ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i4p287-307

Evolução da noção de continuidade e reflexões sobre a relação entre discreto e contínuo

The evolution of the notion of continuity e reflections about the relation betwen the discret and the continuum

La evolución de la noción de continuidad y reflexiones sobre la relación entre lo discreto y lo continuo

L'évolution de la notion de continuité et réflexions sur la relation entre le discret et le continu

Humberto de Assis Clímaco[1]
Universidade Federal de Goiás (UFG-GO)
Doutorado em Educação Matemática
https://orcid.org/0009-0009-0002-8330

Ironei Angelo dos Santos Junior[2]
Universidade Federal de Goiás (UFG-GO)
Graduado em Licenciatura em Matemática
https://orcid.org/0009-0000-3794-1742

Jacqueline Borges de Paula[3]
Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT-MT)
Doutorado em Educação em Ciência e Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0003-3927-9574

Resumo

Embora o início do trato matemático de objetos discretos e de objetos contínuos preceda a elaboração das noções teóricas de continuidade e discretude – propriedade de ser discreto –, é correto afirmar que a primeira vez na história em que apareceu a contradição existente entre os dois conceitos é datada da Grécia Antiga, e os paradoxos de Zenão são o exemplo mais antigo e claro dessa contradição. Apesar das mudanças ocorridas com a Revolução Científica do século XVII e do surgimento da noção de função, a continuidade permaneceu relacionada com o movimento de um objeto de um local a outro, embora, com a obra de Descartes, tenha começado um processo de unificação entre os aspectos discreto e contínuo da matemática. No século XIX, seria dada uma nova feição à noção de continuidade, ao se iniciar uma abordagem da noção de continuidade e da matemática discreta com base nos estudos de séries e do movimento que tornaram possíveis as modernas definições de limite e de continuidade, que – por sua vez – permitiram o estabelecimento de uma relação intrínseca entre o discreto e o contínuo. Após a

[1] humberto_climaco@ufg.br
[2] ironeijunior@discente.ufg.br
[3] jbcpaula@yahoo.com.br

exposição histórica, procura-se mostrar as implicações epistemológicas e filosóficas desse processo, que são de extrema importância para o processo educacional, na medida em que o discreto e o contínuo se relacionam com a linguagem e a intuição. No presente artigo, utilizou-se como metodologia a análise histórica bibliográfica com base na noção de complementaridade tal qual elaborada por Michael Otte.

Palavras-chave*:* Continuidade, Discretude, Definição, Matemática.

Abstract

Although the beginning of the mathematical treatment of discrete and continuum objects precedes the elaboration of the theoretical notions of continuity and discreteness – the property of being discrete – it is correct to say that the first time in history that the contradiction between the two concepts appeared dates back to ancient Greece, and Zeno's paradoxes are the oldest and clearest example of this contradiction. Despite the changes that occurred with the scientific revolution of the 17th century and the emergence of the notion of function, continuity remained related to the movement of an object from one place to another, although with the work of Descartes began a process of unification between the discrete and continuum aspects of mathematics. In the 19th century, the notion of continuity took on a new form, as the notion of continuity and discrete mathematics began to be approached on the basis of studies of series and motion, which made possible the modern definitions of limit and continuity, which in turn made it possible to establish an intrinsic relationship between the discrete and the continuum. After the historical exposition, an attempt is made to show the epistemological and philosophical implications of this process, which are extremely important for the educational process, insofar as the discrete and the continuum are related to language and intuition. The methodology used in this article is a historical bibliographical analysis based on the notion of complementarity as elaborated by Michael Otte.

Keywords*:* Continuity, discretity, definition, mathematics.

Resumen

Si bien el inicio del tratamiento matemático de los objetos discretos y continuos precede a la elaboración de las nociones teóricas de continuidad y discreción –propiedad de ser discreto–, es correcto afirmar que la primera vez en la historia que la contradicción entre ambos conceptos apareció se remonta a la Antigua Grecia, y las paradojas de Zenón son el ejemplo más antiguo y claro de esta contradicción. A pesar de los cambios ocurridos con la Revolución Científica del siglo XVII y el surgimiento de la noción de función, la continuidad siguió relacionada con el movimiento de un objeto de un lugar a otro, aunque, con la obra de Descartes, se inició un proceso de unificación entre los aspectos discretos y continuos de las matemáticas. En el siglo XIX se daría una nueva faceta a la noción de continuidad, al iniciarse un acercamiento a la noción de continuidad y a la matemática discreta a partir de estudios de series y movimientos que posibilitaron definiciones modernas de límite y continuidad, que -a su vez- – permitió establecer una relación intrínseca entre lo discreto y lo continuo. Luego de la exposición histórica, buscamos mostrar las implicaciones epistemológicas y filosóficas de este proceso, las cuales son de suma importancia para el proceso educativo, ya que lo discreto y lo continuo se relacionan con el lenguaje y la intuición. En este artículo se utilizó el análisis bibliográfico histórico como metodología basada en la noción de complementariedad elaborada por Michael Otte.

Palabras clave: Continuidad, discreción, definición, matemáticas.

Résumé

Bien que le début du traitement mathématique des objets discrets et continus précède l'élaboration des notions théoriques de continuité et de discrétion - propriété d'être discret – il est correct d'affirmer que la première fois dans l'histoire où est apparue la contradiction existante entre les deux concepts remonte à la Grèce antique, avec les paradoxes de Zénon comme exemple le plus ancien et le plus clair. Malgré les changements survenus avec la Révolution scientifique du XVIIe siècle et l'émergence de la notion de fonction, la continuité est restée liée au mouvement d'un objet d'un endroit à un autre, bien que, avec l'œuvre de Descartes, un processus d'unification entre les aspects discrets et continus des mathématiques ait commencé, ce qui, au XIXe siècle, donnerait une nouvelle forme à la notion de continuité, lorsque commence une approche de la notion de continuité et des mathématiques discrètes basée sur les études de séries et de mouvement qui permettront les définitions modernes de limite et de continuité, permettant l'établissement d'une relation intrinsèque entre le discret et le continu. Après l'exposition historique, nous cherchons à montrer les implications épistémologiques et philosophiques de ce processus, qui sont d'une importance extrême pour le processus éducatif, dans la mesure où le discret et le continu sont liés au langage et à l'intuition. Dans cet article, nous utilisons comme méthodologie l'analyse historique bibliographique basée sur la notion de complémentarité telle que développée par Michael Otte.

Mots-clés : Continuité, discrétion, définition, mathématiques.

Evolução da noção de continuidade e reflexões sobre a relação entre discreto e contínuo

O objetivo do presente artigo é apresentar a história da evolução da noção de continuidade, refletir a respeito das considerações filosóficas e epistemológicas que tal história envolve e destacar a relação entre continuidade e discretude – a propriedade de ser discreto – tendo em vista os aspectos formal e intuitivo da matemática. A metodologia utilizada foi a análise histórica bibliográfica com base na noção de complementaridade elaborada por Michael Otte (Clímaco et al., no prelo; Otte, 1994, 2003).

