

<http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i1p360-389>

A inserção da dimensão da linguagem na análise do problema didático

The insertion of the language dimension in the analysis of the teaching problem

La inclusión de la dimensión lingüística em el análisis del problema didáctico

L'inclusion de la dimension linguistique dans l'analyse de la problématique didactique

Ana Karine Dias Caires Brandão¹

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA)

Doutorado em Educação Matemática

<http://orcid.org/0000-0002-2403-1050>

Maria José Ferreira da Silva²

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

Doutorado em Educação Matemática

<https://orcid.org/0000-0002-1249-8091>

Saddo Ag Almouloud³

Universidade Federal do Pará (UFPA)

Doutorado em Educação Matemática

<https://orcid.org/0000-0002-8391-7054>

Resumo

O intuito deste artigo é inserir a dimensão da linguagem na análise do problema didático com o mesmo grau de relevância atribuído às dimensões epistemológica, ecológica e econômica ao estudar um objeto matemático. Delineamos um encontro com doze estudantes de Engenharias e de Licenciatura em Matemática de duas universidades públicas do interior da Bahia e propomos uma tarefa com o tema Integral Dupla, para o cálculo da medida do volume de uma Superfície Quádrica, o parabolóide hiperbólico. Como pressupostos teóricos tomamos como aporte a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e a Semiótica Peirceana e o constructo elaborado pelos autores das quatro linguagens: contrafactual, dictarizada, em curso, em (dis)curso. Cinco dos estudantes resolveram a tarefa, três das Engenharias, que criaram uma questão no contexto de sua graduação, os outros dois, da Licenciatura em Matemática, se atentaram ao desenvolvimento de cálculos. Os resultados obtidos revelaram que os futuros engenheiros aplicaram de forma acentuada a linguagem contrafactual e em (dis)curso,

¹ karinedias33@gmail.com

² maze.fsilva@gmail.com

³ saddoag@gmail.com

enquanto, os da Licenciatura, a linguagem dicionarizada e em curso; os dozes estudantes sentiram dificuldades na coautoria da elaboração, solução e análise das atividades, por não encontrarem modelos semelhantes nos livros didáticos e nas mídias. Inferimos que a dimensão da linguagem foi relevante para o desenvolvimento do raciocínio abduutivo e para a coautoria dos estudantes quanto a criação e solução dos enunciados de questões de Integral Dupla.

Palavras-chave: Dimensão da linguagem, Problema didático, Integral dupla.

Abstract

The purpose of this article is to insert the language dimension into the analysis of the didactic problem with the same degree of relevance attributed to the epistemological, ecological and economic dimensions when studying a mathematical object. We planned a meeting with twelve Engineering and Mathematics students from two public universities in the interior of Bahia and proposed a task with the theme Double Integral of a Quadric Surface, the hyperbolic paraboloid. As theoretical assumptions we take as a contribution the Anthropological Theory of Didactics (TAD) and Peircean Semiotics and the construct elaborated by the authors of the four languages: counterfactual, dictated, in course, in (dis) course. Five of the students solved the task, three from Engineering, who created a question in the context of their degree, the other two, from the Mathematics Degree, focused on developing calculations. The results obtained revealed that future engineers strongly applied counterfactual and (dis)course language, while those in the bachelor's degree used dictated and in course language; the twelve students experienced difficulties in co-authoring the elaboration, solution, and analysis of the activities, as they did not find similar models in textbooks and the media. We infer that the language dimension was relevant for the development of abductive reasoning and for the student's co-authorship in the creation and solution of Double Integral question statements.

Keywords: Language dimension, Didactic problem, Double integral.

Resumen

El propósito de este artículo es insertar la dimensión del lenguaje en el análisis del problema didáctico con el mismo grado de relevancia que se atribuye a las dimensiones epistemológica, ecológica y económica al estudiar un objeto matemático. Planificamos un encuentro con doce estudiantes de Ingeniería y Matemáticas de dos universidades públicas del interior de Bahía y propusimos una tarea con el tema Doble Integral, para calcular la medida del volumen de una Superficie Cuádrica, el paraboloides hiperbólico. Como presupuestos teóricos tomamos como aporte la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) y la Semiótica peirceana y el constructo

elaborado por los autores de los cuatro lenguajes: contrafactual, dictado, en curso, en (dis)curso. Cinco de los estudiantes resolvieron la tarea, tres de Ingeniería, quienes crearon una pregunta en el contexto de su carrera, los otros dos, de la Licenciatura en Matemáticas, se enfocaron en desarrollar cálculos. Los resultados obtenidos revelaron que los futuros ingenieros aplicaron fuertemente el lenguaje contrafáctico y (dis)curso, mientras que los de Licenciatura utilizaron un lenguaje dictado y continuo; los doce estudiantes experimentaron dificultades en la coautoría de la elaboración, solución y análisis de las actividades, al no encontrar modelos similares en los libros de texto y los medios de comunicación. Inferimos que la dimensión del lenguaje fue relevante para el desarrollo del razonamiento abductivo y para la coautoría de los estudiantes en la creación y solución de enunciados interrogativos Doble Integral.

Palabras clave: Dimensión del lenguaje, Problema didáctico, Doble integral.

Résumé

Le but de cet article est d'insérer la dimension linguistique dans l'analyse du problème didactique avec le même degré de pertinence attribué aux dimensions épistémologique, écologique et économique lors de l'étude d'un objet mathématique. Nous avons prévu une rencontre avec douze étudiants en ingénierie et mathématiques de deux universités publiques de l'intérieur de Bahia et avons proposé une tâche sur le thème Double Intégrale, pour calculer la mesure du volume d'une Surface Quadrique, le paraboloid hyperbolique. Comme hypothèses théoriques, nous prenons comme contribution la Théorie Anthropologique de la Didactique (TAD) et la Sémiotique Peircéenne et la construction élaborée par les auteurs des quatre langages : contrefactuel, dicté, en cours, en (dis)cours. Cinq des étudiantes ont résolu le problème, trois en ingénierie, qui ont créé une question dans le cadre de leur diplôme, les deux autres, en mathématiques, se sont concentrés sur le développement de calculs. Les résultats obtenus ont révélé que les futurs ingénieurs appliquaient fortement le langage contrefactuel et de (dis)cours, tandis que ceux du bachelor utilisaient un langage dicté et continu ; les douze étudiants ont éprouvé des difficultés à corédiger l'élaboration, la solution et l'analyse des activités, car ils n'ont pas trouvé de modèles similaires dans les manuels scolaires et dans les médias. Nous en déduisons que la dimension linguistique était pertinente pour le développement du raisonnement abductif et pour la co-auteur des étudiants dans la création et la solution des énoncés de questions à double intégrale.

Mots-clés : Dimension linguistique, Problème didactique, Intégrale double.

A inserção da dimensão da linguagem na análise do problema didático

Discutir a linguagem em um mundo que a representa de forma ampliada e em diferentes matizes nos parece algo simplório devido às inúmeras publicações a respeito desse tema. Todavia, ainda é possível detectar que, em áreas específicas do conhecimento, existem lacunas ou espaço pouco explorados acerca do poder que ela exerce nas relações humanas. Uma delas, é a área das ciências “concebida” como exatas, especificamente, a linguagem na Matemática.

Abordar este tema nos conduz a entender como a linguagem é discutida nos espaços educacionais e como influencia o processo de ensino de algum objeto matemático. As relações no triângulo didático, proposto por Brousseau (1996), composto por três elementos: o professor, o estudante e um determinado saber (objeto matemático) não ocorre de forma pacífica, pois as interações estabelecidas entre o professor e o estudante, mediadas por um objeto, passam por processos de regulação subjetivos, que podem ser determinantes para a compreensão epistemológica do saber.

Esta relação nem sempre é transparente e a falta de assimilação de algumas nuances do objeto matemático conduz a interpretações equivocadas, como por exemplo, a representação algébrica das funções definidas por $f(x) = \cos(3x)$ e $g(x) = 3\cos(x)$ que, embora envolva o mesmo objeto matemático, há diferenças no domínio e na imagem das respectivas funções e quando explicadas no Ensino Médio, geralmente, são feitas por meio da representação gráfica.

Entretanto, se associarmos esta problemática ao estudo de Álgebra Linear verificamos que o objeto matemático, função cosseno, não é uma transformação linear, pois não satisfaz as condições que consideram V e W como espaços vetoriais e uma aplicação $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear se: (i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$, com $\forall u, v \in V$ e V é um espaço vetorial; (ii) $T(ku) = kT(u)$, com $k \in R$.

Se considerarmos a situação problemática da função cosseno como uma praxeologia matemática⁴ podemos considerar o tipo de tarefa T , provar que $\cos(kx) \neq k\cos x$ (Tabela 1) para validar a hipótese de que as funções $f(x)$ e $g(x)$ são diferentes.

