ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i1p449-471

Probabilidade para o ensino médio nos livros de conhecimento do PNLD 2021

Probability for high school in PNLD 2021 mathematics textbooks

Probabilidad para la escuela secundaria en los libros de texto de matemáticas del PNLD 2021

Probabilités pour le lycée dans les manuels de mathématiques du PNLD 2021

Anderson Rodrigo Oliveira da Silva[1]
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Doutorando em Educação Matemática e Tecnológica
https://orcid.org/0000-0002-6704-0512

Gilda Lisbôa Guimarães[2]
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Doutora em Psicologia Cognitiva
https://orcid.org/0000-0002-1463-1626

Resumo

A probabilidade é uma área da Matemática voltada para a predição de chances, tomadas de decisão e análise de riscos, tornando-se assim um dos principais conhecimentos desenvolvidos na escola. Sabendo que o livro didático é um instrumento essencial no trabalho do professor, este artigo objetiva analisar a perspectiva do ensino da probabilidade nos livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD 2021. A partir de uma pesquisa documental, analisamos as atividades considerando os significados da probabilidade, espaços amostrais e a estruturação dos eventos. Encontramos uma assimetria em relação aos significados com grande predominância para o significado clássico, a utilização expressiva de espaços amostrais discretos e limitações na abordagem conceitual de importantes teoremas, como a probabilidade condicional para a composição de eventos. Com isso, as competências dos professores são fundamentais para a complementação e correção de rota no processo de ensino e aprendizagem da probabilidade.

Palavras-chave: Probabilidade, Livro didático, Ensino médio.

Abstract

[1] ander.rodrigoscl@gmail.com
[2] gilda.lguimaraes@ufpe.br

Probability is an area of mathematics focused on predicting chances, making decisions and analyzing risks, making it one of the main areas of knowledge developed at school. Knowing that the textbook is an essential tool in the teacher's work, this article aims to analyse the perspective of teaching probability in the Probability and Statistics textbooks approved by the PNLD 2021 for High School. Based on documental research, we analyzed the activities considering the meanings of probability, sample spaces and the structuring of events. We found an asymmetry in relation to the meanings, with a great predominance of the classical meaning, the expressive use of discrete sample spaces and limitations in the conceptual approach to important theorems, such as conditional probability for the composition of events. As a result, teachers' skills are fundamental for complementing and correcting the teaching and learning process of probability.

Keywords: Probability, Textbook, High school.

Resumen

La probabilidad es un área de las Matemáticas enfocada a predecir oportunidades, tomar decisiones y analizar riesgos, convirtiéndose así en uno de los principales conocimientos que se desarrollan en la escuela. Sabiendo que el libro de texto es un instrumento esencial en el trabajo del docente, este artículo tiene como objetivo analizar la perspectiva de la enseñanza de la probabilidad en los libros de texto de conocimientos de Probabilidad y Estadística aprobados por el PNLD 2021 para la Enseñanza Media. A partir de una investigación documental, analizamos las actividades considerando los significados de la probabilidad, los espacios muestrales y la estructuración de eventos. Encontramos una asimetría en relación a los significados con gran predominio del significado clásico, el uso expresivo de espacios muestrales discretos y limitaciones en el abordaje conceptual de teoremas importantes, como la probabilidad condicional para la composición de eventos. Por lo tanto, las habilidades docentes son fundamentales para complementar y corregir el recorrido en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Palabras clave: Probabilidad, Libro texto, Educación secundaria.

Résumé

Les probabilités sont un domaine des mathématiques axé sur la prédiction des chances, la prise de décisions et l’analyse des risques, ce qui en fait l’un des principaux domaines de connaissances développés à l’école. Sachant que le manuel est un outil essentiel dans le travail de l’enseignant, cet article vise à analyser la perspective de l’enseignement des probabilités dans les manuels de probabilités et de statistiques approuvés par le PNLD 2021 pour l’enseignement secondaire. Sur la base d’une recherche documentaire, nous avons analysé les activités en tenant compte des significations de la probabilité, des espaces d’échantillonnage et de la structuration des événements. Nous avons constaté une asymétrie par rapport aux significations, avec une grande prédominance de la signification classique, l’utilisation expressive d’espaces d’échantillons discrets et des limitations dans l’approche conceptuelle de théorèmes importants, tels que la probabilité conditionnelle pour la composition d’événements. Par conséquent, les compétences des enseignants sont fondamentales pour compléter et corriger le processus d’enseignement et d’apprentissage des probabilités.

Mots-clés : Probabilité, Manuel scolaire, École secondaire.

Probabilidade para o ensino médio nos livros de conhecimento do PNLD 2021

Sabemos que um dos maiores anseios da humanidade é prever o futuro. Desde os jogos com flechas e utilização do osso astrágalo pelos gregos, quando se acreditava que a participação dos deuses era absoluta, a probabilidade tem sido objeto de estudo na academia (Launay, 2016). No entanto, com o passar dos anos, essa concepção foi extrapolada, pois hoje esse conhecimento está dentro das salas de aula, auxiliando no desenvolvimento do exercício cidadão dos estudantes.

Com isso, a escola ganha tanto um papel de educar academicamente os estudantes para lidar com essas situações e desenvolver seu aspecto cognitivo relativo à probabilidade, quanto a incumbência de situar os estudantes quanto ao seu papel cotidiano, utilizando esses conhecimentos para tomar decisões diárias. Para isso, o papel do professor se faz de fundamental importância, tendo o livro didático como um dos mais importantes instrumentos de apoio ao trabalho docente (Brown, 2009; Santos, 2013; Vieira, 2013; Barbosa & Oliveira, 2018).

No Brasil, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é responsável por definir diretrizes para a elaboração e distribuição desses materiais, definindo em editais específicos as suas prerrogativas e prazos de validade. Com isso, o mesmo se adequa às concepções vigentes para cada segmento educativo, que por sua vez, no contexto do ensino médio, teve uma reforma estabelecida por meio da Lei 13.415/2017, que definiu novos caminhos para a estrutura e funcionamento desta etapa da educação básica brasileira.

Assim, o Edital do PNLD 2021 (Brasil, 2020) já obedeceu a mudanças estabelecidas por lei, como a utilização da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) para parametrizar como e quais conteúdos devem estar presentes no Ensino Médio. Surgem assim, portanto, os objetos de livros didáticos nessa nova formatação, a saber: objeto 1 – os livros de projetos integradores e de vida; objeto 2 – obras de conhecimento específico; objeto 3 – obras de formação continuada; e objetos 4 e 5, que compreendem os recursos digitais e as obras literárias.

