EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p029-047

Constructos teóricos de Tall para o ensino de derivada: considerações sobre a elaboração de um modelo epistemológico de referência

Theoretical constructs proposed by Tall for teaching derivatives: considerations on the development of an epistemological reference model

Constructos teóricos de Tall para la enseñanza de la derivada: consideraciones sobre la elaboración de un modelo epistemológico de referencia

Les construits théoriques de Tall pour l'enseignement de la dérivée : considérations sur l'élaboration d'un modèle épistémologique de référence

Marcio Vieira de Almeida[1]
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP),
Doutorado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0001-7188-3806

Sonia Barbosa Camargo Igliori [2]
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP),
Doutorado em Matemática
https://orcid.org/0000-0002-6354-3032

Resumo

Este artigo se propõe a contribuir com a discussão deste número da revista EMP em torno da questão "Como desenvolver um Modelo de Referência Epistemológico (MER) para o ensino de Cálculo?", considerando especificamente o ensino da derivada. Os argumentos aqui expostos norteiam-se pela defesa da inclusão de constructos teóricos, como os desenvolvidos por Tall para o ensino de derivada, pelas potencialidades que eles têm de agregar contribuições de ordem cognitiva e didática aos aprendizes e aos professores respectivamente. Os constructos aos quais nos referimos foram denominados por Tall por organizador genérico e a raiz cognitiva da retidão local. Para os autores deste texto a inclusão desses constructos, em um MER, pode favorecer a integração teoria e prática importante ao desenvolvimento do ensino da Matemática. Organizamos as reflexões encadeando ideias sobre: integração teoria e prática; concepção de um MER; ensino da derivada e os construtos teóricos de Tall. Finalizamos a apresentação do artigo reforçando a importância da vigilância sobre a epistemologia dominante do conceito de

[1] mvalmeida@pucsp.br
[2] sigliori@pucsp.br

derivada para o ensino, com vista à busca de contribuições à emancipação da Didática da Matemática com o favorecimento do ensino do Cálculo.

Palavras-chave: Modelo epistemológico de Referência, Ensino do cálculo, Constructos teóricos propostos por David Tall.

Abstract

This article aims to contribute to the discussion in this issue, centered around the question "How to develop a Reference Epistemological Model (REM) for the teaching of Calculus?", more specifically considering the teaching of derivatives. The arguments presented here advocate the inclusion of theoretical constructs, such as the ones developed by Tall for the teaching of derivatives, due to their potential to make cognitive and didactical contributions to students and teachers, respectively. The constructs that we refer to in this text were called generic organizer and cognitive root of local straightness by Tall. The authors of this text consider that adding these constructs to an REM may foster integration between theory and practice, which is important for the development of Mathematics teaching. We organized our reflections by linking ideas related to the integration between theory and practice, the conception of an REM, the teaching of derivatives and Tall's theoretical constructs. We concluded the article emphasizing the importance of continuously observing the prevailing epistemology of the concept of derivatives for teaching, aiming to find contributions that support the emancipation of Didactics of Mathematics and promote effective Calculus teaching.

Keywords: Reference Epistemological model; Calculus teaching; Theoretical constructs proposed by David Tall.

Resumen

Este artículo se propone contribuir a la discusión de este número en torno a la cuestión "¿Cómo desarrollar un Modelo de Referencia Epistemológico (MER) para la enseñanza de Cálculo?", considerando específicamente la enseñanza de la derivada. Los argumentos aquí expuestos se guían por la defensa de la inclusión de constructos teóricos, como los desarrollados por Tall para la enseñanza de la derivada, debido a las potencialidades que tienen para agregar contribuciones de orden cognitivo y didáctico a los aprendices y a los profesores respectivamente. Los constructos a los que nos referimos fueron denominados por Tall como organizador genérico y la raíz cognitiva de la rectitud local. Para los autores de este texto, la inclusión de estos constructos en un MER puede favorecer la integración de teoría y práctica, importante para el desarrollo de la enseñanza de la Matemática. Organizamos las reflexiones encadenando ideas sobre: integración de teoría y práctica; concepción de un MER; enseñanza de la derivada y los constructos teóricos de Tall. Concluimos la presentación del artículo reforzando la importancia de la vigilancia sobre la epistemología dominante del concepto de derivada para la enseñanza, con vistas a la búsqueda de contribuciones a la emancipación de la Didáctica de la Matemática y el favorecimiento de la enseñanza del Cálculo.

Palabras clave: Modelo epistemológico de referencia; Enseñanza del cálculo; Constructos teóricos propuestos por David Tall.

Résumé

Cet article vise à contribuer à la discussion de ce numéro autour de la question : Comment développer un Modèle de Référence Épistémologique (MER) pour l'enseignement du calcul ? en considérant spécifiquement l'enseignement de la dérivée. Les arguments présentés ici sont guidés par la défense de l'inclusion de construits théoriques, tels que ceux développés par Tall pour l'enseignement de la dérivée, en raison de leur potentiel à apporter des contributions d'ordre cognitif et didactique aux apprenants et aux enseignants respectivement. Les construits auxquels nous nous référons ont été nommés par Tall comme organisateur générique et la racine cognitive de la rectitude locale. Pour les auteurs de ce texte, l'inclusion de ces construits dans un MER peut favoriser l'intégration de la théorie et de la pratique, ce qui est important pour le développement de l'enseignement des Mathématiques. Nous avons organisé nos réflexions en enchaînant des idées sur l'intégration de la théorie et de la pratique ; la conception d'un MER ; l'enseignement de la dérivée et les construits théoriques de Tall. Nous concluons la présentation de l'article en renforçant l'importance de la vigilance sur l'épistémologie dominante du concept de dérivée pour l'enseignement, dans le but de rechercher des contributions à l'émancipation de la Didactique des Mathématiques et de favoriser l'enseignement du Calcul.

Mots-clés : Modèle épistémologique de référence ; Enseignement du calcul ; Construits théoriques proposés par David Tall.