⁴ As praxeologias ou organizações matemáticas são constructos teóricos da TAD que centralizam o estudo de atividades matemáticas analisando as tarefas. As técnicas são os procedimentos ou algoritmos empregados para resolvê-las; as tecnologias são os teoremas, axiomas, definições matemáticas e a teoria é o “ramo” da matemática em que a tarefa está situada.

Tabela 1.

Praxeologias da função cosseno por meio da Álgebra Linear

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T: Provar que $\cos(3x) \neq 3 \cos x$	Considerando os dois membros da inequação como funções e a segunda condição para transformações lineares: $T(kx) = kT(x)$ com k e $x \in \mathbb{R}$ obtemos a igualdade $\cos(3x) = 3 \cos(x)$ Fazendo $3x$ como a soma $3x = 2x + x$ temos a igualdade $\cos(2u + u) \stackrel{?}{=} 3 \cos(u)$. ^a Aplicando a técnica para a soma de dois arcos da função cosseno, vem que $\cos 2u \cos(u) - \operatorname{sen} 2u \operatorname{sen}(u)$ da qual a desigualdade $\cos(2u)\cos(u) - \operatorname{sen}(2u)\operatorname{sen}(u) \neq 3 \cos(u)$	θ_1 : Transformação linear θ_2 : Funções trigonométricas	Θ_1 : Álgebra Linear Θ_2 : Trigonometria

Nota: ^a. Estamos usando esta notação, pois a igualdade está sendo posta em hipótese para verificar a sua veracidade ou não.

Desse exemplo é possível verificar que o objeto função cosseno pode ser justificado por técnicas, tecnologias e teorias que não são do nível de escolaridade do estudante e o professor (ou o livro didático), na tentativa de utilizar uma explicação coerente, na série a que pertence o aluno, suprime conhecimentos não previstos como saberes para aquele nível, o que provoca lacunas na compreensão do objeto pelos discente. Neste sentido, Bosch, Fonseca e Gascón (2004) pontuam:

a importância das restrições institucionais que pesam sobre a atividade matemática escolar e que nos conduz a situar as incompletudes das organizações matemáticas escolares do ensino secundário e a origem das descontinuidades didáticas entre o secundário e a universidade.

A afirmativa tem respaldo no ensino brasileiro no que concerne a ausência de articulação entre os níveis – Ensino Médio e Superior – no que tange ao processo formativo dos docentes. A descontinuidade didática é um tema esvaziado de discussões nas instituições e, muitas vezes, o professor não tem consciência ou não questiona o saber do livro didático e o reproduz, sem relacioná-lo com sua origem.

Analizamos dois livros didáticos, adotados no Ensino Médio brasileiro sobre o tema cálculo da medida da área de um círculo. Na Tabela 2 apresentamos a representação algébrica escolhida pelos autores, desprovida de explicação sobre sua origem e de uma articulação com outros níveis pedagógicos. O que nos fez questionar: como este objeto matemático “vive” em uma instituição de Ensino Superior (ES)?

Tabela 2.

Referência do livro analisado e o tema

Referência Bibliográfica	Exposição do Tema
Dante, L.R. (2000). <i>Matemática: contextos & aplicações</i> . (2ªed. Vol.2.) Editora Ática. p.264	[...] Como a área da região limitada por um polígono regular é dada pelo produto do semi perímetro pelo apótema ($A = pa$), então área do círculo é: $A = \frac{1}{2}(2\pi R)R \Rightarrow A = \pi R^2$
Paiva, M.R. (1995). <i>Matemática</i> . (Vol. 2) Moderna p.483.	A área de um círculo de raio r é igual a πr^2

Para responder essa pergunta podemos relacionar a medida da área do círculo com o estudo de Integrais Múltiplas, especificamente, a Integral Dupla. Se consideramos que o círculo estabelece uma relação com duas variáveis, o ângulo e o raio, e tomando uma função geral de duas variáveis definida por $f(r, \theta) = 1$, em que r representa o raio e θ um ângulo situado entre 0° e 360° , pode-se obter a medida da área do círculo por meio da Integral Dupla em coordenadas polares:

$$A = \iint_D f(r, \theta) r dr d\theta.$$

A Tabela 3 descreve a praxeologia matemática para o cálculo da medida da área por meio de Integral Dupla.

Tabela 3.

Praxeologias Matemáticas para o cálculo da Integral Dupla

Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
T: Calcular a medida da área de um círculo.	<p>t₁: Estabelecer o domínio de integração, a partir do raio e do ângulo, expresso por $D = \{0 \leq r \leq R \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.</p> <p>t₂: Substituir o domínio na Integral Dupla, $A = \int_0^{2\pi} \int_0^R 1 r dr d\theta$</p> <p>t₃: Integrar em relação ao raio r: $A = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big _0^R d\theta$</p> <p>t₄: Aplicar propriedades de Integral para uma constante: $A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \Big _0^R d\theta$</p> <p>t₅: Aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo: $A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (R^2 - 0^2) d\theta$</p> <p>t₆: Considerar R^2 como constante, pois a integração será em relação ao ângulo θ. $A = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta$</p> <p>t₇: Integrar em relação ao ângulo θ $A = \frac{R^2}{2} \cdot \theta \Big _0^{2\pi}$</p> <p>t₈: Aplicar o TFC^a: $A = \frac{R^2}{2} (2\pi - 0)$</p> <p>t₉: Aplicar a distributiva: $A = \pi R^2$</p>	<p>θ_1: Coordenadas polares</p> <p>θ_2: Teorema Fundamental do Cálculo</p> <p>θ_3: Integrais Simples</p> <p>θ_4: Integrais Múltiplas</p>	<p>Θ_1: Cálculo Diferencial e Integral</p>

Nota: ^a Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

A articulação entre o mesmo objeto matemático com o uso de técnicas e tecnologias distintas viabiliza conhecer a razão de existir daquele objeto e sua origem. Ela favorece, também, o estudo das dimensões ecológica e econômica e permite detectar como um determinado objeto matemático “vive” em diferentes instituições e quais leis, regras e documentos garantem a existência e a divulgação daquele saber.

A incompletude das organizações matemáticas escolares, destacadas nos exemplos anteriores, causa obstáculos na compreensão do saber. Por exemplo, os signos da linguagem matemática não são interpretados e/ou representados corretamente e podem não produzir significados tanto para o professor, quanto para o estudante.

Uma análise crítica ao currículo escolar e às praxeologias didáticas e matemáticas nos livros didáticos nas instituições, permite identificar a presença de um paradigma “monumentalista” (Chevallard, 2005) em que o estudante “visita a obra” (Chevallard, 2012), para aplicar técnicas e resolver atividades sem construir significado. Se tivéssemos o ensino voltado para a investigação, para a construção do saber, as articulações que salientamos nos exemplos, poderiam fazer emergir, enriquecer o debate e a aprendizagem, aguçar a curiosidade e desenvolver novas ideias ou conhecimentos.

Chevallard (2012) destaca que a mudança para o paradigma de questionamento do mundo favorece o estudante a promover questões e buscar respondê-las (internamente ao campo da matemática ou exterior a ele) utilizando como ferramentas praxeologias matemáticas (tarefas, técnicas, tecnologia e teoria), expressas por diferentes tipos de linguagem: escrita, oral, gestual, imagética, pictórica, entre outras.

Um objeto matemático sofre intensas interpretações, em que a linguagem matemática se adapta aos contextos em que se insere. Inicia com a elaboração de uma estrutura validada pelos matemáticos até chegar na sala de aula. Durante este processo, as dimensões epistemológica, econômica e ecológica (Gascón, 2011) afetam diretamente o sistema didático (professor, estudante e objeto). A dimensão epistemológica tem o papel de estudar o objeto matemático em seu desenvolvimento histórico (Almouloud, 2022) e suas diferentes formas de concepção e abordagem. A dimensão econômica abrange o contexto institucional, as leis, os currículos, os livros didáticos adotados e, a dimensão ecológica estuda às condições e “restrições transpositivas” (Chevallard, 1991) a que são submetidas as organizações matemáticas e didáticas, em diferentes etapas.

Contudo, há intrinsecamente algumas dimensões denominadas por Gascón (2011) como “secundárias – por exemplo, as dimensões cognitivas, pessoais, ostensivas, instrumental etc.”, em que “o desenvolvimento posterior da investigação pode originar a formulação e o estudo de

outros aspectos nas outras dimensões ou sua conexão com outros problemas didáticos” (ibid, 2011).

A possibilidade da existência de dimensões secundárias, nos motivou a acrescentar a dimensão da linguagem, tendo em vista, que o registro de um objeto matemático ocorre por intermédio de representações, símbolos, técnicas, tecnologias e teorias específicas que proporcionam unicidade ao campo científico e ao expandir, são inseridos signos originais e internos à própria matemática. Todavia, a matemática não vive isolada no mundo e o homem, como um ser social, mobiliza diferentes conhecimentos para sobreviver e comunicar. É nesse sentido que a linguagem matemática circunscreve áreas de conhecimentos diversos, como nas Engenharias e na arte.

