ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i1p642-667

Aspectos matemáticos do problema das *n-rainhas* e a construção do conhecimento por alunos de Ciência da Computação

Mathematical aspects of the n-queens problem and the construction of knowledge by Computer Science students

Aspectos matemáticos del problema de las n-reinas y la construcción del conocimiento por parte de estudiantes de Ciencias de la Computación

Aspects mathématiques du problème des n-reines et construction de connaissances par les étudiants en informatique

Gerson Pastre de Oliveira[1]
CEETEPS (Fatec Jundiaí) – UNIP (Universidade Paulista)
Doutor em Educação
http://orcid.org/0000-0001-8113-936X

Resumo

O presente artigo relata uma pesquisa qualitativa que teve como sujeitos um grupo de alunos de um curso superior em Ciência da Computação, com a proposta de resolver uma questão relacionada ao problema das n-rainhas, uma generalização do problema original, que consistia em dispor 8 rainhas em um tabuleiro de xadrez, levando em conta posições distintas, de modo que as peças não se capturem mutuamente. A sequência didática específica consistia em propor uma generalização cuja aplicação fornecesse o número de diagonais a serem consideradas para a resolução do problema em um tabuleiro qualquer *n* por *n*, com *n* maior do que 3. A partir dos pressupostos da Engenharia Didática, e tendo por suportes teóricos principais a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e o trabalho de Zazkis e Liljedahal sobre generalizações próximas e distantes, os estudantes desenvolveram uma trajetória investigativa autônoma, baseada em colaborações, para apresentarem soluções admissíveis para o problema proposto. Os resultados permitem inferir que a experiência em torno da resolução de problemas matemáticos é relevante como recurso de aprendizagem em cursos superiores de Ciência da Computação, considerando um cenário de uso intensivo de tecnologias digitais.

Palavras-chave: Generalização de padrões, Problema das n-rainhas, Teoria das situações didáticas, Engenharia didática, Ciência da computação.

[1] gerson.oliveira@fatec.sp.gov.br gerson.oliveira1@docente.unip.br

Abstract

This article reports qualitative research, which had as subjects a group of students from a higher education course in Computer Science, with the proposal of solving an issue related to the n-queens problem, a generalization of the original problem, which consisted of having 8 queens on a chessboard, considering different positions, so that the pieces do not capture each other. The specific didactic sequence consisted of proposing a generalization whose application provides the number of diagonals to be considered for solving the problem on any *n-by-n* board, with *n* greater than 3. Based on the assumptions of Didactic Engineering, and having as main theoretical supports the Theory of Didactic Situations (TSD) and the work of Zazkis and Liljedahal on close and distant generalizations, the students developed an autonomous investigative trajectory, based on collaborations, to present acceptable solutions to the proposed problem. The results allow us to infer that the experience around solving mathematical problems is relevant as a learning resource in higher education Computer Science courses, considering a scenario of intensive use of digital technologies.

Keywords: Pattern generalization, N-queens problem, Theory of didactic situations, Didactic engineering, Computer science.

Resumen

Este artículo reporta una investigación cualitativa, que tuvo como sujetos a un grupo de estudiantes de la carrera de educación superior en Ciencias de la Computación, con la propuesta de resolver un problema relacionado con el problema de n-reinas, una generalización del problema original, que consistió en tener 8 reinas sobre un tablero de ajedrez, teniendo en cuenta diferentes posiciones, para que las piezas no se capturen entre sí. La secuencia didáctica específica consistió en proponer una generalización cuya aplicación proporciona el número de diagonales a considerar para resolver el problema en cualquier tablero de n por n, con n mayor que 3. Basado en los supuestos de la Ingeniería Didáctica, y teniendo como principales soportes teóricos la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y el trabajo de Zazkis y Liljedahal sobre generalizaciones cercanas y distantes, los estudiantes desarrollaron una trayectoria investigativa autónoma, basada en colaboraciones, para presentar soluciones aceptables al problema propuesto. Los resultados permiten inferir que la experiencia en torno a la resolución de problemas matemáticos es relevante como recurso de aprendizaje en carreras de Informática de educación superior, considerando un escenario de uso intensivo de tecnologías digitales.

Palabras clave: Generalización de patrones, Problema de n-reinas, Teoría de situaciones didácticas, Ingeniería didáctica, Ciencias de la computación.

Résumé

Cet article rend compte d'un projet de recherche qualitative qui a impliqué un groupe d'étudiants d'un cours de licence en informatique, dans le but de résoudre une question relative au problème des n reines, une généralisation du problème original, qui consistait à disposer 8 reines sur un échiquier, en tenant compte de différentes positions afin que les pièces ne se capturent pas les unes les autres. La séquence didactique spécifique consistait à proposer une généralisation dont l'application fournissait le nombre de diagonales à considérer pour résoudre le problème sur un échiquier quelconque de n par n, avec n supérieur à 3. Sur la base des hypothèses de l'Ingénierie Didactique, et avec la Théorie des Situations Didactiques (TSD) et les travaux de Zazkis et Liljedahal sur les généralisations proches et lointaines comme principaux supports théoriques, les étudiants ont développé un parcours d'investigation autonome, basé sur des collaborations, pour aboutir à des solutions admissibles au problème proposé. Les résultats nous permettent de déduire que l'expérience de la résolution de problèmes mathématiques est pertinente en tant que ressource d'apprentissage dans les cours d'informatique de l'enseignement supérieur, compte tenu de l'utilisation intensive des technologies numériques.

Mots-clés : Généralisation de modèles, Problème des n-rangs, Théorie des situations didactiques, Ingénierie didactique, Informatique.

Aspectos matemáticos do problema das *n-rainhas* e a construção do conhecimento por alunos de Ciência da Computação

Dentre as características mais importantes do conhecimento matemático, uma delas é a possibilidade que sua apropriação representa para o emprego em diferentes áreas do conhecimento. De fato, como afirmam Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997), é possível discutir a atividade matemática como elemento que integra a cultura humana, em um caráter geral. Além disso, de forma mais específica, no âmbito educacional, o emprego do conteúdo matemático ocorre frequentemente em diversos cursos e disciplinas, ainda que de outras áreas, por meio, por exemplo, de abordagens transdisciplinares, projetos interdisciplinares ou mesmo pela imbricação que certos tópicos apresentam em relação aos temas matemáticos.

Nesse sentido, a aprendizagem de elementos relacionados à Ciência da Computação, principalmente a programação, atividade pela qual se produz um código em determinada linguagem para resolver um problema, pode ser discutida/planejada a partir de uma estratégia didática em que problemas matemáticos estejam presentes. A motivação para isso parece clara: a resolução de problemas está na essência da atividade matemática, de modo que a contextualização de questões a serem resolvidas com os recursos dessa disciplina têm por base, frequentemente, problemas em relação aos quais se procura demonstrar a validade das soluções desenvolvidas. Autores como Hamilton (2007), por exemplo, sugerem que a matemática seria uma ciência voltada à resolução de problemas e ao desenvolvimento de elementos teóricos/estratégias de resolução de problemas. Dessa forma, parece natural envolver a aprendizagem computacional com o uso de ferramental matemático, do ponto de vista da resolução de problemas.

Além disso, a ideia de que a matemática está intensivamente presente nos currículos de cursos superiores de Ciência da Computação pode ser encontrada formalmente nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de graduação na área da Computação (BRASIL, 2016), quando a determinação legal expressa que os egressos destes cursos devem possui "sólida formação em Ciência da Computação e Matemática" como parte indispensável dos requisitos para a construção de soluções computacionais em geral e para o fomento do conhecimento científico. Dessa forma, computação, matemática e resolução de problemas surgem como indissociáveis nesses contextos formativos.

Entretanto, há percalços a considerar. Para Klang et al (2021), resolver problemas matemáticos não se configura como uma tarefa fácil para boa parte dos estudantes. Segundo os autores, "os alunos podem ter dificuldades em identificar elementos relevantes para a solução de um problema ou em visualizar a solução apropriada para uma situação problemática. Além disso, os estudantes podem precisar de ajuda para reconhecer o modelo subjacente nos problemas" (Klang et al, 2021, p. 2). Da mesma maneira, segundo Morais et al (2020), "aprender uma linguagem de programação é uma tarefa difícil para alguns estudantes" (apud Saito, Washizaki & Fukuzawa, 2016). Para os autores, isso ocorreria porque

> [...] cada aluno possui suas dificuldades individuais, seu ritmo de aprendizagem, seus interesses e motivações, de forma que os professores precisam identificar as características de seus alunos e as dificuldades por eles enfrentadas para que consigam dar o suporte devido, de maneira a garantir um melhor desempenho de cada um e da turma como um todo (Morais et al, 2020 apud Kawagush et al, 2019).