Constructos teóricos de Tall para o ensino de derivada: considerações sobre a elaboração de um modelo epistemológico de referência

Com este artigo pretendemos contribuir com a área da Didática da Matemática no que se refere ao questionamento sobre a elaboração de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para o ensino de Cálculo[3]. Para tal, direcionamos nossos argumentos ao conceito de derivada e à discussão da utilização de elementos teóricos, como os constructos teóricos propostos por Tall, no âmbito da Didática da Matemática. Consideramos que a proposição de Tall enriquece a relação entre teoria e prática, bem como agrega reflexões cognitivas e didáticas que favorecem o ensino e a aprendizagem da Matemática. Com essa intenção, organizamos esse texto apresentando elementos que compõem a integração teoria e prática; concepção de um MER; ensino da derivada e os construtos teóricos de Tall.

Sobre a problemática da integração entre teoria e prática, Jaworski (2006) aponta sobre a necessidade de se refletir sobre essa integração e se preocupar com a forma como as pesquisas podem auxiliar o aprimoramento do ensino e da aprendizagem da Matemática. Para essa pesquisadora, o campo da Educação Matemática:

> [...] tem se tornado maduro em suas proposições teóricas. No entanto, para ela a posição do ensino de Matemática permanece, teoricamente, não bem configurada e pouco desenvolvida. Enquanto teorias proveem-nos lentes para analisar o ensino (Lerman, 2001), as "grandes teorias" não parecem oferecer percepções claras para o ensino e maneiras nas quais o ensino vise à promoção da aprendizagem na Matemática (Jaworski, 2006, p. 188, tradução nossa, adaptado).

Ela entende que é necessário promover interação entre a teoria e prática, assim como a integração entre professores e pesquisadores, pois a utilização de uma teoria

> [...] não é capaz de mostrar para nós o que o ensino *deve* envolver, mas professores e educadores podem buscá-las para compreender mais claramente o que o ensino *poderia* envolver; então nós aprendemos sobre o ensino com a possibilidade de desenvolver o ensino (Jaworski, 2006, p. 189, tradução nossa, grifo da autora).

Nesse sentido, pensamos como Jaworski (2006), uma vez que o papel das teorias é auxiliar na análise e contribuir com exemplos, já que as teorias por si só não oferecem orientação prática nem prescrevem ações específicas. É um fato que, quando uma teoria é desenvolvida e apresentada, não há garantias de sua aplicabilidade direta às situações práticas. Assim sendo, como Jaworski (2006), ressaltamos a necessidade de fomentar a integração entre

[3] Nesse texto utilizaremos o termo "Cálculo" para indicar que estamos considerando o Cálculo Diferencial e Integral em uma variável real.

teoria e prática no campo da Educação Matemática, especificamente, em termos de estabelecer uma conexão entre educadores e pesquisadores.

Para o entendimento do conceito de MER, recorremos a Gascón (2014) para o qual um MER é um conjunto de ideias, abordagens e princípios que podem ser tomados para compor um quadro teórico e/ou metodológico para o estudo de uma área específica do conhecimento, nesse caso, o ensino da Matemática. Esse modelo fornece uma estrutura conceitual para compreender como o conhecimento matemático é gerado e desenvolvido, bem como analisar fenômenos didáticos no contexto educacional.

Um MER desempenha um papel crucial na emancipação da didática da matemática, ao permitir a libertação da pesquisa didática da sujeição aos códigos escolares e aos Modelos Epistemológicos Dominantes (MED) em instituições educacionais. O que, por sua vez, permite-nos construir e tornar visíveis fenômenos que permanecem invisíveis no contexto educativo e que podem ser revelados em pesquisas acadêmicas. Gascón (2014) entende que é necessária a emancipação da didática da matemática em dois níveis: o institucional e o epistemológico.

O primeiro nível pode ser caracterizado quando o pesquisador tem por objetivo se libertar das dependências que acompanham a posição de “professor” (sujeito inserido em instituição), a de “noosfera” (sujeito da noosfera, que podem ser, por exemplo, um autor de livros didáticos, planos de estudo, documentos curriculares, textos de formação de professores etc.) e, ainda, o de matemático (sujeito da instituição que produz e preserva conhecimento). Isso permite aos educadores matemáticos analisar, criticamente, tais modelos e construir outros que possibilitem a interpretação de fenômenos didáticos, contribuindo para a autonomia na construção do objeto de estudo do campo da Didática da Matemática. Para Gáscon, na emancipação epistemológica é necessário considerar:

> [...] os processos de transposição didática como objeto de estudo, o didata precisa analisar criticamente os modelos epistemológicos da matemática dominantes nas instituições envolvidas e, assim, libertar-se do pressuposto acrítico de tais modelos. (Gascón, 2014, p. 100, tradução nossa).

Gascón propõe uma abordagem crítica para a pesquisa em didática, enfatizando a necessidade de uma emancipação de um determinado modelo epistemológico dominante em uma instituição. Isso implica que o pesquisador deve examinar criticamente os processos de transposição didática. Ao fazer isso, o didata não apenas identifica as limitações e influências desses modelos, mas também busca libertar-se da aceitação passiva e não crítica de paradigmas propostos por esses modelos. Essa postura crítica é essencial para promover novas perspectivas e metodologias livres das imposições tradicionais e dominantes.

Além disso, a utilização de modelos específicos para estudar fenômenos didáticos permite aos pesquisadores avaliarem, corrigirem e contrastarem esses modelos com dados históricos e didáticos da prática docente, contribuindo para a emancipação epistemológica da Ciência Didática. Dessa forma, entendemos que é possível incorporar contribuições de David Tall no desenvolvimento de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para o ensino do conceito de derivada.

Sobre o ensino de derivada

A pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo tem sido de interesse de pesquisadores de várias partes do mundo, isso indica que os resultados relativamente à aprendizagem não têm sido bons. Esse fato também é demonstrado pelas avaliações de cursos em que Cálculo é componente curricular. Há, por isso, razões para se questionar as formas de ensino e suas influências na atribuição de significado aos conceitos do Cálculo, em particular ao conceito de derivada.