Em se tratando de probabilidade, Silveira (2021) e Silva (2023) evidenciam como esse conhecimento vem sendo desenvolvido pelos livros didáticos (LD), e Araújo e Guimarães (2022) que voltam os olhares para os livros de projetos e a utilização do conceito de curva normal. Entretanto, apesar de dados recentes apontarem para deficiências na aprendizagem de estudantes brasileiros, como o PISA por exemplo, são escassos os estudos que detalham os pormenores que esses livros levam em consideração para desenvolver o conhecimento probabilístico. Assim, este estudo pretende analisar a perspectiva a respeito do conceito de probabilidade nos livros do PNLD 2021 do Ensino Médio, utilizando de uma pesquisa documental.

A probabilidade no ensino médio

O desenvolvimento do conceito de Probabilidade na Educação Básica é uma orientação presente desde os anos iniciais, em se tratando da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Com isso, o documento norteia o desenvolvimento do conceito desde o vocabulário até métodos de quantificação sofisticados, como o Teorema da Probabilidade Total ou mesmo da Probabilidade Condicional. Para a BNCC,

> No tocante à Probabilidade, os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. (Brasil, 2018, p. 518)

Com isso, fica clara a necessidade de a etapa do Ensino Médio promover o aprofundamento e contextualização dos conhecimentos adquiridos ao longo de todo o Ensino Fundamental. Diferentes autores (Batanero, 2005; Gal, 2004, 2019; Ross, 2015) compreendem o ensino de probabilidade e estatística como primordiais para o desenvolvimento não só cognitivo mas também do senso crítico dos estudantes, tornando assim a escola uma promotora da cidadania.

Para isso, utilizamos o conceito de Letramento Probabilístico estruturado por Gal (2004), que é composto por duas grandes composições: os elementos de conhecimento, que são aqueles que fazem parte do conceito de probabilidade e suas aplicações (objeto de estudo deste artigo) e os elementos de disposição, que configuram os aspectos intrínsecos a cada cidadão e que estão ligados ao conceito. Para o autor, um adulto letrado probabilisticamente é capaz de mobilizar esses dois elementos ao exercer seu papel de crítico e cidadão em sociedade.

LETRAMENTO PROBABILÍSTICO (GAL, 2004)	
ELEMENTOS DE CONHECIMENTO	1. Grandes Ideias
	2. Cálculo de Probabilidades
	3. Linguagem Probabilística
	4. Contexto
	5. Questões Críticas
ELEMENTOS DISPOSICIONAIS	1. Postura Crítica
	2. Crenças e Atitudes
	3. Sentimento ao Risco

Figura 1.

Letramento probabilístico (Gal, 2004)

Os *elementos de conhecimento* compõem as variantes que dão sentido ao conceito de probabilidade, no qual a escola assume seu papel pedagógico ao desenvolver essas habilidades nos estudantes. Com isso, cinco noções são desenvolvidas: (i) grandes ideias, que trabalham as situações ligadas à aleatoriedade e variabilidade de experimentos probabilísticos; (ii) cálculo de probabilidades, que são aqueles desenvolvidos para quantificar diferentes eventos em um experimento aleatório, tais como teorema da probabilidade total, teoremas de Bayes, entre outros; (iii) linguagem probabilística, que aborda as formas com que eventos são verbalizados, seja em linguagem oral ou linguagem escrita; (iv) contexto, que diz respeito às situações nas quais a probabilidade é empregada para fazer declarações; e (v) questões críticas, que são aquelas desenvolvidas em torno da compreensão de mensagens probabilísticas, como por exemplo a expressão $P(A|B)$ na probabilidade condicional.

Já os elementos disposicionais tem como característica principal tratar das questões inerentes à subjetividade de quem lê ou declara probabilidades. Essa noção contempla a *postura crítica*, que reflete como um sujeito se posiciona perante dados probabilísticos, se tem vocação para questioná-los quando necessário, de que forma deixa *suas crenças e atitudes* tomarem conta do seu julgamento ou se mantém independentes da realidade dos fatos, e por fim, o *sentimento ao risco*, que investiga como o indivíduo reage ao risco e pondera suas possibilidades diante da realidade que o permeia.

Neste artigo, estamos interessados, especificamente, em analisar um dos elementos de conhecimento do Letramento Probabilístico, o cálculo de probabilidades. Nesse sentido, compreendemos que o conceito de Probabilidade para o Ensino Médio envolve: o espaço amostral, a configuração do evento, o modelo de contagem e o significado (Figura 2). Assim, para cada situação é necessário avaliar esses elementos estruturantes.

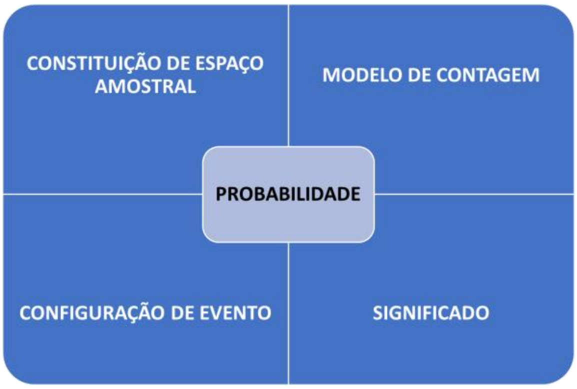


Figura 2.

Estruturação da Probabilidade (Os Autores)

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) determina as seguintes habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Médio.

- (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
- (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
- (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

A avaliação dos elementos estruturantes da probabilidade se dá a partir das recomendações presentes na BNCC, em problemas dos livros didáticos e com base em pesquisas já desenvolvidas.

Espaços amostrais e métodos de contagem

No que se refere a estrutura básica da constituição dos elementos que configuram a probabilidade como um conceito matemático, o espaço amostral se apresenta como central para a resolução e modelagem dos problemas. Para Hoel et al. (1978), um espaço de probabilidade é constituído a partir de uma álgebra de conjuntos munida de um conjunto não-vazio de elementos. Este conjunto é o espaço amostral, que pode se caracterizar por diferentes características.

Com isso, corroborando com a habilidade EM13MAT511, trazemos a configuração dos espaços amostrais por meio de sua natureza, que pode ser caracterizada pela variável do problema (discreta ou contínua) ou pela formatação do próprio espaço amostral (equiprovável ou não-equiprovável).

O espaço amostral discreto se caracteriza como aquele em que a variável envolvida tem natureza discreta, ou seja, provém a partir de uma contagem de elementos (Hoel et al., 1978). Para esse tipo de espaço, a contagem dos elementos se apresenta de duas formas: contagem é simples e contagem indireta.

Na contagem simples nenhuma técnica especial é empregada. Por exemplo, se analisamos as chances ao lançarmos um dado, de o resultado da face voltada para cima ser um número primo. Nesse caso, utilizamos uma contagem simples no espaço amostral, pois temos 6 resultados possíveis (1, 2, 3, 4, 5, 6) e apenas 3 deles são favoráveis (2, 3 e 5), obtendo a probabilidade 3/6. Ressaltamos que o dado envolvido seja honesto, ou seja, as chances de cada uma das faces ficarem para cima são as mesmas. Nesse caso, tratamos de um espaço amostral equiprovável, no qual todos os seus elementos possuem a mesma chance de ser sorteado (Ross, 2015).