No estudo supramencionado, no qual realizaram uma revisão sistemática da literatura, Morais et al (2020) analisaram 33 artigos sobre aprendizagem de programação, um dos tópicos essenciais na construção do conhecimento em Ciência da Computação, publicados em 13 países. Mais especificamente, um dos tópicos da pesquisa procurou avaliar as dificuldades encontradas por alunos no âmbito do processo de aprendizagem de programação. Com 36% de prevalência nos trabalhos analisados, o item "interpretação dos problemas computacionais e como resolvê-los" foi o de maior incidência, representando, dessa forma, a maior dificuldade apontada pelos estudantes. Outro dado importante, advindo da análise, foi a afirmação de outro obstáculo, também de incidência considerável, indicado como "pouca ou baixa habilidade matemática", com 21% de ocorrências entre os dados consultados.

Dessa forma, é possível supor que a resolução de problemas apresenta um entrave para os estudantes, tanto do ponto de vista matemático quanto do computacional, inclusive com imbricações entre esses itens. Os próprios autores que indicaram os obstáculos, entretanto, apontam possibilidades para lidar com eles: Klang et al (2021) mencionam a possibilidade de engajamento dos estudantes em pequenos grupos de discussão, em uma abordagem colaborativa, que poderia, inclusive, resolver alguns impasses que costumam ocorrer em experiências de ensino baseadas em grupos. Nesses espaços, os alunos poderiam explicar suas propostas de soluções, esclarecer o que pensam e avançar na compreensão do problema em questão (apud Yackel et al., 1991; Webb e Mastergeorge, 2003). Na visão dos pesquisadores, a partir de sua revisão de literatura, essa interação em pequenos grupos, que seriam "espaços dialógicos caracterizados pela abertura às perspectivas de cada um e soluções para problemas matemáticos" (p. 3), permitiria:

- usar a linguagem para raciocínio e compreensão conceitual;
- trocar diferentes representações do problema em questão;

- tomar consciência e compreender as perspectivas de pensamento dos colegas de grupo.

Da mesma forma, Morais et al (2020) indicaram que uma das possíveis ações para superar as dificuldades indicadas pelos alunos é a reunião deles em turmas menores, o que permitiria uma abordagem de caráter mais individualizado em relação aos obstáculos identificados.

Nessas ideias, identificadas a partir de problemas levantados, é que reside o objetivo da pesquisa[2] que motivou a redação deste artigo: discutir propostas voltadas para a resolução de problemas envolvendo elementos matemáticos e computacionais. Aqui, a tarefa é a de compreensão de aspectos relacionados ao *problema das n-rainhas*, mais especificamente a elaboração, por parte de um grupo de estudantes de Ciência da Computação, divididos em pequenas equipes, de uma generalização válida para determinar o número de diagonais de uma matriz[3] $n \times n$, com $n \geq 4$, etapa que pode ser usada em eventuais soluções computacionais para o problema mencionado. Nas próximas seções, são exploradas as condições do problema, a estratégia didática empregada, os aportes metodológicos e as interações produzidas pelos estudantes, com as respectivas análises.

O problema das n-rainhas: aspectos matemáticos e computacionais

O *problema das n-rainhas* é, na verdade, uma generalização da proposta inicial, elaborada por um enxadrista chamado Max Bezzel que, em 1848, enunciou o *problema das 8 rainhas*. Esse problema consistia, originalmente, em dispor 8 rainhas em um tabuleiro de xadrez considerando posições distintas, de tal forma que as peças não se atacassem, ou seja, não pudessem capturar umas às outras (Abramson e Young, 1989; Osaghae, 2021). Deve-se considerar que os movimentos da rainha são os mais amplos do xadrez: a peça pode se mover em linha, coluna ou em diagonal por qualquer quantidade válida de casas (ou até capturar outra peça).

Apenas dois anos depois, em 1850, Nauck propõe o *problema da completude das n-rainhas*, uma generalização produzida de forma provavelmente independente em relação à iniciativa de Bezzel, e que consistia em dispor q rainhas em um tabuleiro $q \times q$ sem que se

[2] Investigação vinculada à pesquisa intitulada “Tecnologia e sociedade contemporânea: influência das interfaces, dispositivos e conceitos computacionais no cotidiano”, que ocorre no âmbito do grupo de pesquisas EduTec/Unip.
[3] Entende-se por *matriz*, no âmbito desse artigo, ao vetor (*array*) bidimensional, com possibilidade de armazenamento homogêneo de múltiplos valores. Ainda que existam termos em comum e definições homólogas entre esse conceito e o conceito matemático de matriz, é importante compreender que é no sentido computacional que o termo é empregado aqui.

atacassem, considerando a prévia existência de certo número de rainhas s no tabuleiro, $s < q$ – ou seja, seria necessário inserir, se possível, $q - s$ rainhas, nas condições do problema. Essa proposição compõe uma classe de problemas de maior complexidade computacional: trata-se de um problema NP-Completo[4] (Gent, Jefferson e Nightingale, 2017). A figura 1 ilustra a proposição:

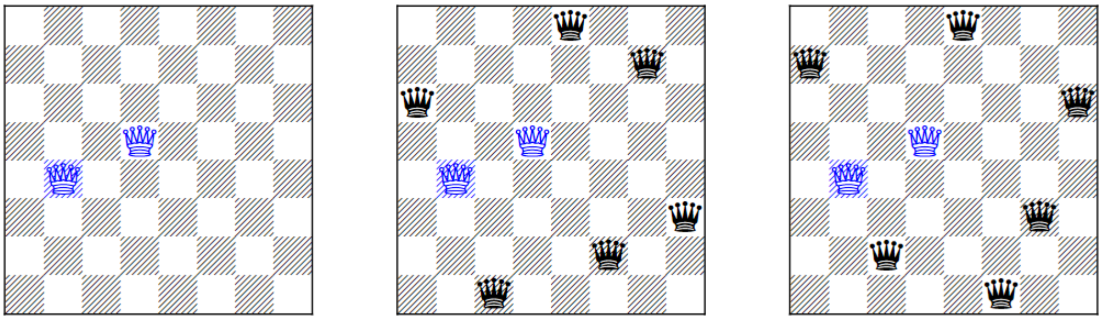

Figura 1.

Uma instância do problema da completude das 8-rainhas com duas possíveis soluções (as rainhas azuis foram colocadas previamente, adaptado de Gent, Jefferson e Nightingale, 2017, p. 844)

Importante observar, quer na generalização de Nauck, quer em uma proposta de inserir q rainhas em um tabuleiro $q \times q$ sem qualquer rainha previamente posicionada, q deve ser maior ou igual a 4. O tabuleiro seria, então, uma matriz $q \times q$, com $q \geq 4$, e cada posição seria representada por um par ordenado (a, b), com $0 \leq a < q$ e $0 \leq b < q$. A figura 2 traz uma rainha colocada na posição $(4,2)$ da matriz relativa ao tabuleiro.

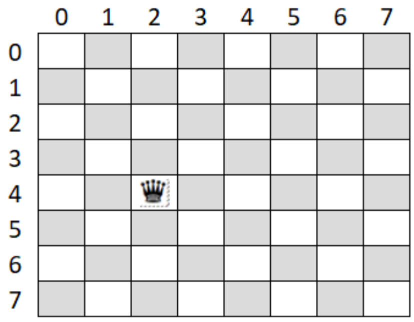

Figura 2.

Uma "matriz-tabuleiro" 8 x 8 com uma rainha posicionada nas coordenadas (4,2) (Elaborado pelo autor)

[4] A classe de problemas conhecida como *NP* é aquela cujos problemas possuem algoritmos não determinísticos limitados polinomialmente.

Formalmente, existem 92 disposições distintas das rainhas no tabuleiro que representam soluções válidas para o problema original com 8 rainhas, sendo que 12 soluções (figura 3) seriam, por assim dizer, "básicas", já que as demais poderiam ser obtidas a partir destas por meio de operações de rotação e/ou reflexão (simetrias).

