função.

O instrumento de pesquisa foi composto por três situações do tipo comparação multiplicativa e transformação de medidas. Inicialmente, foram feitas várias tentativas para elaborar uma situação para cada variação da classe comparação multiplicativa e transformação de medidas. No entanto, após discussões realizadas no Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPEDIMA), decidiu-se variar apenas a classe comparação multiplicativa, abrangendo suas três possibilidades, enquanto a classe transformação de medidas permaneceria sempre positiva, com o estado final desconhecido. Essa decisão foi tomada devido ao grande número de subclasses possíveis relacionadas à classe comparação multiplicativa e transformação de medidas, totalizando 36 variações, o que seria inviável de contemplar no instrumento de pesquisa.

O instrumento de pesquisa foi composto por três situações considerando as seguintes variações:

1. comparação multiplicativa (referido desconhecido) - transformação de medidas (transformação positiva com estado final desconhecido);
2. comparação multiplicativa (referente desconhecido) - transformação de medidas (transformação positiva com estado final desconhecido);
3. e comparação multiplicativa (relação desconhecida) - transformação de medidas (transformação positiva com estado final desconhecido).

O contexto macro adotado para as situações foi o de salário/pagamento, que envolve um valor fixo e um valor variável decorrente de uma comissão. Essas situações foram selecionadas levando em consideração a realidade dos estudantes, que vivem

em uma cidade pequena no interior do Paraná, onde as opções de profissões são limitadas, especialmente para aqueles que acabaram de concluir a Educação Básica. Portanto, foram escolhidas três profissões no contexto macro de cada situação: frentista de posto de combustível, motorista de caminhão e vendedor(a) de uma loja.

O enunciado de cada situação consistiu em quatro itens, mantendo o seguinte padrão: no item a), a língua natural da generalização, com a intenção que os estudantes refletissem a respeito da situação, ainda sem a mobilização de símbolos algébricos; o item b) foi composto pela comparação entre o referido, o referente ou a relação desconhecida; no item c); teve-se a busca por $f(x)$ para um valor específico de x , ou seja, a busca pelo estado final da transformação; e, no item d), a expressão analítica, ou seja, a generalização em sua representação algébrica deveria ser buscada.

Para este artigo, foi selecionada a Situação 1 do instrumento de pesquisa para ser analisada. Essa situação foi escolhida com base na análise do grau de complexidade atribuído a ela, sendo a de menor complexidade, e por possuir uma quantidade maior de resoluções realizadas pelos estudantes.

A seguir, são apresentadas a situação e as análises dos dados.

Análise e Discussão dos Dados

Para a realização das análises, foram considerados os seguintes aspectos: se a situação foi resolvida ou não pelos estudantes; a adequação das estratégias manifestadas pelos estudantes; e a identificação de teoremas-em-ação, tanto falsos quanto verdadeiros, nas respostas dos alunos.

Os 34 estudantes foram distribuídos em 16 grupos, sendo dois compostos por trios e quatorze formados por duplas. A fim de preservar a identidade dos participantes, nesta análise, cada estudante é identificado com a letra E, seguida de um número de 1 a 34, e cada grupo é identificado com a letra G, seguida de um número de 1 a 16. Os teoremas-em-ação são identificados pelas siglas TAV (Teorema-em-ação verdadeiro) e TAF (Teorema-em-ação falso), seguidos de um número que representa a ordem. A seguir, será feita a discussão das estratégias de resolução adotadas pelos grupos para as duas situações, a menor e a mais complexa, apresentando diálogos e registros escritos dos estudantes.

A situação 1 pertence à subclasse comparação multiplicativa (referido desconhecido) - transformação de medidas (transformação positiva com estado final desconhecido).

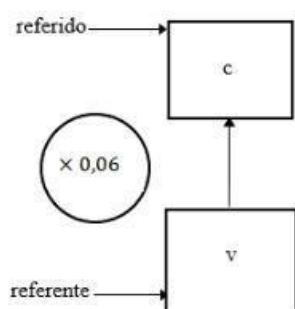
Situação 1: Gerônimo possui uma carreta e contratou um motorista para realizar o transporte de cargas. O motorista recebe como pagamento R\$ 2.500,00 mais 6% do faturamento do valor bruto mensal da carreta.

- Escreva com suas palavras como é feito o cálculo do valor a ser pago ao motorista.
- A carreta faturou em dezembro o equivalente a R\$ 36.200,00 em valor bruto. Quantos reais o motorista recebeu neste mês?
- Sabendo que em fevereiro, a carreta teve um faturamento de R\$54.000,00 em valor bruto, quanto foi pago ao motorista?
- Escreva uma expressão que permita calcular, para qualquer mês, o pagamento (p) do motorista em função do valor bruto (v) faturado

Para essa situação, o referente é o valor (v) correspondente ao valor bruto faturado mensalmente pela carreta. O referido, por sua vez, é a sexta parte de cem e a relação é dada por 6%. Desse modo, tem-se que o valor recebido pelo motorista de comissão sobre o valor bruto (v) faturado no mês é dado por $c = 0,06 \times v$. Em outras palavras, o valor recebido pelo motorista é igual a 0,06 vezes o valor bruto faturado. Desse modo, temos uma comparação multiplicativa, representada pelo seguinte esquema sagital:

Figura 4

Esquema Sagital da comparação multiplicativa da situação

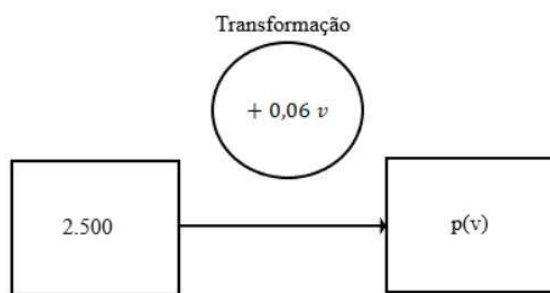


Nota. Elaborado pelos autores.