No entanto, quando a contagem envolve um processo no qual a listagem não se mostra adequada, utilizamos uma técnica para obter a quantidade dos resultados sem necessariamente listarmos todos eles, resultando assim em um processo de contagem indireto. Exemplo: se de um grupo constituído por 4 homens e 6 mulheres, quisermos escolher uma comissão de 2 pessoas, qual a chance de a comissão ser formada por 2 mulheres? Para esse problema, não temos a quantidade de comissões possíveis. Para o espaço amostral efetuamos o cálculo: $(4 \times 3 + 6 \times 5 + 4 \times 6)/2 = (12 + 30 + 24) = 66/2 = 33$. Já para a chance de ser duas mulheres: $(6 \times 5)/2 = 15$. Com isso, a probabilidade é de $15/33$.

Já para as variáveis que são provenientes de medidas, tais como área, perímetro, altura, massa, dentre outras, chamadas de variáveis contínuas, a forma de contagem depende do tipo de problema (Ross, 2015). Por exemplo, se um retângulo de dimensões 4 x 5 uc, possui um segundo retângulo dentro si, com dimensões 2x3 u.c., qual a chance de ao jogar um dardo, o mesmo acerte a região do retângulo interior? Nesse caso, o cálculo seria de área, com o quadrado maior tendo 20 u.a. e o menor 6 u.a., daria uma probabilidade de 6/20.

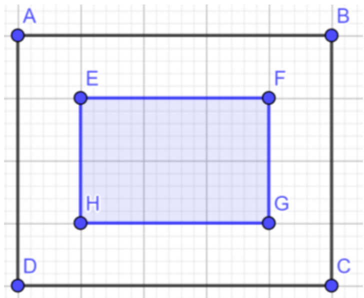


Figura 3.

Ilustração do exemplo (Os autores)

Percebe-se neste problema que a chance de acertar a região azul do retângulo é menor que a chance de atingir a branca, com isso temos a utilização de um espaço contínuo não-equiprovável, pois os elementos desse espaço amostral não têm a mesma chance de serem escolhidos. Com isso, a BNCC pressupõe que a probabilidade discutida em sala de aula tenha como eixo orientador a constituição de espaços amostrais discretos e contínuos, sendo equiprováveis ou não.

Configuração do evento

Os eventos em um problema de probabilidade envolvem as partições que um espaço amostral possui em sua constituição. A nível de Ensino Médio, podemos considerar os eventos como sendo aqueles acontecimentos em que temos interesse de analisar suas chances de ocorrência, considerando sua natureza e suas influências nos cálculos de probabilidade (Godino et al., 1996). Os eventos podem ser analisados de forma única ou em paralelo, com isso, ocasionam diferentes interpretações e procedimentos no cálculo das probabilidades (Batanero, 2005).

Tabela 1.

Classificação dos eventos (Os autores)

CLASSIFICAÇÃO DE EVENTOS	
Simples	**Em Paralelo**
Evento único	Conjuntos
	Mutuamente Exclusivos
	Condicionais
	Análise de Correlação
	Análise de Independência

Em se tratando do nível de Ensino Médio, os *eventos simples* são aqueles analisados em única etapa, sem sucessões e com objetivo de visualizar uma única partição do espaço amostral. Por exemplo, se estivermos interessados em analisar a probabilidade de retirar uma bola branca de uma urna que contém 4 bolas brancas e 6 pretas, a chance de retirar uma bola branca é de 4/10.

Quando analisamos eventos de forma paralela, estes recebem diferentes classificações de acordo com a dinâmica com que se relacionam no método de quantificação.

Os eventos *conjuntos* formam situações nas quais os mesmos ocorrem simultaneamente. Comumente os livros didáticos instruem a utilização da regra do produto, ou conectivo "e". Exemplo: Se Carla lança um dado duas vezes, qual a chance de obter os números 3 e 5, por essa ordem, nesses lançamentos? Observa-se que ao lançar um dado pela primeira vez não impede e nem influi no segundo lançamento, sendo assim 1/6 na primeira jogada e 1/6 na segunda, com a probabilidade sendo calculada como $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Quando tratamos de eventos *mutuamente exclusivos*, estes não podem ocorrer simultaneamente. Se falamos que vamos à praia de moto ou de carro, entende-se que uma opção elimina a outra. No campo da probabilidade, é comum a utilização do Diagrama de Venn para representar essa situação, de modo que este oferece uma representação visual importante para a ilustração do problema. Por exemplo: qual a chance de retirar um múltiplo de 3 ou de 5 em uma urna com bolas enumeradas de 1 a 20?

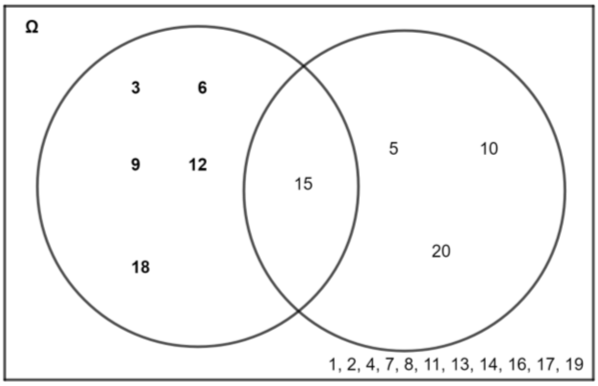


Figura 4.

Ilustração do problema (Os autores)

No diagrama está representado o esboço do espaço amostral do problema, com os múltiplos de 3, os múltiplos de 5 e o número 15, que é múltiplo de ambos. Com isso, pode-se observar a relação do esquema com a regra da probabilidade $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Assim, o problema seria respondido como $P(A \cup B) = \frac{6}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$.

Outra relação importante é a probabilidade condicional, que se configura como um evento que depende da ocorrência de outro. Essa relação é um dos pontos de aprofundamento do conhecimento probabilístico inerente ao Ensino Médio, pois além de ser um dos importantes Teoremas da probabilidade, ainda tem a função de atualizar opiniões (questão que será discutida na próxima subseção) (Ross, 2015). Quando analisamos, por exemplo, a chance de somar os valores obtidos pelas faces voltadas para cima no lançamento de dois dados e obter o número 8, sabendo que um deles teve como resultado o número 3, percebemos que claramente um evento teve influência sobre o outro. Quando obtemos o número 3 no lançamento do primeiro dado, o único número que nos favorece ao lançar o segundo dado é o 5, que resulta em 1/6.

Por fim, as análises de correlação e independência são fatores que implicam da observação de duas ou mais variáveis e como o seu comportamento se dá em termos de visualização de cenários futuros (Ross, 2015). Quando se discute que o número de picolés vendidos por um ambulante tem correlação com a sua renda, tratamos de observar o comportamento de duas variáveis e como as mesmas podem oferecer uma modelagem para a previsão de rendas futuros desse trabalhador.