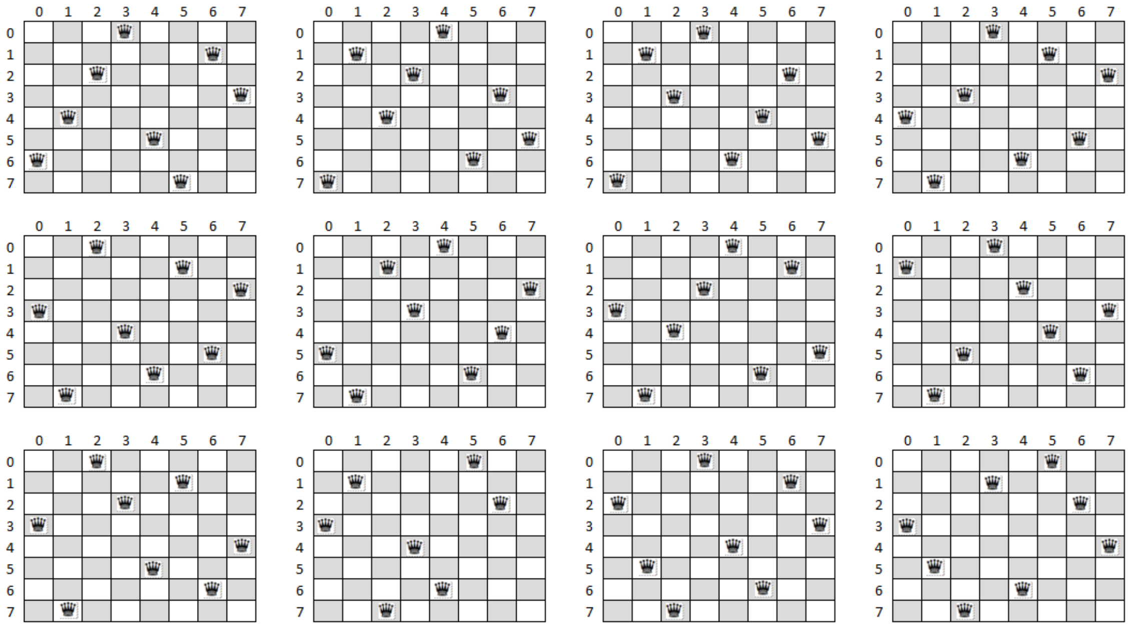

Figura 3.

Soluções básicas para o problema das 8-rainhas (Elaborado pelo autor)

Em termos gerais, os problemas aqui relatados constituem referências bastante comuns na literatura ligada à Ciência da Computação, particularmente na área de Inteligência Artificial (IA), no contexto da qual é possível encontrar soluções por meio de diversas técnicas, envolvendo, por exemplo, *backtracking*[5] e *algoritmos genéticos*[6], entre outras possibilidades. No estudo dessas abordagens, diversas atividades podem ser propostas, fomentando a resolução de problemas entre pessoas que aprendem os fundamentos de programação para IA em cursos superiores, notadamente os da área de tecnologias e/ou de exatas. Encontrar boas soluções, o que, em computação, passa por minimizar quanto possível os custos computacionais de processamento e de memória, constitui um desafio, ainda mais para aqueles que iniciam seus

[5] A técnica de *backtracking* pode ser vista como um refinamento em relação à técnica conhecida como *força bruta*: ao contrário desta, a utilização de *backtracking* permite eliminar uma série de propostas de solução sem que as mesmas precisem ser especificamente testadas. Existem inúmeros algoritmos para implementar essa técnica, com diferentes níveis de eficiência (Kondrak e Van Beek, 1997).

[6] *Algoritmos genéticos* representam uma classe de modelos em computação que têm por base procedimentos que representam metáforas dos processos evolutivos. Podem ser vistos como propostas de otimização e se baseiam na criação sucessiva, até uma solução aceitável para o problema, de uma população de cromossomos, da seleção dos indivíduos mais aptos por meio de funções de treinamento *(fitness functions)*, processos de reprodução para criação de novas populações *(crossover)* e em mutações aleatórias nas novas populações (Mitchell, 1999).

estudos nesse campo. Basta pensar, desse ponto de vista, que existe um número considerável de maneiras pelas quais se pode dispor 8 rainhas em um tabuleiro com 64 casas (1):

$$(1) \qquad C_{8}^{64} = \frac{64!}{8!\,(64-8)!} = \frac{64!}{8!\,56!} = 4426165368$$

Entretanto, as restrições na colocação de rainhas em determinadas posições para que não se ataquem concorrem para diminuir o número de casas do tabuleiro em que as mesmas poderiam ser dispostas. Nesse sentido, considerando a matriz relativa ao tabuleiro constituída por linhas (na horizontal) e colunas (na vertical), pode-se concluir que não podem existir duas ou mais rainhas em uma mesma linha e/ou em uma mesma coluna. Dessa maneira, a colocação de 8 rainhas no tabuleiro teria uma quantidade bem menor de possibilidades que atenderiam as restrições do problema, dada por 8! = 40320.

Colocadas as rainhas em distintas linhas e colunas, ainda resta avaliar se elas não se atacam nas diagonais. Considerando que a matriz do problema é sempre quadrada, em um tabuleiro *8 x 8*, as diagonais seriam aquelas exibidas na figura 4.

(a) *(b)*

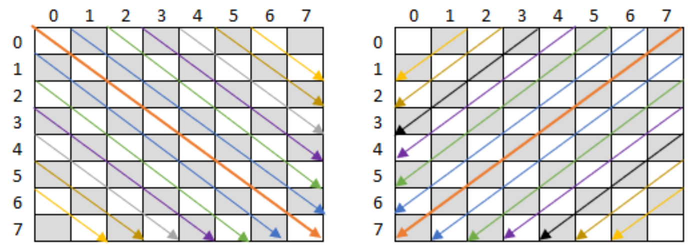

Figura 4.

Diagonais da matriz quadrada 8 x 8Fonte: elaborado pelo autor

Como se pode notar, são 26 diagonais no caso ilustrado, nas quais, consideradas individualmente, não podem ser colocadas duas ou mais rainhas[7]: são 13 diagonais no mesmo sentido da diagonal principal[8] e 13 no mesmo sentido da diagonal secundária[9].

Existem alguns procedimentos simples, em âmbito matemático e computacional, que permitem verificar o conflito indesejável entre as rainhas. Assim, se uma rainha r_1 estivesse em

[7] Não se consideram diagonais, no âmbito desse problema, aquelas que seriam formadas por apenas um elemento, já que essa condição elimina a possibilidade de conflito entre rainhas. Essas posições se localizam nos “cantos” da matriz, nas extremidades superiores direita e esquerda e inferiores direita e esquerda.

[8] Em uma matriz quadrada M de dimensão $n \times n$, a diagonal principal é aquela cujos elementos possuem coordenadas de linha e coluna iguais, ou seja, para todo $M_{a,b}$, onde a representa a posição da linha e b representa a posição de coluna, tem-se que $a = b$.

[9] Em uma matriz quadrada M de dimensão $n \times n$, a diagonal secundária é aquela cujos elementos possuem coordenadas de linha e coluna de tal forma que, para todo $M_{a,b}$, onde a representa a posição da linha e b representa a posição de coluna, tem-se que $b = n - a$. Se se consideram as figuras empregadas nesse artigo, cujas coordenadas de linha e coluna iniciam em zero, ter-se-ia $b = n - a - 1$.

uma mesma posição de linha que uma rainha r_2, ter-se-ia r_1 em (a_1, b_1) e r_2 em (a_2, b_2), com $a_1 = a_2$. Da mesma forma, se uma rainha r_1 estivesse em uma mesma posição de coluna que uma rainha r_2, ter-se-ia r_1 em (a_1, b_1) e r_2 em (a_2, b_2), com $b_1 = b_2$.

Há, também, como se mencionou, a possibilidade de conflitos ocorrerem nas diagonais componentes da matriz. Nesse caso, se o conflito ocorresse em alguma das diagonais no sentido da principal (figura 13a), ter-se-ia que, para r_1 e r_2, respectivamente, $a_1 - b_1 = a_2 - b_2$. Se o conflito viesse a ocorrer em alguma das diagonais no sentido da secundária (figura 13b), ter-se-ia que, para r_1 e r_2, respectivamente, $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$. Assim, por exemplo, se r_1 está em $M_{5,2}$ e se r_2 está em $M_{3,4}$, pode-se verificar que $5 - 2 = 3$ e que $7 - 4 = 3$. Logo, nessa situação, r_1 e r_2 estariam em conflito em uma das diagonais no sentido da principal. Por sua vez, as posições $M_{2,6}$ e $M_{5,3}$ teriam suas rainhas em conflito em uma das diagonais no sentido da secundária, pois $2 + 6 = 5 + 3 = 8$.