A relevância da dimensão da linguagem nestes dois movimentos, o de inserção e o de circuncisão, contribui para a ruptura que propõe o paradigma do questionamento do mundo e para a formulação criativa e original de questões abertas no dispositivo do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), o que favorece transitar na fronteira entre uma linguagem externa e interna à matemática. Neste sentido “a fronteira define-se, então, como um mecanismo de semiotização capaz de traduzir as mensagens externas em linguagem interna, transformando a informação (não texto) em texto.” (Machado, 2003)

O intuito do que se segue é apresentar a dimensão da linguagem como um constructo teórico de análise para o problema didático, situando-a como uma dimensão fundamental, com o mesmo grau de relevância atribuída às dimensões epistemológica, ecológica e econômica.

Dimensão da linguagem

O problema didático é um conjunto de questões feitas ao sistema - professor, estudante, saber - para o ensino de um objeto matemático. Ao buscar respostas para tais questões é necessário verificar as condições e restrições para as organizações didáticas e matemáticas e a produção de significados para os saberes, que caracterizam as dimensões epistemológicas, econômicas e ecológicas (Gascón, 2011) do saber a ser ensinado.

Tal intento exige um sistema de referências que registra as características dos objetos matemáticos com uma linguagem específica (os símbolos, as representações) tornando-os manipuláveis e visíveis e comunicando o que a mente quer expressar. São os objetos ostensivos (representações, símbolos) que acedem um teorema, uma definição, um axioma (objetos não ostensivos).

Estudar a dimensão da linguagem, com o grau de relevância que lhe cabe, é fundamental para compreender os acordos (supressões e inclusões de termos) nem sempre explicitados nas

três dimensões defendidas por Gascón (2011), como por exemplo, os raciocínios abduativos dos estudantes e dos professores, que os levam a produzir algo diferente do que está posto. A existência do raciocínio, como forma de organizar o pensamento, era defendido por Aristóteles (2016) que o tipificou em: dedutivo, indutivo e abduativo. Posteriormente, Peirce (2005) define o raciocínio abduativo como aquele espontâneo, *insights* livres de julgamentos e por isso original.

Na TAD a presença deste raciocínio se encontra no desenvolvimento da pedagogia do PEP e no paradigma didático de questionamento do mundo, pois estão pautados em promover indagações em torno de uma questão original, que pode ter raízes no âmbito da própria matemática ou não. No entanto, o processo de interpretação, significação ou representação é a base da Semiótica, que se preocupa em estudar a linguagem. Santaella (2009) afirma que “a semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame de modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e sentido”.

Quando a questão aberta proposta se encontra no campo exclusivo da matemática, há uma demanda por uma linguagem específica, tomada por símbolos, representações, técnicas, tecnologias e teorias apropriadas que são topologicamente situadas na própria matemática. Todavia, se a questão adquire uma amplitude externa à matemática, com uma problemática do mundo em que as indagações conduzem à mobilização de vários objetos científicos e de áreas distintas, a linguagem excede o limite matemático.

Neste sentido, a dimensão da linguagem é ao mesmo tempo um campo externo e interno ao problema didático, é uma “dimensão de fronteira” em que os movimentos são dinâmicos, em expansão ou em zona de interrelações entre diferentes meios. A linguagem presente no ensino de um campo científico adquire um perfil próprio ou extrapola os muros do conhecimento fragmentado a depender da intencionalidade do ensino, das organizações didáticas e das organizações dos objetos específicos de cada área.

Brandão (2021) defende a existência de quatro tipos de linguagem matemática que circunscrevem e inscrevem um problema didático: dictarizada, contrafactual, em curso e em (dis)curso. Para a autora, os três componentes do sistema didático mobilizam estas linguagens a depender do problema didático institucionalizado. O fluxo entre elas cria uma relação de dependência com um dos paradigmas (“visitas as obras” ou questionamento do mundo), recorre às organizações didáticas e matemáticas e solicita ações para as soluções levantadas na problemática.

A linguagem dicitarizada, para Brandão (2021), é a linguagem específica da matemática, composta por técnicas, tecnologias e teorias do próprio campo do saber. São símbolos, regras, procedimentos que fazem parte do escopo do cânone matemático. Teoremas, definições, demonstrações, axiomas e representações são essenciais para que a linguagem matemática seja compartilhada. Por ser uma linguagem específica de um saber há um predomínio no seu ensino e há peculiaridades inerentes aos objetos matemáticos que podem causar conflitos em sua interpretação e equívocos epistemológicos, pois “em cada contexto, a regra pode adquirir um significado diferente e o aluno, que deveria aplicar a mesma regra, aplica outra em seu lugar” (Silveira, 2015).

Esta situação pode ser verificada quando, no Ensino Fundamental II (EF II), os alunos são ensinados a dividir dois polinômios por técnicas apropriadas para a aprendizagem. No entanto, quando esta divisão aparece no Ensino Superior (ES), em um tema específico, como por exemplo uma Integral Dupla de funções de várias variáveis, em que deveriam aplicar a mesma regra, muitos alunos não associam o que aprenderam no EF II em uma situação problema no ES.

Na Tabela 4 mostramos como a divisão de polinômios se apresenta em um contexto específico do EF II e em uma situação do ES, ora como tecnologia ora como técnica.

livro didático e, pragmáticas, quando empregadas em situações distintas (um como tecnologia e o outro como técnica).

Há o uso dos três tipos de raciocínios. Inicialmente, o estudante do EF-II processa a semiose para aprendizagem do objeto, uma ideia nova presente como um raciocínio abduutivo, em seguida, utiliza as regras da linguagem dicionarizada para a dedução das técnicas e tecnologias a serem aplicadas. No entanto, quando o discente está no ES e precisa mobilizar o raciocínio indutivo, para transitar do particular (a divisão de polinômios do EF-II), para a generalização (a técnica necessária para solução de uma Integral Dupla) ele não consegue identificar as regras necessárias para realizar a divisão neste contexto.

Brandão (2021) alerta quanto ao emprego em sala de aula e pela sociedade da linguagem dicionarizada, pois ela pode ser comunicada ou divulgada por meio de discursos excludentes, elitistas e de poder, com consequências danosas para a aprendizagem de conceitos matemáticos. O emprego excessivo daquela linguagem tem “inibido” o desenvolvimento de outras matemáticas e/ou a descoberta de métodos diversificados de ensinar e aprender a disciplina; restringido a divulgação e expansão da aplicação de seus objetos matemáticos na evolução científica (ou no cotidiano) que extrapola o espaço escolar e imposto a equabilidade do ensino para matemáticos e não matemáticos.

Não defendemos a exclusão da linguagem dicionarizada, pois isso desconstituiria a ciência matemática como um corpo de conhecimento. Inferimos a necessidade de expansão da linguagem matemática para um mundo de intensas modificações, em que se exige habilidades numéricas que estão para além da memorização de fórmulas e conceitos matemáticos em situações distintas da época em que foram criados. Para Brandão (2021, p.99), a linguagem contrafactual é aquela que:

não tem regras, não tem convenção, apenas imprime uma qualidade original, uma intuição. Para caracterizá-la tomamos do hindu a expressão: “ver com o terceiro olho”, que imprime a capacidade humana de ir além da realidade física, ou enxergar para além das aparências. [...]. A linguagem contrafactual percorre um caminho em intensas transformações, é autorregulável, autocorretiva e, portanto, científica também. [...]. Ela é circunstancial quando a percepção dos fenômenos exige posturas, percepções e movimentos transformadores, agregando conhecimentos originais emergentes de outras ideias e técnicas.

Esta linguagem surge quando os matemáticos, os artistas, os cientistas desenvolvem ideias novas, conceitos, experiências em que a criatividade se revela de maneira distinta do que está posto institucionalmente. O estudante que realiza um caminho distinto do professor para

responder a uma tarefa, desenvolve a linguagem contrafactual, livre de imposições para abrir caminho para a descoberta. Neste sentido, Brandão (2021, p.98) assevera que

não se revela como fatos, comprováveis e concretos, mas algo virtualmente existente na mente humana, um conjunto de especulações que emergem de uma teia de relações irracionais, que se apresentam como raciocínios sem nexos, sem preocupação de atentar para a certeza da ficção especulativa. Por isso são livres e são internos a cada ser humano, são organizações simbólicas do próprio sujeito, que tece uma malha de relações, interpretações, significados e representações dele com o mundo.

Quando a autora afirma ser uma linguagem autorregulável e autocorretiva, ela relativiza o julgamento de valor em que se atribui o certo ou o errado que permite a existência do terceiro excluído. Ou seja, pode haver uma fase de transição entre a linguagem dicionarizada e a contrafactual em um fluxo contínuo, sem direção fixa, em que as duas transitam de forma complementar. Brandão (2021, p.98) explica:

As duas linguagens - dicionarizada e contrafactual - são instrumentos, com finalidades distintas: na primeira o fim é externar e aplicar as regras, deduções e induções reconhecidas pela comunidade matemática expressas em praxeologias matemáticas e didáticas. Toma o instrumento como um símbolo, que serve de convenção para se provar algo, um hábito. Na segunda, ela é um instrumento que nos “faz ver” (Herrero,1988, p.31), contemplar, refletir, criar.