Assim, a situação de pagamento do motorista $p(v)$ consiste em um valor fixo de R\$ 2.500,00 (estado inicial) somado a uma comissão de $0,06 \times v$ (transformação positiva), resultando em um valor final (estado final) a ser pago. Com isso, há uma transformação positiva com a busca pelo estado final, conforme o esquema apresentado na Figura 5.

Figura 5

Esquema Sagital da transformação de medidas da situação

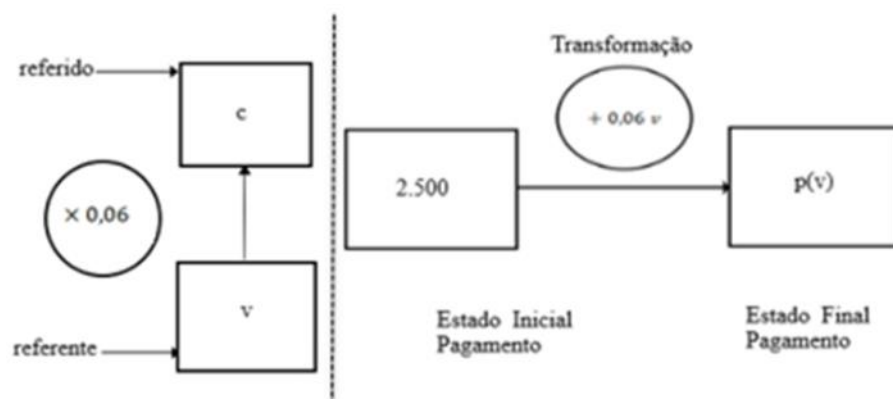


Nota. Elaborado pelos autores.

Dessa forma, o pagamento (p) do motorista em função do valor bruto (v) faturado mensalmente é expresso pela expressão algébrica $p(v) = 2.500 + 0,06v$, ou ainda, $p(v) = 0,06v + 2.500$. Nessa situação, não se sabe o valor de $0,06v$ (o referido) nem o valor a ser pago ao motorista, portanto, temos a subclasse de comparação multiplicativa (referido desconhecido) - transformação de medidas (transformação positiva com estado final desconhecido). A Figura 6 apresenta o esquema sagital completo dessa situação.

Figura 6

Esquema Sagital da subclasse comparação multiplicativa (referido desconhecido) e transformação de medidas (transformação positiva com estado final desconhecido)



Nota. Baseado em Miranda (2019).

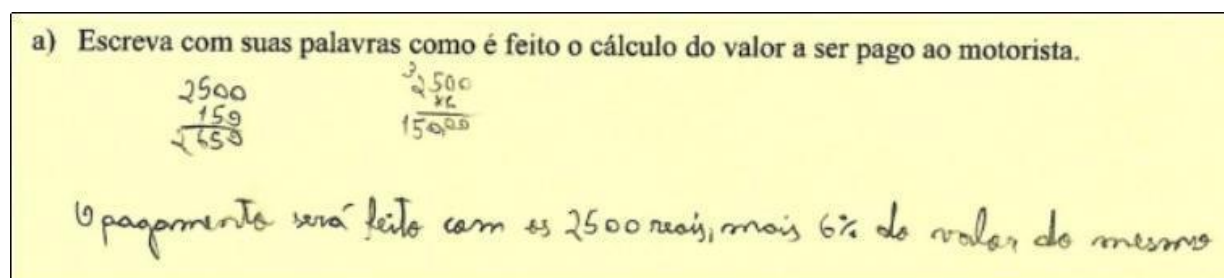
O item a) dessa situação tem como objetivo que o estudante interprete o enunciado proposto e apresente a generalização da situação por meio da língua natural, explicando como é feito o cálculo do valor a ser pago ao motorista. Apenas oito (8) dos dezesseis (16) grupos apresentaram a estratégia correta. Esses grupos foram: G1, G2, G5, G7, G9, G13 e G14. A partir dos registros escritos e diálogos, os estudantes demonstraram que o cálculo do valor a ser pago ao motorista é obtido por meio da

soma de um valor fixo de R\$ 2.500,00 com 6% do faturamento do valor bruto mensal da carreta.

Esses grupos utilizaram implicitamente um teorema-em-ação verdadeiro ao generalizarem o pagamento do motorista (p) em função do valor mensal faturado pela carreta (v), ou seja, $p(v) = 2.500 \text{ reais} + 6\% \text{ de } v$. Esse teorema-em-ação foi identificado como TAV1, implicitamente expresso na ação dos estudantes. Por meio dos diálogos e estratégias dos estudantes, é possível inferir que eles consideraram subentendidos os coeficientes $a = \frac{6}{100} = 0,06$ e $b = 2.500$, estabelecendo uma relação funcional. Dessa forma, é possível modelar o seguinte teorema-em-ação: TAV1: Se a é a taxa e b é o coeficiente linear, então a relação funcional f é dada por $f(x) = ax + b$. Dos dezesseis (16) grupos participantes, sete (7) grupos – G3, G8, G10, G11, G12, G15 e G16 – apresentaram uma estratégia incorreta para o item a). Nessa estratégia, os estudantes consideraram os dados presentes no enunciado e calcularam 6% do valor fixo de pagamento, para, em seguida, somaram esse valor ao salário inicial. Portanto, os grupos não identificaram corretamente a solicitação do item, que era apenas escrever como seria realizado o cálculo do salário do motorista para qualquer mês. Em vez disso, eles apresentaram um cálculo específico, o que indica que utilizaram um valor fixo para representar uma quantia que poderia variar. A Figura 7 apresenta essa estratégia.