Uma possibilidade de propor soluções para o problema das n-rainhas passa por avaliar os conflitos existentes em uma disposição qualquer das rainhas no tabuleiro, considerando, ao menos, que elas estariam dispostas em diferentes linhas e colunas, ou seja, avaliando os conflitos em diagonais. Dessa maneira, seria possível propor uma heurística que serviria à avaliação de cada configuração de disposição de rainhas, baseada em contar os *arcos* existentes nas diagonais, sendo que cada arco representaria um conflito. Esse poderia ser um critério, por exemplo, em uma proposta de algoritmo genético simples, que poderia descartar indivíduos (tabuleiros) cuja configuração cromossômica (disposição das rainhas) apresentasse maiores números de arcos.

Ainda que, nesse artigo, não se pretenda discutir soluções computacionais completas para o problema, apresentá-lo e expor suas características é uma forma importante de discutir sua relevância enquanto proposta de investigação e sua configuração como problema matemático/computacional. Por isso, cabe, em seguida, discutir os aspectos específicos de um dos problemas propostos pela investigação, ligado às ideias expostas nessa seção.

Aspectos da discussão sobre o problema (teóricos e metodológicos)

Os sujeitos eleitos para a investigação aqui relatada eram alunos do quarto semestre de um curso superior de Ciência da Computação que aceitaram participar do processo investigativo de forma voluntária. Ao todo, originalmente, foram 10 alunos, divididos em 3 grupos, dois com 3 alunos e um com quatro. Entretanto, antes do início dos procedimentos, dois estudantes do grupo com 4 componentes desistiram; diante desse fato, os próprios estudantes solicitaram que os grupos passassem a ter 4 integrantes, com o remanejamento dos 2 estudantes restantes. Assim, finalmente, os sujeitos formaram 2 grupos com 4 integrantes[10]. As quatro sessões experimentais, de cerca de uma hora cada, uma vez por semana, ocorreram sequencialmente no segundo semestre de 2022.

A divisão em grupos pretendeu facilitar as interações e o trabalho colaborativo entre os participantes. O pesquisador não fez apresentações prévias, no sentido de resolver o problema ou de facilitar a solução, entendendo que uma abordagem desse tipo não permitiria que os estudantes colaborassem entre si. Essa lógica de não antecipação das soluções e de uso de problemas para levar os sujeitos a construírem a própria aprendizagem tem sua base na Teoria das Situações Didáticas – TSD (Brousseau, 1986; Brousseau, 2002). A atividade explorada nesse artigo leva em conta a noção de *situação adidática*, inseridas em sequências com problemas em relação aos quais os estudantes não conseguem perceber de imediato a intencionalidade didática do professor. Diante de prováveis questionamentos dos alunos acerca de como prover respostas para as questões levantadas, o professor deve agir de modo que os estudantes aceitem a responsabilidade pela construção de conjecturas e pela busca de eventuais respostas – na TSD, essa é a ideia de *devolução*. Em acréscimo,

> [...] a propositura do problema prevê um contexto material, didático e teórico de caráter antagônico (o *milieu*), no âmbito do qual o processo investigativo do estudante segue por três dialéticas distintas: de ação, de formulação e de validação. O professor retoma o caráter didático da proposta quando se propõe a discutir e esclarecer sobre o estatuto do conhecimento matemático válido, o que se dá pela dialética de institucionalização (Oliveira e Marcelino, 2015, p. 822).

Na visão de Brousseau (2002), as relações entre professor, alunos e saber têm lugar no contexto do *milieu*, planejado de modo a considerar uma lógica antagônica, representando uma fonte de dificuldades, contradições e desequilíbrios, do ponto de vista construtivista. Dessa maneira, espera-se que os estudantes se engajem no processo de construção do próprio conhecimento sem apelar diretamente para as intervenções do professor, mas a partir de retroações relativas ao *milieu*, tendo em vista seu caráter material, social e objetivo.

Dessa maneira, o professor introduz um problema específico para os alunos resolverem, e estes devem criar estratégias para abordar essa situação, em uma fase denominada *dialética de ação*. Em seguida, os alunos são incentivados a formular suposições relacionadas a esse problema e compartilhá-las com seus colegas, o que promove o desenvolvimento da *dialética de formulação*. Durante as discussões que se seguem, os alunos devem organizar suas ideias

[10] Para preservar suas identidades, os alunos são identificados de E1 a E8 nesse trabalho; o grupo 1 tinha por membros os alunos E1, E2, E3 a E4, enquanto o grupo 2 era composto pelos alunos E5, E6, E7 e E8.

em torno de argumentos mais sólidos sobre o assunto e persuadir seus colegas de que suas ideias são válidas dentro de um conjunto predefinido de regras, marcando assim a *dialética de validação*. É importante destacar que, apesar da descrição organizada apresentada aqui, essas fases não ocorrem de maneira linear ou hierárquica; elas se entrelaçam e se sobrepõem, permitindo diversas trajetórias distintas, caracterizadas por avanços e retrocessos ao longo das dialéticas. Por último, cabe ao professor o papel de validar externamente as ideias, conferindo-lhes uma relevância cultural, além de organizar e resumir o novo conhecimento adquirido, o que constitui o processo de *institucionalização*.

Dentre os pressupostos metodológicos admitidos na investigação aqui descrita, todos de natureza qualitativa, a engenharia didática foi a abordagem eleita para esta etapa. Essa abordagem tem por base as “realizações didáticas” e por cenário típico, a sala de aula. Nesse sentido, o pesquisador propõe uma sequência didática com o objetivo de possibilitar que os estudantes desenvolvam caminhos autônomos por meio dos quais criem conjecturas e procurem validá-las para a resolução de problemas. Trata-se, portanto, de uma abordagem que emprega experimentos didáticos, por meio de fases, que incluiriam, como esclarecem Barquero e Bosch (2015):

- *Análises preliminares*: constituída por um exame acerca do aspecto epistemológico do conhecimento matemático envolvido na proposta. Neste artigo, os esclarecimentos nesse sentido ocorreram na seção anterior;

- *Construção das situações e análise a priori*: diz respeito ao *design* do estudo, ou seja, a constituição dos problemas que farão parte das situações didáticas propostas, e a avaliação das possíveis soluções e conjecturas dos respondentes, incluindo análises didáticas e matemáticas das questões;

- *Implementação do processo, observação e coleta de dados*: trata-se do desenvolvimento do experimento com os estudantes, ou seja, da aplicação da sequência planejada, o que permite coletar os dados e, eventualmente, observar e interpretar os processos de resolução empregados;

- *Análise a posteriori*: última fase, que pressupõe a comparação e validação em relação às hipóteses levantadas anteriormente, principalmente aquelas provenientes da análise a priori.

Ainda segundo Barquero e Bosch (2015), esta abordagem pode ser resumida, conforme aqui se descreveu, da maneira indicada na Figura 5.

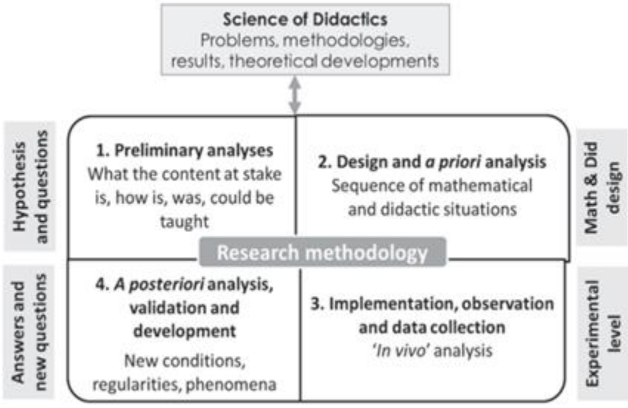

Figura 5.

Fases da Engenharia Didática (Barquero e Bosch, 2014, p. 252).

Quanto aos procedimentos, na primeira sessão, o pesquisador apresentou a ideia e os objetivos da pesquisa que estava conduzindo, recebendo a anuência dos estudantes, por escrito, em relação à recolha e uso dos dados produzidos na resolução do problema, objeto das descrições aqui trazidas. Os sujeitos, ao longo da trajetória no ensino superior, já haviam sido apresentados aos princípios de Inteligência Artificial (IA) no âmbito do curso de Ciência da Computação, mas ainda não haviam estudado o problema das n-rainhas. Assim, o pesquisador fez uma breve apresentação sobre IA e o problema específico, sem mencionar as possibilidades de resolução, nem apresentar qualquer resultado previamente conhecido; além disso, os alunos fizeram leituras sobre o tema e discussões entre si, com a participação do pesquisador. Em seguida, o pesquisador conduziu uma entrevista semiestruturada, com questões abertas, como procedimento para levantar as impressões dos estudantes acerca do problema. Por último, apresentou uma atividade que consistia em criar uma generalização para a tarefa de encontrar o número de diagonais de uma matriz $n \times n$, com $n \geq 4$.