Significados da probabilidade

Sabemos que a necessidade de atender às transformações e evolução da humanidade foi um dos preceitos básicos para o desenvolvimento da Matemática. No caso da probabilidade, desde as suas primeiras aparições – ainda como a *geometria do acaso* – nas trocas de cartas entre Pascal e Fermat, o seu desenvolvimento foi atrelado à evolução com que o conceito foi desenvolvido, abrangendo a resolução de diferentes problemas.

Nesse sentido, Godino et al. (1996) propõem significados para a probabilidade em uma evolução histórica e epistemológica, de modo a oferecer uma organização para compreensão do conceito. Assim, Batanero (2005) assume alguns significados que podem ser desenvolvidos na educação básica, nos quais sua construção é dada a partir dos primeiros anos de escolaridade, já em consonância com a BNCC (Brasil, 2018).

Assim, temos cinco significados: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático. A evolução histórica do conceito apresenta diferentes situações. Com as primeiras aparições em situações de jogos, o desenvolvimento do vocabulário probabilístico com expressões do tipo mais provável, certo, impossível, dentre outras, se fez de fundamental importância. Para esse significado, nomeado de *intuitivo*, as fontes de quantificação da probabilidade são inerentes aos sujeitos que a declaram e a comunicação da probabilidade se dá por meio dessas expressões.

No entanto, era necessário que essas mesmas quantificações fossem expressas numericamente. Daí surgem as primeiras ideias da compreensão da probabilidade como uma razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos do espaço amostral (significado *clássico*). Laplace, no Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades, já enunciava em seu primeiro princípio essa ideia. Convém, no entanto, perceber que a equiprobabilidade se fazia presente no primeiro princípio, quando o mesmo define a probabilidade como "*a relação entre o número de casos favoráveis e aquele de todos os resultados possíveis*" (Laplace, 2010, p.49) e exemplifica com o lançamento de uma moeda, na qual os resultados cara e coroa tem a mesma chance de ocorrer (50%), ou seja, ainda havia o entendimento de que as chances de ocorrência dos elementos do espaço amostral eram iguais.

Entretanto, na prática, havia a inquietação a respeito da ideia de equiprobabilidade em todos os casos, pois nem sempre os experimentos aleatórios tinham essa configuração. Com isso, entram os conceitos de probabilidade teórica e experimental, confirmando assim o significado *frequentista*, que teve grande contribuição de Jacob Bernoulli, ao apresentar a Lei dos Grandes Números, mostrando que quanto mais se repete um experimento, na prática, mais próxima a probabilidade experimental fica da probabilidade teórica. Um dos pressupostos para esse teorema é a repetição em número suficiente de vezes com igualdade de condições dos experimentos. Se simulamos, por exemplo, o lançamento de uma moeda e observamos a frequência com que a face "coroa" é obtida, facilmente percebemos como a mesma se aproxima de 50% (Figura 5).

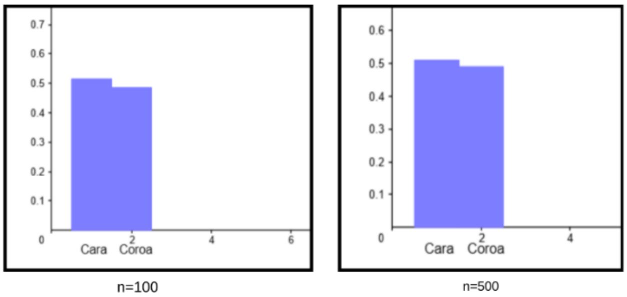


Figura 5.

Repetição do experimento lançamento de moeda 100, 500 vezes[3]*(Os autores)*

À medida que aumentamos o número de simulações, o gráfico se aproxima do valor 0.5 (50%), o que confirma a convergência do resultado. Ainda assim, alguns questionamentos são válidos quanto ao significado frequentista, tais como qual a quantidade necessária de repetições para que uma declaração de probabilidade possa ser emitida, ou o que é possível fazer em experimentos onde a repetição em condições semelhantes não seja possível.

Para responder a estes problemas, o significado *subjetivo* é ancorado principalmente nos trabalhos de Thomas Bayes, que propôs um modelo onde os eventos sucessivos pudessem atualizar as probabilidades postas *a priori*. Para isso, a probabilidade *a priori* é mensurada numericamente a partir da experiência e intuição de um especialista, e os fatos que vão sendo "aprendidos" são incorporados, assim, atualizando a probabilidade *a priori* com base em outras situações.

Assim, diante do exposto, diferentes autores (Batanero, 2005; Ross, 2015) propõem que o estudo da probabilidade também se dê por meio da vivência dos diferentes significados que dão corpo ao objeto probabilidade. Corroboramos com os autores ao defendermos que a visão sobre o conceito deve ser ampla, respondendo ao maior número de problemas possíveis.

Convém ressaltar que os significados não são estanques, ou seja, os mesmos podem interagir dentro de uma mesma situação. Por exemplo, imaginemos que um médico deseja avaliar a possibilidade de sucesso de uma cirurgia, e para isso, *a priori*, ele investiga que dos últimos 10 procedimentos, 9 ocorrem de forma satisfatória. Daí ele infere que existe uma taxa de sucesso por volta de 90% (percebe-se a utilização da probabilidade frequentista em um primeiro plano). Entretanto, este novo paciente possui uma característica diferente, portanto, o médico deve analisar com base nessa nova informação as chances de sucesso desse caso, e para isso, o mesmo utilizará a probabilidade subjetiva, com a geração *a posteriori* de um novo grau de crença no sucesso do procedimento.

[3] Gráfico elaborado no software Geogebra, por meio de applet disponível no link: <https://www.geogebra.org/m/v5fh6sqq>

Assim, neste artigo estamos interessados em analisar a perspectiva do ensino da probabilidade proposta nos livros didáticos aprovados no PNLD 2021 do Ensino Médio brasileiro.

Método

Este artigo utiliza como metodologia a pesquisa documental, uma vez que analisamos os documentos (livros didáticos) da forma em que se apresentam (Sá-Silva et al., 2009).

Foram analisadas as 10 (dez) obras aprovadas pelo Programa de Avaliação do Livro Didático - PNLD 2021, mais especificamente as obras do Objeto 2, que são os livros de conhecimento.

Para a condução da análise, especificamos critérios baseados nas definições já apresentadas no referencial teórico, tendo o critério *significado* atrelado aos subcritérios: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático; *espaço amostral e método de contagem* com equiprovável ou não, discreto ou contínuo e contagem direta ou indireta, e por fim, *evento*, ligado aos subcritérios simples ou composto, que envolve os eventos condicionais, correlação, mutuamente exclusivos, independentes e conjuntos (Figura 6). Os dados foram processados no Software SPSS.

