ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i1p523-538

Étude épistémologique du concept d'écart type

Epistemological study of standard deviation

Estudio epistemológico del concepto de desviación típica

Estudo epistemológico do conceito de desvio-padrão

Khadidiatou Gueye[1]
Université Cheikh Anta Diop de Dakar – Sénégal
Docteure en Didactique Des Mathématiques
https://orcid.org/0009-0001-5677-174X

Moustapha Sokhna[2]
Université Cheikh Anta Diop de Dakar – Sénégal
Professeur titulaire en Didactique des disciplines
https://orcid.org/0000-0002-4841-3088

Sounkharou Diarra[3]
Université Cheikh Anta Diop de Dakar - Sénégal
Docteur en Didactique Des Mathématiques
http://orcid.org/0000-0002-6074-9537.

Résumé

Les mathématiques, depuis l'antiquité, ont montré un niveau de créativité très élevé et un dynamique impressionnant. Cependant, dans les programmes d'enseignement-apprentissage, elles apparaissent comme des vestiges à exposer dans les murs de l'école. Pour rompre cet archaïsme, la Statistique est apparue comme la partie des mathématiques qui vienne éclairer son dynamise et son ancrage sociétal. Là également, les aspects calculatoires et théoriques ont laissé peu de place à une claire compréhension des concepts étudiés. Cet article a pour objet de montrer, à travers l'étude épistémologique de la notion d'écart type, comment l'étude de l'évolution des concepts permette de comprendre leur sens et serve de ressources pour leur enseignement.

Mots-clés : Écart type, Étude épistémologique, Interprétation, Statistique.

[1] khadidiatou19.gueye@ucad.edu.sn
[2] moustapha.sokhna@ucad.edu.sn
[3] sounkharou.diarra@ucad.edu.sn

Abstract

Since ancient times, mathematics has displayed a high level of creativity and impressive dynamism. However, in teaching/learning programs, they appear as relics to be displayed within the walls of the school. To break with this archaism, Statistics has emerged as the part of mathematics that can shed light on its dynamism and societal roots. Here, too, computational, and theoretical aspects have left little room for a clear understanding of the concepts studied. The aim of this article is to show, through the epistemological study of the notion of standard deviation, how the study of the evolution of concepts can help us understand their meaning and serve as a resource for their teaching.

Keywords: Standard deviation, Epistemological study, Interpretation, Statistics.

Resumen

Desde la antigüedad, las matemáticas han demostrado un altísimo nivel de creatividad y una dinámica impresionante. Sin embargo, en los programas de enseñanza y aprendizaje aparece como una reliquia que debe exhibirse entre los muros de la escuela. Para romper con este arcaísmo, la Estadística ha surgido como la parte de las matemáticas que puede arrojar luz sobre su dinamismo y sus raíces sociales. También en este caso, los aspectos computacionales y teóricos han dejado poco margen para una comprensión clara de los conceptos estudiados. El objetivo de este artículo es mostrar, a través de un estudio epistemológico de la noción de desviación típica, cómo el estudio de la evolución de los conceptos puede ayudarnos a comprender su significado y servir de recurso para su enseñanza.

Palabras clave: Desviación típica, Estudio epistemológico, Interpretación, Estadísticas.

Resumo

Desde a antiguidade, a matemática tem demonstrado um nível muito alto de criatividade e uma dinâmica impressionante. Entretanto, nos programas de ensino e aprendizado, ela aparece como uma relíquia a ser exibida dentro das paredes da escola. Para romper com esse arcaísmo, a Estatística surgiu como a parte da matemática que pode lançar luz sobre seu dinamismo e suas raízes sociais. Também nesse caso, os aspectos computacionais e teóricos deixaram pouco espaço para uma compreensão clara dos conceitos estudados. O objetivo deste artigo é mostrar, por meio de um estudo epistemológico da noção de desvio padrão, como o estudo da evolução dos conceitos pode nos ajudar a entender seu significado e servir como um recurso para ensiná-los.

Palavras-chave: Desvio-padrão, Estudo epistemológico, Interpretação, Estatísticas.

Clarification de l’étude épistémologique du concept d’écart type

L’épistémologie est le nom de la discipline qui étudie la façon dont on connaît (Fourez et Larochelle, 2002). Pour Dorier (1997), le mot « épistémologie » recouvre des conceptions diverses mais en mathématiques, il joue le rôle de médiateur entre le travail historique et le travail didactique. En effet, si l’histoire des mathématiques raconte les faits qui se sont déroulés dans le passé et qui ont marqué la création des objets mathématiques, la didactique des mathématiques, quant à elle, étudie le processus par lequel passent les objets mathématiques au cours de leur transmission et de leur acquisition, et explique les faits relatifs aux liens entre l’enseignement et l’apprentissage des objets mathématiques. Mais, pour se faire, la didactique a besoin de l’épistémologie pour étudier la manière dont les objets mathématiques sont créés, les obstacles rencontrés dans la création de ces objets et les interactions entre les différents objets mathématiques. Pour le didacticien, l’épistémologie médie la culture historique pour faciliter sa restauration comme objet d’apprentissage et comme un outil d’enseignement.