Iniciamos abordando o surgimento da noção de continuidade na Grécia Antiga e o Paradoxo de Zenão, identificado como "de Aquiles e a tartaruga", para refletir sobre a incapacidade da matemática grega de conciliar os aspectos qualitativos (contínuos) e os quantitativos (discretos) da matemática.

Em seguida, discutimos como a relação entre o discreto e o contínuo apareceu nos séculos XVII e XVIII e mostramos de que maneira a herança grega foi transformada e como seus conceitos foram abordados sob um novo prisma – o da Revolução Cientifica – com uma valorização crescente dos números, que se concretizou com a fundação da álgebra e a criação da geometria analítica.

Posteriormente, apresentamos como se resolveu – de modo válido até os dias atuais – a questão da relação entre o discreto e o contínuo por meio, de um lado, da definição precisa e rigorosa de continuidade em termos de épsilon e delta e, de outro, do estabelecimento da relação entre a reta e os números. Para isso, mostramos o processo fundamental – que pode ser considerado a continuação de um processo iniciado com Descartes – de aritmetização da matemática. Um processo que revolucionou o conhecimento matemático ao mesmo tempo que promoveu uma inversão no modo de conceber o contínuo e o discreto.

Antes do final, explicamos ainda a importância da abordagem feita no artigo e por que são incorretas as visões de historiadores que insistem em que não há diferença substancial entre as noções de rigor próprias dos séculos XVII e XVIII e aquela surgida no século XIX, que perdura até os dias atuais.

Nas considerações finais apresentamos algumas implicações filosóficas e epistemológicas importantes para pensarmos nas consequências, para o processo educacional, dessa verdadeira revolução científica – para usar o termo utilizado por Judith Grabiner, estudiosa de Cauchy – operada na matemática. De fato, pouco se analisaram as implicações educacionais dessa revolução como fazemos neste artigo, e para tanto utilizamos a noção de complementaridade, tal como formulada por Otte (1994, 2003).

A complementaridade entre o discreto e o contínuo é fundamental também porque a modelagem de inúmeros fenômenos do mundo físico pode se dar utilizando modelos discretos ou contínuos, e isso tem implicações epistemológicas, com consequências não só científicas mas também metodológicas e didáticas.

O surgimento da noção de continuidade na Grécia Antiga

As noções de continuidade e de discretude certamente têm raízes profundas na história do desenvolvimento do conhecimento matemático e situam-se tanto em momentos como em culturas distintas. Os seres humanos, ao longo de sua história, desenvolveram sistemas de contagem para lidar com as quantificações de um ponto de vista discreto, de um lado, e observavam a existência da dimensão das grandezas contínuas como comprimento, área e volume, de outro.

Mais de 2.000 anos antes de surgir uma definição formal da continuidade de funções, costumava-se atribuir a propriedade de ser contínuo a uma grandeza ou fenômeno da natureza quando este era constituído de um todo ininterrupto, sem furos; em geral, antes do século XIX, os exemplos mais comuns de continuidade não se referiam a objetos matemáticos, mas sim a conceitos físicos, como é o caso da energia, do movimento, do tempo etc. Na matemática, pelo menos desde o século XIX, o modelo mais exemplar de objeto contínuo é a reta.

Em oposição à continuidade encontra-se o atributo de ser discreto. Originalmente, **discreto** referia-se a algo distinto de outra coisa e denotava uma clara separação entre elementos. É assim que os números inteiros surgem tomados como entidades individuais – e desconsideram-se os números fracionários ou decimais –, separadas, e não formando um contínuo. De mesmo modo, a geometria discreta contrasta com a geometria contínua ao lidar com estruturas geométricas que são compostas de pontos individuais separados.

O mais antigo registro – referente aos Paradoxos de Zenão de Eleia (490-430 a. C.) – que temos da existência de uma dificuldade de relacionar de maneira adequada o contínuo e o discreto encontra-se na obra *Física*, de Aristóteles (2009a, 1013, 4ss), filósofo que viveu entre 384 e 322 a. C. Refere-se, em particular, ao paradoxo que retrata uma corrida entre a tartaruga e o herói de guerra e campeão das Olimpíadas Aquiles – e que pode ser enunciado da seguinte forma: em uma corrida entre Aquiles e a tartaruga em que esta última sai na frente, cada vez que Aquiles alcança o local em que se encontrava a tartaruga, ela já percorreu certa distância e se encontra em outro ponto; isso ocorre sucessivamente, em uma quantidade indefinida de vezes, de modo que, por mais que Aquiles corra, ele nunca alcançará a tartaruga.

O enunciado de tal paradoxo, além de mostrar a inconsistência entre os fenômenos físicos e a matemática da época, mostrou – o que é mais relevante, do ponto de vista do assunto deste artigo – pela primeira vez a dificuldade que consiste em relacionar os aspectos qualitativos e os quantitativos da matemática, ou entre o contínuo e o discreto.

Houve, na Grécia Antiga, filósofos e matemáticos atomistas – como Demócrito (460-370 a. C.) – que conceberam um universo discreto, formado por partes indivisíveis isoladas, e usaram esses conceitos para calcular, com êxito, o volume de sólidos e a área de figuras geométricas.

Mas a desvalorização, pelos pensadores gregos, dos aspectos práticos e utilitários do conhecimento, e a valorização de ideais estéticos, teóricos e metafísicos, contribuiu para uma visão de mundo na qual a matemática que era valorizada – como disse Platão (2017, 526c) em *A República* – não era aquela dos que a usam com a finalidade de compra e venda, mas sim a que servisse à honra do espírito. Essa concepção fez com que – apesar de suas grandes contribuições para matemática – houvesse na matemática grega uma desvalorização da noção de número, o que a afastou da busca de uma definição quantitativa, discreta e estática da continuidade.

Platão e os matemáticos que frequentaram sua Academia formariam a nova geração de matemáticos, que, por sua vez, influenciaria decisivamente a matemática da Era Helenística da história grega – considerada por muitos como a época mais fértil da matemática grega e que contou com matemáticos do calibre de Euclides e Arquimedes –; rejeitariam a forma de pensar os objetos matemáticos concebida por Demócrito; e não dariam continuidade às investigações atomistas.