Diante desta distinção percebemos que a linguagem contrafactual propõe uma “nova ordem” à Matemática, em que a criatividade guia os caminhos e “o insight iluminante tende a ser olhado como ameaça de desordem ou desestabilização, antes de ser reconhecido como contributo válido no sentido de crescimento da pluralidade singular dos homens” (Vergani, 2009, p. 180). Podemos citar um exemplo matemático, quando os conjuntos numéricos se ampliam com a introdução dos números complexos.

Para Brandão (2021), há duas outras linguagens restritas à sala de aula: a linguagem em curso e a em (dis) curso. A linguagem em curso se apresenta na elaboração feita pelo docente em torno de organizações matemáticas e didáticas para explicar um determinado assunto e, ao colocar em ação o que propôs para o desenvolvimento de sua exposição frente a uma turma. Este novo texto, em que o docente escreve ou explicita oralmente sua própria interpretação é o que Chevallard (1991) denomina “metatexto” que é mais difícil de ser exemplificado, pois acontece no “ato da fala” (Austin, 1990) ou nas anotações feitas por cada professor. A linguagem em curso se baseia na repetição de livros didáticos e de metodologias de ensino pautadas no paradigma de “visita a obras”.

A autora afirma que a linguagem em (dis)curso é, à revelia, a linguagem em curso, pois é por intermédio de um conhecimento mais amplo e profundo das organizações matemáticas que é possível estabelecer organizações didáticas que viabilizam

lidar com o mesmo assunto por vários pontos de vista. [...]. toma o conceito de relatividade do conhecimento no sentido filosófico, em que atribui ao conhecimento um caráter necessariamente limitado por depender de fatores variáveis, como a particularidade do sujeito, o contexto que é produzido, entre outros (Brandão, p. 109).

Cada uma das quatro linguagens é composta por saberes que as relacionam. De forma sucinta, a linguagem contrafactual tem vínculo com o saber abduativo que tem um papel fundamental na percepção sensível, atribuída a uma visão transcendental que emerge do processo criativo na elaboração de novas praxeologias matemáticas e didáticas de forma não convencional e não normatizada para perceber os objetos matemáticos. Em relação à linguagem dicionarizada, optamos por dois tipos de saberes: o advindo da construção epistemológica do matemático e o saber social, cultural e histórico que participa desta construção com os problemas propostos.

Para a linguagem em curso, elencamos dois saberes: o institucional oriundo de livros didáticos, dos currículos, da noosfera que influenciam as interpretações do objeto matemático e o saber ensinado pelo professor, que realiza a transposição didática interna e imprime suas interpretações individuais ao objeto. Para finalizar, a linguagem em (dis)curso estabelece o saber das interpretações subjetivas e pragmáticas, para construir uma interpretação individual e crítica, que se posiciona diante das relações de poder embutidas nos discursos, nas instituições. Na Figura 1, sintetizamos os quatro tipos de linguagens e alguns dos múltiplos saberes que as circunscrevem.

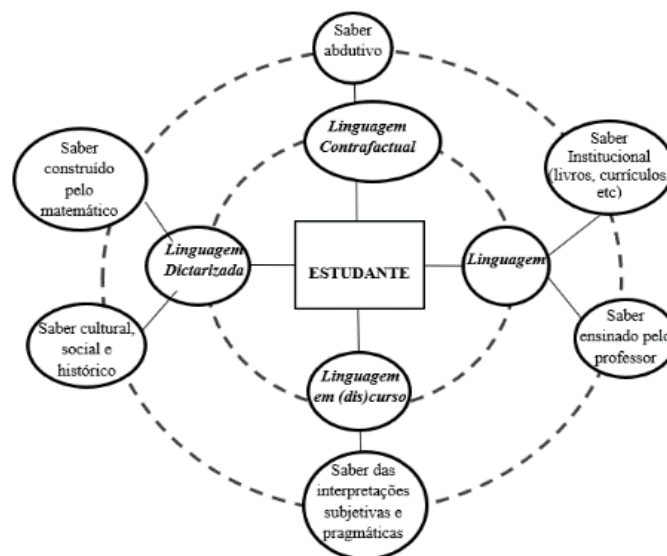


Figura 1.

Síntese dos quatro tipos de linguagens e os saberes relacionados (Brandão, 2021)

Os saberes na Figura 1 são pessoais, culturais, históricos, sociais, matemáticos, abduativos e estão envolvidos no processo formativo de um estudante. É na ação em sala de aula que o professor buscará o equilíbrio entre as quatro linguagens. No entanto, Brandão (2021) esclarece que, entre os quatro tipos de linguagem, existe uma proporcionalidade inversa desenvolvida em contextos de uso e que pode ser analisada em duas direções: na verticalidade, quanto mais se aplica a linguagem dicionarizada, menos linguagem contrafactual é produzida; de forma análoga, quanto mais linguagem em (dis)curso, menos linguagem em curso. Na horizontalidade, quanto mais baixo for o emprego da linguagem dicionarizada mais elevada será a linguagem em (dis) curso; quanto mais baixa for a linguagem contrafactual será elevada a linguagem em (curso), como pode ser visualizado na Figura 2.

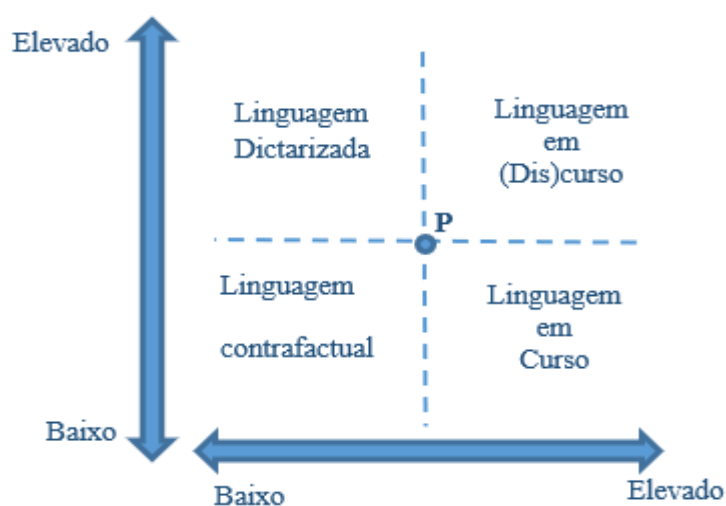


Figura 2.

Movimento proporcional das quatro linguagens (Brandão, 2021, p.117)

O ponto de equilíbrio como a forma ideal do uso das quatro linguagens é marcado pelo ponto P na Figura 2, onde os níveis de proporcionalidade atingem um nível de imbricamento ideal para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Entretanto, ao acrescentar uma dimensão ao problema didático, alguns questionamentos advindos das quatro linguagens precisam ser considerados como guias para a observação dos fenômenos, que emergem da sala de aula durante a realização de tarefas e institucionalização de conceitos. Assim, elaboramos algumas perguntas para cada uma das linguagens na Tabela 5.

Tabela 5.

Síntese das perguntas formuladas para o problema didático sob a vertente da linguagem (Brandão, 2021)

Tipo de Linguagem	Características	Perguntas Formuladas
Linguagem Dictarizada	<ul style="list-style-type: none"> • Simbólica • Regras e normas • Raciocínio dedutivo e indutivo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Quais expressões ou palavras estão diretamente relacionadas com o objeto matemático em estudo? 2. Quais significados eles geram que facilitam/ dificultam a compreensão do objeto epistemológico? 3. Qual a relevância dos símbolos matemáticos para a compreensão do objeto matemático? 4. Como e quando aplicar uma regra matemática em tarefas distintas?
Linguagem Contrafactual	<ul style="list-style-type: none"> • Raciocínio abduutivo • Sensibilidade perceptiva • Criatividade 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Qual o sentido coletivo do ensino de um determinado objeto matemático? 2. De qual mundo é retirado a razão de existir do objeto matemático pleiteado? 3. O que eu posso criar com esse objeto matemático? 4. O que já existe no mundo que eu possa usar para ensinar esse objeto matemático? 5. Quais registros me permitem extrapolar a visão limitada que o “eu” tem da matemática?
Linguagem em Curso	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretações simbólicas • Contexto de uso interno a matemática 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Quais as variações do objeto matemático em contextos de uso no próprio campo da matemática podem ser verificadas? 2. Como são interpretadas as variações das regras envolvendo o objeto matemático em estudo?
Linguagem em (Dis)curso	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretações subjetivas e intersubjetivas do estudante e do professor • Críticas as relações de poder • Propõe novas praxeologias matemáticas e didáticas 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Quais as interpretações possíveis que podem emergir do objeto matemático, por parte dos estudantes e dos professores? 2. Quais atividades podem ser construídas que possibilitem discussão e ações viáveis para a interpretação do objeto matemático? 3. Como pode o sujeito sujeitado criticar? (Araújo, 2004, p.243); 4. Qual é a importância desse objeto matemático para a sociedade? 5. Quais significados podem ser produzidos a partir do contexto de uso desse objeto matemático? 6. Qual o “mundo vivo” que estão inseridos os estudantes ao qual vou apresentar o objeto matemático? 7. Como o objeto matemático pode contribuir para o desenvolvimento social do “mundo vivo” ao qual os estudantes pertencem?