Dorier (1997) s’appuie sur les différentes conceptions du mot « épistémologie » pour définir l’adjectif « épistémologique » dans le cadre des mathématiques (p.16). Pour lui une étude épistémologique est une étude relative à l’évolution[4] des savoirs ou des connaissances mathématiques. Ainsi, pour mieux appréhender un objet d’enseignement mathématique, le chercheur doit remonter aux sources du savoir et analyser le processus qui mène de la production de cet objet dans le savoir savant jusqu’à sa constitution comme objet de savoir à enseigner.

Ainsi, en Statistique, l’étude épistémologique du concept d’écart type décrit l’évolution du concept, les conditions de sa création, ses usages, le processus de son passage du savoir savant au savoir à enseigner, la distance qui existe entre l’objet mathématique, l’objet d’enseignement et l’objet enseigné. Toutefois, dans ce texte, nous nous limitons à décrire le contexte dans lequel le concept d’écart type a été construit afin d’en déduire une interprétation.

[4] Dans ce contexte, évolution désigne progrès, stagnation ou recul.

Apparition, origines et persistance des erreurs d'observation

Dans les domaines de l'Astronomie[5] et de la Géodésie[6], des problèmes d'objectivité des mesures effectuées sur un même objet céleste ou terrestre étaient souvent soulevées par les scientifiques. Nous considérons une mesure comme la détermination du nombre d'éléments qui composent un ensemble fini d'objets (exemple : mesurer le nombre de particules de l'univers) ou comme l'association d'une grandeur physique à un nombre par comparaison avec une unité de référence du même genre (exemple : mesurer le volume d'un tas de sable, mesurer la température d'un corps, mesurer la longueur d'un bâton, mesurer l'aire d'une surface). Dans le premier cas, le résultat de la mesure est un nombre sans unité et dans le second cas, le résultat de la mesure est un nombre exprimé en l'unité de référence choisie.

Les astronomes du 18ème siècle et leurs prédécesseurs notaient une *disparité criarde* entre les résultats des mesures d'une grandeur liée à un objet astronomique ou géodésique. En effet[7], des mesures faites par plusieurs observateurs différents sur un même objet ou sur une même grandeur produisaient des résultats différents (cinquante personnes qui mesurent chacune les dimensions d'une même table rapportent autant de résultats) ; plusieurs mesures faites par le même observateur sur une même grandeur produisaient également des résultats différents (une personne qui pèse mille fois un objet afin de connaître sa masse peut obtenir mille masses différentes). Il en était de même pour les résultats obtenus suite à la mesure de plusieurs objets de même nature par le même observateur (un pédiatre qui prend la température corporelle de vingt enfants de cinq ans se retrouve avec vingt valeurs différentes).

Les astronomes du siècle des lumières, étant persuadés qu'une grandeur mesurée d'un quelconque objet n'a qu'une seule « vraie valeur » (valeur exacte de la grandeur), attribuaient la disparité des résultats des mesures à des *erreurs d'observation*. Ils qualifiaient ainsi toutes les mesures effectuées de mesures subjectives puisqu'elles étaient entachées d'erreurs aléatoires c'est-à-dire d'erreurs liées au hasard de source inconnue. Les erreurs de mesure aléatoires sont classées en trois types : les erreurs systématiques, les erreurs accidentelles et la dispersion statistique.

Les **erreurs systématiques** proviennent le plus souvent de l'appareil de mesure (défaut de fabrication de l'appareil, défaut de réglage, ...). Elles peuvent être évitées par l'observateur mais sont généralement difficiles à déceler.

---

[5] L'Astronomie est la science qui étudie les astres et l'univers.

[6] La Géodésie est la science dont l'objet est d'établir la forme de la terre et la mesure de ses dimensions pour pouvoir tracer des cartes géographiques.

[7] Nous proposons, ici, des exemples tirés de la société contemporaine pour faciliter la compréhension du lecteur.

Les **erreurs accidentelles** proviennent du hasard. Par exemple, lorsqu'un observateur mesure plusieurs fois un objet à l'aide d'un instrument optique (observation directe[8]) dans le but de connaitre sa vraie valeur, il obtient des résultats divers entachés d'erreurs malgré qu'il ait pris toutes les précautions nécessaires pour faire une mesure précise. Ces erreurs qui persistent sont inévitables et peuvent être dues à un étourdissement de l'observateur quand il effectue les mesures, à des variations anarchiques de la réfraction atmosphérique, à diverses vibrations, etc. Toutes ces erreurs accidentelles impacteront la précision de la mesure c'est-à-dire qu'à cause de ces erreurs inévitables, la mesure faite n'est jamais précise.