Figura 7

Resolução do grupo G12 para o item a) da situação 1



Nota. Acervo da pesquisa.

Essa estratégia incorreta corrobora com os resultados de Calado (2020), quem destaca que os estudantes têm dificuldades em compreender que uma variável pode assumir qualquer valor possível, e tendem a generalizar fatos apenas verificando sua validade em uma situação particular. Portanto, os grupos que apresentaram essa estratégia demonstram indícios de mobilização do teorema-em-ação falso, TAF1: Uma variável qualquer x é associada a um valor fixo.

Ainda nessa estratégia, os grupos mobilizaram outro teorema-em-ação falso, dado por: *TAF2: Se a é a taxa e b é o coeficiente linear, então $f(x) = a.x = a.b$, com a, x e $b \in R$.*

Os grupos apresentam uma interpretação incorreta do coeficiente linear b . O coeficiente linear b na função, nesse caso, não deveria ser interpretado como o faturamento bruto fixo da carreta, mas sim como o termo independente da função. Ele representa um valor constante adicionado da taxa a multiplicada pela variável x . Ao considerar b como o faturamento bruto fixo, os estudantes assumiram, incorretamente, que essa quantidade é constante, sem levar em conta a variabilidade do faturamento ao longo do tempo. No entanto, o faturamento da carreta é uma quantidade variável.

O grupo G12 considerou a soma do pagamento fixo mais os 6%, porém não especificou ao que essa porcentagem fazia referência. Ao considerarem apenas $y\%$ em vez de $y\%$ de x , o grupo cometeu um erro de interpretação. Esse equívoco pode ser modelado como um teorema-em-ação falso, denominado *TAF3: a porcentagem de y em relação a x é representada por $y\%$.*

Além das estratégias apresentadas anteriormente, é importante destacar que um grupo específico, o G4, não apresentou uma resolução para esse item da situação. É possível que tenham enfrentado dificuldades na compreensão ou na elaboração da resolução, o que resultou na ausência de uma resposta para o item em questão.

No item b), foram identificadas três estratégias adequadas e três inadequadas entre os estudantes. A primeira estratégia adequada foi adotada por sete grupos: G2, G5, G6, G7, G11, G14 e G15. Esses grupos demonstraram compreensão ao calcular o valor da comissão que o motorista recebeu sobre o faturamento bruto de R\$ 36.200,00. Eles multiplicaram esse valor pela razão centesimal de 6%, ou seja, $6\% = \frac{6}{100} = 0,06$, obtendo o resultado de R\$ 2.172,00. Em seguida, somaram esse resultado com o pagamento fixo do motorista (R\$ 2.500,00), chegando ao total de R\$ 4.672,00, o valor que o motorista recebeu no mês de dezembro. Essa estratégia demonstra que os estudantes associaram adequadamente a necessidade de multiplicar a porcentagem pelo valor faturado bruto para calcular a comissão e, em seguida, somar o valor fixo.

Nessa estratégia, para calcular o valor recebido pela comissão das vendas, os estudantes manifestam um teorema-em-ação verdadeiro. Esse teorema é representado matematicamente da seguinte forma: $f(36.200) = 0,06$ (percentual de comissão) $\times$ 36.200 (reais faturados pela carreta no mês) = 2.172 (reais).

Dessa forma, o TAV2 é modelado considerando $f(x)$ como uma relação proporcional entre duas grandezas, em que $f(x)$ representa o pagamento comissionado do motorista, a é a taxa de comissão e x é o valor faturado pela carreta no mês. Portanto, o teorema-em-ação verdadeiro pode ser representado da seguinte forma, *TAV2: seja f uma relação de proporcionalidade e a a taxa, então $f(x) = a \cdot x$, com a e $x \in R$.*

Temos, pois, a presença do TAV2, que representa a propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade, em diferentes níveis de ensino e em diferentes situações matemáticas. Os estudos de Vergnaud (1996), Pavan (2010) e Rodrigues (2023) mostram que o TAV2 é identificado em resoluções de estudantes em situações multiplicativas e mistas, inclusive em resoluções de estudantes do Ensino Fundamental. No estudo apresentado neste artigo, sua presença também é percebida em estudantes do Ensino Médio ao resolverem situações de função afim. Isso ressalta a importância desse teorema-em-ação na compreensão da proporcionalidade e na generalização das relações funcionais. Ao identificar a manifestação do TAV2 nas resoluções dos estudantes do Ensino Médio, em situações de função afim, é possível reconhecer a continuidade do desenvolvimento conceitual e a capacidade dos estudantes em estabelecer relações de proporcionalidade em contextos mais abstratos.