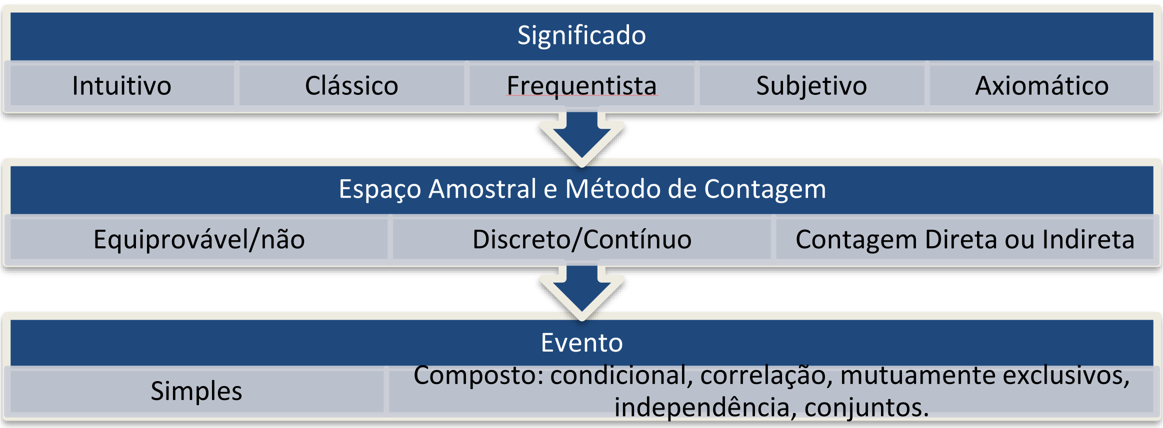


Figura 6

Esquematização do método de análise dos dados (Os autores)

Assim, tomamos como base para a análise a frequência de ocorrência dos critérios e subcritérios para conduzir o fio de discussão da análise qualitativa, dialogando com pesquisas já realizadas e com os principais pontos defendidos na principal orientação curricular para o Ensino Médio, que é a BNCC.

Resultados e discussões

Para a análise dos livros didáticos, foi feito um mapeamento página por página buscando problemas de probabilidade e categorizando-os conforme os critérios e os subcritérios estabelecidos.

1) Significados da Probabilidade

Inicialmente, analisamos o quantitativo de problemas por significado nas diferentes coleções analisadas (Tabela 2).

Tabela 2.

Percentual de significados de probabilidade por coleção (Dados da pesquisa)

COLEÇÃO	SIGNIFICADO (%)					N.S.A (Não se adequa)
	Intuitivo	Clássico	Frequentista	Subjetivo	Axiomático	
Coleção A	9,3	61,3	20,0	4	4	1,4
Coleção B	-	53,7	29,3	12,2	-	4,8
Coleção C	18,9	54,1	24,3	-	-	2,7
Coleção D	1,2	56,6	31,3	-	2,4	8,5
Coleção E	1,5	73,9	9	4,5	8,2	2,9
Coleção F	1,5	91,0	-	-	-	7,5
Coleção G	2,3	95,3	2,3	-	-	0,1
Coleção H	-	97,6	-	-	-	2,4
Coleção I	3,7	89,0	1,2	-	-	6,1
Coleção J	2,9	82,9	2,9	-	-	11,3

Conforme a Tabela 2, percebe-se uma grande concentração de atividades de probabilidade com o significado clássico em todas as coleções. Essa concentração pode acarretar uma visão limitada do conceito de probabilidade, levando o estudante ao entendimento da mesma apenas como uma razão entre o número de casos favoráveis e o número de elementos do espaço amostral. Pesquisas como as de Silveira (2021) e Silva (2023) já apontaram para a alta densidade de problemas dos livros didáticos em torno da probabilidade clássica.

Apesar da BNCC estimular o aprofundamento dos estudos no Ensino Médio da probabilidade com ênfase no significado frequentista, verifica-se um percentual pequeno desse significado nos livros, chegando a ter duas coleções (F e H) que não propõem nenhuma atividade.

Em relação a probabilidade intuitiva, a Coleção C se destaca, apresentando o maior percentual de atividades com esse significado. Verifica-se também a ausência do significado subjetivo de probabilidade na maioria das coleções (sete em dez), mesmo com a BNCC incentivando a discussão de riscos probabilísticos e tomadas de decisão com base em dados. A vista disso, Batanero (2005) e Gal (2004) já destacavam a necessidade do ensino de probabilidade, tanto no nível básico quanto superior, envolver a articulação dos diferentes significados, de forma a dar amplitude ao conhecimento probabilístico dos estudantes.

Outro ponto de destaque é a abordagem da probabilidade axiomática em três coleções analisadas, mesmo esta não sendo objeto explícito na BNCC. Para Batanero (2005), este significado tem papel importante no Ensino Superior, devido à sua formalização e estruturação matemática que dão consistência ao objeto matemático probabilidade. Convém destacar ainda que a abordagem dos livros não passa por demonstrações matemáticas ou provas de teoremas, mas sim no sentido de contextualizar as regras básicas dos Axiomas de Kolmogorov.

Ainda há problemas classificados como N.S.A, que significa não se adequa, pois os mesmos tratam de situações nas quais o estudante deve elaborar a situação-problema, o que converge para a habilidade EM13MAT312 da BNCC (Brasil, 2018, p. 529), a qual recomenda que o estudante deve "*Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos*". Destacamos aqui a importância deste tipo de atividade, pois além de desenvolver a criatividade do estudante, estes problemas mobilizam conceitos importantes e se transformam em ferramentas para outro olhar do professor perante ao aluno/saber.

Com isso, entendemos que a distribuição dos significados de probabilidade é semelhante nas diferentes coleções, tendo um caminho a percorrer diante das evidências apontadas por outras pesquisas e ao próprio documento normativo da importância de um ensino que considere todos os significados.

2) Análise da caracterização do espaço amostral e métodos de contagem

Para proceder a análise dos espaços amostrais, cada questão foi analisada de forma independente quanto as duas categorias: tipo de espaço amostral e método de contagem empregado para a resolução do problema (Tabela 3).

Tabela 3.

Percentual de problemas por tipo de espaço e método de contagem (Dados da pesquisa)

CONTAGEM	**ESPAÇO AMOSTRAL (%)**			**TOTAIS**
	Discreta	*Contínua*	*Não se aplica*	
Qualitativa	2,5	-	1,1	3,6
Quantitativa direta	71,0	0,32	1,7	73,0
Quantitativa indireta	15,4	1,8	0,1	17,3
Não se aplica	0,8	-	5,3	6,1
TOTAIS	89,7	2,1	8,2	100

Os dados apontam para a predominância (89,7%) de espaços amostrais com medidas discretas (Figuras 7), corroborando com tendências presentes na BNCC e em pesquisas anteriores (Silva, 2023); no entanto, esse tipo de medida apresenta limitação quanto ao domínio que um indivíduo tem sobre a quantidade de elementos de um espaço amostral. Quando buscamos alguns exemplos da esfera cotidiana, tais como previsão do tempo, bolsa de valores, riscos de investimento, dentre outros, este já não serve de parâmetro. Assim, mesmo sendo uma indicação já presente em diferentes pesquisas (Batanero, 2005; Gal, 2004, 2019), as coleções ainda deixam a desejar no sentido de expandir os conceitos de espaços contínuos, nos quais a maioria das tomadas de decisão estão atreladas.