L'observateur peut refaire la même mesure dix fois, cent fois, mille fois, ..., autant de fois qu'il le voudra, il aura respectivement dix, cent, mille, ..., autant de valeurs différentes les unes des autres : il s'agit de la **dispersion statistique**. La situation est encore plus compliquée dans le cas des observations indirectes[9] où le résultat est obtenu par la combinaison de plusieurs équations mettant en jeu plusieurs inconnues (Bru, 2006).

Les erreurs notées dans les observations directes et indirectes des phénomènes astronomiques et géodésiques, constituaient un obstacle à l'existence de l'Astronomie et de de la Géodésie comme des sciences naturelles, robustes, objectives et universelles. En effet, une science naturelle universelle ne peut être fondée sur des erreurs et de la subjectivité. Les erreurs de mesures astronomiques et géodésiques accidentelles présentaient alors des enjeux considérables dont nous identifions certains à la section suivante.

Les enjeux des erreurs astronomiques et géodésiques

Les erreurs de mesure présentaient des enjeux de société de premier plan et des enjeux de connaissance scientifique. Les premiers enjeux sont liés au développement du commerce maritime et donc à la nécessité de fournir aux navigateurs, grâce à l'observation des astres, des techniques qui leur permettent de déterminer avec précision leur position en mer (Noel et Tilleuil, 2005). Ces erreurs étaient à l'origine de beaucoup de catastrophes maritimes (Armatte, 2004). Les seconds enjeux sont liés à l'existence de l'Astronomie et de la Géodésie comme des sciences universelles. Dans le champ de la géodésie, furent posés le problème de la forme de la terre et celui du degré d'aplatissement du globe terrestre. Si le premier problème fut résolu suite

---

[8] Les observations directes sont celles effectuées directement sur une grandeur. Exemple : mesurer la longueur d'une table, la masse d'une pierre, ...

[9] Les observations indirectes sont celles qui s'effectuent sur plusieurs grandeurs liées par une équation aux coefficients fixes mais inconnus. (Exemple : pour déterminer le volume V d'un objet qui a la forme d'un cône de révolution, il faut mesurer la hauteur du cône h et le rayon du disque de base r. En effet, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.). La détermination du volume d'un cône de révolution est une observation indirecte.

à des expéditions, le second va rester longtemps sur la base de spéculations. En effet, l'évaluation du coefficient d'aplatissement de la terre donne lieu à une disparité alarmante selon les couples de mesure qui sont prises et qui mettent toute la lumière sur le jeu des erreurs qui disqualifie plus ou moins chacune des déterminations (*Ibidem*).

À cause des enjeux des erreurs astronomiques et géodésiques, les savants ont tenté d'éliminer ceux-ci par la recherche des erreurs systématiques provenant des appareils de mesure, la recherche des autres sources d'erreurs qui peuvent être éliminées et l'accroissement de la précision des instruments de mesure mais ils n'y sont pas parvenus. Malgré tous les efforts fournis, il restait toujours des erreurs résiduelles irréductibles. Alors, ils ont fait appel aux géomètres pour trouver des solutions au problème de la variabilité des mesures en modélisant les erreurs irréductibles. C'est ainsi qu'est née la théorie des erreurs d'observation dont l'objectif est de modéliser les erreurs de mesures pour estimer la « vraie valeur » inconnue d'une grandeur mesurée plusieurs fois. Les causes des erreurs résiduelles (accidentelles) ne seront à jamais connues car « dans sa nature métaphysique, l'erreur accidentelle est une erreur épistémique » (Armatte, 2010).

La modélisation des erreurs d'observation

Nous avons expliqué dans les lignes précédentes que les mesures issues des observations directes et indirectes renfermaient toujours des erreurs inévitables de sources inconnues. Les enjeux que présentaient ces erreurs accidentelles avaient conduit les astronomes à faire appel aux géomètres pour modéliser les erreurs dans le but de les réduire. La mesure qui sera choisie est celle qui renferme la plus petite erreur possible et qui renferme l'essentiel des informations contenues dans les différentes observations faites.

Ici, nous expliquons l'apport des mathématiques pour résoudre le problème de la modélisation des erreurs d'observation. La question à laquelle les mathématiciens devaient apporter une réponse est la suivante : comment faut-il combiner plusieurs mesures effectuées sur une même grandeur d'un même objet mesurable, pour rendre minimale l'erreur finale sur la « vraie valeur » de cette grandeur ?