Ainda nessa estratégia, os sete grupos utilizaram a adição direta para encontrar o estado final do pagamento do motorista. Eles somaram o pagamento fixo de R\$ 2.500 com o valor comissionado pelo faturamento da carreta, que foi calculado como R\$ 2.172. A soma desses valores resulta em R\$ 4.672. Desse modo, os grupos reconheceram que o valor fixo e o valor comissionado são duas partes separadas do pagamento total e, portanto, devem ser somados para obter o valor final. Podemos modelar essa estratégia com base em Rodrigues (2023) considerando F o estado final, I o estado inicial e T a transformação, conforme *TAV3: se F é o estado final, I o estado inicial e T a transformação, então $F = I \pm T$.*

Para o item b), os grupos G1, G3, G9, G13 e G16 diferentemente dos grupos anteriores, utilizaram a estratégia da razão e proporção para determinar o valor da comissão do faturamento mensal da carreta. Eles estabeleceram uma proporção entre o valor faturado (R\$36.200) e a porcentagem de comissão (6%) para encontrar o valor correspondente à comissão. Essa estratégia é baseada no conceito de proporção, em que eles estabelecem a relação entre duas grandezas: o valor faturado e a comissão. Ao utilizar a regra de três, eles determinam o valor proporcional à porcentagem de

comissão em relação ao valor faturado. Após isso, esse valor é somado ao pagamento fixo inicial para obter o valor final do pagamento do motorista.

Essa estratégia está alinhada com o TAV2, que foi mencionada anteriormente, sendo que a relação funcional é representada por $f(x) = a \cdot x$, com a para a taxa de comissão e x para o valor faturado. É possível observar que esses grupos também mobilizaram o aplicaram o TAV3, que representa a transformação direta de adição entre o estado inicial (I), a transformação (T) e o estado final (F). Nesse caso, o estado inicial é o pagamento fixo (R\$2.500), a transformação é o valor comissionado pelo faturamento da carreta (R\$2.172) e o estado final é o pagamento total do motorista (R\$4.672).

A última estratégia adequada foi manifestada pelo grupo G8. Esse grupo utilizou uma decomposição do valor faturado mensalmente, para, então, calcular a comissão. O diálogo a seguir, realizado originalmente em português, exemplifica esse raciocínio.

Estudante 17: Então, agora por áudio aqui para você que vai estar escutando aí. Eu não faço contas, então eu vou explicar como é que eu vou calcular isso. 36.000 de 6%. Eu sei que 6% de 10.000 reais é 600. Eu sei que de 20 vai ser 1.200. Eu sei que de 30 vai ser 1.800. Então eu sei que 30.000 reais ... 6% de 30.000 vai ser equivalente a 1.800 reais. Eu sei que de 5.000 vai ser equivalente a 300. Então eu já estou com o valor de 2.100 reais.

Estudante 17: O valor é 36.200?

Estudante 18: É 36.200

Estudante 17: Tá errado, não certo. Então eu continuo certo? Tá. Então 1200. 6% de 1.000, 6% de 1.000 vai dá 60. Então 2.160. 6% de 200. De 100 sei que é 6 ... 12. Então tenho 1.172 reais. Então eu sei que dos 6% de 36.200 vai ser 2.172 reais.

Passa alguns momentos.

Estudante 17: Então, como aqui em cima tem que somar, já tem que somar o valor que ele vai receber da carga que vai ser a porcentagem com o pagamento aí tem que somar, então tenho na dele o valor 2.172 vai ter que somar mais 2.500. Então 2.172 mais 2.500 vai ser igual a 4.672.

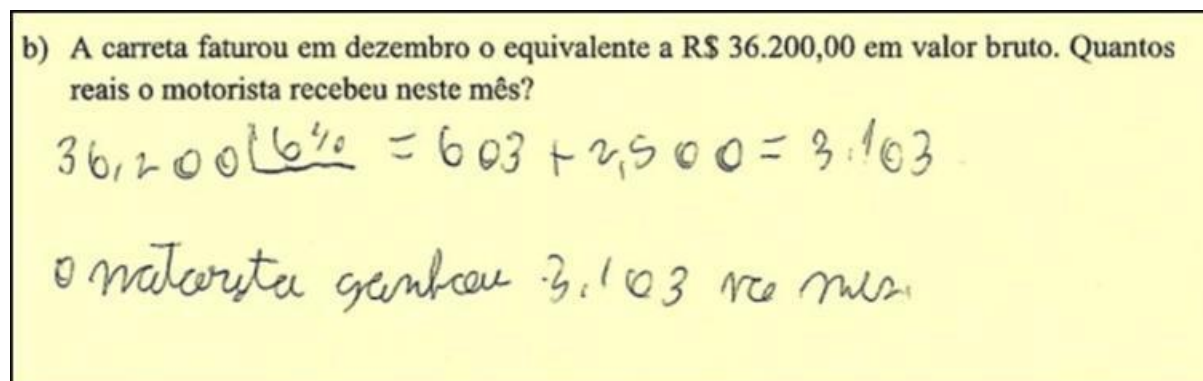
Desse modo, o grupo considerou $6\%de36.200 = 6\%de10.000 + 6\%de10.000 + 6\%de10.000 + 6\%de5.000 + 6\%de1.000 + 6\%de100 + 6\%de100$. E manifestou o TAV2 ao calcular a porcentagem de cada valor. Além disso, manifestou o TAV3 ao somar o valor da comissão ao salário fixo. No entanto, diferente dos grupos anteriores, G8, manifestou um teorema-em-ação que estabelece uma propriedade válida para relações de proporcionalidade direta. Ele afirma que, quando uma mesma quantidade (x') é adicionada ou subtraída à variável x em uma relação de proporcionalidade direta, o resultado também sofrerá a mesma adição ou subtração na imagem da função $f(x)$. Com base nas pesquisas de Rodrigues (2021), Calado (2020) e Vergnaud (2007), e na modelagem de Rodrigues (2023), foi identificado um teorema-em-ação verdadeiro,

denominado TAV4. Sua formulação é a equivalente a TAV4: *seja f uma relação de proporcionalidade direta, então $f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, com $x \in N$.*

A primeira estratégia incorreta para o item b) foi manifestada pelo grupo G12 (Figura 8).