Escarlate (2008), em um levantamento bibliográfico sobre o ensino de derivada, identificou que esse conceito é normalmente apresentado por meio da analogia "derivada / reta tangente", a qual pode resultar em compreensão não compatível com sua definição formal. A Tabela 1 indica essa analogia.

Tabela 1.

Analogias entre derivada / reta tangente à curva (adaptado de Escarlate, 2008, p. 34)

DERIVADA / RETA TANGENTE
A noção de tangência do Ensino Básico (sobre número de pontos de contato) não é suficiente para o contexto do Cálculo.
É necessário um argumento infinitesimal (derivada) para definir tangência em toda a sua generalidade.
Na forma como o Cálculo tem sido estruturado atualmente, o conceito de derivada é apresentado antes de tangência de uma função em um ponto.
"A derivada é a inclinação da reta tangente". A inclinação pode ser admitida como uma definição para o coeficiente angular da reta tangente em um dado ponto, mas não como derivada em um ponto.
Dificuldades na aprendizagem de derivada surgem em virtude dessa relação equivocada entre derivada e coeficiente angular da reta tangente.

A analogia entre "derivada/ reta tangente" apresenta desafios para a aprendizagem que precisam ser considerados. Um deles relaciona-se ao fato de os conceitos de tangente trigonométrica e geométrica serem introduzidos durante a Educação Básica. Esse fato pode, potencialmente, limitar a compreensão do conceito de derivada. A relação de reta tangente com a função trigonométrica pode ser estabelecida e há ainda uma compreensão de reta tangente a uma curva pouco rigorosa, com a interpretação de intercepção entre a reta e o gráfico em um único ponto, ou seja, não se discute a natureza local dessa intersecção. Além disso, de acordo com Escarlate (2008), a analogia (coeficiente angular da reta tangente em um ponto/derivada no ponto) não favorecem o conhecimento de aplicações da derivada, como o estudo dos intervalos de crescimento e decrescimento de uma função real. Assim, torna-se imperativo examinar criticamente e expandir a definição de derivada de uma função em um ponto para além dessa analogia.

Com esse pressuposto, vale levar em conta um debate sobre a maneira de apresentar os conceitos de derivada e de limite em cursos iniciais de Cálculo, em virtude da definição formal desses conceitos. Uma questão importante levantada por Monaghan *et al.* (2023) é se a definição do conceito de limite é necessária ao se ensinar a diferenciação. Eles afirmam que:

> Se o limite (como um conceito formal) é necessário ou não na apresentação da diferenciação em um curso introdutório de Cálculo é uma questão de debate. [...], não é se os limites são importantes ou não (eles são importantes!), mas se os limites precisam ser formalmente introduzidos no ensino e aprendizagem da derivada em um curso introdutório de cálculo. (p. 92, tradução nossa).

Monaghan *et al.* (2023) indicam que, em pesquisas relacionadas ao ensino de derivada, são propostas quatro abordagens: a abordagem por aproximações (tradução do termo original *the rough and ready approach*); a abordagem com limites; abordagem diferencial e infinitesimal, além da abordagem cinemática.

Destacamos que a abordagem por aproximação envolve o trabalho com taxas de variação médias, como uma forma intuitiva de apresentação dos conceitos de derivada. Ela utiliza funções e suas representações algébricas e gráficas, enfatizando a utilização de tecnologias digitais no ensino de Cálculo. Segundo os autores, essa abordagem "permite que professores e alunos desenvolvam diretamente as ideias de derivabilidade em um ponto sem trabalho preparatório sobre limites, infinitesimais ou com ideia da abordagem cinemática." (Monaghan *et al.*, 2023, p. 92, tradução nossa).

O conceito de derivada é definido partindo-se do conceito de limite da razão incremental. Segundo Monaghan *et al*. (2023), essa definição satisfaz

> [...] as exigências do rigor matemático, mas, como foi mencionado, os alunos têm dificuldades consideráveis com limites, por isso, deveríamos construir uma primeira abordagem à diferenciação pontual a partir de um conceito matemático que os alunos consideram particularmente difícil? (Monaghan *et al*., 2023, p. 99, tradução nossa).

Para exemplificar as dificuldades com o conceito de limite, destacamos o trabalho de Cornu (1991), segundo o qual, aspectos cognitivos não podem ser derivados, exclusivamente, da definição matemática.

Esse pesquisador destaca negligência, por parte de professores, em levar em conta as "concepções espontâneas" de seus alunos, pois elas abrangem uma ampla gama de ideias, imagens, intuições e conhecimentos adquiridos por meio de suas experiências diárias. Essas experiências não são, necessariamente, influenciadas por métodos formais de ensino, por isso leva os alunos a modificarem e alinharem suas concepções individuais à definição do conceito. Isso pode, potencialmente, criar dificuldades ao processo de aprendizagem. Por exemplo, podem surgir equívocos, quando o aluno considera um limite como uma "barreira intransponível" ou o limite de uma sequência como um valor estacionário, em que os termos da sequência permanecem os mesmos para índices suficientemente grandes (Cornu, 1991, p. 155).

Além disso, é fundamental estar ciente do desenvolvimento histórico do conceito de derivada e dos conflitos ocorridos, pois eles podem fornecer informações valiosas sobre a natureza desse conceito e suas implicações para o ensino e a aprendizagem. Nesse sentido, o pesquisador francês adverte:

> É difícil introduzir os conceitos de limite na matemática porque parecem ter mais a ver com a metafísica ou filosofia. Os matemáticos são muitas vezes reticentes em falar de tais conceitos, desde o tempo dos gregos até D'Alembert, que escreveu: "Pode-se facilmente fazer sem o resto de tudo isso a metafísica do infinito no cálculo diferencial". Lagrange expressa um horror semelhante aos aspectos metafísicos (Cornu, 1991, p. 161, tradução nossa).