Pour traiter cette question, les mathématiciens s'engagent vers 1750, à modéliser les erreurs astronomiques et géodésiques à deux conditions et pour trois raisons principales. Pour modéliser les erreurs d'observation, les mathématiciens exigent que celles-ci soient faites **à peu près** dans les mêmes conditions, avec les mêmes précautions, et soient indépendantes. De plus, les erreurs à modéliser doivent être irréductibles par des moyens physiques et leurs sources doivent être inconnues. Donc, les mathématiciens se sont engagés à ne modéliser que les erreurs accidentelles. Les trois raisons principales qui ont motivé les mathématiciens à faire cette modélisation sont :

1. les outils à mobiliser dans un calcul d'erreurs de mesures étaient déjà disponibles à cette époque : il s'agit du calcul des probabilités et du calcul différentiel ;
2. les appareils de mesure étaient plus performants donc il n'y avait plus une très grande différence entre les différentes valeurs trouvées. Ces dernières étaient approximativement égales ;
3. certains problèmes comme celui de la forme et des dimensions de la terre n'étaient pas encore résolus.

À ce niveau, les mathématiciens cherchaient à estimer **la vraie valeur d'une grandeur d'un objet sur lequel plusieurs mesures effectuées rapportent différents résultats.** Pour faire cette estimation, il s'est d'abord posé un problème de choix. En effet, les scientifiques étaient partagés entre deux idées : (1) effectuer une seule « bonne mesure » ou (2) réaliser plusieurs mesures et prendre leur milieu.

Au début des recherches, des mathématiciens, qui n'étaient pas nécessairement des praticiens de l'Astronomie, ont préféré choisir une seule « bonne mesure » plutôt que de faire plusieurs mesures et de prendre leur milieu. Ils n'ont pas pu justifier leur choix mais il semble que l'amélioration sensible des instruments de mesure avait orienté cette décision. Une autre raison qui a poussé ces mathématiciens à prendre une seule « bonne mesure » est que certains d'entre eux étaient convaincus de l'augmentation des erreurs en fonction de l'agrégation des équations résultant des mesures dans le cas des observations surtout indirectes.

À côté des mathématiciens qui sont en faveur d'une seule « bonne » observation, il y en a d'autres qui ont opté pour le deuxième choix à savoir multiplier les mesures et prendre leur milieu. Les scientifiques, qui sont en désaccord avec le choix d'une seule bonne mesure, ont proposé d'autres méthodes de réduction des erreurs accidentelles dont la plus courante fut la recherche d'un « milieu » d'erreurs. Beaucoup de scientifiques ont opté pour un milieu de plusieurs observations comme la valeur susceptible de représenter la vraie valeur d'une grandeur mais ils n'avaient pas précisé si ce milieu est la moyenne arithmétique, la moyenne harmonique, la moyenne géométrique ou la médiane. Ils n'avaient pas, non plus fourni, d'explications convaincantes ; la plupart d'entre eux était guidé par leur intuition. Par exemple, Tycho Brahé (1546-1601) a eu implicitement recours à la moyenne arithmétique pour éliminer les erreurs d'observation dans un ensemble de données sur le mouvement des planètes. Roger Cotes (1682-1716) a aussi préconisé la moyenne arithmétique de manière indirecte. En effet, dans une annexe de son ouvrage *Harmonia Mensurarum* publié à titre posthume en 1722, Cotes propose l’utilisation d’une moyenne pondérée dont les coefficients sont inversement proportionnels à la « dispersion » des observations pour connaitre la position exacte d’un point pour lequel il dispose de 4 observations qui ne sont pas toutes aussi fiables l’une que l’autre (Droesbeke et Tassi, 1990). Ruggero Boscovich (1711-1787) et Thomas Simpson (1710 –1761) étaient également en faveur d’une moyenne d’observations ou moyenne d’erreurs mais la forme mathématique de cette moyenne ou du meilleur milieu qui représenterait un ensemble de mesures n’était toujours pas identifiée. Le problème de la recherche d’un milieu approprié reste sans solutions. Il faut alors rechercher une loi de distribution des erreurs qui permette de choisir le milieu optimal qui renferme l’erreur la plus petite possible. Les scientifiques sont alors conduits à explorer une telle loi de distribution des erreurs et à déterminer l’erreur moyenne sur un ensemble de mesures.