Figura 8

Resolução do grupo G12 para o item b) da situação 1



Nota. Acervo da pesquisa.

Com base na resolução do grupo G12, fica evidente que os estudantes cometeram dois erros: utilizar a divisão em vez da multiplicação para calcular a porcentagem e trocar o ponto por vírgula na representação numérica. Esses erros levaram a interpretações equivocadas e a um resultado incorreto. Dessa forma, é possível identificar o teorema-em-ação falso (TAF4) mobilizado pelo grupo G12, em que eles consideram o TAF4: se a é a razão centesimal de uma taxa percentual, então o valor obtido ao aplicar essa taxa a um valor, x pode ser expresso por uma relação funcional dada por $f(x) = \frac{x}{a}$, com x e $a \in R$, sendo $a \neq 0$.

No entanto, essa interpretação está incorreta, pois a correta seria $f(x) = a.x$, onde a representa a taxa de porcentagem.

Outra resolução inadequada para o item b) foi do grupo G10 que considerou os 6% de comissão do pagamento fixo, e não do faturamento mensal, mobilizando o TAF2. Já na última estratégia inadequada, o grupo G4 calculou 6% de R\$2.500, também manifestando o TAF2. Após, somaram esse valor à multiplicação do faturamento mensal bruto pelo pagamento inicial (Figura 9).

Figura 9

Resolução do grupo G4 para o item b) da situação 1

b) A carreta faturou em dezembro o equivalente a R\$ 36.200,00 em valor bruto. Quantos reais o motorista recebeu neste mês?

$$36.200 - 2.650 = 33.550$$
$$36.200 \times 0.500 + 150 = 30.500$$

Neste mês ele vai receber 30.500 Reais

Nota. Acervo da pesquisa.

Essa estratégia inadequada indica que os integrantes do grupo não compreenderam corretamente a relação proporcional entre o faturamento bruto mensal e a comissão a ser recebida pelo motorista. Eles trataram os 6% como uma parcela fixa do pagamento inicial, em vez de uma porcentagem do faturamento bruto.

Nessa situação, no item c), os estudantes foram solicitados a encontrar o valor pago ao motorista em um mês em que a carreta teve um faturamento bruto de R\$ 54.000,00. Ou seja, o cálculo relacional é idêntico ao item anterior, desse modo as estratégias adequadas não variaram.

Os grupos G2, G6, G7, G14 e G15 calcularam a porcentagem de 6% em forma decimal e multiplicaram esse valor pelo faturamento bruto mensal da carreta, ou seja, $0,06 \times 54.000 = 3.240$, manifestando o TAV2. Em seguida, somaram o valor da comissão com o pagamento fixo do motorista (R\$ 2.500,00), chegando ao resultado de R\$ 5.740,00. Nessa estratégia, eles manifestaram o TAV3, que envolve a adição da transformação com o estado inicial.

Por outro lado, os grupos G9, G3, G10 e G16 utilizaram a estratégia de calcular a comissão sobre o faturamento mensal da carreta por meio de razão e proporção. Eles estabeleceram a proporção entre o faturamento bruto mensal (R\$ 54.000,00) e a comissão, considerando a taxa de 6%. Após encontrar o valor da comissão, somaram-no ao pagamento fixo do motorista (R\$ 2.500,00), utilizando tanto o TAV2 quanto o TAV3.

Já o grupo G8 optou por decompor o número do faturamento bruto mensal (R\$ 54.000,00) para encontrar o valor da comissão. Eles utilizaram a decomposição do número, calculando 6% de cada parcela e somando os valores encontrados. Após isso,

adicionaram o valor encontrado ao pagamento fixo do motorista. Essa estratégia também envolveu a aplicação do TAV2, TAV3 e do TAV4.

Portanto, os estudantes utilizaram diferentes abordagens adequadas, como razão e proporção, decomposição numérica e multiplicação da taxa pela grandeza envolvida, para determinar o valor pago ao motorista com base no faturamento bruto mensal da carreta.

No item c), o grupo G12 utilizou novamente o TAF4. Os estudantes desse grupo calcularam o valor do faturamento bruto mensal da carreta dividido por 6%, em vez de multiplicá-lo pela taxa de 6%. Vale ressaltar que o TAF4 utilizado pelo grupo G12 é falso, pois a relação funcional correta para calcular a comissão seria multiplicar o faturamento bruto pela taxa de porcentagem, e não o dividir.

Mesmo esse item sendo semelhante ao anterior, surgiu uma nova estratégia inadequada. Ao calcular apenas o valor que o motorista recebeu referente ao faturamento mensal da carreta, os grupos G1, G5, G11 e G13 adotaram uma estratégia inadequada no item c). Nesse caso, os estudantes ignoraram o pagamento fixo e consideraram apenas a comissão relacionada ao faturamento bruto. Essa abordagem não leva em conta o valor fixo que o motorista recebe além da comissão. Portanto, ao calcular somente a comissão sobre o faturamento mensal, esses grupos não estão considerando a transformação direta de adição, que envolve o pagamento fixo juntamente com a comissão. Essa inadequação pode ser associada ao teorema-em-ação falso, *TAF5: se a é a taxa e b é o coeficiente linear, então a relação funcional f é dada por $f(x) = ax + b = ax$, onde os estudantes não consideraram a constante b , que representa o pagamento fixo.*

Vale ressaltar que os grupos G1 e G13 apresentaram uma resolução adequada para o item b, mas inadequada para o item c). Além disso, o grupo G4 não apresentou uma resolução para o item c) da situação proposta, mesmo tendo apresentado uma estratégia adequada para o item anterior.