Entrevista semiestruturada: uma análise descritiva

A primeira questão da entrevista pedia que os estudantes comentassem sobre o que achavam acerca do grau de dificuldade do problema. Ainda que as respostas tenham sido acompanhadas de pequenos comentários, é possível categorizá-las conforme se vê na tabela 1.

Tabela 1.

Respostas da primeira questão (grau de dificuldade do problema das n-rainhas)

Muito difícil	**Difícil/desafiador**	**Razoável (pede mais aprofundamento)**	**Não tem ideia/não sabe**
2	4	1	1

Note. Respostas únicas

Como se pode verificar, nenhum estudante indicou que o problema seria fácil. Essa concepção parece ideal para o cenário pretendido: de fato, para Echeverría (1998), é necessário que aquele que se disponha a resolver um problema encontre alguma dificuldade para fazê-lo, inclusive no sentido de criar questionamentos a respeito dos meios pelos quais o objetivo poderia ser alcançado.

A segunda pergunta da entrevista procurou saber se os estudantes estavam interessados em estudar esse problema, considerando que tal iniciativa envolveria aspectos matemáticos e computacionais. Todos os estudantes responderam afirmativamente. Questionados, em seguida, quais razões moveriam tal interesse, os estudantes apresentaram as respostas categorizadas na tabela 2.

Tabela 2.

Motivos pelos quais os estudantes gostariam de resolver o problema.

Aprender sobre IA e Matemática	**Superar um desafio intrigante (satisfação pessoal)**	**Aprender de forma diferente das aulas "normais"**	**Progresso em conhecimentos visando inserção profissional**	**Trabalhar em grupos e aprender com os colegas**
5	5	4	3	2

Note. Pode haver mais de uma resposta por indivíduo.

Os dados disponíveis na tabela 2 indicam que todos os sujeitos apresentaram mais de uma resposta. Pode-se constatar que os alunos relacionaram o processo de resolver problemas com aprendizagem de temas específicos e com o fato de serem desafiados a encontrar respostas. Para Oliveira e Mastroianni (2015), um problema deve ser de tal forma concebido que venha a estimular o estudante para que o resolva, justamente por perceber nele um obstáculo a superar. Também surgiram respostas que indicam a disposição dos estudantes de realizar processos de aprendizagem de forma distinta daqueles baseados nas aulas tradicionais, marcadas por exposição e transmissão, quando relatam acreditarem que a investigação da qual tomavam parte seria uma possibilidade de aprender e quando manifestam motivação em trabalhar em grupo e em aprender com os pares. Além disso, três estudantes indicaram que esse processo poderia auxiliar em sua inserção profissional. Após esse momento, o pesquisador indicou algumas fontes bibliográficas e explicou que os estudantes estavam livres para escolher outras, no sentido de explorar o problema das n-rainhas e suas possíveis soluções.

Na sessão seguinte, foi possível levantar que todos os sujeitos haviam efetuado leituras sobre o tema. No diálogo aberto em seguida, os sujeitos mencionaram técnicas ligadas à IA para tratamento do problema, com destaque para as já mencionadas *backtracking* e *algoritmos genéticos*. Os estudantes E2, E5 e E7 destacaram, também, a importância de determinar se as rainhas dispostas no tabuleiro apresentavam conflitos e que esse processo seria mais complexo quando relacionado às diagonais.

Como não surgiram comentários acerca da percepção de conflito nas diagonais por meio da soma ou subtração das coordenadas das posições nas quais as rainhas estivessem, como já indicado nesse artigo, o pesquisador não antecipou essa conjectura, apenas informando que os procedimentos para resolver o problema em si ficariam para outro momento. Tendo em vista a oportunidade oferecida pela discussão em curso, o pesquisador apresentou a atividade a ser trabalhada em grupos pelos estudantes.

A atividade em grupos

A apresentação da atividade que os alunos fariam em grupos ocorreu no contexto dos diálogos estabelecidos na segunda sessão, em torno da necessidade de avaliar os conflitos entre as rainhas. O aluno E3 indicou que determinar os conflitos em linha e coluna seria mais simples, computacionalmente falando; E4 indicou que seria importante que a distribuição das rainhas já fosse feita levando em conta diferentes linhas e colunas, com o que todos concordaram. Em relação às diagonais, o estudante E2 comentou que seria importante ter uma “fórmula” ou “algo genérico” para determinar o número de diagonais da matriz, considerando, segundo ele, que poderia “existir um problema das 127-rainhas”, em relação ao qual seria muito trabalhoso “calcular manualmente”. Os demais concordaram e perguntaram ao pesquisador como poderiam obter essa fórmula (especificamente, E1 e E8 solicitaram que a fórmula fosse fornecida). O pesquisador indicou que esse seria um bom problema e que envolveria matemática – e que essa era, justamente, a questão principal daquela fase da investigação. A segunda sessão, então, terminava aqui.

Na terceira sessão, o pesquisador formulou o enunciado gerador do problema a ser investigado pelos sujeitos: *“crie uma expressão algébrica que permita indicar o número de diagonais nas quais pode haver conflito em um tabuleiro qualquer do problema das n-rainhas. É muito importante que o grupo descreva como chegou à resposta”.* Os estudantes teriam, então, uma semana, para discutir e consolidar uma solução para o problema, que deveria ser apresentada na sessão seguinte. As análises a seguir são feitas em conformidade com a Engenharia Didática.

Análise a priori

O problema proposto na investigação pede, na verdade, que os sujeitos encontrem uma expressão algébrica que permita generalizar o número de diagonais de um tabuleiro, visto como uma matriz quadrada, com base no número de rainhas a dispor no mesmo (a partir de 4). Os alunos podem procurar regularidades por meio da análise de casos individuais, conjecturando acerca de uma expressão algébrica que dê o número de diagonais para qualquer quantidade q de rainhas, $q \geq 4$.

Assim, esse pode ser visto como um problema a ser resolvido por meio da generalização de padrões. Esse tipo de atividade é sobremaneira importante para o pensamento algébrico, o que leva à indicação, nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), de que os padrões formariam as bases do pensamento algébrico; desse modo, sua exploração seria fundamental, de modo a trabalhar com os estudantes tarefas voltadas à identificação de relações e elaboração de generalizações (Oliveira e Lopes, 2021). Na visão de Mason (1996), é muito importante desenvolver habilidades que permitam expressar generalizações, uma vez que essa aprendizagem é fundamental para a estruturação e o avanço na construção de conhecimentos em álgebra.

Uma maneira de perceber a regularidade existente no problema consiste em desenhar algumas matrizes quadradas a partir da de dimensão *4 x 4*, contando as diagonais existentes e observando suas características. A figura 6 mostra algumas possibilidades nesse sentido.

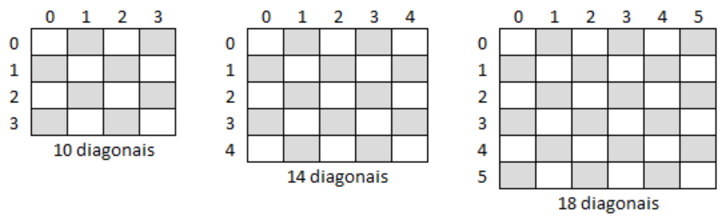

Figura 6.

Quantidade de diagonais nas matrizes 4 x 4, 5 x 5 e 6 x 6 (Elaborado pelo autor)

Os alunos podem perceber, por meio dessa estratégia, que o número de diagonais cresce de 4 em 4, pelo menos em relação às matrizes desenhadas. A percepção inicial dessa relação configura a *near generalization* ("generalização próxima", em tradução livre), como indicado por Zazkis e Liljedahl (2002). Tais generalizações ocorrem a partir da observação de casos próximos aos iniciais – essa possibilidade é chamada pelos autores de *generalização expansiva*, no sentido de que ocorre apenas a extensão da estratégia de generalização, não ocorrendo a reconstrução do esquema original. Entretanto, espera-se que os alunos que escolham essa estratégia possam recorrer, em algum momento, à *far generalization*. Para Zazkis e Liljedahl (2002), essa "generalização distante" tem aspecto reconstrutivo, não parte de extensões e é importante na obtenção de uma expressão que represente o caso genérico. Em outras palavras, é importante refazer o esquema pelo qual se constituiu a sequência, o que tornaria possível responder, sem recorrer à contagem ou a algum outro tipo de extensão, qual seria o número de diagonais do tabuleiro para 253 rainhas.