L’écart type : l’erreur moyenne sur un ensemble de mesures

Dans cette partie, nous nous intéressons au raisonnement de Carl Frederich Gauss qui conduit à la découverte de l’écart type. À l’entame de ses travaux, Gauss avance la thèse selon laquelle toutes les mesures de grandeurs physiques obtenues lors des observations sont forcément entachées d’erreurs plus ou moins grandes malgré tous les soins que peut apporter l’expérimentateur dans les observations. De plus, ces erreurs résultent de plusieurs sources généralement distinctes. Ainsi, il classe les erreurs de mesure en deux catégories suivant la nature de leurs sources : les erreurs régulières ou constantes et les erreurs irrégulières ou fortuites. Les erreurs régulières sont celles généralement produites dans les observations de même nature c’est- à-dire des observations au cours desquelles c’est un même objet qui est mesuré plusieurs fois. À chaque observation, soit la même erreur est commise par l’observateur, soit l’erreur commise dépend d’une subdivision imparfaite de l’instrument de mesure ou d’autres circonstances identifiables. En résumé, ces erreurs, si elles ne sont pas identiques, dépendent de circonstances essentiellement liées aux résultats de l’observation. Dans ce cas, les sources de l’erreur peuvent être connues grâce aux résultats obtenus. Les erreurs provenant de ces sources identifiables sont appelées erreurs constantes. Ce sont les erreurs systématiques précédemment définies. Par exemple, si nous mesurons à plusieurs reprises l’intensité du courant dans un circuit électrique en utilisant le même ampèremètre à chaque observation et que nous enregistrons autant de résultats que d’observations alors nous pouvons dire que c’est l’ampèremètre qui est défectueux. Les erreurs enregistrées dans ce cas sont des erreurs régulières liées à la défectuosité de l’ampèremètre et pour les éliminer il faut réfectionner l’appareil ou le changer. Les erreurs irrégulières sont celles faites dans des observations de natures différentes ou de même espèce. Leurs sources sont dépendantes de circonstances variables et indépendantes de l'observateur. Il est impossible d'identifier avec précision les sources d'erreurs irrégulières à partir des résultats des observations. En effet, comme le dit Gauss :

> Certaines causes d'erreurs dépendent, pour chaque observation, de circonstances variables et indépendantes du résultat que l'on obtient : les erreurs qui en proviennent sont nommées irrégulières ou fortuites, et de même que les circonstances qui les produisent, leur valeur n'est pas susceptible d'être soumise au calcul. Telles sont les erreurs qui naissent de l'imperfection de nos organes et toutes celles qui sont dues à des causes extérieures irrégulières, comme, par exemple, les trépidations de l'air qui rendent la vision moins nette ; quelques-unes des erreurs dues à l'imperfection inévitable des meilleurs instruments appartiennent à la même catégorie. Nous citerons, par exemple, la rugosité de la partie intérieure du niveau, le défaut de rigidité absolue, etc. (Gauss, 1855, p. 9).

Les erreurs que Gauss qualifie d'irrégulières ou fortuites sont des erreurs accidentelles inévitables. Comme ses prédécesseurs, Gauss opte pour la modélisation des erreurs accidentelles au détriment de celles systématiques. Les erreurs accidentelles ne peuvent pas être éliminées mais Gauss affirme que leur influence peut être réduite autant que possible par une combinaison habile des résultats d'observation. C'est la méthode proposée par Gauss pour réduire les erreurs accidentelles qui est appelée méthode des moindres carrés.

Gauss considère la « vraie valeur » d'une grandeur mesurée, que nous notons G, comme une fonction à plusieurs inconnues. Autrement dit, la vraie valeur V d'une grandeur physique est une fonction qui peut s'écrire sous la forme $ap + bq + cr + ds + ...$, où $a, b, c, d, ...$ sont des observables (nombres variables d'une mesure à une autre mais connues) et $p, q, r, s, . . .$ sont des inconnues : $V (p, q, r, s, . . .) = ap + bq + cr + d\, s + \ldots$. Cette « vraie valeur » est une valeur théorique.

Les paramètres $p, q, r, s, \ldots$ sont au nombre de m $(m \in \mathbb{N} \setminus \{0;\ 1\})$.

Considérant un entier naturel n aussi grand que possible, Gauss suppose qu'il dispose de n grandeurs $G_1, G_2, . . ., G_n$ de même nature et de vraies valeurs respectives $V_1, V_2, . . ., V_n$. Il suppose également que les observations sur ces grandeurs donnent respectivement les valeurs mesurées $M_1, M_2, . . ., M_n$ et que la réalisation d'une observation n'exerce aucune influence sur celle d'une autre. Chacune des n valeurs mesurées $M_1, M_2, . . ., M_n$ dépend des paramètres $p, q, r, s, \ldots$.

Gauss s'intéresse aux erreurs qui, rappelons-le, sont les variations entre les vraies valeurs $V_1, V_2, . . ., V_n$ et les valeurs mesurées $M_1, M_2, . . ., M_n$. Si les erreurs sont notées Δ_1,

$\Delta_2, \ldots, \Delta_n$, où Δ_i est l'erreur commise sur la mesure de vraie valeur V_i pour $i = 1, \ldots, n$, alors nous pouvons écrire : $\Delta_1 = M_1 - V_1$, $\Delta_2 = M_2 - V_2, \ldots$, $\Delta_n = M_n - V_n$.