No item d), os estudantes foram desafiados a generalizar a função que representa o pagamento (p) do motorista em função do valor bruto (v) faturado mensalmente. Entre as resoluções apresentadas pelos grupos, apenas o grupo G2 teve uma resposta adequada. Quatro grupos (G6, G8, G9 e G14) tiveram respostas parcialmente adequadas. Por outro lado, nove grupos (G1, G3, G5, G7, G10, G11, G12, G13 e G15) apresentaram resoluções inadequadas. Os grupos G4 e G16 não forneceram uma resposta para esse item. A Figura 10 representa a resolução dada pelo grupo G2.

Figura 10

Resolução do grupo G2 para o item d) da situação 1

d) Escreva uma expressão que permita calcular, para qualquer mês, o pagamento (p) do motorista em função do valor bruto (v) faturado.

$$x = 2500 + 0,06 \cdot f$$

Nota. Acervo da pesquisa.

Embora não tenham utilizado as variáveis propostas, sua generalização foi adequada e está alinhada com o teorema-em-ação verdadeiro TAV1, que descreve a relação funcional $f(x) = ax + b$, onde a é a taxa e b é o coeficiente linear.

O G14 generalizou a situação no item a), expressando a situação como: $S_m = 2.500 + 0,06x$. No entanto quando questionado no item d) com as variáveis p e v , o grupo respondeu a seguinte expressão: $p = v + 0,06x$. Logo, definiram o valor fixo de 2.500 por uma variável v . O grupo G8 e G9 apresentaram uma estratégia parcialmente adequada ao estabelecerem uma expressão que permite calcular o pagamento do motorista para qualquer mês, considerando a parte fixa mais a parte variável da comissão. Porém, os estudantes cometeram o equívoco de considerar os coeficientes como variáveis ao representar a expressão, $F = P + 0,06V$. Apesar disso, eles manifestaram corretamente o TAV1.

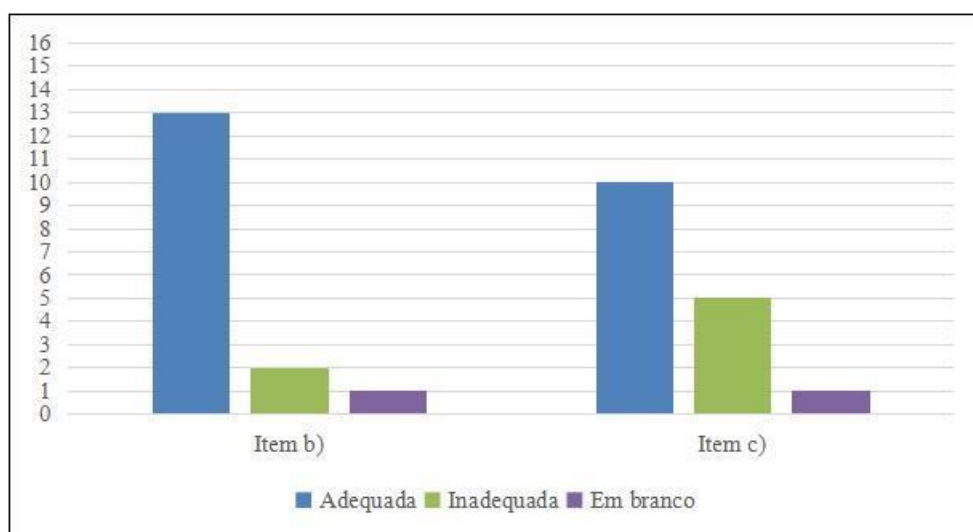
O grupo G6 também apresentou uma estratégia parcialmente adequada. Eles identificaram que a situação correspondia a uma função de primeiro grau, cuja expressão é $y = ax + b$, e utilizaram a expressão $p = av + b$. No entanto, eles não definiram os coeficientes a e b por considerarem que não era necessário nesse item.

Nove grupos (G1, G3, G5, G7, G10, G11, G12, G13 e G15) apresentaram estratégias incorretas para a generalização da função que representa a situação. Três grupos, G1, G5 e G13, utilizaram a expressão $T = P + V$ erroneamente. G11 e G12 utilizaram a expressão $\frac{6}{100} = \frac{x}{1}$, que não possui relação com a expressão correta nem com as respostas apresentadas anteriormente. G7 e G15 utilizou a expressão $p \times 0,06 = v$, não considerando o pagamento fixo, apenas a comissão. Esses grupos manifestaram o TAF5, pois não consideraram a constante. O último grupo, G10, utilizou a expressão $f(x) = v \times p (2500)$, identificando que seria uma função de x , mas não apresentou a variável, além de considerar apenas uma multiplicação. Os grupos G3, G4 e G16 não apresentaram resolução para o item d) da situação.