Enfatizamos que é a ação, em sala de aula promovida pelo diálogo entre os agentes do sistema didático, que possibilitará a ruptura do paradigma monumentalista. Neste movimento é necessário propor tarefas que permitam aos discentes empregar o raciocínio abduutivo para criar perguntas e buscar diferentes respostas, o que nos fez recordar uma propaganda publicitária a respeito de ciência, que apresentava a afirmação de Einstein (1955) de que “não são as respostas que movem o mundo, são as perguntas”.

Por este motivo elaboramos algumas tarefas em que as quatro linguagens podem ser organizadas, no intuito de pôr em ação os constructos teóricos criados. Bem como, mostrar que as dimensões do problema didático têm a linguagem como um ponto de fronteira capaz de fundamentar todas as outras. Na próxima seção, indicaremos os processos metodológicos escolhidos para o desenvolvimento das ações que foram limítrofes para o uso das quatro linguagens.

Cenário e participantes da pesquisa⁶

Esta pesquisa é de cunho qualitativo, e as interpretações são provenientes daquele que atribui um significado aos dados coletados. Para Creswell (2010), a pesquisa qualitativa é “o processo de pesquisa que envolve as questões e os procedimentos que emergem, os dados tipicamente coletados no ambiente do participante, a análise dos dados honra um estilo indutivo e as interpretações feitas pelo pesquisador acerca do significado dos dados”. Para a coleta fidedigna das discussões realizadas durante as atividades propostas os encontros foram gravados em áudio e vídeo.

Contamos com a participação de doze estudantes, seis de cursos de Engenharias e seis, da Licenciatura em Matemática de duas instituições públicas de uma cidade do interior da Bahia, em um curso presencial extracurricular denominado: “Se Integre Duplamente as Superfícies Quádricas”, que ocorreu em cinco encontros aos sábados, dois deles nos dois períodos, matutino e vespertino e os demais, apenas no matutino.

Um dos critérios para a seleção dos participantes era ter cursado a componente curricular Cálculo Diferencial e Integral III (em cuja ementa consta a Integral Dupla como um dos temas a ser estudado), pois tínhamos como objetivo verificar se os estudantes produziam significados para o conhecimento previamente adquirido e se os relacionavam a outros contextos não abordados nos livros didáticos.

Para isto, entregamos em papel A4 uma tarefa escrita e original, que primava por enunciados diferentes dos que são apresentados nos livros adotados pelos cursos das graduações citadas. A atividade intitulada “Vaga de emprego” foi entregue no final do segundo encontro e os estudantes a devolveriam até um dia antes do último encontro, com o objetivo de investigar

⁶ Os participantes da pesquisa assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), pois esta pesquisa faz parte de um projeto maior do Grupo de pesquisa “*Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática – PEAMAT*” do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, que foi submetido ao comitê de Ética da PUC-SP. PEAMAT. Portanto, os autores deste artigo eximem explicitamente a *Acta Scientiae* de quaisquer consequências daí decorrentes, incluindo a plena assistência e eventual ressarcimento a qualquer dano resultante a quaisquer dos participantes da pesquisa, de acordo com a Resolução nº510, de 07 de abril de 2016, do Conselho Nacional de Saúde do Brasil.

se os conhecimentos adquiridos no processo formativo dos estudantes os possibilitariam desenvolver um raciocínio abduutivo para a formulação da questão de autoria própria.


Em uma análise *a priori*, suscitamos que teriam dificuldades em empregar os conceitos matemáticos com a graduação em que estavam matriculados, por três motivos: o primeiro, é que os livros didáticos nas bibliotecas não promovem essa articulação; o segundo, a abordagem das organizações matemáticas e didáticas elaboradas pelos docentes não têm contemplado esta vacância ou se contemplam não há divulgação do material produzido e, em terceiro, a inexistência em *sites* de busca online de modelos que possam contribuir para a execução da tarefa, o que demanda criatividade para elaboração e solução da questão.

Findo o prazo destinado a execução da tarefa os estudantes socializaram suas respostas. Na seção seguinte, apresentamos as respostas para a tarefa analisando-as à luz da dimensão da linguagem.

As ações em ato

O ineditismo da tarefa se explica por três motivações: a pretensão da autora de romper com os tipos de enunciados dos livros didáticos adotados pelas duas universidades; proporcionar uma situação problema em que o raciocínio abduutivo estivesse presente desde a elaboração até o desenvolvimento pelos estudantes; e em último, a construção de uma teia de significados em que os quatro tipos da linguagem fossem incitados durante a execução. Com tal intento, apresentamos a Atividade 1 (Figura 3) intitulada “Vaga de Emprego”.

**VAGA DE EMPREGO PARA
PESSOAS CRIATIVAS**



Você foi escolhido para ministrar uma aula sobre o tema: **Integral Dupla aplicada aos parabolóides hiperbólicos**, o seu desempenho te garante uma vaga de emprego para uma empresa que está escrevendo livros de Cálculo Diferencial e Integral.

Remuneração: R\$ 25000,00 mensais, mais uma comissão de 2% em cada livro vendido e um valor relativo aos seus direitos autorais.

Banca examinadora: é formada pelas cinco pessoas mais criativas do mundo, certificadas por órgãos internacionais de credibilidade idônea.

Critério de seleção: formulação de uma questão inédita sobre o tema e aplicada a graduação em que está matriculado.

Crie a questão e garanta esse emprego!

Figura 3.

Atividade 1 (Brandão, 2021)

Para as análises dos dados coletados escolhemos três categorias: o uso do raciocínio abduativo, os significados produzidos e a dimensão da linguagem. Neste sentido, primamos em responder ao seguinte problema didático: a atividade matemática que envolve a Integral Dupla possibilitou aos estudantes mobilizarem o raciocínio abduativo e as dimensões da linguagem para a produção de significados em contextos diversos e no âmbito da Matemática?

Dos doze estudantes que participaram do curso, apenas cinco deles (E_2 , E_3 , E_6 , E_8 , E_{11}) responderam a tarefa e tiveram seus protocolos analisados de acordo com as categorias já explicitadas.

O estudante E_2 apresentou a solução (Figura 4) por meio dos registros das representações algébricas e gráficas para expressar o raciocínio abduativo na associação que fez entre os elementos da sua graduação e o objeto matemático o que possibilitou articular a linguagem contrafactual com a linguagem dictarizada e em curso. Ao utilizá-las é verificável seu conhecimento de tecnologias, técnicas e teorias a serem aplicadas na atividade, bem como,

as semioses em ação, ao encadear procedimentos lineares expressos por símbolos que orientam a representação escrita do raciocínio dedutivo.

Embora o estudante não tenha apresentado uma solução para o problema no âmbito da linguagem dicionarizada e em curso, teve êxito para a linguagem contrafactual e em (dis)curso. Isto nos faz inferir que o estudante, ao ser desafiado diante de uma situação inédita, conseguiu acessar elementos de suas experiências anteriores para construir com criatividade um problema.

Questão “vaga de emprego”

A densidade de carga linear, superficial e volumétrica é uma quantidade de carga elétrica em uma linha, superfície ou volume respectivamente. Ela é medida em coulombs por metro (C/m), metro quadrado (C/m²), ou metro cúbico (C/m³), respectivamente. Como existem cargas positivas e negativas, a densidade pode tomar também valores negativos. Assim como qualquer densidade, ela depende da sua posição. Quando temos uma superfície de

$z = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}$ e uma região D limitada por $y = x-1$ e $y^2 = 2x + 6$, qual a densidade da carga elétrica da região D, que está contida no parabolóide hiperbólico?

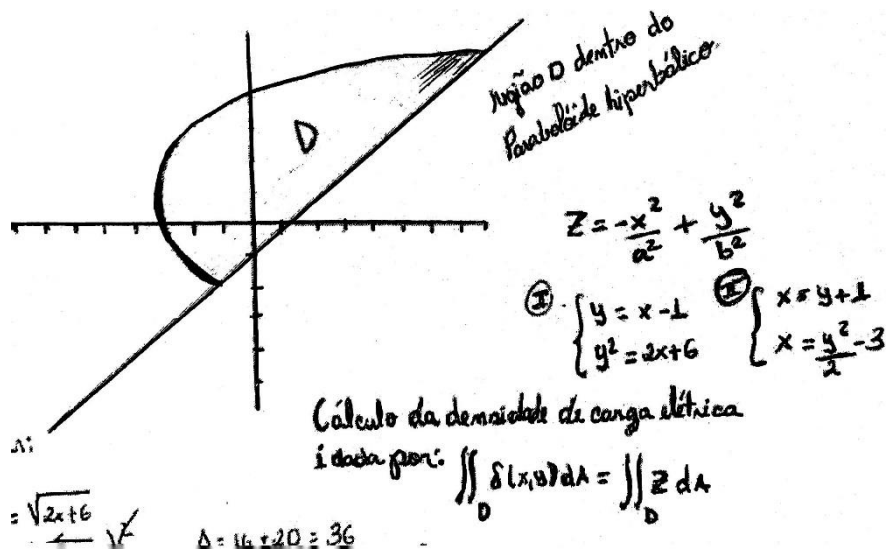


Figura 4.