26 Foram formados todos os anagramas da palavra SAPO. Sorteando um desses anagramas, calcule a probabilidade de ele ser diferente de SOPA.

1. Um dos estudantes de sua turma foi sorteado aleatoriamente e não foi você. Logo em seguida, haverá um segundo sorteio, que escolherá outro nome. Qual é a probabilidade de você ter o nome sorteado no segundo sorteio?

Figuras 7.

Problemas de espaço discreto (Coleção A, p.126; Coleção D, p.131)

As Figuras 7 representa problemas encontrados nas coleções onde o cálculo de probabilidades envolve a contagem de elementos dentro do espaço amostral (discreto), seja de forma explícita (caso dos anagramas) ou implícita/algébrica (caso do sorteio na turma). No entanto, quando adentramos nos problemas de espaços contínuos, além de percentualmente os mesmos ocuparem pouco espaço (2,1% do total), ainda apresentam limitações contextuais, tendo suas aplicações voltadas para a probabilidade geométrica (Figura 9).

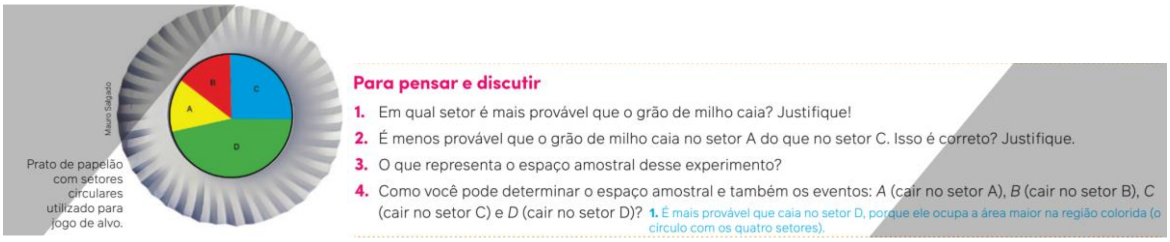


Figura 8.

Problema com espaços contínuos (Coleção C, p.144)

Nota-se assim que o problema aborda uma técnica (cálculo de área), para que em seguida, seja expressa a probabilidade, ou seja, feita a comparação entre as mesmas (caso do item 2). De toda forma, o fio de raciocínio empregado para a resolução da questão gira em torno da probabilidade entendida como uma proporção entre as partições do espaço amostral discutido.

Quando investigamos os significados de probabilidade envolvidos para esses espaços amostrais, o clássico e frequentista tem a predominância dos casos discretos (74,4% - 450 casos). Este dado corrobora com os princípios de Laplace e Bernoulli, uma vez que a expressão de probabilidade se apresenta como uma razão, com a origem dos dados podendo ser a contagem simples dos elementos de todo o espaço amostral ou da amostra relativa à repetição dos experimentos.

Assim, no geral, os espaços amostrais trazidos pelos problemas dos livros didáticos se mostram alinhados com as recomendações da BNCC, no sentido de a maioria optar pelos métodos discretos de contagem. No entanto, ainda se apresentam insuficientes quanto aos espaços contínuos, uma vez que não trazem diversificação contextual dos problemas, tampouco discutem os elementos teóricos correspondentes.

3) Composição dos eventos

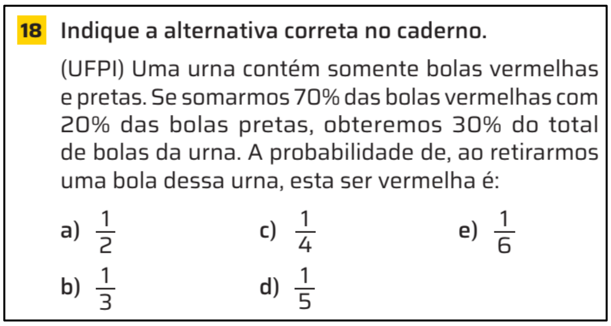
Para determinar maior objetividade na análise da composição dos eventos junto as coleções do estudo, fizemos um recorte dos problemas, excluindo aqueles em que os significados não estão pré-estabelecidos e que a configuração do evento fique ao critério do estudante. Convém ressaltar que essa totalidade (48 problemas) entre as 10 coleções configura os problemas em que os estudantes devem elaborar a própria situação-problema. Assim, 710 questões foram analisadas quanto as situações e aos eventos (Tabela 4).

Tabela 4.

Percentual de problemas por situação/evento (Dados da pesquisa)

EVENTO	SIGNIFICADO DE PROBABILIDADE (%)					TOTAIS
	Int.	**Clás.**	**Freq.**	**Subj.**	**Axiom.**	
Simples	2,3	39,3	7	-	2,1	50,7
Mutuamente Exclusivos	0,3	7,2	0,4	-	0-	7,9
Conjuntos	0	8	2	0,3	0,1	10,4
Condicionais	0,3	10,7	0,7	1,7	-	13,4
Análise de Independência	-	16,8	0,8	-	-	17,6
TOTAIS	2,9	82	10,9	2	2,2	100

Ao tratar de eventos simples, as coleções concentram as propostas no significado clássico, uma vez que as análises contemplam situações nas quais não há um paralelismo para analisar as chances de ocorrência dos eventos. Assim, uma característica marcante para esse tipo de evento é a análise de jogos de azar, tais como urnas e lançamentos de moedas e dados honestos (Figuras 9). Pesquisas como as de Silveira (2021) e Silva (2023) já corroboram com os resultados, ao trazer essa mesma situação entre os livros didáticos, no entanto, soma-se a isso a presença predominante dos eventos simples para os significados intuitivo e axiomático.