A noção de reta numérica ainda demoraria séculos para ser elaborada. Desse modo, prevaleceu amplamente na Grécia Antiga uma concepção geométrica e contínua – que trazia em seu bojo uma abordagem qualitativa – da matemática. Essa concepção predominante, além de ter sido expressa na valorização, da parte de Platão (2017), da geometria e nos aspectos metafísicos dos números, foi explicada de maneira sistemática por Aristóteles (2009b, pp. 31-34), que formulou uma noção de continuidade associada ao movimento e à rejeição da ideia de que o espaço seja formado por um número finito ou infinito de pontos, o que invalidaria os Paradoxos de Zenão:

> A grandeza sobre a qual a mudança toma lugar é contínua. Pois suponha que uma coisa mudou de C para D. Então se CD fosse indivisível, duas coisas que não têm partes poderiam ser consecutivas, e desde que isso seja impossível [o espaço entre elas], deve ser uma grandeza e, portanto, ser divisível indefinidamente. Então essa coisa efetua

inumeráveis mudanças antes de que ele tenha efetuado qualquer mudança dada.

Influenciados por essas concepções, os matemáticos e os pensadores gregos separaram de maneira bastante rígida, conceitualmente, as noções de discreto e de contínuo e chegaram a utilizar termos diferentes para cada conceito: aos objetos geométricos, atribuíram o termo "magnitude", que se referia àquilo que é contínuo; e atribuíram o termo "número" àquilo que é discreto[4]. Aristóteles havia separado quantidade e qualidade como categorias diferentes que não se comunicavam, e assim permaneceu o legado matemático: não havia a definição de uma relação entre grandezas contínuas e grandezas discretas, nem qualquer tipo de tentativa de fazê-la.

As transformações ocorridas na matemática grega durante a Era Helenística da Grécia Antiga – quando a cultura grega se expandiu, de um lado, e foi influenciada, de outro, pelos problemas práticos e aritméticos orientais – não mudaram essa orientação geral, e ainda demoraria séculos até que os matemáticos se introduzissem na trilha das investigações que levariam a estabelecer de maneira adequada a relação entre o discreto e o contínuo por meio de uma clara e rígida relação entre os pontos da reta e os números.

A continuidade nos séculos XVII e XVIII

Ainda na Idade Média, escolásticos como Richard Swineshead – ou Suisset, cujas datas de nascimento e de morte permanecem incertas – e Jean Buridan (1300-1358) retomaram estudos sobre a natureza da continuidade, e apareceu a ideia de uma reta orientada, semelhante ao que se passou a chamar, no século XIX, de reta real, muito embora não houvesse a noção de conjunto dos números reais. O fortalecimento do comércio e das navegações, além da retomada de uma vida comercial ativa nas cidades e a crescente introdução dos algarismos indo-arábicos na Europa, favoreceu o início de uma progressiva valorização dos números e da natureza discreta da matemática (Clímaco, 2011; Sinkevich, 2017). Também na Idade Média os hindus e os árabes contribuíram para a evolução dos estudos da continuidade não apenas por meio dos algarismos identificados com seus nomes ou com as traduções de Euclides mas também ao abordarem os números de maneira menos rigidamente separada da geometria e ao desenvolverem os estudos das equações.

Já nos séculos XVII e XVIII, os estudos das soluções de equações algébricas e o advento

[4] "A magnitude [μέγεθος (transl. megethos)], na verdade, corresponde a uma das duas divisões da *quantidade* [gr. *ποσόν,* translit. póson], nomeadamente o contínuo (como uma reta, uma superfície, ou um corpo), enquanto o número (gr. ἀριθμός. translit. arithmos) ... [está relacionado com o] *discreto*" (Heath, 1949, p. 45). Sobre isso, também é importante a afirmação de Roque (2012, p. 166) de que "não havia nada em comum entre grandezas contínuas (infinitamente divisíveis) e grandezas discretas (constituídas de unidades indivisíveis)".

da Revolução Científica – em particular com as obras de Descartes, Cavallieri, Kepler etc. – deram um impulso enorme para que os estudos quantitativos invadissem todas as áreas das ciências naturais, além da própria matemática. Assim, todo o edifício da matemática grega foi revisto sob olhares de matemáticos com preocupações práticas (científicas, mas também financeiras) e numéricas – de maneira muito diferente dos gregos –, contando com a inestimável ajuda do plano cartesiano e da notação simbólica que eles mesmos desenvolveram.

Nesse período histórico, foram retomados métodos que os gregos usaram – como a exaustão, as coordenadas – e suas realizações teóricas, mas abandonadas, para efeitos de cálculos e descobertas, as preocupações excessivas com o rigor e a busca da beleza e da harmonia que fazia com que os gregos, com frequência, deixassem de explorar outros aspectos da matemática. Em particular, os matemáticos do século XVII inovaram profundamente ao incorporarem na geometria as investigações sobre curvas que expressavam movimento; ao introduzirem os estudos dos aspectos operacionais dos números e dos cálculos (contas); e ao aceitarem a possibilidade de fazer aproximações entre retas e curvas.

No que diz respeito à relação entre os aspectos discreto e contínuo, podemos afirmar que os matemáticos do período da Revolução Científica, conhecedores que eram das obras matemáticas dos gregos e utilizando-as sob novo olhar, realizaram uma forte união entre tais conceitos. Um dos resultados mais expressivos dessa aproximação da abordagem do discreto e do contínuo foi a criação, na época, da álgebra (Boutroux, 1992), da geometria analítica (com o plano cartesiano) e da noção de função.

É inegável que os mencionados avanços do século XVII significaram uma transformação profunda da natureza da matemática e um marco significativo da busca por uma compreensão da matemática em que os seus aspectos discreto e contínuo se aproximaram. No entanto, o século XVII ainda não pôs para os matemáticos a questão de definir a continuidade ou os números em termos de sequências numéricas, e a noção de continuidade só viria a ser tratada de maneira separada da noção de movimento ou transformação de fenômenos da natureza no século XIX.

Embora Isaac Newton (1642-1727) tenha realizado importantes estudos sobre séries numéricas, sua obra *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* (2012) ainda está repleta de demonstrações geométricas, o que mostra que a união entre o contínuo e o discreto ainda era relativamente frágil na obra desse cientista. O pensador inglês concebeu quantidades contínuas por meio do movimento contínuo e rejeitou explicitamente a definição de curvas como formadas por pontos – ele as compreendeu como geradas pelo movimento de pontos. A falta de uma compreensão adequada da relação entre o discreto e o contínuo impediu-o de conseguir dar uma definição correta de alguns dos mais fundamentais conceitos do cálculo, como limites e continuidade, o que o fez utilizar, no cálculo de derivadas, métodos que, como Berkeley (2010) viria a mostrar no início do século XVIII, continham importantes contradições.

Já Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) tratou da noção de continuidade em diversas obras e em suas correspondências. Em 1702, em carta a Varignon, ele afirma que “se alguma transição contínua se supõe como terminando num certo limite, então é possível formar um raciocínio geral que abarca também o limite final” (Leibniz, 1962, p. 93). Em outra publicação, aparece a afirmação de que “a natureza ... nunca dá saltos” (Leibniz, 1961, p. 567) ou de que “nenhuma mudança se faz por meio de saltos” (p. 168).