Essa resistência histórica à metafísica do infinito e aos conceitos abstratos associados ao cálculo diferencial reflete a complexidade envolvida na compreensão e no ensino da derivada. A noção de limite, essencial para o desenvolvimento do conceito de derivada, revela-se um ponto de tensão entre a matemática pura e suas implicações filosóficas. Para lidar com essa complexidade, é crucial que os educadores adotem abordagens que tornem esses conceitos mais acessíveis aos alunos. Isso pode ser feito por uma combinação de métodos visuais e intuitivos que possa desmistificar a abstração do limite e da derivada. A integração de exemplos concretos e o uso de ferramentas tecnológicas como softwares de visualização podem ajudar a construir uma compreensão mais tangível desses conceitos, mitigando as dificuldades históricas e oferecendo aos alunos elementos para explorar e aplicar o conceito de derivada de maneira contextualizada. Assim, compreender as raízes históricas e os desafios conceituais do cálculo diferencial pode enriquecer a prática pedagógica e promover novas abordagens para o ensino de derivada.

A abordagem diferencial e infinitesimal do Cálculo, segundo Ely (2021), é aquela que se baseia no uso de diferenciais e infinitesimais como elementos fundamentais para o ensino e compreensão do Cálculo. Essa abordagem busca restaurar a noção de referencial direto da notação diferencial, permitindo uma interpretação intuitiva e profunda dos conceitos matemáticos envolvidos.

Os infinitesimais podem ser entendidos como quantidades extremamente pequenas que, embora não tenham sido rigorosamente definidas no século XIX, foram reintroduzidas na matemática por meio do desenvolvimento da Análise Não-standard (Robinson, 1966), na década de 1960. Essa abordagem permite uma definição formal dos infinitesimais e possibilita a realização rigorosa do Cálculo com base neles.

A Análise Não-standard considera formalmente os infinitesimais no âmbito de um conjunto de axiomas, oferecendo uma base rigorosa para a realização de cálculos com essas quantidades ‘extremamente’ pequenas. Essa abordagem fornece aos matemáticos a flexibilidade de escolher entre a Análise Real e a Análise Não-standard, permitindo a condução de pesquisas e obtenção de resultados sem sacrificar o rigor matemático.

De acordo com Monaghan *et al*. (2023), no ensino do Cálculo, o conceito de infinitesimais pode ser utilizado como uma alternativa para a introdução do conceito de derivada. A reintrodução desse conceito visa fornecer uma outra perspectiva, permitindo o uso direto de notações originalmente concebidas para infinitesimais.

No século XIX, o Cálculo passou por uma mudança significativa quando os infinitesimais foram removidos do currículo devido à percepção de que não eram rigorosamente definidos. Em vez disso, o Cálculo foi desenvolvido em termos de limites, e a maioria dos cursos de Cálculo atualmente evita o uso de infinitesimais, preferindo a abordagem baseada em limites para definir conceitos fundamentais do Cálculo como derivada, integral e continuidade.

Na década de 1960, a Análise Não-standard, desenvolvida por Robinson (1966), permitiu a definição formal de infinitesimais, possibilitando a realização rigorosa do Cálculo com base neles. Robinson demonstrou que praticamente tudo o que pode ser feito com o Cálculo baseado em limites também pode ser realizado com o cálculo infinitesimal. Pesquisadores como Tall (1980, 1981a, 1981b, 2001) e Ely (2021) realizaram estudos sobre a utilização dessa noção em cursos introdutórios de Cálculo, argumentando a favor dos benefícios dessa abordagem. Terence Tao (2007) também utiliza a Análise Não-standard para evitar a gestão excessivamente complicada de épsilons, destacando que ela não é totalmente estranha à Análise, estando apenas "um ultrafiltro de distância" dessa última.

A abordagem cinemática, indicada por Monaghan *et al.* (2023), explora a diferenciação por meio da ideia de "derivada em um ponto", considerando a velocidade do movimento em um intervalo de tempo específico. Isso é ilustrado, inicialmente, com movimento uniforme expresso pela função, mas a complexidade aumenta ao considerar o movimento não uniformemente variado, modelado por funções polinomiais, por exemplo. A dificuldade conceitual surge ao lidar com a aparente desconsideração do intervalo de tempo ao calcular a velocidade média para um intervalo de tempo suficientemente pequeno. A conclusão é a definição da função velocidade instantânea de um móvel em um tempo t_0 como a derivada da função que modela o deslocamento desse móvel considerado o tempo t_0.

Sobre os constructos teóricos de Tall

A discussão sobre a potencialidade dos constructos teóricos para o ensino de derivada deve ser feita partindo de alguns remarques. O primeiro que consideramos importante é a necessidade de se explorar no ensino exemplos não usuais na prática docente dominante, exemplos esses que tornem mais evidentes a caracterização de funções deriváveis e não deriváveis em um determinado ponto de seus domínios, possibilitando com isso o desenvolvimento da compreensão do conceito de derivada. Para isso, é necessário ampliar a exploração dos tipos de funções, não se restringindo apenas por aquelas representadas algebricamente por uma única sentença ou funções polinomiais. Esse argumento é utilizado por Monaghan *et al* (2023) quando recomendam essa diversificação. Dizem eles que é importante fomentar:

> […] diferentes formas de pensar em uma função (equação, gráfico, diagrama); conscientizar um professor de que os alunos pensam que as funções devem ser dadas por uma fórmula e/ou ser contínuas; diferentes famílias de funções (por exemplo, lineares, polinomiais, racionais); funções inversas; e domínio e imagem. (Monaghan *et al*, 2023, p. 92, tradução nossa).

Consideremos o exemplo da função $b = b(x)$ denominada "manjar branco", em que parte de seu gráfico está esboçado na Figura 1.

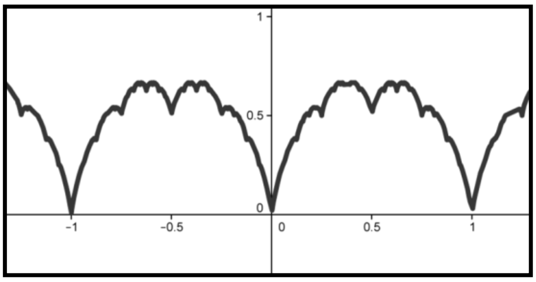

Figura 1.