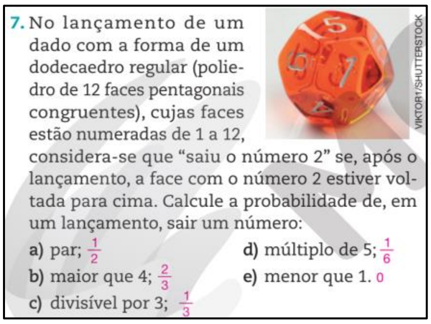


18 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFPI) Uma urna contém somente bolas vermelhas e pretas. Se somarmos 70% das bolas vermelhas com 20% das bolas pretas, obteremos 30% do total de bolas da urna. A probabilidade de, ao retirarmos uma bola dessa urna, esta ser vermelha é:

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{5}$



7. No lançamento de um dado com a forma de um dodecaedro regular (poliedro de 12 faces pentagonais congruentes), cujas faces estão numeradas de 1 a 12, considera-se que "saiu o número 2" se, após o lançamento, a face com o número 2 estiver voltada para cima. Calcule a probabilidade de, em um lançamento, sair um número:

a) par; $\frac{1}{2}$ **d)** múltiplo de 5; $\frac{1}{6}$

b) maior que 4; $\frac{2}{3}$ **e)** menor que 1. 0

c) divisível por 3; $\frac{1}{3}$

Figuras 9.

Questões abordando eventos simples (Coleção A, p.102; Coleção B, p.97)

Nesse sentido, ainda pontuamos a limitação atrelada a esse tipo de trabalho com a probabilidade axiomática, ao não justificar, mesmo que por indução baseada nos problemas, alguns importantes teoremas da teoria das probabilidades. Em contraste, para as questões de probabilidade intuitiva, esse tipo de abordagem é suficiente para a mensuração de chances por meio da experiência e intuição.

Quando se trata de eventos conjuntos e mutuamente exclusivos, as coleções mantêm homogeneidade no sentido quantitativo de problemas e sua concentração em torno do significado clássico (Figura 10). Nesse sentido, existe coerência teórica e alinhamento com as bases do currículo do Ensino Médio (BNCC), indo ao encontro dos pressupostos teóricos que regem a probabilidade. Ainda assim, mesmo não tendo destaque na BNCC, a articulação da composição desses eventos com avaliações do significado subjetivo (probabilidades *a prior*i e *a posteriori*) seriam possíveis, desde que existisse demanda pela distinção entre a quantificação numérica e qualitativa.

R8. Em uma pesquisa realizada com 50 pessoas foi perguntado:

- Você ouve rádio?
- Você ouve *podcast*?

Os resultados indicaram que 25 pessoas ouvem rádio, 20 pessoas ouvem *podcast* e 20 pessoas não costumam ouvir rádio nem *podcast*. Calcular a probabilidade de, ao selecionar uma dessas pessoas, ela ouvir rádio e *podcast*.

Figura 10.

Problema de probabilidade conjunta/mutuamente exclusiva

Para além das observações anteriores, ressaltamos a pouca concentração de recursos visuais para esses problemas. Enquanto teóricos como Batanero (2005) e Ross (2015) apresentam modelos de problemas utilizando diagramas, os livros analisados têm apenas 3 propostas com a mesma configuração. Entendemos que uma parte facilitadora do processo de assimilação é deixada de lado quando se ignora esse tipo de representação.

Já em se tratando de probabilidade condicional (Figuras 11), as coleções abordam problemas nos quais a probabilidade inicial P(A) é calculada a partir de um algoritmo probabilístico ou a mesma é fornecida sem estabelecer os critérios para tal. No que tange as possibilidades para esse tipo de problema, o significado subjetivo de probabilidade se vê posto de lado, quando o evento analisado *a priori* não depende de métodos de quantificação diversificados, ou seja, quando se leva em consideração a opinião de um especialista (Batanero, 2005).

20. Observe no quadro abaixo o resultado de uma pesquisa com homens e mulheres de uma região, entre 18 e 25 anos de idade, a respeito do estilo musical favorito deles.

	Sertanejo (S)	Rock (R)	Eletrônica (E)
Homens (H)	68	40	26
Mulheres (M)	50	12	11

Pretende-se convidar por sorteio um dos participantes da pesquisa para uma entrevista sobre preferências musicais em um programa de auditório. Calcule a probabilidade de escolha desse participante em cada situação abaixo.

a) $P(H|E)$

b) $P(M|S)$ $\frac{25}{59}$ ou aproximadamente 42,37%

c) $P(H|R)$ $\frac{10}{13}$ ou aproximadamente 76,92%

58. (Enem) Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo que ele não fala inglês, qual é a probabilidade de que esse aluno fale espanhol? a

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{5}{6}$

e) $\frac{5}{14}$

Figuras 11.

Problemas de probabilidade condicional (Coleção F, p.111, Coleção B, p.123)

Nesse sentido, a maioria das questões tratam as quantificações dos eventos *a priori* a partir de dados em pesquisas estatísticas fictícias, com produções das tabelas de dupla entrada para dimensionar e recortar os espaços amostrais (Figura 11), e de seleções de partição do espaço amostral utilizando a teoria dos conjuntos (Figura 11). No entanto, Fernandes e Braga (2023) já elencavam em sua pesquisa que os estudantes possuem dificuldades na interpretação da condicionalidade e seus impactos perante o cálculo de probabilidades e, além disso, também na influência da independência observada ou não nesses casos. Ainda assim, nenhum movimento desse tipo é perceptível nas questões propostas nos livros.

Outra situação a ser observada a respeito dos problemas de probabilidade condicional está ligada à sua aplicabilidade em diferentes significados da probabilidade (Figura 12). Ao concentrar 80% dos problemas em torno da probabilidade clássica e apenas 13% na subjetiva, a possibilidade de justificar a utilização da probabilidade subjetiva é suprimida, pois é a partir dela (em um caso particular do Teorema de Bayes) que esse significado tomou forma e se tornou, segundo Bussab e Morettin (2017), um instrumento capaz de atualizar a opinião a respeito de um evento.

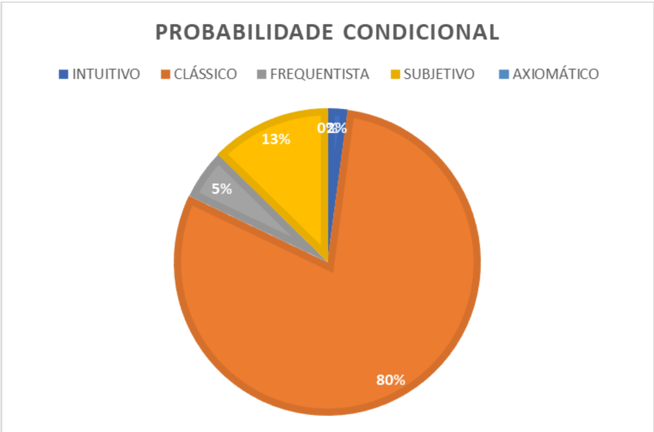


Figura 12.

Distribuição dos problemas de probabilidade condicional (Dados da pesquisa)

Outro ponto a ser observado reside na falta de problemas desse tipo no tocante ao significado axiomático, deixando de justificar as fórmulas utilizadas nesse tipo de cálculo, como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, que é utilizada em todas as coleções analisadas. Ainda, considerando as orientações da BNCC e de algumas pesquisas (Batanero, 2005; Gal, 2004, 2019; Silva, 2023), este significado tem importância ímpar no contexto de tomadas de decisão e riscos probabilísticos, uma vez que o mesmo analisa um único evento por meio de todas as atualizações conseguintes.