Gauss distingue trois situations qui peuvent se présenter lors des mesures des grandeurs : (1) le nombre de fonctions est strictement inférieur au nombre d'inconnues ($n < m$). (2) le nombre de fonctions est égal au nombre d'inconnues ($n = m$). (3) le nombre de fonctions est strictement plus grand que le nombre d'inconnues ($n > m$). Autrement dit, le nombre de grandeurs observées est soit strictement plus petit, soit égal, soit strictement plus grand que le nombre de paramètres inconnus dont dépendent les valeurs V_1, V_2, . . ., V_n. Il s'intéresse particulièrement à la dernière situation. En effet, dans le premier cas, le problème est indéterminé donc il n'a pas de solutions. Dans le deuxième cas, le problème est déterminé c'est à dire qu'il admet au plus une unique solution. Dans le troisième cas, le problème est surdéterminé et c'est à ce problème que les scientifiques peinent à trouver une solution, théoriquement et empiriquement, justifiable.

Maintenant que le problème est cerné, Gauss associe à l'erreur Δ une fonction discontinue et inconnue dans la pratique, qu'il nomme φ et telle que $\varphi(\Delta)$ soit la probabilité que l'erreur Δ soit commise. Ensuite, il impose à cette fonction des conditions naturelles. En effet, il décrit ceci :

> Supposons d'abord, dans toutes les observations, un état de choses tel, qu'il n'y ait pas lieu de regarder l'une d'elles comme plus exacte qu'une autre, c'est-à-dire, que l'on doive regarder des erreurs égales dans chacune d'elles comme également probables. La probabilité qu'une erreur Δ soit commise dans l'une des observations sera une fonction de Δ, que nous nommerons $\varphi(\Delta)$. Quoique cette fonction ne puisse être assignée d'une manière précise, on peut du moins affirmer qu'elle doit devenir maximum pour $\Delta = 0$, avoir dans la plupart des cas la même valeur pour des valeurs de Δ égales et de signes contraires, et, enfin, et s'évanouir quand on donne à Δ une valeur égale ou supérieure à l'erreur maximum ; $\varphi(\Delta)$ doit donc, à proprement parler, être rapportée à la classe des fonctions discontinues, et, si nous nous permettons, pour la facilité du calcul, d'y substituer une fonction analytique, il faudra que cette dernière soit choisie de telle sorte qu'elle tende rapidement vers 0 à partir de deux valeurs de Δ, l'une supérieure, l'autre inférieure à 0, et qu'en dehors de ces deux limites on puisse la considérer comme nulle. Or la probabilité que l'erreur soit comprise entre Δ et une quantité $\Delta + d\Delta$ qui en diffère infiniment peu, sera exprimée par $\varphi(\Delta)d\Delta$, et, par suite, la probabilité que l'erreur soit comprise entre D et D′ par $\int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{D}'} \varphi(\Delta)d\Delta$. Cette intégrale, prise depuis la plus grande valeur négative de Δ jusqu'à sa plus grande valeur positive, ou plus précisément depuis $\Delta = -\infty$ jusqu'à $\Delta = +\infty$, devra nécessairement être égal à 1. Nous avons donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)d\Delta = 1$.

Par la citation ci-dessus, Gauss veut dire que la fonction φ vérifie les conditions suivantes :

- $\varphi(\Delta)$ atteint son maximum en $\Delta = 0$ et décroit à partir de 0. Cela signifie que $\varphi(\Delta)$ est maximale si la valeur observée est exactement la vraie valeur de la grandeur *G*. De plus, les petites erreurs sont plus nombreuses que les grandes erreurs ou bien il est plus fréquent de faire de petites erreurs que de grandes erreurs.
- $\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$. φ est paire et les valeurs observées sont symétriques par rapport à la vraie valeur de la grandeur *G* c'est-à-dire que les erreurs sont symétriques par rapport à 0. Deux erreurs de signes contraires et de même valeur absolue ont la même chance de se produire — même probabilité d'apparition.
- φ est une fonction analytique positive pour les valeurs de Δ comprises entre les limites d'erreurs, et, nulle pour les valeurs de Δ n'appartenant pas à l'intervalle borné par ces limites. Si $\Delta \in]D; D'[$ alors $\varphi(\Delta) > 0$; sinon $\varphi(\Delta) = 0$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta).d\Delta = 1$. Dans un repère orthogonal, l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de φ et les droites d'équations $y = D$ et $y = D'$ est égale à l'unité.