Como resultados, na situação 1, relacionada à subclasse de comparação multiplicativa e transformação de medidas, foi possível observar que a maioria dos grupos apresentou resoluções adequadas nos itens b) e c), que possuíam o mesmo cálculo relacional, mas objetivos diferentes. No item b), treze grupos apresentaram resoluções corretas, enquanto três grupos responderam de forma inadequada. No item c), houve dez resoluções corretas, cinco incorretas e uma em branco. Isso indica que alguns grupos não perceberam a conexão entre os dois itens ou tiveram dúvidas quanto à resolução do primeiro item. O gráfico da Figura 11 apresenta uma síntese das resoluções pelos grupos.

Figura 11

Desempenho dos grupos para os itens b) e c)



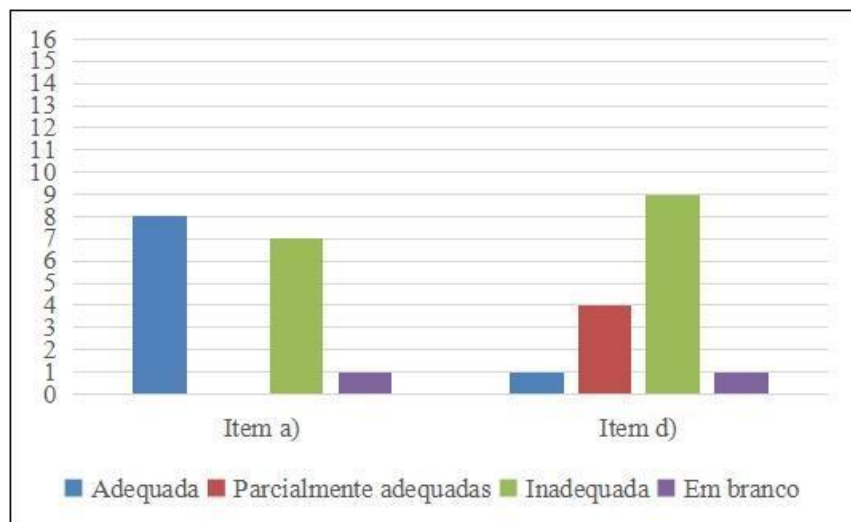
Nota. Elaborado pelos autores.

A partir do gráfico, observa-se uma redução no desempenho dos estudantes do item b) para o item c), o que indica que esses estudantes não apresentavam segurança e relação às próprias resoluções. Assim, mesmo tendo obtido êxito na primeira situação, não identificaram que os itens envolviam a mesma estratégia.

Já nos itens a) e d), que envolviam a generalização da situação, as dificuldades manifestadas pelos estudantes foram mais acentuadas. No primeiro item, apenas oito grupos conseguiram expressar a generalização de forma adequada em linguagem natural, enquanto os demais consideraram situações específicas para representar a situação. Quanto à expressão algébrica, apenas um grupo respondeu corretamente, enquanto quatro grupos tiveram dificuldades ao considerar os coeficientes como variáveis, e os demais apresentaram estratégias inadequadas ou não responderam (Figura 12).

Figura 12.

Desempenho dos grupos para os itens a) e d)



Nota. Elaborado pelos autores.

Houve um aumento significativo no número de estratégias inadequadas na transição do item a) para o item b). Esse resultado sugere que os estudantes ainda estão em processo de desenvolvimento das habilidades necessárias para converter uma representação na linguagem natural para uma linguagem algébrica de forma eficaz. Também indica que esta situação se tratou de uma situação nova para os estudantes, os quais ainda não tinham esquemas prontos para resolvê-la.

As resoluções dos estudantes indicam a manifestação de teoremas-em-ação verdadeiros e falsos. No item a), observa-se a mobilização de um teorema-em-ação verdadeiro (TAV1) e de três falsos (TAF1, TAF2 e TAF3). Já nos itens b) e c), foram mobilizados três teoremas-em-ação verdadeiros (TAV2, TAV3 e TAV4) e dois falsos (TAF4 e TAF5). Os teoremas-em-ação falsos estão associados a erros no cálculo da porcentagem, na troca de coeficientes por variáveis e na não consideração do termo independente da função afim.

Vergnaud (1996) e Bittencourt (1998) ressaltam a importância de reconhecer os teoremas falsos manifestados pelos estudantes, uma vez que isso permite aos professores propor situações que desafiem esses conhecimentos equivocados, levando os estudantes a refletirem sobre seus erros e a reconstruírem seu entendimento matemático. A compreensão das dificuldades apresentadas pelos estudantes mostra-se, portanto, fundamental para compreender a organização de seus conhecimentos e, consequentemente, para a elaboração de estratégias de ensino mais eficazes.

Considerações finais

A pesquisa aqui apresentada teve como objetivo analisar as resoluções apresentadas por grupos de estudantes diante da situação mista do tipo comparação multiplicativa-transformação de medidas, associada à função afim. Foram identificadas as estratégias utilizadas pelos grupos, bem como a presença de teoremas-em-ação verdadeiros e falsos nas resoluções. A situação selecionada para este artigo foi escolhida por proporcionar um nível de complexidade menor em comparação às demais situações presentes na dissertação de mestrado da primeira autora, o que possibilitou um maior número de dados.