Protocolo de solução da Atividade 1 do estudante E₂⁷ (Brandão, 2021, p.360)⁸

⁷ Todos os estudantes assinaram o Termo de Consentimento Livre Esclarecido e os documentos exigidos pelo Conselho de Ética.

⁸ Foi necessário transcrever as soluções dos protocolos dos estudantes, fidedignamente, pois as imagens ao serem digitalizadas ficaram ilegíveis.

Duas formas de responder:

$$I) \begin{cases} y = x - 1 \\ y = \sqrt{2x + 6} \end{cases} \quad \begin{aligned} x - 1 &= \sqrt{2x + 6} \\ (x - 1)^2 &= (\sqrt{2x + 6})^2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 2x + 6 \\ x^2 - 4x - 5 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Delta &= 16 + 20 = 36 \\ x &= \frac{+4 \mp 6}{2} = \frac{x'}{x''} = \frac{5}{-1} \end{aligned}$$

$$D = \{(x, y) / -1 < x < 5; \sqrt{2x + 6} < y < x - 1\}$$

$$II) \begin{cases} x = y + 1 \\ x = \frac{y^2}{2} - 3 \end{cases} \quad \begin{aligned} y + 1 &= \frac{y^2}{2} - 3 \\ 2y + 2 &= y^2 - 6 \\ y^2 - 2y - 8 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Delta &= 4 + 4.8 = 36 \\ y &= \frac{2 \pm 6}{2} = \frac{y'}{y''} = \frac{4}{-2} \end{aligned}$$

$$D = \{(x, y) / -2 < y < 4 \text{ e } \frac{y^2}{2} - 3 < x < y + 1\}$$

O estudante E₈ do curso de Engenharia Civil propôs uma situação-problema (Figura 5) que envolvia a construção de uma usina hidrelétrica entre o rio Negro e o rio Solimões em que precisava calcular a vazão de água.

O Rio Negro e o Rio Solimões são dois rios localizados no estado do Amazonas que constituem o chamado Encontro das Águas, inicialmente, devido a vários fatores, as águas não se misturam, esse fenômeno dura por cerca de 6km. Foi introduzido nesse encontro uma usina hidroelétrica no formato de um parabolóide hiperbólico.

A usina foi construída de modo em que um dos lados da hipérbole é a barragem do Rio Negro, enquanto o outro lado é a barragem do Rio Solimões. E entre o solo e o vértice da parábola existe uma vazão d'água que formará um novo curso para o que virá a ser o Rio Amazonas. Nesta vazão ocorre queda d'água de ambos os rios fazendo com que os geradores centrais funcionem, gerando assim energia elétrica. Utilizando integral dupla, calcule o volume máximo permitido para a vazão d'água entre uma das barragens e as turbinas de geração de energia.

Solução:

Tomando a = 1; b = 1; c = 1; k = 2

$$F(x, y) = y^2 - x^2$$

curva 1 → -x²

curva 2 → -x² + k²

$$\begin{aligned} \iint y^2 - x^2 dy dx &\rightarrow \int \left[\frac{y^3}{3} - x^2 y \right]_{-x^2}^{-x^2+4} dx \\ I &= (x^4 - 8x^2 + 16) - \left(\frac{-x^2+4}{3} \right) + x^4 - 4x^2 - \left(-\frac{x^6}{3} + x^4 \right) \\ I &= \frac{(-x^6 + 4x^4 + 8x^4 - 32x^2 - 16x^2 + 64)}{3} + x^4 - 4x^2 + \frac{x^6}{3} - x^4 \\ I &= \frac{12x^4 - 48x^2 + 64}{3} - 4x^2 \\ I &= 4x^4 - 20x^2 + \frac{64}{3} \end{aligned}$$

$$\int (4x^4 - 20x^2 + \frac{64}{3}) dx \rightarrow \frac{4}{5}x^5 - \frac{20}{3}x^3 + \frac{64}{3}x \Big|_0^1 \rightarrow \frac{4}{5} + \frac{44}{3} = \frac{12+220}{15} = \frac{232}{15} \text{ u. v}$$

Figura 5.

Protocolo do Estudante E₈ da Atividade 1 (Brandão, 2021)

O estudante E₈ empregou conhecimentos de Integral Dupla para o cálculo da medida do volume, ou da vazão da água entre uma das barragens e as turbinas de geração de energia. Esta aplicação nos remete à razão de existir do objeto matemático, que é um dos princípios da

dimensão epistemológica do problema didático. Há o emprego das linguagens dicionarizadas em curso, quando as tecnologias, técnicas e teorias são empregadas na execução da tarefa e a linguagem contrafactual e em (dis)curso quando articula outros contextos para promover a mobilização dos raciocínios abduativos e dedutivos.

Para o desenvolvimento da situação-problema o estudante E_8 cria uma função $F(x, y)$ e os limites de integração quando identifica cada barragem como uma curva, representada pelas equações $y = -x^2$ e $y = -x^2 + 4$ e quando estabelece um intervalo de variação para x pertencente ao conjunto dos reais e expresso por $0 \leq x \leq 1$. Se analisarmos os dados fornecidos no enunciado da situação, não é possível detectar esses elementos. Assim, para a linguagem dicionarizada e em curso o enunciado não condiz com os cálculos realizados, o que seria um equívoco da linguagem empregada e na matemática não teria qualquer validade científica. No entanto, se observarmos a linguagem contrafactual e em (dis)curso é possível verificar o rompimento dos parâmetros das atividades dos livros didáticos ao introduzir uma versão bem peculiar em que a criatividade se revela em momentos distintos.

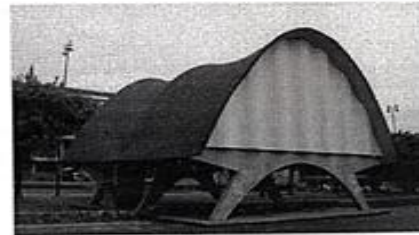
O modelo matemático proposto por E_8 não tem convencionalismos, está livre de julgamento e expressa, de forma bem particular, o raciocínio abduativo empregado pelo estudante. Nos dá também uma orientação de como algumas tarefas podem ser organizadas em torno de praxeologias matemáticas para o alcance do paradigma do questionamento do mundo e da formulação de questões que atendam ao dispositivo do PEP. Para além, a questão proposta por E_8 nos fez refletir o quanto a educação tem desperdiçado talentos e criatividade em sala de aula ao não permitir que os estudantes construam e resolvam seus próprios problemas. Continuamos reproduzindo modelos matemáticos elaborados em uma vertente que não atende aos não matemáticos e quando os objetos matemáticos precisam ser acessados em contextos extra matemáticos os envolvidos não se sentem capacitados, pois não foram preparados para isso em seu processo formativo.

A terceira solução foi do estudante E_6 que apresentou uma situação-problema que envolvia um contexto da Engenharia Civil na construção da cobertura do Pavilhão dos Raios Cósmicos (Figura 6) situado em uma cidade universitária do México, do arquiteto Feliz Condela em 1951. Realizamos uma busca em sites de pesquisa e identificamos que a proposta não é inédita, embora possa ser trabalhada como um modelo de questão aberta para o desenvolvimento de um PEP com algumas adaptações e pesquisas que promovam mobilizar praxeologias matemáticas em torno da Integral Dupla.

Tentativa de uma questão aplicada à integral dupla nos paraboloides hiperbólicos!

Questão: Para economizar cimento armado, utilizam-se coberturas que auxiliem tal economia. Para isso, uma cobertura pode se utilizar de paraboloides hiperbólicos, como no caso do Pavilhão dos Raios Cósmicos em 1951 que faz uso dessas superfícies regradas. O arquiteto responsável foi o espanhol Felix Candela (1910-1997).

Este pavilhão, situado na Cidade Universitária, na cidade do México, tinha como fim albergar um laboratório que requeria uma cobertura não ultrapassasse 1,5 centímetros. A cobertura é dada por dois paraboloides hiperbólicos acoplados a uma parábola principal.



Diante disso, deseja-se calcular qual a quantidade de cimento armado utilizado na área dessa superfície.

Porém, não achei nada a respeito da equação específica que rege essa cobertura, sendo impossível a realização do cálculo.

Figura 6.