Nesse sentido, os alunos poderiam perceber, como se vê na figura 4, que não há diagonais, no âmbito desse problema, formadas nos cantos superiores e inferiores tanto do lado esquerdo quanto do lado direito – ou seja, deve-se "descontar" essas diagonais unitárias nas quais não há possibilidade de conflitos. Para os três casos expostos na figura 6, é possível observar que há $q - 2$ diagonais no triângulo superior à diagonal principal, assim como $q - 2$ diagonais no triangulo inferior. O mesmo ocorre em relação à diagonal secundária. Finalmente, ao número de diagonais assim contado, devem-se somar as diagonais principal e secundária:

(1) $2(q - 2) + 2(q - 2) + 2 = 4q - 8 + 2 = \mathbf{4q - 6}$

Assim, $4q - 6$ é a expressão que indica o número de diagonais nas quais pode haver conflitos em um tabuleiro $q \times q$, $q \geq 4$. Ou seja, $2(2q - 3)$, duas vezes o limite das diagonais em um tabuleiro $q \times q$, considerando os dois sentidos, como indicado em El Abidini (2023, p. 4). Evidentemente, outros raciocínios em direção de uma *far generalization* seriam possíveis.

Uma outra estratégia pode ser aventada, considerando, como indicado na hipótese anterior, que o número de diagonais de um tabuleiro é 10 para o tabuleiro 4×4, 14 para o tabuleiro 5×5, 18 para o tabuleiro 6×6 e assim por diante. Pode-se conjecturar, então, que o número de diagonais da matriz $q \times q$ pode ser determinado a partir de uma progressão aritmética (PA), cujo termo geral a_n pode ser encontrado com base no primeiro termo a_1 e na razão r, como expresso em (2):

(2) $a_n = a_1 + (n - 1).r$

Nesse caso, como a condição de existência do problema implica que $q \geq 4$, a_1 tem o valor 10. Nessa hipótese, a razão seria igual a 4, a diferença entre o número de diagonais apurada nas dimensões das matrizes. Assim, teríamos (3):

(3) $a_n = 10 + (n - 1).4$

A informação disponível, entretanto, corresponde a um número q de rainhas a serem dispostas em um tabuleiro $q \times q$. A relação entre q e n implicaria em considerar que a primeira quantidade válida de rainhas é 4, ou seja, para $q = 4$, ter-se-ia $n = 1$; para $q = 5$, ter-se-ia $n = 2$, e assim por diante. Assim, pode-se conjecturar, para ajustar o número de rainhas à posição equivalente na PA, que $n = q - 3$, permitindo escrever (4):

(4) $a_n = 10 + (q - 3 - 1).4 = 10 + (q - 4).4 = \mathbf{4q - 6}$

Consideradas essas conjecturas, como recomendado no âmbito da engenharia didática, sem a pretensão de esgotar as possibilidades que poderiam surgir nas interações entre os estudantes, a pesquisa prosseguiu, permitindo a análise das produções dos sujeitos.

Análise da sessão experimental e a posteriori

Como já se descreveu, a terceira sessão iniciava com a busca pela expressão algébrica relativa ao número de diagonais nas quais poderia haver conflito entre rainhas em um tabuleiro $q \ x \ q$, $q \geq 4$. Sempre que a mediação do pesquisador fosse necessária, no entender dos participantes, ele poderia ser chamado, mas não seriam feitas intervenções no sentido de solucionar a atividade, em atenção à noção de devolução[11] preconizada pela TSD (Brousseau, 1986). Considerando que seria necessário elaborar uma resposta escrita a partir das conjecturas e validações, o pesquisador indicou que toda discussão deveria ocorrer durante aquela sessão e que haveria um tempo adicional de até 40 minutos para preparar o texto que serviria de registro de resposta de cada grupo.

O grupo 1 tinha por integrantes os alunos E1, E2, E3 e E4. Inicialmente, E3 propôs que desenhassem algumas matrizes e contassem as diagonais, o que ficou a cargo dele mesmo e de E1; enquanto desenhavam, discutiram algumas hipóteses, dentre as quais a proposta de E2 acerca de buscar a resposta a partir da quantidade de linhas/colunas, tentando relacionar esse número com a quantidade de diagonais.

> **(E2)** – E se a gente tentasse multiplicar linha por coluna e depois dividir por... sei lá, por 2?
> **(E4)** – Acho que não; linha e coluna tem o mesmo, é igual. É o mesmo que o número de rainhas, também.
> **(E1)** – Desenhei aqui... com 4 rainhas dá 10 diagonais sem contar as dos cantos; nessas, não dá para pôr duas rainhas.
> **(E3)** – Olha aqui, a de 5 rainhas dá 14 e de 6 rainhas dá 18. Quanto dá a de 7 e de 8? Acho que vai de 4 em 4...

Depois de um tempo (cerca de 10 minutos), com discussões e novos desenhos, o grupo tinha produzido manualmente representações das matrizes para os casos de 4 até 10 rainhas, o que os levou a indicar que a diferença entre um tabuleiro e outro seria de 4 diagonais. O aluno

[11] Segundo Brousseau (1986), a devolução representa o papel do professor/pesquisador no âmbito da atividade matemática de seu grupo de estudantes, preservando oculta a intencionalidade didática da iniciativa, garantindo que as respostas surjam a partir de retroações em relação ao *milieu* e que os estudantes aceitem o desafio de resolução do problema como tarefa que lhes cabe.

que mais propunha conjecturas era E3, que as expunha para o grupo, de modo que pudessem ser confirmadas ou refutadas.

> **(E3)** – A gente tem 7 diagonais nessa matriz em cima dessa diagonal maior, contando ela também [usando um notebook e indicando um desenho no Microsoft Excel de uma matriz 8 x 8]. Pra baixo também tem 7. Tem 7, né, professor?
> **(P)** – O que vocês acham?
> **(E2)** – Não, pra baixo tem 6, você está contando a "grandona" duas vezes [diagonal principal]... 7+6 = 13
> **(E1)** – Mas essa tem 26... é o dobro
> **(E3)** – É porque tem do outro lado... olha só, da esquerda para a direita tem 13 e da direita para a esquerda tem 13 também! Acho que "matamos"!

Um tempo relativamente longo foi consumido tentando descobrir se a conjectura era válida. Os alunos se convenceram de que sim quando a confirmaram em todas as outras matrizes que haviam desenhado. E4 lembrou aos demais que precisavam de uma "fórmula", ou seja, de uma expressão algébrica.

> **(E3)** – Verdade, mas olha, nessa aqui [8 x 8], é 7 + 6, estava pensando: 8 rainhas, 8 – 1 = 7 e 8 – 2 = 6. O 8 é o n da fórmula, então como fica... vou escrever aqui.

E3 escreve *n – 1 + n – 2 * 2* em um editor de textos com seu computador, usando o asterisco como símbolo de multiplicação, o que é comum em computação. E1 indicou que precisavam "por parênteses", senão "daria muito errado". De fato, após discutirem mais alguns minutos, indicaram que a expressão seria *((n – 1) + (n – 2)) * 2*. Essa expressão é equivalente a *4n – 6* e está correta. Usando uma parte do tempo adicional, o grupo escreveu a solução no em um dos notebooks dos participantes do grupo, conforme se pode ver na figura 7.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	8	9	8	7	6	5	4	3	2	1
2	7	8	9	8	7	6	5	4	3	2
3	6	7	8	9	8	7	6	5	4	3
4	5	6	7	8	9	8	7	6	5	4
5	4	5	6	7	8	9	8	7	6	5
6	3	4	5	6	7	8	9	8	7	6
7	2	3	4	5	6	7	8	9	8	7
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

n = 10
Sentido da diagonal principal
Abaixo da principal: conta de 1 a 9 (**n-1**)
Acima da principal: conta de 1 a 8 (**n - 2**)
Abaixo: desconta a diagonal 0
Acima : desconta as diagonais 0 e 9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8
2	2	3	4	5	6	7	8	9	8	7
3	3	4	5	6	7	8	9	8	7	6
4	4	5	6	7	8	9	8	7	6	5
5	5	6	7	8	9	8	7	6	5	4
6	6	7	8	9	8	7	6	5	4	3
7	7	8	9	8	7	6	5	4	3	2
8	8	9	8	7	6	5	4	3	2	1
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

n = 10
Sentido da diagonal secundária
Abaixo da secundária: conta de 1 a 9 (**n-1**)
Acima da secundária: conta de 1 a 8 (**n - 2**)
Abaixo: desconta a diagonal 0
Acima : desconta as diagonais 0 e 9

Tanto no sentido da principal como da secundária ficaria ***((n-1) + (n-2))***
Portanto, o número de diagonais de uma matriz ***n x n*** *é* ***((n-1) + (n-2)) * 2***

Figura 7.