A definição de continuidade aparece de maneira ainda diferente – relaciona ordenadas e coordenadas – na carta que Leibniz endereça a Bayle em 1687, em que apresenta a continuidade como um **princípio de ordem geral** expresso nas palavras: “conforme os dados são ordenados, também os desconhecidos são ordenados” (Leibniz, 1969, p. 37). Já na versão latina da obra *Sobre o Princípio da Continuidade*, Leibniz (1904, p. 84) faz uma formulação ainda mais clara da diferenciação entre variáveis independentes (que ele chama de dado) e dependentes (procurado): “uma ordem determinada no que é dado corresponde a uma determinada ordem no que é procurado”.

Das diferentes definições que apresentamos, deduzimos que, na obra de Leibniz, a questão da continuidade matemática acabou por ser confundida com a **lei de conservação do movimento** aplicada aos **corpos duros**: se dois corpos duros se colidem, há perda de energia ou simplesmente transferência de energia de um para o outro? Leibniz sustentou que não poderia haver perda de energia, por respeito à **lei da continuidade**, pois não seria possível “*transitionem per saltum*” (cf. Schubring, 2004, p. 182). Ao longo de todo o século XVIII não houve mudança significativa em tal concepção, conforme podemos ver, também, em Bernoulli (1727), que postulou o Teorema do Valor Intermediário como um conceito físico – e não matemático.

Mas, mesmo na obra de Leibniz, quando o autor relacionava a continuidade com a perda de energia, a lei da continuidade tornava-se equivalente ao Teorema do Valor Intermediário, o que colocou, pela primeira vez, tal teorema como algo fundamental – equivalente a um princípio – para a matemática (cf. Schubring, 2004). Assim, por óbvio, não caberia uma demonstração nem da continuidade nem do Teorema do Valor Intermediário.

Embora no século XVIII a matemática tenha começado a tomar a forma que ela tem hoje – e os tratados matemáticos, e mesmo os de mecânica, tenham passado a conter cada vez menos desenhos e cada vez mais fórmulas, funções e séries –, os critérios de convergência de séries, essenciais para a definição de limite, não eram estudados a fundo. Para explicar conceitos como a continuidade, o infinitamente grande e o infinitamente pequeno os matemáticos continuavam a valer-se de explicações que ora recorriam a analogias com a natureza, ora a argumentos metafísicos (Bolzano, 1905; Boyer, 1949).

As contradições nas tentativas de definir os conceitos básicos do cálculo continuavam, no século XVIII, sem solução, e somente D'Alembert (1723-1790) tentou definir tais conceitos em termos de limite, mas ainda com certas dubiedades.

A consequência prática disso foi que as séries infinitas, que apareciam com cada vez mais frequência na resolução de equações diferenciais, chegavam a resultados totalmente absurdos, mesmo nas mãos de matemáticos do calibre de Euler (1959), que viveu entre 1707 e 1783. Por outro lado, em obra publicada em 1748, esse estudioso tentou definir a continuidade e a descontinuidade de curvas em função de elas serem ou não descritas por uma única lei de formação (Euler, 1983), o que, globalmente, mostra o quão distante ele se encontrava dos assuntos centrais para o cálculo diferencial e integral do século XIX, a saber, a definição de continuidade e de convergência de séries.

A continuidade no século XIX: aritmetização

Chama-se aritmetização o processo por meio do qual a matemática passou a basear seus conceitos mais importantes em noções aritméticas, mais exatamente, no conceito de número real. Esse processo revolucionou a matemática, na medida em que inverteu a relação contínuo-discreta. Afinal, se até o século XVIII o número era visto ora como a expressão de grandezas físicas contínuas, ora como princípio metafísico cuja validade era confirmada e legitimada pelo funcionamento da natureza, a partir do advento da aritmetização o número passou a fundamentar o próprio conceito de continuidade, por meio das séries numéricas e pela definição da noção de continuidade em termos aritméticos, portanto, numéricos e estáticos.

O movimento de aritmetização dos fundamentos do cálculo é inseparável de uma nova concepção de rigor surgida no século XIX: se os séculos XVII e XVIII haviam se caracterizado pela busca de novas descobertas, em sacrifício do excessivo rigor dos gregos, o século XIX lida com uma espécie de volta ao rigor, mas sem os escrúpulos gregos de utilizar números e aproximações entre curvas e retas e com o novo simbolismo introduzido nos dois séculos anteriores.

Bolzano e Cauchy foram os matemáticos da primeira metade do século XIX que mais avançaram nesse sentido. Bolzano formulou de uma maneira mais fundamentada a necessidade de reescrever os fundamentos do cálculo sobre bases **puras** e rigorosas, mas sua obra não foi tão conhecida nem teve o mesmo impacto que a de Cauchy, que desenvolveu princípios semelhantes em mais áreas da matemática do que Bolzano e teve sua obra conhecida, de maneira imediata, pelos maiores matemáticos de sua época[5].

Com a definição que apresentamos a seguir – que seria formulada poucos anos depois em termos semelhantes por Cauchy e tornada ainda mais analítica e rigorosa por Weierstrass na segunda metade do século XIX –, a continuidade passa a ser tratada de maneira aritmética e estática:

> a expressão que uma função f(x) varia de acordo com a lei de continuidade para todos os valores de x dentro ou fora de determinados limites significa somente isto: se x é algum valor destes, a diferença f(x+ω) – fx pode ser tornada menor do que qualquer quantidade dada exigindo apenas que ω possa ser tomada tão pequeno quanto queiramos. Com a notação que eu introduzi na Seção 14 do Binomischhe Lehrsatz etc. (Praga, 1816), este é f(x+ ω) = fx + **Ω**. (Bolzano, 2004, p. 256)

Bolzano também enunciou um critério de convergência de séries – anterior ao de Cauchy – hoje conhecido como Critério de Convergência de Cauchy e fez a prova da existência do maior limite inferior (ou menor limite superior) para conjuntos limitados, que chamamos hoje de ínfimo (e supremo). Esta foi reescrita por Weierstrass como **toda sequência limitada (de números reais, sabe-se hoje) tem uma subsequência que converge** e desde o final do século XIX passou a ser chamada de Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Cauchy (1821, p. 43), poucos anos depois, deu ainda a seguinte definição de continuidade, muito semelhante à de Bolzano:

> Seja f(x) uma função da variável x, e suponhamos que, para cada valor de x intermediário entre dois limites dados, esta função admita constantemente um valor único e finito. Se, partindo de um valor x compreendido entre estes limites, atribui-se à variável x um acréscimo infinitamente pequeno α, a própria função receberá por acréscimo a diferença f(x+α)-f(x), que depende, ao mesmo tempo, da nova variável α e do valor de x. Isto posto, a função f(x) será, entre os dois limites atribuídos à variável x, função contínua desta variável, se, para cada valor de x intermediário entre limites, o valor numérico da diferença f(x+α)-f(x), decresce indefinidamente com aquele de α. Em outros termos, a função f(x) permanecerá contínua em relação a x entre os limites dados, se entre estes limites, um acréscimo infinitamente pequeno dado, a variável produzir sempre um acréscimo infinitamente pequeno da própria função. Diz ainda que a função f(x) é, na vizinhança de um valor particular atribuído à variável x, função contínua dessa variável, todas as vezes que ela é contínua entre dois limites de x, mesmo muito próximos, que contém o valor do qual se trata.