Já para os problemas de análise de independência, percebe-se a variação com que os livros propõem sua utilização, desde as percepções intuitivas até aquelas que são justificadas por meio do cálculo probabilístico $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Dos 125 problemas que abordam esta temática, 119 deles (95,2%) estão concentrados no significado clássico, novamente mostrando a tendência a respeito de espaços amostrais simétricos e de situações nas quais a probabilidade é interpretada como uma razão na probabilidade binomial.

Conclusão

Neste artigo o objetivo foi analisar a perspectiva do ensino da probabilidade nos livros didáticos de conhecimento de probabilidade aprovados pelo PNLD 2021 do Ensino Médio brasileiro. Em cada um dos 10 volumes foram analisadas todas as atividades, página por página.

Quanto aos significados de probabilidade, percebemos padrões já apontados anteriormente por outras pesquisas, embora já tenhamos percebido evoluções conforme as determinações da BNCC, como por exemplo o desenvolvimento mais aprofundado da probabilidade frequentista e a utilização de problemas tratando de espaços contínuos. Ainda assim, o conceito de probabilidade clássica é majoritário, com extensa utilização de experimentos cuja configuração de espaço amostral se mostra comprometida ao abusarem da simetria em sua estruturação. Outra observação reside no fato da probabilidade axiomática não estar presente na BNCC, mas sim nas coleções, as quais adotam abordagens contextualizadas para leis clássicas da teoria de probabilidade.

Nesse contexto, entendemos que é um movimento acertado por parte dos livros didáticos propor essas atividades na forma de exemplos, uma vez que as demonstrações formais seriam prematuras para este nível de escolaridade. Cabe ressaltar que teóricos da área já mencionam esta possibilidade no Ensino Médio, defendendo que faz parte da abstração necessária e corrobora com preceitos da própria BNCC, quando a mesma afirma que na etapa do Ensino Médio os estudantes devem aprofundar seus conhecimentos em probabilidade.

Já quanto à forma dos espaços amostrais, os livros se mantêm fiéis a maioria das orientações presentes na BNCC, como o desenvolvimento amplo dos espaços discretos. Ainda assim, para os casos contínuos, existe uma limitação evidente ao reduzir esses problemas às visões geométricas da probabilidade. No sentido quantitativo, as coleções tem abordagens diversificadas dentro das possibilidades, ao tratarem de contagens diretas e indiretas quando a quantificação é numérica. No âmbito da mensuração da probabilidade quantitativa, não há problemas que abordem suficientemente as possibilidades para aplicações em significados de probabilidade que dependam disso, tais como a subjetiva e intuitiva.

Dessa forma, existe, ainda, um movimento contrário ao que recomendam diferentes pesquisas da área a respeito dessa visão conceitual de probabilidade, quando o espaço para as tomadas de decisão, emissão de opinião e gerenciamento de riscos se vêem afetados e os estudantes deixam de contar com esse tipo de ferramenta para o seu cotidiano.

Outrossim, quando analisamos a forma com que os eventos são desenvolvidos ao longo dos problemas, identificamos que existe uma variabilidade de abordagens, indo ao encontro de preceitos básicos do cálculo de probabilidades. Contudo, apesar da variabilidade, os livros apresentam fragilidades nas inserções contextuais desses eventos, deixando, por vezes, de conceituar importantes noções em diferentes significados da probabilidade, que é algo cobrado pela BNCC ao longo de toda a educação básica.

Com isso, acreditamos que sendo o livro didático um dos maiores instrumentos de apoio à ação docente em sala de aula, as coleções atuais do PNLD 2021, apesar de atenderem habilidades demandadas pela BNCC, ainda apresentam lacunas que podem criar obstáculos de ordem epistemológica na construção e consolidação desses conhecimentos pelos estudantes. Acreditamos que a autonomia e senso crítico dos professores deve prevalecer perante a utilização desses livros, para que haja uma condução e complementação de conteúdo sempre que necessária, visando o desenvolvimento integral dos estudantes.

Referências

Araújo, A. F. Q., & Guimarães, G. L. (2022). Os livros de Projetos Integradores e de Vida do novo Ensino Médio brasileiro: uma análise sobre a abordagem do conceito de amostragem e de curva normal. *Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *13*(1), 26-55. https://doi.org/10.51359/2177-9309.2022.254580.

Barbosa, J. C.& Oliveira, A. M. P. Materiais curriculares e professores que ensinam Matemática. Estudos Avançados, *32* (94), 137-152. https://www.revistas.usp.br/eav/article/view/152684/149158

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 247-264.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. MEC.

Brasil. (2020). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos: PNLD 2021: Objeto 2: Matemática e suas tecnologias: Ensino Médio*. MEC.

Brown, M. W. (2009). The teacher-tool relationship: theorizing the design and use of curriculum materials. In REMILLARD, Janine T.; HERBEL-EISENMANN, Beth A.; LLOYD, Gwendolyn. M. *Mathematics Teachers at Work: connecting curriculum materials and classroom instruction*. Routledge.

Bussab, W. O. & Morettin, P. A. (2017). Estatística Básica. Editora Saraiva.

Fernandes, J. A., & Braga, B. M. (2023). Conhecimento de Probabilidade de Alunos do Ensino Médio após o Ensino. Revemop, 5, e202311. https://doi.org/10.33532/revemop.e202311

Gal, I. (2004). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1996). *Azar y probabilidad*. Editorial Síntesis.

Hoel, P. G., Port, S. C., & Stone, C. J. (1978). *Introdução à teoria da probabilidade*. Livraria Interciência.

Laplace, P. S. (2010). *Ensaio Filosófico sobre as probabilidades*. 1. ed. Editora contraponto.

Launay, M. (2016). *A fascinante História da Matemática*. 1. ed. Bertrand Brasil.

Ross, S. M. (2015). *Probabilidade: um Curso Moderno com Aplicações*. 8. ed. Bookman.

Santos, E. M. (2013). *As representações sociais do livro didático por professores de matemática*. [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal do Pernambuco].

Sá-Silva, J. R., Almeida, C. D., Guindani, J. F. (2009). Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. *Revista Brasileira de História & Ciências Sociais, 1*(1), 1-15.

Silva, A. R. O. (2023). *Probabilidade subjetiva no ensino médio: constituição de indicadores epistêmicos e o conhecimento dos estudantes*. [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco].

Silveira, B. L. (2021). *Interpretações de probabilidade contempladas nas coleções de matemática do PNLD 2021 para o novo ensino médio*. [Dissertação de Mestrado em Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Tecnológica Federal do Paraná].

Vieira, G. M. (2013). *Professores dos anos iniciais do Ensino fundamental e livros didáticos de matemática*. [Tese de Doutorado em Educação em Universidade Federal de Minas Gerais].