Sous ces conditions, les probabilités que les mesures sur G_1, G_2, . . ., G_n donnent M_1, M_2, . . ., M_n sont respectivement $\varphi(\Delta_1), \varphi(\Delta_2), \ldots, \varphi(\Delta_n)$.

Les observations telles que $\Delta_1 = M_1 - V_1$, $\Delta_2 = M_2 - V_2, \ldots$, $\Delta_n = M_n - V_n$ sont considérées comme des événements mutuellement indépendants donc la probabilité de l'intersection des évènements est égale au produit des probabilités des différents évènements. Ce qui se traduit par :

$$\mathbb{P}(V_1 = M_1, V_2 = M_2, \ldots, V_n = M_n) = \mathbb{P}(V_1 = M_1) \times \mathbb{P}(V_2 = M_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(V_n = M_n).$$

La probabilité de l'intersection des événements est notée Ω. Alors, nous avons :

$$\Omega = \mathbb{P}(V_1 = M_1) \times \mathbb{P}(V_2 = M_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(V_n = M_n).$$

Or, $\mathbb{P}(V_i = M_i) = \varphi(\Delta_i)$ donc $\Omega = \varphi(\Delta_1) \times \varphi(\Delta_2) \times \cdots \times \varphi(\Delta_n)$.

Arrivé à ce niveau, Gauss confirme que « le système le plus probable des valeurs de *p, q, r, s*, … correspond au maximum de Ω ».

Ainsi,

$$\frac{d\Omega}{dp} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dq} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dr} = 0, \ldots.$$

Ω dépend des paramètres *p, q, r, s*, . . . donc nous pouvons l'assimiler à la fonction de vraisemblance. Il est alors plus simple de travailler avec le logarithme de cette fonction plutôt qu'avec la fonction elle-même puisque d'une part, nous recherchons les valeurs des paramètres en lesquelles la fonction de vraisemblance Ω atteint son maximum et d'autre part, celle-ci et son logarithme admettent le même maximum. On alors :

$$\ln(\Omega) = \ln[\varphi(\Delta_1) \times \varphi(\Delta_2) \times \cdots \times \varphi(\Delta_n)].$$

$$\ln \Omega = \ln[\varphi(\Delta_1)] + \ln[\varphi(\Delta_2)] + \ldots + \ln[\varphi(\Delta_n)]. \qquad (2.1)$$

En dérivant cette dernière égalité par rapport aux variables $p, q, r, s, \ldots$, nous obtenons les équations suivantes :

$$\frac{\varphi'(\Delta_1)d\Delta_1}{dp} + \frac{\varphi'(\Delta_2)d\Delta_2}{dp} + \frac{\varphi'(\Delta_3)d\Delta_3}{dp} + \cdots + \frac{\varphi'(\Delta_n)d\Delta_n}{dp} = 0$$

$$\frac{\varphi'(\Delta_1)d\Delta_1}{dq} + \frac{\varphi'(\Delta_2)d\Delta_2}{dq} + \frac{\varphi'(\Delta_3)d\Delta_3}{dq} + \cdots + \frac{\varphi'(\Delta_n)d\Delta_n}{dq} = 0$$

$$\frac{\varphi'(\Delta_1)d\Delta_1}{dr} + \frac{\varphi'(\Delta_2)d\Delta_2}{dr} + \frac{\varphi'(\Delta_3)d\Delta_3}{dr} + \cdots + \frac{\varphi'(\Delta_n)d\Delta_n}{dr.} = 0$$

....

À présent, le problème pourrait être résolu par élimination si la nature de la fonction φ' ou celle de φ était connue mais comme la fonction φ ne peut pas être déterminée *a priori*, Gauss aborde la question autrement en cherchant « une fonction acceptée tacitement comme base, en vertu d'un principe simple et généralement admis ». C'est à ce moment qu'il a eu recours à la moyenne arithmétique. En effet, il décrit ceci :

> On a coutume de regarder comme un axiome l'hypothèse qui si une quantité a été obtenue par plusieurs observations immédiates, faites avec le même soin dans des circonstances semblables, la moyenne arithmétique des valeurs observées sera la valeur la plus probable de cette quantité, sinon en toute rigueur, du moins avec une grande approximation, de telle sorte que le plus sûr soit toujours de s'y arrêter.