[5] Clímaco (2014) e Grabiner (1981) explicam o isolamento de Bolzano, que se deu em parte por residir na Bohemia, em parte por nunca ter ocupado uma cadeira de Matemática em alguma instituição, em parte por ter um estilo escolástico – bem diferente do assumido, em sua época, pelos grandes matemáticos.

Weierstrass, na segunda metade do século XIX, apresenta uma definição – que não foi escrita em artigo ou em tratado, mas em nota de aula posteriormente publicada por diversos alunos que assistiram a seus cursos, e é muito semelhante à que se encontra nos livros de cálculo dos dias atuais – em que dá maior precisão do que as definições dadas por Bolzano e Cauchy e elimina toda referência a noções como **tornar-se**, **aproximar-se**, **decrescer**, dentre outras, que remetem a questões relativas ao movimento, infinitamente pequenas ou semelhantes.

Aqui, há certa imprecisão na afirmação de Boyer (1949, p. 287): "Weierstrass definiu f(x) como sendo contínua, dentro de certos limites de x, se para qualquer valor x_0 tal que para todos os valores neste intervalo a diferença f(x)-f(x_0) é, em valores absolutos, menor do que ε".

Por isso, voltemos a Dugac (1973, p. 64), que fala, com base nos registros de Hermann Amandus Schwarz, sobre o curso dado por Weierstrass no verão de 1965:

> Ao introduzir a definição da variação infinitamente pequena da variável e da função usando δ e ε, Weierstrass introduz uma noção muito importante, que dará às definições de limite e continuidade toda a precisão e clareza que possuem hoje. Weierstrass dá assim forma à noção de limite que, até então, após um passo decisivo dado por Cauchy, era expressa por meio da afirmação de que, quando h tende a zero, $f(x+h)-f(x)$ tende a zero. De fato, ele deu a seguinte definição: "Se for possível determinar uma fronteira δ tal que, para todo valor de h menor em valor absoluto que δ, $f(x+h)-f(x)$ seja menor que uma quantidade ε tão pequena quanto queiramos, então, diremos que fazemos corresponder, a uma variação infinitamente pequena da variável, uma variação infinitamente pequena das funções. Assim, dá-se o passo decisivo para a atual delimitação de limite, estabelecendo uma relação funcional entre δ e ε que se exprime por desigualdades entre as variáveis e entre os valores da função. E o fato de substituir a ideia intuitiva de "tende para", por essas desigualdades resulta numa expressão analítica precisa cuja introdução na análise terá um impacto muito grande. Além disso, ela substituirá as sequências de pontos tendendo a um ponto fixo pelas vizinhanças de um ponto definido pelas desigualdades, o que será uma das origens da topologia geral. A utilização desta definição neste curso confirma a opinião de Рновити [[90], 25): parece que foi Karl Weierstrass quem foi o primeiro a introduzir a noção de limite de uma função por meio de toda a precisão que era possível". E o primeiro manual inspirado nas ideias de Weierstrass, publicado por Otto Stolz, dá a definição atual do limite, especificando aquilo que é difícil em Weierstrass (volume 1, 990).

Embora Otto Stolz não defina a continuidade em sua obra, ao estabelecer a definição de limite usando épsilon e delta, ele firmou as bases para a definição de continuidade presente nos livros atuais.

Uma vez estabelecida a notação atual com a obra de Weierstrass reescrita por Otto Stolz, que revela, como afirmou Circe (2021), as relações intrínsecas entre as necessidades didáticas e a nova escrita da matemática de maneira **pura**, julgamos importante expor uma parte da história que diz respeito à continuidade – mais exatamente à relação entre os números reais e a continuidade da reta.

Cerca de 70 anos depois da publicação da definição de continuidade de Bolzano (2004) presente em seu *Prova Puramente Analítica*... – e 23 após o curso em que Weierstrass estabeleceu o conceito de limite moderno –, Dedekind (1963, pp. 11-12) afirmou que a correspondência entre a reta e o conjunto dos números reais deve ser simplesmente postulada de modo que seja evidente para o sujeito, e assim não cabem demonstrações dessa correspondência:

> Eu vejo a essência da continuidade ... no seguinte princípio: se uma repartição de todos os pontos da reta em duas classes é de tal natureza que todo o ponto de uma das classes está à esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da reta em duas partes... Creio não errar admitindo que toda a gente reconhecerá imediatamente a exatidão do princípio enunciado. A maior parte dos meus leitores terá uma grande desilusão ao aprender que é esta banalidade que deve revelar o mistério da continuidade ... Que cada um ache o princípio enunciado tão evidente e tão concordante com a sua própria representação da reta, isso satisfaz-me ao máximo grau, porque nem a mim nem a ninguém é possível dar deste princípio uma demonstração qualquer. A propriedade da reta expressa por este princípio não é mais que um axioma, e é sob a forma deste axioma que nós pensamos a continuidade da reta, que reconhecemos à reta a sua continuidade. Se o espaço tem, de fato, uma existência real, não é algo necessário para que ela [a reta da qual tratam os matemáticos] seja contínua... e mesmo se soubéssemos com certeza que o espaço é descontínuo, ainda assim não há nada que nos proíba ... de preencher estes furos no pensamento, tornando assim a reta contínua.

Da mesma forma, a definição dos números irracionais por intervalos encaixados, elaborada em sua forma atual por Hilbert e Kolmogorov – que apresentamos na forma como foi descrita por Richard Courant (1888-1972), que foi aluno e colega de Hilbert; e Robbins Herbert (1915-2001) por meio da afirmação de que “um ponto irracional é completamente descrito por uma sequência de intervalos racionais encaixados de comprimentos tendendo a zero” (Courant & Robbins, 2000, p. 82) –, também não é mais que uma forma de postulação explícita de algo que intuímos da noção de continuidade espaço-temporal. Isso porque, concebida dessa forma, “a existência sobre a reta numérica (considerada como uma reta) de um ponto contido em cada sequência de intervalos encaixados com pontos extremos racionais” (p. 82) é considerada como

> um postulado fundamental da Geometria ... Nós a aceitamos, da mesma forma como aceitamos outros axiomas ou postulados em Matemática, por causa de sua plausibilidade intuitiva e sua utilidade na construção de um sistema consistente de pensamento matemático ... Construir esta definição, após ter sido levado a uma sequência de intervalos racionais encaixados por meio de um sentimento intuitivo de que o ponto

> irracional “existe”, significa dispensar o apoio intuitivo com o qual nosso raciocínio procedeu e compreender que todas as propriedades matemáticas de pontos irracionais podem ser expressas como propriedades de sequências de intervalos racionais encaixados. (Courant & Robbins, 2000, pp. 82-83)

Por uma compreensão adequada do significado das profundas transformações ocorridas nos fundamentos do cálculo no século XIX

Uma vez estabelecidos, no tópico anterior, os caminhos que foram seguidos pela noção de continuidade, em seguida, discutimos como devem ser adequadamente compreendidas as profundas transformações ocorridas nos fundamentos do cálculo – decorrentes da definição e da concepção adequadas da noção de continuidade – entre o século XVIII e o século XIX.