Resposta ao problema proposto – grupo 1 (dados da pesquisa)

O grupo baseou suas conjecturas na busca por uma generalização a partir do padrão que determinaram por meio da extensão de suas descobertas, ou seja, usando aquilo que Zazkis e Liljedahl (2002) chamam de *near generalization*. Não se registrou um movimento no sentido de usar outras possibilidades matemáticas, como progressões aritméticas, por exemplo, para validar as conjecturas. Tendo encontrado um padrão possível e feito a extensão do mesmo para alguns casos que julgaram suficientes, assumiram que essa proposição atenderia a quaisquer casos, mesmo em tabuleiros para centenas de rainhas, por exemplo. Entretanto, não é possível ignorar, por outro lado, que os diálogos do grupo apontam para um exame da estrutura de um grupo de matrizes, o que vai um pouco além do mero exame de casos individuais – ainda que o grupo tenha formalizado o relatório apenas com o caso $n = 10$, foram produzidos vários esboços com outros casos. Neste sentido, percebe-se uma aproximação, ainda que um tanto incipiente, da proposta de *far generalization* indicada por Zazkis e Liljedahl (2002). Além disso, não se percebe no grupo nenhuma intenção de prover um refinamento para a expressão por meio de um desenvolvimento que permitisse indicá-la em sua forma canônica.

Em relação à dinâmica da resolução do problema, percebe-se que os movimentos dialéticos indicados por Brousseau (2002) se fizeram presentes, desde a manipulação dos dados de maneira mais operacional (dialética de ação) até a discussão de conjecturas (dialética de formulação) e sua posterior validação.

Os integrantes do grupo 2 eram os estudantes E5, E6, E7 e E8. A estratégia de desenhar matrizes quadradas "pequenas" (com dimensões entre 4 e 6) também foi usada por esse grupo, o que indica que a generalização buscada como resposta ao problema partia de procedimentos expansivos, como extensão entre as versões consideradas das matrizes – *near generalization*, na visão de Zazkis e Liljedahl (2002). Os diálogos entre os membros do grupo permitem entender essa estratégia inicial e como ela foi se alterando a partir das descobertas parciais:

> **(E6)** – [Usando seu notebook e uma planilha em branco do Microsoft Excel] Vamos desenhar as primeiras matrizes. Aí, a gente tenta entender o que muda de uma para outra. Vamos tentar 3 x 3 e aumentar de uma em uma "casinha";
> **(E8)** – Não, 3 por 3 não dá, não tem solução. Tem que começar com 4, aí é 4 por 4, igual carro de rali [risos];
> **(E6)** – É mesmo, verdade, a gente tinha lido alguma coisa assim, ou o professor falou;
> **(E8)** – Então vai, faz aí uma 4 x 4, vou fazer aqui também. Ô, E5 e E7, ajuda aí! Vocês dormiram? [risos]
> **(E7)** – Não, não, tô acompanhando aqui.
> **(E5)** – Vocês falam muito! Enquanto vocês ficaram falando, eu fiz uns rascunhos aqui [também usando o notebook]. Olha só, acho que 4 x 4 tem 12 diagonais.

Inicialmente, os demais membros do grupo 2 pareceram concordar. O estudante E5 fez uma descrição acerca daquilo que chamou "forma" da matriz, ou, em suas palavras, "o tipo de desenho de cada uma".

> **(E5)** – Olha só, então, a gente pode pensar que cada matriz tem um tipo de espelho, um contrário... essa diagonal maior de um lado [apontando, em seu notebook, a diagonal principal] e essa outra do outro lado [diagonal secundária]. Aí, tem as diagonais de baixo e de cima de uma e de baixo e de cima da outra. Tem que contar.
> **(E8)** – Verdade! Aí, vai dar 12 na de 4 por 4 e 16 na de 5 x 5...
> **(E7)** – A de 6 por 6 dá 20...

Antes de prosseguirem com as conjecturas, os estudantes desse grupo perceberam, como os do grupo 1, que as diagonais unitárias das extremidades superiores e inferiores das matrizes não ofereciam risco de conflitos entre as rainhas; entretanto, ficaram em dúvida se deveriam ou não as considerar. O pesquisador foi consultado e, ainda uma vez, efetuou a devolução do questionamento, perguntando qual seria a opinião dos membros do grupo e quais motivos justificariam semelhante proposta. Depois de relerem o problema e de gastarem vários minutos analisando as matrizes, resolveram que essas extremidades não deveriam ser contadas:

> **(E5)** – Bom, se as pontas não contam, então cada matriz vai ter outra contagem: 4 x 4 dá 10, 5 x 5 dá 14 e 6 x 6 dá 18...
> **(E7)** – Varia de 4 em 4. Será que é porque começou a contar da matriz 4 x 4?
> **(E6)** – Acho que não. Se é a anterior mais 4, será que a fórmula seria n – 1 + 4? Não, espera um pouco, não n – 1, quanto dá em n – 1, tipo, quando a gente estiver vendo 5 x 5, é o que deu na 4 x 4 mais 4... entenderam?
> **(E8)** – É, isso faz sentido, mas a gente teria que ter uma fórmula para a primeira matriz, né? E a gente ainda não sabe a fórmula.

A proposta de E6 era a de prover uma resposta por meio do uso de uma sequência definida por recorrência. Nesse sentido, "uma sequência é definida por recorrência nomeando-se, explicitamente, o primeiro valor (ou alguns poucos primeiros valores) na sequência e depois definindo valores subsequentes na sequência em termos de valores anteriores" (Gersting, 1999, p. 85). Ainda que não se possa indicar que semelhante proposta esteja errada, o problema indicava, ainda que implicitamente, que a generalização deveria prover a resposta para *qualquer caso* previsto, ou seja, qualquer número de rainhas, inclusive 4. Dessa forma, alegando que um dos casos não seria atendido pela proposta, o grupo preferiu descartar essa conjectura.

Nos instantes seguintes, os membros do grupo 2 definiram alguns pressupostos que foram importantes para o estabelecimento de uma discussão comum, como chamar de *N* o número de rainhas e relacioná-lo às dimensões do tabuleiro, e de *d* o número de diagonais de um tabuleiro *N x N* qualquer. Isso pode parecer simples, mas foi fundamental para que os membros do grupo adotassem um discurso comum, o que permitiu propor uma conjectura que, ao ser refinada, produziu uma resposta válida para a atividade.

> **(E5)** – A gente viu que as metades da matriz são iguais...só do lado contrário, invertidas... quer dizer, tem a mesma quantidade de diagonais. Então, o que vale para uma, vale para a outra...
> **(E5)** – Então, acho que isso quer dizer que é duas vezes alguma coisa, né? Porque são iguais, só muda o lado...
> **(E7)** – Verdade! Nessa que é 4 x 4, são 5 de um lado e 5 do outro. Então, dá 10, que é 5 vezes 2! Nas outras também.

Ao indicar uma lógica subjacente à constituição dos tabuleiros, os estudantes do grupo 2 empregam um sentido reconstrutivo ao padrão, ou seja, reconstituem a forma como as matrizes são formadas, em relação às diagonais, sem apelarem para extensões. Essa é justamente a chamada *far generalization* indicada por Zazkis e Liljedahl (2002), fundamental para a obtenção de uma generalização. Após discutirem a estrutura de um dos "lados", que é como se referiram às diagonais no sentido da diagonal principal, os estudantes elaboraram uma conjectura com textos e desenhos (figura 8) para indicar a conjetura que acabaram por validar, conforme segue:

Primeiramente, levamos em consideração: - Em um tabuleiro N x N, sendo N o número de rainhas - d = n° de diagonais. O primeiro passo para a criação da expressão algébrica foi testar a mão 3 matrizes. Com isso, veríamos a relação entre eles, conforme as matrizes fossem crescendo o número de lados. Montamos as matrizes 4x4, 5x5 e 6x6. Levando em conta a diagonal principal e a diagonal secundária, temos 2 direções para contagem de diagonais totais.

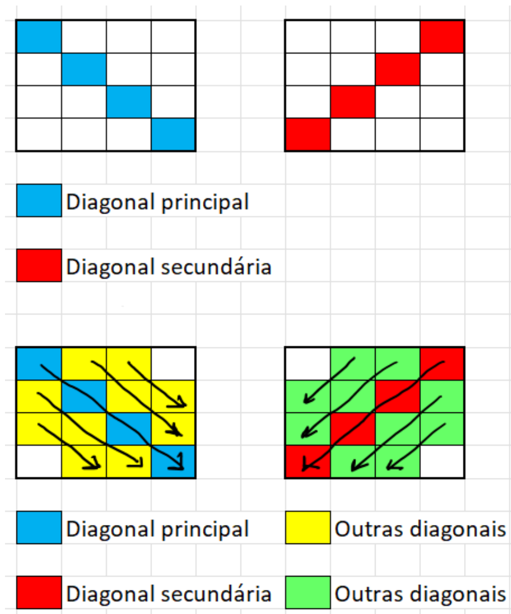

Figura 8.