Na análise dessa situação, foi possível identificar que, entre os conhecimentos pertinentes manifestados pelos estudantes, destacam-se a compreensão da relação entre o valor faturado pela carreta e o pagamento do motorista, a identificação do coeficiente de proporcionalidade como a taxa de comissão sobre o faturamento bruto, e a noção de que o pagamento final do motorista é composto por uma parte fixa e uma parte variável. No entanto, também foram identificados conhecimentos equivocados. Alguns grupos de estudantes indicaram confusão na interpretação da taxa de comissão e realizaram, por isso, cálculos incorretos de porcentagem. Além disso, houve estudantes que não consideraram o pagamento fixo do motorista na expressão geral, o que indica uma falta de compreensão do termo independente da função afim. Esses erros podem ser atribuídos a diferentes fatores. De modo geral, eles indicam que os estudantes apresentam pouca familiaridade ao resolverem situações contextualizada associadas à função afim, especialmente envolvendo o contexto de salário decorrente de comissão, contemplado nesta investigação. Evidenciam, ainda, que os estudantes não dispõem de esquemas previamente constituídos e suficientemente organizados para resolverem situações de função afim da classe comparação multiplicativa – transformação de medidas.

Segundo Vergnaud (2009), um conceito é compreendido pelos estudantes no decorrer do processo escolar e em decorrência das situações enfrentadas. Considerando que a classe de situações de comparação multiplicativa – transformação de medidas, contemplada nesta pesquisa, é uma das menos abordadas nos livros didáticos do Ensino Fundamental II e no Ensino Médio, conforme investigado por Miranda (2019), e considerando a análise das resoluções dos sujeitos colaboradores da pesquisa, constata-se que as situações propostas no instrumento de pesquisa se caracterizaram como novas para os estudantes.

Ademais, os resultados desta pesquisa apontam que, nos esquemas dos grupos, foram identificados quatro (4) teoremas-em-ação verdadeiros e cinco (5) falsos. Estes

últimos estão associados à confusão entre variáveis e constantes; à falta de compreensão referente à taxa de variação e do coeficiente linear; à não indicação do termo ao qual a porcentagem faz referência; à interpretação incorreta da razão centesimal da taxa de porcentagem; e à não consideração do termo independente da função afim.

Desse modo, ao se conhecerem os teoremas-em-ação falsos mobilizados pelos estudantes e suas dificuldades, sugere-se, para pesquisas futuras, a elaboração de situações mistas, relacionadas à função afim, que permitam a desestabilização desses TAFs. Além disso, os resultados podem contribuir diretamente para a prática docente, ao auxiliar os professores na compreensão dos conhecimentos mobilizados pelos estudantes diante de situações-problema relacionadas à função afim. Ao ter acesso às resoluções e aos erros conceituais manifestados pelos estudantes, os educadores podem adaptar o conteúdo de acordo com o nível de conhecimento e habilidades dos estudantes, proporcionando uma progressão gradual em termos de complexidade das situações apresentadas.

Logo, espera-se que os resultados desta pesquisa possam contribuir tanto para a investigação acadêmica quanto para a prática educacional, promovendo uma abordagem mais efetiva no ensino da função afim e no desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes relacionadas a esse conceito.

Agradecimento

O presente trabalho foi realizado com apoio da agência de fomento Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

- Bernardino, F. (2022). *Função afim e problemas mistos: uma investigação com estudantes do ensino médio* [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, Campo Mourão, Brasil]
- Bittencourt, J. (1998). Obstáculos Epistemológicos e a Pesquisa em Didática da Matemática. *Educação Matemática em Revista*, 5(6), 13-17.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC.
- Calado, T. V. (2020). *Invariantes operatórios relacionados à generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim* [Dissertação de mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, Brasil].

- Fonseca, V. G. (2011). *O uso de tecnologias no Ensino Médio: a integração de Mathlets no ensino de função afim* [Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil].
- Magina, S., Campos, T. M. M., Gitirana, V., & Nunes, T. (2008). *Repensando Adição e Subtração: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais* (3ª ed.). São Paulo, Brasil: PROEM.
- Miranda, C. A. (2019). *Situações-problema que envolvem o conceito de função afim: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais* [Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, Brasil].
- Pavan, L. R. (2010). *A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental e Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas* [Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, Brasil].
- Nogueira, C. M. I., Rezende, V., & Calado, T. V. (2020). Função afim na Educação básica: estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. *Alexandria: Revista de Educação em Ciências e Tecnologia*, 13(2), 25-50.
- Rodrigues, C. L. B., & Rezende, V. (2023). Conhecimentos associados ao conceito de função manifestados por estudantes dos anos iniciais ao resolverem situações mistas. *Quadrante*, 32(1), 26-49. DOI: 10.48489/quadrante.27811. <https://quadrante.apm.pt/article/view/27811>.
- Rodrigues, C. L. H. (2022). *Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do ensino fundamental* [Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, PR, Brasil].
- Vergnaud, G. (2017). A Didática é uma Provocação: Ela é um desafio. In E. P. Grossi (Org.), *Piaget e Vygotsky em Gérard Vergnaud*. Porto Alegre, Brasil: GEEMPA. (Coleção Teoria dos Campos Conceituais).
- Vergnaud, G. (2009). *A Criança, a matemática e a Realidade*. (M. L. F. Moro, Trad.). Curitiba, Brasil: Editora UFPR.
- Vergnaud, G. (2007). Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. In *Anais do I Encontro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática*. Tandil, Argentina: Unicen.
- Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceituais. In J. Brun (Org.), *Didáctica das matemáticas* (pp. 155-191). (M. J. Figueiredo, Trad.). Lisboa: Instituto Piaget. (Horizontes pedagógicos).
- Vergnaud, G. (1993). Teoria dos Campos Conceituais. In *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação do Rio de Janeiro* (pp. 1-26). Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170. Grenoble, França: La Pensée Sauvage.