As citações sobre o século XVIII feitas no tópico anterior são suficientes, em nossa perspectiva, para mostrar que a concepção que Leibniz tinha da continuidade era bem distante da concepção aritmética do século XIX. Isso é confirmado por Schubring (2004, p. 176): ele afirma que os autores que consideraram a definição de Leibniz correspondente à do século XIX “não tomaram consciência de uma diferença conceitual essencial ... enquanto o conceito moderno diz respeito à continuidade de *funções*, a versão de Leibniz diz respeito a quantidades de variáveis geométricas”. Assim, mesmo que dificilmente alguém discorde da afirmação de Roque (2012, pp. 404-405) de que “a constituição da noção de rigor, ora vigente, está ligada à história da análise da matemática”, sua declaração sobre os matemáticos do século XVIII, de que “não podemos afirmar que seus resultados carecessem de rigor, como se eles tivessem o objetivo de avançar sem preocupações com a fundamentação de seus métodos” (pp. 406-407) deve ser mais cuidadosamente discutida.

Afinal, reconhecer a historicidade de certo fenômeno não pode ser equivalente a desistir de investigar suas características fundamentais e quando elas apareceram em seus aspectos mais críticos.

Nesse sentido, parece-nos extremamente importante entender que os matemáticos do século XVII iniciaram um movimento consciente de abandonar o excessivo rigor dos gregos na geometria para alcançarem novos resultados, e que essa disposição foi, em grande medida, continuada pelos matemáticos do século XVIII. Tal movimento se relacionava com uma concepção que Struik (1989, p. 21) chamou de “espírito de experimentação”. A atitude de Euler é exemplar dessa tendência. Como afirmaram Boyer e Rusnock, citados por Clímaco (2011, p. 117), em referência aos matemáticos do século XVIII,

> os objetos de maior preocupação destes matemáticos eram a criação e o desenvolvimento da matemática, e não sua fundamentação. ... Se por um lado é inquestionável a grandiosidade dos avanços da matemática deste século, por outro, os

questionamentos de Berkeley às noções de infinito e infinitésimo continuavam sem resposta satisfatória, e o caráter contraditório das explicações que os matemáticos tentavam dar para estas noções foi colocado em evidência pelas críticas do bispo, e também pela manipulação sem cuidado de séries infinitas, que levou Euler a generalizar resultados particulares a ponto de afirmar como verdadeira a igualdade $\frac{1}{1-x} = 1 + \mathrm{x} + x^2 + \cdots + \mathrm{x}^n + \ldots$ para valores quaisquer, como x =–1, x =1, x = 2 etc. (cf. RUSNOCK, 1997, p. 73). Assim, no final do século XVIII, estes conceitos (infinito, infinitésimo, continuidade), ou eram explicados em termos metafísicos, ou em termos de explicações geométricas, ou que envolviam as noções de espaço e de tempo (Boyer, 1949 p. 287).

Do ponto de vista do historiador, o fundamental não deve ser a subjetiva questão de saber se Euler e outros acreditavam ou não que seu trabalho era rigoroso, mas sim de compreender a natureza do trabalho matemático que desenvolviam, o quanto se dedicavam às questões de fundamentos, o valor que davam a essas questões e o que entendiam por rigor e fundamentos.

Optamos por fazer uma longa citação de Grabiner (1981, pp. 1-2) – uma conhecida estudiosa de Cauchy e de seu movimento de rigorização – sobre a diferença histórica entre a noção de rigor do século XVIII e aquela do século XIX, que também enfatiza a verdadeira revolução que tal mudança causou:

> Estas duas vertentes diferentes do cálculo – utilização e justificação – , mesmo se coexistiram simultaneamente na moderna matemática, são na verdade heranças de dois períodos históricos distintos: os séculos XVIII e XIX. No século XVIII, os analistas estavam engajados em descobertas excitantes e frutíferas sobre curvas, processos infinitos e sistemas físicos. Os nomes que atribuímos a resultados importantes no cálculo – números de Bernoulli, regra de L'Hopital, série de Taylor, função gama de Euler, resto de Lagrange, transformação de Laplace – atestam as descobertas matemáticas dos analistas do século XVIII. Embora não indiferentes ao rigor, estes pesquisadores (os do século XVIII, nota nossa) gastaram a maior parte do seu esforço desenvolvendo e aplicando métodos poderosos, alguns dos quais eles não tinham os meios de justificar, para resolver problemas; eles não enfatizavam a importância matemática dos fundamentos do cálculo e realmente não viam os fundamentos como uma área importante do empreendimento matemático. Em contraste, dar definições rigorosas dos conceitos básicos e, ainda mais importante, provas rigorosas dos resultados do cálculo, era considerada como uma tarefa maior para os analistas do século XIX como Cauchy, Abel, Bolzano e Weierstrass. Suas provas tornaram precisas as condições sob as quais as relações entre os conceitos do cálculo se estabeleceram. De fato, *a precisão do século XIX tornou possível a descoberta e a aplicação de conceitos como os de convergência uniforme, continuidade uniforme, de condições para a soma e de expansões assintóticas, que não podiam ser estudados nem mesmo expressos na estrutura conceitual da matemática do século XVIII* [ênfase adicionada].Os próprios nomes que usamos para algumas ideias básicas em análise refletem as realizações dos matemáticos do século XIX nos fundamentos da análise: o teorema da convergência de Abel, o critério de Cauchy, a integral de Riemann, o teorema de Bolzano-Weierstrass, o corte de Dedekind. E os símbolos do rigor do século XIX – o onipresente epsilon e delta –

> aparecem pela primeira vez em seus papéis lógicos habituais nas palestras de Cauchy sobre cálculo em 1823. Certamente a análise do século XIX deve muito à análise do século XVIII. Mas a fundamentação do século XIX do cálculo não pode ser considerada como tendo sido o crescimento natural ou automático de visões anteriores. A matemática pode, com frequência, crescer suavemente pela adição de métodos, mas isso não ocorreu no presente caso. A diferença conceitual entre o caminho do século XVIII de ver e fazer o cálculo e as visões do século XIX são simplesmente grandes demais. É a diferença que justifica nossa afirmação de que a mudança foi uma verdadeira revolução científica e que motiva a presente pesquisa sobre as causas desta mudança.