Representação das matrizes desenhadas – grupo 2 (dados da pesquisa)

Olhando a matriz 4x4, percebemos que ela possui 10 diagonais, sendo 5 em uma direção e 5 em outra – fizemos um esquema e cada seta preta sinaliza uma diagonal. Resolvemos não considerar as pontas porque elas não podem formar conflitos. Aí, fizemos outras matrizes, até 9 x 9, e fizemos outras descobertas. A Matriz 5 por 5 tem 14 diagonais (7 x 2) e a de 6 x 6 tem 18 diagonais (9 x 2) e assim por diante. Vimos que tem sempre a mesma quantidade de diagonais em cada direção. Também percebemos que não podemos contar a diagonal principal e secundária duas vezes, nem as duas pontas que não tem conflito. Por isso, seria N x 2 – 3. Como tem duas direções, achamos que tem que multiplicar por 2, o que daria D = (2 * N – 3) * 2.

No texto destacado, a conjectura apresentada pelos alunos é válida, obviamente. De maneira típica, entretanto, os estudantes não cogitaram usar a propriedade distributiva na expressão $D = (2 * N – 3) * 2$, o que permitiria obter $D = 4N – 6$. Pode-se aventar, nesse sentido, que os alunos preferiram manter a forma da expressão que lhes permitiu deduzi-la como *2 vezes N* (duas vezes a dimensão da matriz quadrada) *menos 3* (retirada das diagonais principal e secundária, que seriam contadas duas vezes originalmente, além das diagonais que não possibilitam conflitos); esse resultado, por sua vez (da subtração, grafado originalmente entre parênteses) é *multiplicado por 2*, pois o mesmo raciocínio é aplicado em relação aos “lados” da diagonal principal e da secundária.

Considerações finais

Após o encerramento da última sessão, com a apresentação dos relatórios dos grupos, o pesquisador promoveu um debate, em meio do qual procurou discutir com os participantes os resultados alcançados, indicando o acerto das soluções propostas e a possibilidade de refinar suas apresentações, em termos matemáticos. Os sujeitos assimilaram as ideias e sugeriram a continuidade das atividades, por meio da construção de sistemas computacionais que fizessem a validação de tabuleiros a partir da disposição de eventuais “jogadores” (nos termos do problema estudado). Além disso, requisitaram participar de outras atividades semelhantes, com uma lista de temas, apresentados nesse momento final, que envolvia resolução de problemas ligados à estrutura de dados, inteligência artificial, programação em diversos paradigmas (estruturado, orientado a objetos, simbólico) e, de maneira bastante significativa, matemática.

Especificamente sobre matemática, os estudantes relataram a percepção, contrária ao levantamento feito inicialmente, de que a atividade em si seria bastante simples, uma vez encarada como um problema a resolver e a partir das interações que tiveram lugar com os pares.

Neste sentido, o estudante E3, por exemplo, indicou que gostaria de experimentar outros desafios e de participar de outros grupos de estudo ou de iniciativas de pesquisa semelhantes.

A estratégia didática adotada, tendo por base a TSD, pareceu bastante adequada para lidar com a proposta de resolução do problema aqui abordado. De fato, os elementos presentes no *milieu* concorreram para a construção de uma lógica antagônica – o mesmo pode ser dito acerca da postura de não facilitação por parte do pesquisador: desse modo, os participantes avançaram, em meio às dialéticas, a partir de retroações que tinham o *milieu* como referência.

Outro elemento merece destaque: os estudantes recorreram prioritariamente aos seus notebooks e a programas que poderiam oferecer uma interface adequada para apoiar a construção das conjecturas – não havia acesso à Internet ou a quaisquer recursos externo no âmbito da terceira sessão; além disso, o problema das diagonais não havia sido apresentado anteriormente. Não é impossível que os estudantes já tivessem se deparado com textos ou experiências relativas ao problema tratado nesta sessão, mas é pouco provável, o que se pode conjecturar pela natureza das interações durante a resolução do problema e pela escassez de literatura que aborde especificamente a questão aqui tratada. De todo o modo, pode-se entender que o uso de interfaces computacionais apoiou os processos de resolução, o que pode indicar, como aponta Oliveira (2018), que a fluência no uso de tecnologias concorre para subsidiar o pensamento das pessoas envolvidas, que constroem suas estratégias e propõem suas conjecturas a partir do dinamismo, da interatividade e das possibilidades de experimentação abertas pelo uso dos softwares mobilizados.

Por último, cabe indicar que a experiência em torno da resolução de problemas apontou para a importância dessa abordagem como recurso de aprendizagem em cursos superiores de graduação e, nesse caso, mais especificamente, em cursos de Ciência da Computação. A resolução de problemas é atividade típica tanto em matemática quanto em vários temas computacionais, como programação, por exemplo. Propor problematizações que ocorram como desafios e conduzi-las em um processo didático não diretivo parecem criar trajetórias promissoras, inclusive em propostas interdisciplinares envolvendo, entre os componentes, a matemática.

Referências

Abramson, B., & Yung, M. (1989). Divide and conquer under global constraints: a solution to the N-Queens problem. United States. https://doi.org/10.1016/0743-7315(89)90011-7

Barquero, B., & Bosch, M. (2015). Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. In: Watson, A. e Ohtani, M.

(Eds.). Task Design in Mathematics Education: New ICMI Study Series). 10.1007/978-3-319-09629-2_8.

Brasil, Ministério da Educação, Conselho Nacional de Educação, Câmara de Educação Superior. (2016). “Resolução Número 5, de 16 de novembro de 2016”. Ministério da Educação. http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=52101-rces005-16-pdf&category_slug=novembro-2016-pdf&Itemid=30192.

Brousseau, G. (2002). Theory of Didactical Situations in Mathematics: didactique des mathématiques, 1970–1990. Dordrecht: Kluwer Academic.

Echeverría, M. D. P. (1998). A solução de problemas em matemática. In: POZO, J. I. (org.). A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed. 44-65.

El Abidine, B. Z. (2023). An incremental approach to the n-queen problem with polynomial time. Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences, 35. 1 – 7. https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2023.02.002

Gent, I.P., Jefferson, C., & Nightingale, P. (2017). Complexity of n-Queens Completion. Journal of Artificial Intelligence Research, 59. 815 – 848. https://doi.org/10.1613/jair.5512

Gersting, J. L. (1999). Fundamentos matemáticos para Ciência da Computação. 4. ed. LTC: Rio de Janeiro.

Hamilton, E. (2007). “What changes are needed in the kind of problem-solving situations where mathematical thinking is needed beyond school?”. Foundations for the Future in Mathematics Education. Editors R. Lesh, E. Hamilton, and Kaput (Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum), 1–6.

Klang N., Karlsson N., Kilborn W., Eriksson P., & Karlberg M (2021). Mathematical Problem-Solving Through Cooperative Learning – The Importance of Peer Acceptance and Friendships. Frontiers in Education, 6. 10.3389/feduc.2021.710296.

Kondrak, G., Van Beek, P. (1997). A theoretical evaluation of selected backtracking algorithms. Artificial Intelligence, 89 (1-2). 365 – 387. https://doi.org/10.1016/S0004-3702(96)00027-6

Mitchell, M. (1999). An introduction to genetic algorithms. 5. ed. Cambridge: MIT Press.

Morais, C. G. B., Mendes Neto, F. M., & Osório, A. J. M. (2020). Difficulties and challenges in the learning process of algorithms and programming in higher education: a systematic literature review. Research, Society and Development, 9(10), e9429109287. https://doi.org/10.33448/rsd-v9i10.9287

Oliveira, G. P. (2018). Sobre tecnologias e Educação Matemática: fluência, convergência e o que isto tem a ver com aquilo. In Oliveira, G. P. (Org.). Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Oliveira, G. P., Mastroianni, M.T.R. (2015). Resolução de problemas matemáticos nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma investigação com professores polivalentes. Revista Ensaio, 17 (2). 455-482. http://dx.doi.org/10.1590/1983-21172015170209

Osaghae, E. O. (2021). Solution to n-Queens Problem: Heuristic Approac. Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence, 9(2). 26-35.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., e Abrantes, P. (1997). Didáctica da matemática: Ensino secundário. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Zazkis, R. & Liljedahal, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.