Representação gráfica da função "manjar branco" construída no GeoGebra. (Produção nossa)

Essa função é representada algebricamente pela soma de uma série de funções convergente $b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$, sendo f_i: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f_i(x) = \frac{1}{2^{i-1}} f(2^{i-1} \cdot x)$ e $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$[4], com $i \in \mathbb{N}$.

A função manjar branco não tem derivada em nenhum ponto de seu domínio, sendo continua em todos esses pontos. A demonstração desse fato pode ser encontrada em Tall (1982).

O segundo exemplo é relativo à função g: $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$, em $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ que denota o maior inteiro de $\frac{1}{x}$, para $x \neq 0$ e $g(0) = 0$.

A função g tem derivada igual a 1 em $x = 0$ e nos pontos nos quais a função é contínua, pois nesse último caso a função é constante em cada intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$. A função maior inteiro não é contínua em $C = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^*\right\}$. A Figura 2 apresenta a representação gráfica de g.

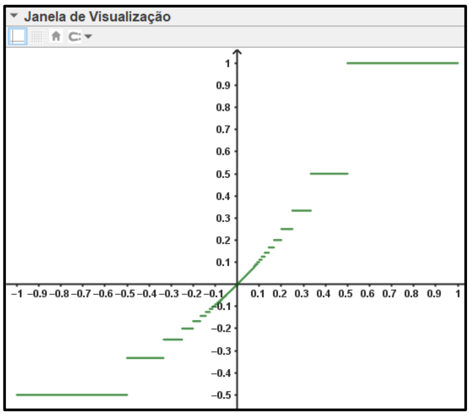

Figura 2.

Representação gráfica da função g. (Produção nossa)

[4] No espaço métrico $(\mathbb{R}, | \,.\, |)$, a função d: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, \mathbb{Z}) = inf\,\{|x - z|$, sendo z um inteiro$\}$ é a função que associa a cada x a distância entre x e o conjunto $\mathbb{Z}$.

Esses exemplos permitem analisar a relação entre continuidade e diferenciabilidade, bem como derivadas de funções que não são definidas por uma única lei de formação. Essa abordagem apoia o desenvolvimento do conceito formal na Matemática e amplia um modelo epistemológico dominante, no qual as funções consideradas podem ser definidas por uma sentença e em que a diferenciabilidade vai de encontro com a continuidade.

Também é viável explorar a noção de taxa de variação, associando-a ao conceito de derivada, de maneira similar à abordagem por aproximações sugerida por Monaghan *et al*. (2023). O uso de softwares como organizadores prévios[5] é mencionado como uma ferramenta eficaz, pois fornece respostas imediatas às investigações dos alunos e auxilia na compreensão dos conceitos de Cálculo.

Para apresentar um organizador genérico, trazemos uma afirmação de Tall para introduzir a maneira em que ele atua. Segundo Tall

> [...] um organizador é algo que atua de uma maneira Piagetiana, primeiro estando no interior de ambiente em que o equilíbrio é possível, então precisa ser encontrada uma propriedade destoante que cause conflito e requeira reconstrução mental que leve para um estado novo e rico de equilíbrio (Tall, 1986, p. 86-87, tradução nossa).

A definição de organizador genérico acarreta a definição de um constructo teórico atrelado a ele, chamado de raiz cognitiva "uma unidade cognitiva (potencialmente) significativa ao estudante num determinado momento; no entanto, deve conter sementes de uma expansão cognitiva para definições formais e para mais tarde desenvolvimento teórico" (Tall, 2000, p. 11, tradução nossa). Ou ainda, "um conceito âncora que o aprendiz acha mais fácil para compreender, e ainda se constitui em uma base na qual uma teoria pode ser construída" (Tall, 1989, p. 9, tradução nossa).

Exemplos de raízes cognitivas, advindos por conceitos do Cálculo, são retidão local (taxa de variação/diferenciação/equações diferenciais); continuidade perceptiva (conceito formal de continuidade); área abaixo do gráfico (integração).

[5] Para Ausubel (2003), um organizador prévio consiste em "no material introdutório a um nível mais elevado de abstração, generalidade e inclusão do que a própria tarefa de aprendizagem. A função do organizador é proporcionar um suporte (ancoragem) das ideias para a incorporação e retenção estáveis do material mais pormenorizado e diferenciado que resulta da situação de aprendizagem, bem como aumentar a capacidade de discriminação entre essa situação e as ideias ancoradas relevantes da estrutura cognitiva. O organizador deve não só estar explicitamente relacionado com a situação de aprendizagem mais específica resultante, como também (para ser apreensível e estável) estar relacionado com as ideias relevantes da estrutura cognitiva e levá-las em conta" (p. 65-66).

Uma função é dita localmente reta em um ponto x_0 pertencente ao seu domínio se sua representação gráfica se assemelha a uma linha reta quando suficientemente ampliada. Nesse caso, dizemos que há uma retidão local.

Em um ambiente computacional, Tall elaborou o organizador genérico *Magnify* que: "permite ao usuário focar sua atenção ao gráfico de uma função e traçar uma parte ampliada dele em uma segunda janela" (Tall, 2000, p. 11, tradução nossa). Na Figura 3, o gráfico da função real dada pela sentença $g(x) = sen\ x$ é construído com esse *software*.