As palavras de Lützen (2003 citado por Roque, 2012, p. 367) como suposta prova de que "em textos mais recentes, no entanto, já podemos vislumbrar certa consciência de que a concepção implícita de rigor nas narrativas tradicionais tem um caráter retrospectivo" simplesmente não se sustentam, visto que nem Lützen dá qualquer tipo de sinalização sobre o fato de que o rigor do século XIX seja comparável ao de outros séculos – ou que possa vir a ser superado ou relativizado de um dia para o outro – nem as pesquisas feitas nos últimos 20 anos (de 2003 a 2023) apontaram algo no sentido que Roque enuncia, o que confirma nossa tese de que, de fato, a noção de rigor passou por profundas transformações no século XIX e que ela não era uma preocupação maior nos séculos XVII e XVIII.

Em certa medida, os matemáticos do século XVIII tinham, sim, consciência da ausência de rigor do cálculo, a ponto de nenhum deles ter conseguido ainda responder às objeções feitas no mesmo século XVIII por Berkeley aos fundamentos do cálculo – nem ter respondido, de maneira fundamentada, aos Paradoxos de Zenão. Os matemáticos dos séculos XVII e XVIII compreendiam que seu mérito era fazer a matemática crescer. Para isso, evitavam se paralisar por razões de natureza lógica ou mesmo inconsistência nos fundamentos e julgavam que, naquele momento, o progresso de seu trabalho matemático não dependia desse rigor. Dizer que tais matemáticos não tiveram a mesma preocupação ou o mesmo rigor dos matemáticos do século XIX em nada diminui sua obra, simplesmente ajuda-nos a compreender a dinâmica do crescimento e da transformação da matemática que são próprios de cada época. Substituir essa análise pela mera constatação de que todo fenômeno é histórico não contribui, em nada, para a análise minuciosa e o estabelecimento das características fundamentais dos fenômenos da história.

Esse rigor só foi alcançado quando houve a aritmetização: a fundamentação do cálculo na noção de limite, o estudo rigoroso da convergência de séries, a definição de cada número real por meio de uma sequência numérica, a atribuição de cada ponto da reta a um único número real e assim por diante. Somente esse desenvolvimento possibilitou à matemática alcançar a generalidade a que chegou no século XIX, o que permitiu um novo impulso às demais ciências e preparou a grande expansão e especialização da matemática do século XX. Afinal, com a transformação ocorrida no século XIX, a matemática deixou de ser ciência das quantidades, grandezas e cálculos – no sentido de contas – para ter em seu centro a noção de demonstração dos resultados conhecidos. Além disso, a criação dos conceitos realizada pelos matemáticos para demonstrar tais resultados – em particular os conceitos de limite, continuidade, derivada e convergência – transformou completamente a matemática, chegando ao que nos dias atuais conhecemos como matemática pura, algo que a própria Roque (2012) reconhece.

E o surgimento da matemática pura não se limita à aritmetização, nem é um fenômeno isolado do que ocorreu em outras áreas. Como afirma Giddens (1991, p. 39), "é característico da modernidade ... a reflexão sobre a natureza da própria reflexão".

Clímaco (2014, pp. 135-136) assegura que

> uma das mais importantes características da matemática moderna, surgida no século XIX, e de ambas as tendências que a tentaram definir, é sua autorreflexividade, sua dimensão metamatemática. No início do século XIX, durante a Segunda Revolução Industrial, os matemáticos passaram a ter consciência da necessidade da auto-reflexão, de refletirem sobre seus próprios conceitos. Surgiu então a meta-matemática, uma forma de conceber a matemática que esboçou uma concepção própria de lógica-matemática, e com a qual ela, que sempre havia sido caracterizada pelas quantidades e grandezas, perdeu esta característica com a mudança e amplitude das suas próprias ideias, tornando-se uma disciplina conceitual.

Conceitos como funções, séries e derivadas – anteriormente vistos como instrumentos das ciências físicas – passaram a ser vistos, a partir do século XIX, como objetos próprios da matemática, a serem estudados de maneira separada, ou pelo menos bem distante, de seu uso em outras ciências ou de noções intuitivas.

Do ponto de vista da relação entre o contínuo e o discreto, as progressivas transformações na noção de continuidade no século XIX resultaram em uma reconciliação entre o discreto e o contínuo: se na Grécia Antiga predominaram os aspectos qualitativos e uma abordagem contínua, não numérica, da matemática, e se os hindus, os árabes e os chineses priorizaram aspectos numéricos, portanto discretos, dessa ciência, no século XVII inicia-se uma conciliação entre o discreto e o contínuo que teve seu ápice na definição de número de Dedekind (1963, pp. 11-12), que resolveu, por assim dizer, o que ele chama de "mistério da continuidade" – o mistério desse conceito matemático tão pouco intuitivo que é a reta numérica e que assombrou pela primeira vez os gregos com o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, mas que até mesmo matemáticos como Bolzano e Cauchy não conseguiram compreender de maneira plena.

Por fim, afirmamos que existe um elo importante que une a relação entre o discreto e o contínuo e aquela estabelecida entre a linguagem e a intuição. Afinal, na virada do século XVIII para o século XIX, o que ocorreu foi que a continuidade passou de algo intuitivo, dinâmico e próprio das ciências físicas a um conceito estático escrito por meio da linguagem. Foi dessa forma que o contínuo foi explicado em termos do discreto. E a relação entre intuição e conceito é fundamental para a compreensão de qualquer debate educacional, visto que diz respeito às relações entre os aspectos psicológicos e lógicos; formais e sociais; objetivos e subjetivos etc.

Considerações finais

Ao longo do artigo, mostramos que a problemática da relação entre as noções de contínuo e de discreto remonta à Antiguidade, e já no Período Clássico da Grécia Antiga a tensão sobre a natureza do relacionamento entre tais noções conduziu a debates filosóficos e matemáticos que marcaram um impasse que só poderia ser resolvido muitos séculos depois.

Com o advento da Revolução Científica, ocorreram mudanças significativas na compreensão do relacionamento entre grandezas contínuas e discretas e, nesse contexto, aconteceram desenvolvimentos significativos do cálculo, dando início a uma transformação na matemática que só se completou no século XIX com a aritmetização, quando ocorre uma verdadeira revolução nas bases do chamado Cálculo Diferencial e Integral.

Ao investigarmos a relação histórica que se deu entre o discreto e o contínuo, concluímos que eles se complementam, no sentido de que não podem ser reduzidos um ao outro, já que se interrelacionam. Um exemplo disso é o próprio cálculo, que, mesmo lidando principalmente com grandezas contínuas, só pôde ser fundamentado com a utilização de conceitos discretos, como a noção de limite e a soma de séries, de modo que, para ter uma compreensão global do seu desenvolvimento histórico, é necessária uma abordagem do ponto de vista da complementaridade, que foi desenvolvida sobretudo com Otte (1994, 2003) – e sistematizada por Clímaco et al. (2024).