Protocolo da solução do estudante E₆ da Atividade 1 (Brandão, 2021)

Inferimos que o estudante usou a linguagem contrafactual e em (dis)curso quando se afastou dos enunciados dos livros adotados e relacionou a Atividade 1 com um contexto externo a Matemática. Ele procurou a linguagem dicionarizada e em curso, por meio de uma “equação específica que rege essa cobertura” para indicar que era “impossível a realização do cálculo”. Tal conclusão nos fez refletir que ele poderia ter criado ou simulado conjecturas para a aplicação de praxeologias matemáticas que “alimentam” a linguagem dicionarizada.

As duas soluções que registramos a seguir são dos estudantes E₃ e E₁₁ ambos da Licenciatura em Matemática. Identificamos que as aplicações não são inéditas, pois encontramos trabalhos científicos publicados e exemplos semelhantes em sites de busca na Internet. No entanto, destacaremos as adaptações que os estudantes fizeram, pois acreditamos serem essenciais para a análise das categorias escolhidas.

O estudante E₁₁ trouxe como solução da atividade um modelo de uma batata frita industrializada que tem o formato de um parabolóide hiperbólico (Figura7) que é vendida em uma embalagem cilíndrica. É necessário pontuar que durante o quarto encontro a pesquisadora levou a batata frita, como é comercializada, para o lanche e destacou a semelhança do formato da batata frita com o parabolóide hiperbólico.

Suponhamos que uma batata, da marca Pringles, é descrita pela fórmula $\rho(x, y) = \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{8}$ (aproximadamente) e que sua lata cilíndrica possui 7 cm de diâmetro na base e 25 cm de altura. A batata intersepta um cilindro de 6cm para que, ao entrar na lata, ela possa se locomover. Dado que as batatas deixam um espaço entre elas e a vasilha de 5 cm em relação a altura e que as batatas possuem 2mm de espessura. Quantas batatas há nessa lata? Qual a superfície total que essas batatas possuem? (Considere apenas um lado da batata).

Solução:

Precisamos delimitar um máximo global e um mínimo global na função para encontrar a altura de cada batata e por consequência a quantidade de batatas no pacote.

Com a quantidade de batatas, calculamos a área de cada batata e depois a área total que essas batatas possuem juntos (ao total).

$$z=f(x, y) = \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{8} \quad \text{cilindro } 0 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \quad A(s) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta; dA = r dr d\theta; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq r \leq 3$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{-x}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}x^2; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{16}y^2$$

$$A(s) = \iint_s \sqrt{1 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{16}y^2} dA$$

$$A(s) = \iint_s \sqrt{1 + \frac{1}{16}r^2} \cdot r dr d\theta \quad 1 + \frac{1}{16}r^2 = u$$

$$A(s) = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{u} \cdot 8 du d\theta \quad \frac{1}{8} r dr = du \quad r dr = 8 du$$

$$8 \cdot \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 d\theta = \frac{16}{3} \cdot 3 \cdot 19.2\pi = 55,36\pi m^2 \text{ área da superfície da batata (um lado)}$$

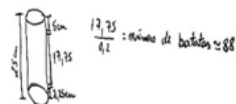
Geometricamente e algebricamente podemos verificar que na função

$\rho(x, y) = \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{8}$ a função terá máximo para $x = 0$ e $y = 3$, pois o coeficiente de x^2 é negativo e terá mínimo para $y = 0$ e $x = 3$, pois o coeficiente de y^2 é positivo

Máximo: $f(0,3) = \frac{9}{8} = 1,125$

Mínimo: $f(3,0) = -\frac{9}{8} = -1,125$

Logo a altura da batata é dada por 2,25 cm



Área total de superfície =
 $88 \times 55,36 = 4.913,2 \text{ cm}^2$

Figura 7.

Protocolo do estudante E₁₁ da Atividade 1 (Brandão, 2021)

Na análise das praxeologias matemáticas abordadas por E₁₁ houve o emprego do raciocínio abdução para a elaboração da função definida por $f(x, y)$ a ser integrada, os domínios da integração, o uso de representações algébricas para o cálculo da medida da área da superfície da batata, o cálculo de valores máximos e mínimos, o uso de coordenadas polares em Integral Dupla.

Identificamos uma ponte entre a linguagem dicitada e em curso com a linguagem contrafactual e em (dis)curso, embora, a ênfase do estudante E₁₁ estivesse em torno da linguagem dicitada e em curso, pois abordou alguns objetos matemáticos com profundidade e os empregou mediando técnicas e tecnologias inerentes a Integral Dupla. Inferimos que tal olhar se justifica pela graduação próxima daquele discente.

Quanto ao raciocínio abduutivo ele nasce da elaboração da função de duas variáveis, da associação com um modelo de formato do parabolóide hiperbólico e da forma que determina a quantidade de batatas que serão armazenadas na vasilha cilíndrica. Mas se prolonga para o raciocínio dedutivo, presente na técnica, nos símbolos mediados e na imagem do cilindro representado.

A quarta solução foi do discente E₃ que abordou a Integral Dupla em um projeto arquitetônico de um hangar em um aeroporto da cidade de Kansas (Figura 8). Encontramos na Internet um exemplo explorado por Fontes (2005), que o associou ao formato de um parabolóide hiperbólico.

Embora não seja original analisamos a proposta do estudante E₃, que apresentou domínio das praxeologias matemáticas que foram empregadas na solução e usou, de forma acentuada, a linguagem dicionarizada e em curso. No entanto, nos comentários no final do protocolo é possível identificar indícios do raciocínio abduutivo, como: registrar que as dimensões não são fiéis a estrutura original; ter usado o *software* GeoGebra para a obtenção da representação gráfica da equação matemática utilizada por ele; colocar a fonte da pesquisa *online* que realizou e levantar futuras possibilidades de trabalhar com a questão elaborada.

Atividade Integral dupla aplicada aos parabolóides

Imagem disponível em: <https://groucho-karl-marx.blogspot.com/2011/11/american-airlines-files-for-bankruptcy.html>

A maior casca PH (parabolóide hiperbólico) tipo sep foi arquitetada por Milo Ketchum para o hangar de manutenção de TWA no aeroporto da cidade de Kansas. Esta estrutura é composta pela interseção de duas selas, com um vão entre apoios de aproximadamente, 17,5m com espessura de 10 cm de concreto. Tal estrutura permitiu que naquele lugar fosse usado como hangar para aviões, e mais, o perfil PH possibilitou a adaptação ao volume a ser protegido. Vamos esboçar um volume para tal estrutura. Considere o vão de 100m e pelas imagens estimamos que o prédio formado tenha um formato quadrangular. Calcule o volume do sólido que se encontra abaixo do parabolóide hiperbólico $z = \frac{x^2}{324} - \frac{y^2}{324}$ e acima do retângulo $R = [-100,100] \times [-100,100]$

Resolução:

Para calcularmos tal volume (volume citado no texto) iremos utilizar dos artifícios da integral dupla, como tal parabolóide tem forma simétrica nos 4 primeiros octantes iremos calcular a integral sobre o seguinte domínio de integração $R' = [0,100] \times [0,100]$ e o resultado multiplicar por 4.

$$\begin{aligned} \int_0^{100} \int_0^{100} \frac{x^2 - y^2}{324} dx dy &= \frac{1}{324} \int_0^{100} \int_0^{100} (x^2 - y^2) dx dy = \frac{1}{324} \int_0^{100} \left[\frac{x^3}{3} - y^2 x \right]_0^{100} dy = \\ &= \frac{1}{324} \int_0^{100} \left[\frac{100^3}{3} - y^2 \cdot 100 - 0 \right] dy = \frac{1}{324} \int_0^{100} \left(\frac{100^3}{3} + 100y^2 \right) dy = \\ &= \frac{1}{324} \left(\frac{100^3}{3} y + \frac{100}{3} y^3 \right)_0^{100} = \frac{1}{324} \left(\frac{100^4}{3} + \frac{100^4}{3} \right) = \frac{1}{324} \cdot \frac{2 \cdot 100^4}{3} = \end{aligned}$$

$$\frac{2 \cdot 100^4}{972} m^3 = \frac{100^4}{486} m^3 = 206.761,32 m^3$$

Como calculamos no 1º octante iremos multiplicar o valor por 4 e obter o volume correspondente aos octantes correspondentes a z positivo. Assim uma estimativa do volume para essa estrutura parecida como a acima citada é

$$V = 823.045,27 m^3$$

Comentários:

- 1- Não calculamos o volume do sólido.
- 2- As dimensões não são fáceis ~~ou as originais~~ como ~~alg~~ que não conseguimos encontrar os medidos oficiais.
- 3- Poderíamos estar melhor a altura e assim obter outra equação para a PH.
- 4- A equação foi conseguida através de manipulações no quadrado.
- 5- Essa questão tem muito a melhorar.

Figura 8.