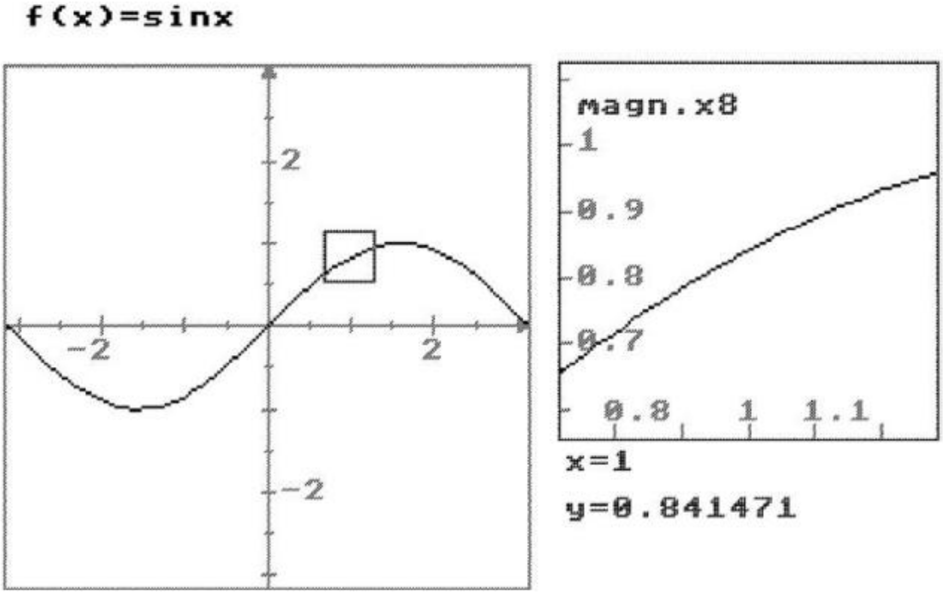

Figura 3.

Ampliando uma porção do gráfico da função seno para $x = 1$ *(Tall, 2000, p. 12)*

Essa noção deve ser levada em conta no ensino de derivada por dois motivos: o primeiro é que por essa noção é possível, utilizando a "ampliação de gráficos produzida por um computador, permitir que a natureza implícita do processo limite pode ser revelada. Isso contrasta com o conceito tradicional de limite, em que o processo é explicitamente definido. Essa noção, conforme afirmado em Dubinsky e Tall (1991), apresenta uma nova abordagem, que possibilita uma compreensão do limite por meio da ampliação de uma porção do gráfico em um ambiente computacional. O outro motivo é que, além de estabelecer a seguinte associação: f' [*função derivada de* f] *,* possa ser vista como a função que associa *a cada ponto* (x_o, y_0) [do gráfico de f] o *valor da inclinação da reta tangente* a esse gráfico que passa por (x_o, y_0)" (Tall, 2000, p. 11, tradução nossa, adaptado).

De acordo com Tall (2000), essa perspectiva oferece informações valiosas sobre a natureza da função derivada. Essencialmente, ao examinar o gráfico de uma determinada função, com base no conceito de retidão local, é possível conjecturar em qual ponto não ocorre a diferenciabilidade. Quando uma função é diferenciável em um ponto, aumentar uma porção do gráfico nas proximidades desse ponto, com um nível adequado de ampliação faz com que a parte representada se assemelhe a um segmento de reta, quando representada em um computador.

Além disso, uma abordagem em que é utilizada a noção de retidão local para a introdução do conceito de derivada, segundo o pesquisador inglês é:

> Ao invés de uma compressão simbólica que encapsula um processo de limite no objeto limite (a derivada), é uma compressão corporificada que opera sobre um objeto (o gráfico) para fornecer um novo objeto (o gráfico da função derivada). O estudante pode agora ver a derivada como a função que associa a cada ponto o valor da inclinação da reta tangente. A nova tarefa é simbolizar essa visão da função derivada pelo cálculo de uma boa aproximação, ou ainda melhor, uma representação simbólica perfeita (Tall, 2013, p. 303, tradução nossa).

Essa abordagem pode proporcionar aos alunos uma compreensão intuitiva do conceito de derivada e incentivar a simbolização desse conceito por meio de cálculos aritméticos ou por representações simbólicas refinadas. A nova tarefa proposta é, assim, a transição de uma abstração puramente simbólica para uma interpretação mais tangível e visual da derivada. Entendemos que a noção de retidão local pode compor um MER para o ensino desse conceito.

Em Almeida (2017), foi adaptado o organizador genérico *Magnify* em uma aplicação desenvolvida no GeoGebra para possibilitar o trabalho com a raiz cognitiva da retidão local. Na Figura 4, apresentamos uma aplicação chamada de "MagnifyG" e seu funcionamento para análise da retidão local de uma função diferenciável em um ponto. O exemplo escolhido é da função $y = x^2$ em um dado ponto.

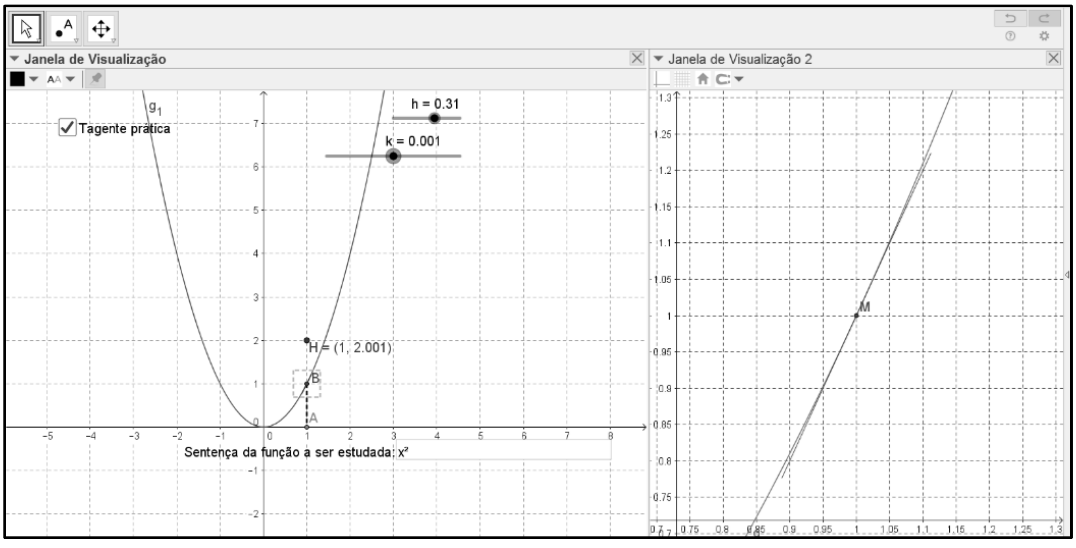

Figura 4.

Uso da 'MagnifyG' para a função $y = x^2$.