Nos dias atuais, tal relação se faz presente em várias áreas da matemática aplicada. Na teoria das representações digitais, por exemplo, a capacidade de representar a reta real, que é contínua, em sistemas computacionais discretos, é de extrema relevância, o que demonstra o quanto a abordagem da complementaridade é importante para tornar possível uma análise e compreensão mais apurada de diversos fenômenos. No entanto, reconhecemos que a realidade é sempre mais complexa do que podemos representá-la; alguns fenômenos são compreendidos de maneira mais adequada do ponto de vista do contínuo, enquanto outros, do discreto. E ainda existem aqueles fenômenos mais específicos que podem não se encaixar perfeitamente em nenhum dos pontos de vista e, também, aqueles que conciliam as duas perspectivas de maneira simultânea – de modo que uma abordagem complementar é fundamental para compreender os fenômenos em sua totalidade.

Do ponto de vista educacional, e no processo de escolarização, a compreensão desses aspectos é importante, pois proporciona aos envolvidos no processo educacional uma visão mais abrangente, sólida e aprofundada sobre os conceitos matemáticos: sistemas de numeração, representação gráfica de funções e noção de limite, o que torna possível fortalecer entre os aprendizes a capacidade de raciocinar matematicamente – a fim de que estejam mais aptos a encarar os problemas matemáticos por uma perspectiva mais abrangente e a transpor conceitos em diferentes formas e contextos de representação.

Compreender a história da noção de continuidade, bem como a complementaridade entre o discreto e o contínuo, é fundamental para que o professor possa utilizar estratégias de aprendizagens que permitam aos alunos explorarem tanto aspectos contínuos quanto discretos dos conceitos matemáticos ensinados e possibilitem conexões entre a matemática e sua aplicação prática.

Referências

Aristóteles. (2009a). *Física – Livros I e II* (L. Angioni, Trad.). Editora da Unicamp.

Aristóteles. (2009b). *Física – IV* (L. Angioni, Trad.). Editora 1.

Berkeley, G. (2010). O analista: ou um discurso dirigido a um matemático infiel onde se examina se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna são mais distintamente concebidos ou mais obviamente deduzidos do que os mistérios religiosos e as questões de fé. *scientiæ studia*, *8*(4), 633-76.

Bernoulli, J. (1727). *Discours sur les Loix de la Communication du Mouvement* (tomus III). Opera Omnia.

Bolzano, B. (1905). *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes. Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.* Gottloeb Hass.

Bolzano, B. (2004). Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign, there lies at least one real root of the equation. In S. Russ, *The mathematical works of Bernard Bolzano* (pp. 251-277). OUP.

Boutroux, P. (1992). *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes.* Jacques Babay.

Boyer, C. B. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique*. *Première Partie. Analyse algébrique*. Imprimérie Royale.

Circe, S. (2021). As notas de aula de Karl Weierstrass em 1878. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *21*(42), 294–328.

Clímaco, H. de A. (2011). *Geometria e Aritmetização da Grécia Antiga à Matemática Moderna*.

Clímaco, H. de A. (2014). *Intuição e conceito: a transformação do pensamento matemático de Kant a Bolzano* [Tese de Doutorado, Faculdade de Educação da Universidade Federal de Goiás].

Clímaco, H. de A., Santana, G. F. S., & Paula, J. B. (2024). Metodologia de pesquisa em Educação Matemática: complementaridade Otteana baseada na semiótica. *Revista Pesquisa Qualitativa*.

Courant, R., & Robbins, H. (2000). *O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos* (A. da S. Brito, Trad., 4.ª ed.). Ciência Moderna.

Dedekind, R. (1963). *Was sind und was sollen die Zahlen?* (W. Beman, Trad. para o inglês). Courier Dover Publications.

Dugac, P. (1973). Eléments d’analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences*, *10*, 41-176.

Euler, L. (1959). Vollständige Anleitung zur Algebra. Guia completo de Álgebra (J. E. Hofmann, Org.). Reclam.

Euler, L. (1983). *Introductio in analysin infinitorum (Lausanne 1748). Deutsche Übersetzung von H. Maser: Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Erster Teil*. Springer.

Giddens, A. (1991). *As consequências da modernidade* (R. Fiker, Trad.). Editora Unesp.

Grabiner, J. V. (1981). *The origins of Cauchy’s rigorous calculus*. The Massachusetts Institute of Technology.

Heath, Thomas L. (1949). *Mathematics in Aristotle*. Clarendon Press.

Leibniz, G. W. von. (1904). *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie* [Principais escritos sobre os fundamentos da filosofia]. Meiner.

Leibniz, G. W. von. (1961). *Die philosophischen Schriften* [Escritos filosóficos]. Halle. (Baseado em publicação de 1887)

Leibniz, G. W. von. (1962). *Mathematische Schriften* [Escritos matemáticos]. Collins.

Leibniz, G. W. von. (1969). Meditations on Knowledge, Truth and Ideas [Meditações sobre conhecimento, verdade e ideias]. In G. W. von Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (2nd ed., L. Dordrecht, Trad., Org.). Reidel.

Newton, Isaac. (2012). Princípios Matemáticos de Filosofia Natural (Vol. 2-3). Edusp.

Otte, M. F. (1994). O *formal, o social e o subjetivo*: *uma introdução à filosofia e à didática da matemática* (M. Bicudo et al., Trad.). Editora da Unesp.

Otte, M. F. (2003). Complementary, Sets and Numbers. *Educational Studies in Math*, *53*, 203-228. https://doi.org/10.1023/A:1026001332585.

Platão. (2017). *A República* (15.ª ed.). Fundação Calouste Gulbenkian.

Roque, T. (2012). *História da Matemática*. Zahar.

Schubring, G. (2004). *Conflicts between generalization, rigour and intuition*: *Number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th Century* [Conflitos entre generalização, rigor e intuição: conceitos numéricos subjacentes ao desenvolvimento da análise nos séculos 17 e 19]. Springer.

Sinkevich, G. (2017). On the history of nested intervals: from Archimedes to Cantor. *History and Overview*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119614235

Struik, D. (1989). *História concisa das matemáticas* (J. Guerreiro, Trad., 3.ª ed.). Gradiva.

Revisora: Andréia de Freitas Ianni **andreianni1@gmail.com**

Declarações de Contribuições de Autoria

Este artigo foi elaborado de modo colaborativo, onde os (três) autores/pesquisadores participaram efetivamente da pesquisa teórico bibliográfica, reflexões e sistematização textual.

Declaração de disponibilidade de dados

O compartilhamento de dados não é aplicável a este artigo, pois nenhum dado novo foi criado ou analisado neste estudo.

Cuiabá – MT, 02 de março de 2024. (a assinada segue em outro arquivo)