Protocolo do estudante E₃ da atividade 1 (Brandão, 2021)

Nos comentários tecidos pelo estudante verificamos uma preocupação com o julgamento, pois apresenta sua importância quando afirma que a “questão tem muito a melhorar”. Esta percepção vem da crença instituída de que o bom professor é aquele que não erra, o que é um dos entraves ao paradigma de questionamento do mundo, pois ao propor uma questão aberta o estudante pode trazer respostas que não estão nas pesquisas realizadas previamente pelo professor, algo que passou despercebido e que o retira da “zona de conforto” (Borba & Penteado, 2007).

Tal posicionamento diante de juízos de valores impostos pela sociedade, nos fez refletir a respeito de algumas restrições subjetivas em que os docentes estão imersos e que se tornam barreiras na implementação de organizações didáticas de cunho mais libertador e autônomo. Desafiar a tradição escolar é um caminho de muitos tropeços, mas com resultados inovadores e surpreendentes.

Após analisar os protocolos dos cinco estudantes foi possível identificar que produziram significados associados aos cursos de graduação a que pertencem. Assim, os estudantes das Engenharias criaram situações externas a matemática, para apresentar, com proeminência, a linguagem contrafactual e em (dis)curso, enquanto os Licenciandos em Matemática se detiveram na linguagem dicionarizada e em curso.

Entretanto, outros significados se apresentaram quando o pesquisador interrogou os estudantes acerca do motivo de não terem respondido a Atividade 1. O primeiro deles, é que a atividade proposta pela professora exigia criatividade para elaboração, enquanto, as dos livros requerem procedimentos técnicos para resolvê-las. Apresentamos os outros, nos recortes da linguagem oral dos estudantes gravada em áudio durante o encontro.

Os estudantes E₆, E₇ e E₁₁ respondem:

E₇: A meu ver, temos muitas questões nos livros que são, basicamente, “calcule”. Não temos de pensar como iremos aplicar o CDI. Foi por isso talvez que não tenha conseguido fazer a questão.

E₆: A atividade se diferencia quando “vaga de emprego”, faz o estudante elaborar e relacionar uma questão com o mundo real e aplicável, no livro é só resolver uma dada equação.

E₁₁: Foi uma atividade contextualizada, que conduz o aluno a sua criação, edição e resolução. Já nos livros são questões mecânicas, que exigem apenas o cálculo.

Fonte: Brandão, 2021.

A comparação feita pelos estudantes caracteriza a importância atribuída pela pesquisadora em estimular a criatividade dos cursistas para proporcionar uma atividade de coautoria. Esse rompimento, com os modelos das tarefas proporcionadas pelos livros adotados, são causas de estranhamentos por parte dos estudantes que se sentem desestabilizados ou, em alguns casos, estimulados com a autonomia facultada. Quanto ao sentimento gerado ao criarem uma questão de CDI relacionada ao curso de graduação do qual são egressos, todos citaram ter dificuldades. Três estudantes não responderam, cinco apenas citaram que tiveram dificuldades, mas não justificaram e, quatro responderam:

E₈: Foi complicado, mas conseguir desenvolver. Aquilo me mostrou que estou no curso certo.

E₁₁: Primeiramente senti dificuldades, pois sair da zona de conforto de apenas resolver, mas depois de elaborado uma aplicação a atividade fluiu tranquilamente.

E₇: Bem, meu caso é Matemática. Tenho que quebrar algumas barreiras para ver melhor como aplicar todo o CDI.

E₁₀: Criar uma questão é mais difícil do que responder, exige criatividade além do conhecimento.

Os participantes foram solicitados a relatarem as dificuldades que sentiram para resolver a questão elaborada, os resultados foram: dois estudantes não conseguiram encontrar um modelo matemático para a descrição da situação elaborada; um dos cursista achou restrito as fontes para uso de dados reais; um outro, descreveu que a associação do parabolóide hiperbólico

com a Engenharia Elétrica foi seu maior desafio e os seis participantes restantes mencionaram a falta de memória para empregar as técnicas de Integração na tarefa criada.

Algumas considerações

O texto propõe a análise do problema didático sob uma quarta dimensão, a da linguagem. Nesta perspectiva mostramos que ela pode ser considerada como um campo de fronteira que propicia elementos externos à matemática para produzir significados distintos dos que são encontrados nos livros adotados para CDI nas universidades. Analisamos também como a linguagem dicionarizada e em curso trazem obstáculos epistemológicos decorrentes de recortes realizados para adequar o saber aos diferentes níveis escolares.

Optamos em expor protocolos respondidos por estudantes das Engenharias e da Licenciatura em Matemática para uma atividade denominada “Vaga de Emprego” em que eles eram solicitados a criarem uma questão de Integral Dupla aplicada aos paraboloides hiperbólicos. Dos 12 participantes do curso, apenas cinco responderam e nos dados coletados foi possível identificar que a atividade proposta mobilizou o raciocínio abduutivo em sua elaboração, nas conjecturas tecidas e que as quatro linguagens se apresentaram de forma contundente.

Quanto aos significados, os estudantes mencionam a diferença da Atividade 1 com as atividades encontradas em livros didáticos, em que são explorados apenas técnicas e tecnologias, com um mínimo de aplicações em outras áreas de conhecimento. Em seus relatos orais afirmaram que não encontraram fontes de pesquisa que os apoiassem na elaboração das questões; a dificuldade de recordar técnicas e tecnologias da Integral Dupla e dos paraboloides hiperbólicos, mesmo com a intervenção da pesquisadora em alguns momentos lembrando-os algumas técnicas e tecnologias referentes a Integral Dupla e superfícies Quádricas; a dificuldade de articular os objetos matemáticos da atividade com a graduação, pois não são assim abordados.

Para pesquisas futuras sugerimos que as atividades criadas sejam analisadas e retornadas com os estudantes para que possam fazer adaptações mais precisas e avaliar o uso da linguagem dicionarizada e em curso no âmbito interno à matemática, como no que tange a linguagem contrafactual e em (dis)curso, em que o raciocínio abduutivo emerge com mais frequência.

Referências

Almouloud, S. A. (2022) *Fundamentos da didática da matemática*. Editora UFPR.

- Araújo, I. L. (2004). *Do signo ao Discurso: introdução a filosofia da linguagem*. Parábola Editorial.
- Aristóteles. (2016). *ÓRGANON: categorias, da interpretação, analíticos anteriores, analíticos posteriores, tópicos, refutações sofisticas/ Aristóteles*; tradução, textos adicionais e notas de Edson Bini/ Edipro. (Série Clássicos Edipro)
- Austin, J. L. (1990). *Quando dizer é fazer*. Tradução de Danilo Marcondes de Souza Filho. Artes Médicas.
- Borba, M., & Penteadó, M. G. (2007) *Informática e Educação Matemática*. Autêntica.
- Brandão, A. K. D. C. (2021). *Um Percurso de Estudo e Pesquisa para o ensino da Integral Dupla: significados e praxeologias mobilizados por estudantes de Engenharia e de licenciatura em Matemática*. 2021. 439p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Bosch, M., Fonseca, C., Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 24, núms. 2-3, p. 205-250.
- Brousseau, G. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. (1996). In: BRUN, J. *Didática da Matemática*. Tradução de: Maria José Figueiredo. (p. 35-113). Instituto Piaget.
- Chevallard, Y. (1991) *La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Enseigné*. La pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplinarite.pdf.
- Chevallard, Y. (2005). *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo Editor.
- Chevallard, Y. (2009b). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. *15e école d'été de didactique des mathématiques*, p. 16-23
- Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. *12th International Congress on Mathematical Education*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/RL_Chevallard.pdf.
- Creswell, J. W. (2010). *Projeto de Pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Tradução de Magda Lopes; Artmed.
- Dante, L. R. (2000). *Matemática: contextos & aplicações*. Editora Ática.
- Dante, L. R. (2008). *Tudo é matemática*. Ática.
- Fontes, R. (2005). *Análise de casca de alvenaria cerâmica armada: tipo paraboloide hiperbólico*. 121p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – UFMG.
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de um problema didáctico: el caso da álgebra elemental. *Relime*.

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362011000200004.

- Herrero, A. (1988). *Semiótica y creatividad: La lógica abductiva*. Palas Atenea.
- Machado, N. J. (1993). *Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua*. Cortez.
- Machado, I. (2003). *Escola de Semiótica: a experiência de Tartu - Moscou para o estudo da cultura*. Ateliê Editorial.
- Paiva, M. (1995). *Matemática*. Moderna.
- Peirce, C. S. (2005). *Semiótica*. Tradução de: José Teixeira Coelho Neto. Perspectiva (Estudos; 46/ dirigida por J. Guinsburg)
- Santaella, L. (2009). *O que é semiótica*. Brasiliense.
- Silveira, M. R. A. A. (2015). *Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a educação matemática*. Editora Livraria da Física – (coleção contextos da ciência)
- Vergani, T. (2009). *A criatividade como destino: transdisciplinaridade, cultura e educação*. Orgs. Carlos A. Farias, Iran Abreu Mendes, Maria da Conceição de Almeida. Tradução de Edgard de Assis Carvalho. Editora Livraria da Física.
- Verret, M. (1975). *Le temps des études*. Honoré Champion.