A aplicação “MagnifyG” é composta por duas janelas de visualização. A primeira janela, situada à esquerda, contém um campo de texto na seção inferior. Nesse campo de texto, o usuário pode inserir a expressão que define a função, que nesse caso é $y = x^2$. Dentro dessa janela, dois pontos são destacados. O ponto A pertence ao eixo x, enquanto o ponto B pertence ao gráfico da função. O ponto B tem uma condição específica: ele possui a mesma coordenada x do ponto A, e sua coordenada y é a imagem dessa coordenada x por meio da função f, denotada como (x(A), f(x(A))). Inicialmente, somente o ponto A pode ser manipulado pelo usuário usando o mouse. Quando o ponto A é movido, o ponto B mantém a coordenada *x* de A, e sua coordenada y é determinada pela função f, preservando assim as condições originais. Além disso, a primeira janela contém um quadrado em que o ponto B serve como ponto de encontro de suas diagonais. O comprimento de cada lado do quadrado é duas vezes o valor do controle deslizante h. A região do plano que é exibida na segunda janela de visualização corresponde à área ampliada desse quadrado. O controle deslizante h está vinculado a esse quadrado.

Na Janela de Visualização 2, existem dois elementos: ponto M e um gráfico. O ponto M possui as mesmas coordenadas do ponto B, enquanto o gráfico representa a parte ampliada do gráfico da função especificada no campo de texto (nesse caso, $y = x^2$). Essa parte ampliada é destacada pelo quadrado. Os elementos dessa Janela não podem ser alterados pelo usuário. Essa janela tem certas características: o ponto M está sempre posicionado no centro da janela e os eixos x e y são ajustados adequadamente. Além disso, as dimensões dessa janela estão associadas aos vértices do quadrado que é construído na primeira Janela de Visualização, definindo assim a ampliação.

Em Almeida (2017), é desenvolvido um conjunto de atividades em que é utilizada a noção de retidão local para apresentar o conceito de derivada. Destacamos o primeiro conjunto de atividades:

> O primeiro conjunto é composto por atividades em que será utilizada a noção de retidão local com os objetivos: observar a existência de um valor h para o qual a porção ampliada do gráfico se assemelhe a um segmento de reta; calcular a taxa média de variação da uma função em dois pontos pertencentes à porção ampliada do gráfico, em que o gráfico se assemelhe a um segmento de reta. (Almeida, 2017, p. 138).

Nesse conjunto de atividades, é conduzida uma investigação sobre o cálculo da taxa média de variação de uma função em dois pontos específicos dentro do segmento expandido do gráfico, em que a representação gráfica se assemelha a um segmento de uma reta *r*. Nessas atividades, é indicado se explorar a representação algébrica da reta que melhor se aproxima da reta tangente *t* ao gráfico dessa função no ponto $(x_0, f(x_0))$, ou seja, encontrar uma aproximação do tipo $f\,(x_0 + k) \approx ak + f\,(x_0)$, em que $a \in \mathbb{R}$ (a inclinação de r) e $x_0, x_0 + k \in Dom\, f$, x_0 domínio da função f) e k uma variável de aproximação. Como sugerido na abordagem por aproximação descrita por Monaghan *et al.* (2023).

Em síntese, a abordagem teórica de David Tall para o ensino da derivada, com foco na retidão local e na exploração de funções não-polinomiais, oferece uma visão rica e inovadora sobre a construção do conceito de derivada. A introdução de exemplos como as funções "manjar branco" e g, e o uso de ferramentas tecnológicas como a aplicação "MagnifyG" podem proporcionam aos alunos uma compreensão aprofundada da relação entre continuidade e diferenciabilidade, além de facilitar a visualização e simbolização do conceito de derivada. A integração de práticas pedagógicas que abordam a taxa de variação e utilizam a noção de retidão local, como sugerido por Tall e complementado por Monaghan *et al.* (2023), pode significativamente enriquecer o ensino de Cálculo, além de um modelo epistemológico dominante. Essas abordagens não apenas ampliam o modelo epistemológico vigente, mas também podem promover uma compreensão intuitiva de conceitos de cálculo, com vistas a possibilitar a formalização deles.

Considerações finais

Nesse trabalho apresentamos contribuições do pesquisador Tall que podem auxiliar com o desenvolvimento de um MER para o conceito de derivada. As contribuições teóricas de Tall, como a retidão local e a análise de funções não-polinomiais, são fundamentais para a construção de um MER. A abordagem de Tall amplia a compreensão epistemológica vigente do conceito de derivada ao incluir funções como a "manjar branco" e a $g\colon[-1,1] \to \mathbb{R}$, sendo $g(x) = \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}$, para $x \neq 0$ e $g(0) = 0$, que desafiam concepções vigentes de continuidade e diferenciabilidade. Esses exemplos não apenas enriquecem a compreensão do conceito de derivada, mas também fornecem uma base teórica que pode ser integrada a um MER. A noção de taxa de variação, outro objeto epistemológico significativo, é abordada pela ampliação gráfica, permitindo uma compreensão intuitiva da derivada e sua representação gráfica.

É crucial reconhecer que, enquanto esses conceitos teóricos são essenciais para a formação de um MER, atividades práticas que exploram esses conceitos devem ser parte do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) ou das Atividades de Estudo e Pesquisa. Um MER deve focar na definição e exploração dos objetos epistemológicos que fundamentam o conceito de derivada, ao passo que as atividades práticas e investigativas são desenvolvidas à parte, proporcionando uma aplicação concreta desses conceitos.

Em síntese, a integração das ideias de Tall em um MER para o ensino da derivada oferece uma base teórica que enriquece a compreensão do conceito. As funções exploradas e a noção de retidão local são elementos epistemológicos valiosos que, ao serem adequadamente integrados em um MER, ajudam a construir uma compreensão significativa da derivada. No entanto, é importante distinguir entre os objetos epistemológicos que formam um MER e as atividades práticas que fazem parte de um PEP, garantindo assim uma abordagem metodológica clara e estruturada no ensino da derivada.

Além disso, entendemos que a mudança de um MED para o ensino de derivada pode apresentar desafios. Ely (2021) destaca que para a utilização de infinitesimais no ensino de derivada ainda possuem restrições institucionais. Esse pesquisador destaca que:

> Existem muitas limitações institucionais mais amplas para o ensino de cálculo com infinitesimais e/ou diferenciais. Os alunos podem encontrar confusão e oposição de seus colegas e outros instrutores. Eles podem achar mais difícil interagir com os tutores ou aprender com recursos on-line padrão. Os livros didáticos que usam infinitesimais (ainda?) não são apoiados por grandes editoras multimilionárias. Os instrutores que usam essas abordagens relataram resistência por parte dos colegas, especialmente há 30 anos, quando a Análise Não-standard era menos familiar como base rigorosa para infinitesimais (Pittenger, 1995). Esses fatores institucionais podem fazer com que o ensino de cálculo com infinitesimais e/ou diferenciais pareça nadar contra a corrente, mas se essa fosse uma razão boa o suficiente para não fazer algo, quando ocorreria a mudança? Os benefícios para a compreensão do cálculo pelos alunos, como a pesquisa tem mostrado, fazem com que o esforço valha a pena. (Ely, 2021. p. 601, tradução nossa).

Assim, como indicado por Gáscon (2014), que enfatiza a necessidade de analisar criticamente MED no ensino da Matemática, em especial, na apresentação do conceito de derivada. Ely (2021) destaca a existência de limitações institucionais para o ensino de cálculo com infinitesimais, indicando resistência por parte de colegas e instrutores. Dessa forma, entendemos que seja necessário questionar e reformular tais modelos estabelecidos e que constructos teóricos desenvolvidos no âmbito da Educação Matemática podem auxiliar nessa tarefa.

Além disso, ao se realizar a análise de um MED, como no caso do ensino de derivadas por meio da definição formal, é esperado que surjam resistências e desafios associados ao ensino de abordagens não convencionais. Ely (2021) relata tais resistências e desafios enfrentados pelos instrutores que optam por ensinar cálculo com infinitesimais, incluindo a oposição de colegas, dificuldade de interação com tutores e a falta de apoio de grandes editoras.

Entendemos que, para o desenvolvimento de um MER, podem ser utilizados resultados de pesquisa relacionados ao ensino de Cálculo desenvolvidos por pesquisadores no campo da

Educação Matemática, os quais contribuem com reflexões sobre a prática do professor que ministra disciplinas relacionadas aos Cálculo (funções, limites, derivadas e integrais). Destacamos a necessidade de se reconhecer a importância de integrar resultados teóricos em torno da criação de recursos educacionais utilizados para o ensino de Matemática. Segundo Almeida (2017), outra possibilidade seria o desenvolvimento de materiais referenciados em constructos teóricos de outros pesquisadores do campo da Educação Matemática, como "Dubinsky e Sfard, que apresentam constructos teóricos de natureza cognitivista e que podem ser considerados no desenvolvimento de uma atividade para o ensino" (Almeida, 2017, p. 204). Com isso, reforçamos que um MER é uma ferramenta importante para a análise crítica do ensino de Matemática, permitindo uma abordagem emancipatória e reflexiva no processo de ensino e aprendizagem.

Referências

Almeida, M. V. (2017). *Material para o ensino do cálculo diferencial e integral*: referências de Tall, Gueudet e Trouche. 261 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Doutorado Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e Retenção de Conhecimentos*: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Pararelo. Tradução de: Ligia Teopisito.

Cornu, B. (1991). Limits. In: Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking* (p. 153–166). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E., Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In: TALL, David (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (p. 231–243). New York: Kluwer Academic Publishers.

Escarlate, A. C. (2008). *Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral*. [Dissertação de mestrado em Ensino de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro]. https://pemat.im.ufrj.br/images/Documentos/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2008/MSc_09_Allan_de_Castro_Escarlate.pdf

Ely, R. (2021). Teaching calculus with infinitesimals and differentials. *ZDM – Mathematics Education*, 53, 3, 591–604. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01194-2

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, 25, 99–123. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854006

Jaworski, B. (2006). Theory and Practice in Mathematics Teaching Development: Critical Inquiry as a Mode of Learning in Teaching. *J Math Teacher Educ*. 9, 187–211. https://doi.org/10.1007/s10857-005-1223-z

Monaghan, J., Ely, R., Pinto, M. M. F., & Thomas, M. (2023). *The Learning and Teaching of Calculus: Ideas, Insights and Activities* (IMPACT: Interweaving Mathematics Pedagogy and Content for Teaching). (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003204800

Robinson, A. (1966). *Nonstandard Analysis*. Amsterdam: North-Holland.

Tall, D. O. (1980). Intuitive infinitesimals in the calculus. In: *Abstracts of short communications, fourth international congress on mathematical education*. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1980c-intuitive-infls.pdf

Tall, D. O. (1981a). Intuitions of Infinity. *Mathematics in School*, 10 (3), 30–33.

Tall, D. O. (1981b). Infinitesimals constructed algebraically and interpreted geometrically. *Mathematical Education for Teaching*, 4 (1), 34–53.

Tall, D. (1982). The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere. Mathematical Gazette, 66, 11–22.

Tall, D. O. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics.* [Tese de doutorado em Ensino de Matemática, – University of Warwick, Inglaterra]. https://wrap.warwick.ac.uk/2409/

Tall, D. (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 37–42. https://www.jstor.org/stable/40248161

Tall, D. O. (2000). *Biological brain, mathematical mind & computational computers*, em “ATCM Conference”. ATCM. http://www.davidtall.com/papers/biological-brain-math-mind.pdf

Tall, D. O. (2001). Natural and Formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2), 199-238.

Tall, D. O. (2013). *How humans learn to think mathematically*: exploring three worlds of mathematics. New York: Cambridge University Press.

Tao, T. (2007). *Ultrafilters, nonstandard analysis, and epsilon management*. https://terrytao.wordpress.com/2007/06/25/ultrafilters-nonstandard-analysis-and-epsilon-management/