Ainsi, le problème consiste maintenant à choisir la fonction φ de telle sorte que la moyenne arithmétique soit la valeur représentative des valeurs observées. Gauss pose:

$$V_1 = V_2 = \cdots = x \text{ et } x = \frac{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}{n}.$$

$\Omega = \varphi(M_1 - x) \times \varphi(M_2 - x) \times \ldots \times \varphi(M_n - x)$. D'après l'égalité (2.1), Ω est maximale si :

$$\frac{[\varphi(M_1 - x)]'}{\varphi(M_1 - x)} + \frac{[\varphi(M_2 - x)]'}{\varphi(M_2 - x)} + \cdots + \frac{[\varphi(M_n - x)]'}{\varphi(M_n - x)} = 0. \qquad (2.2)$$

Posons $\Delta_i = M_i - x$ et $F(\Delta_i) = \frac{[\varphi(M_i - x)]'}{\varphi(M_i - x)} = \frac{[\varphi(\Delta_i)]'}{\varphi(\Delta_i)}$, pour tout $i = 1, \dots, n$.

Par ailleurs, $[\varphi(M_i - x)]' = (M_i - x)' \times \varphi'(M_i - x) = -\varphi'(M_i - x)$ c'est-à-dire $[\varphi(\Delta_i)]' = -\varphi'(\Delta_i)$. Donc $F(\Delta_i) = -\frac{\varphi'(\Delta_i)}{\varphi(\Delta_i)}$.

D'après (2.2), $F(\Delta_1) + F(\Delta_2) + \cdots + F(\Delta_n) = 0$. (2.3)

$F(-\Delta_i) = \frac{[\varphi(-\Delta_i)]'}{\varphi(-\Delta_i)}$. Comme la fonction φ est paire alors $\varphi(-\Delta_i) = \varphi(\Delta_i)$ et,

$[\varphi(-\Delta_i)]' = [\varphi(x - M_i)]' = \varphi'(-\Delta_i) = \varphi'(\Delta_i)$.

Nous avons alors, $F(-\Delta_i) = \frac{\varphi'(\Delta_i)}{\varphi(\Delta_i)} = -F(\Delta_i)$. Il apparait que F est une fonction impaire. Par ailleurs, $M_1 + M_2 + \cdots + M_n = nx$.

Cela implique que $\Delta_1 + x + \Delta_2 + x + \cdots + \Delta_n + x = nx$.

D'où $\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n = 0$. Nous en déduisons que $\Delta_2 + \cdots + \Delta_n = -\Delta_1$.

Ainsi, $F(\Delta_2 + \cdots + \Delta_n) = F(-\Delta_1) = -F(\Delta_1)$.

D'après (2.3), $F(\Delta_2) + \cdots + F(\Delta_n) = -F(\Delta_1)$.

$F(\Delta_2 + \cdots + \Delta_n) = -F(\Delta_1)$ et $F(\Delta_2) + \cdots + F(\Delta_n) = -F(\Delta_1)$ alors nous en déduisons que $F(\Delta_2 + \cdots + \Delta_n) = F(\Delta_2) + \cdots + F(\Delta_n)$. D'où F est une fonction linéaire.

Les fonctions linéaires qui vérifient l'égalité $F(\Delta_2 + \cdots + \Delta_n) = F(\Delta_2) + \cdots + F(\Delta_n)$ sont du type $F(\Delta_i) = k\Delta_i$ où k est une constante.

$$F(\Delta_i) = k\Delta_i \Leftrightarrow \int F(\Delta_i)d\Delta_i = \int k\Delta_i d\Delta_i.$$

$$\Leftrightarrow \int -\frac{\varphi'(\Delta_i)}{\varphi(\Delta_i)} d\Delta_i = \int k\Delta_i d\Delta_i.$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\varphi'(\Delta_i)}{\varphi(\Delta_i)} d\Delta_i = \int -k\Delta_i d\Delta_i.$$

$\Leftrightarrow \ln \varphi(\Delta_i) = -\frac{1}{2}k{\Delta_i}^2 + \ln k_1$ où k_1 est une constante positive.

$$\Leftrightarrow \varphi(\Delta_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}k{\Delta_i}^2 + \ln k_1\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\Delta_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}k{\Delta_i}^2\right) \times \exp(\ln k_1)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\Delta_i) = k_1 \exp\left(-\frac{1}{2}k{\Delta_i}^2\right).$$

La fonction φ étant déterminée, il reste maintenant à déterminer Ω.

On a :

$$\Omega = \prod_{i=1}^{n} \varphi(\Delta_i) = \prod_{i=1}^{n} k_1 \exp\left(-\frac{1}{2} k {\Delta_i}^2\right).$$

$$\Omega = (k_1)^n \times \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} -k {\Delta_i}^2\right).$$

$$\Omega = (k_1)^n \times \exp\left(-\frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{n} {\Delta_i}^2\right).$$

Ω est maximale si et seulement si k est positif c'est-à-dire si $\sum_{i=1}^{n} {\Delta_i}^2$ est minimale. Et, dans ce cas, *x* est la moyenne arithmétique des mesures M_i.

Si les erreurs de mesures $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ sont faites en effectuant des mesures de valeurs respectives M_1, M_2, . . ., M_n alors le carré de l'erreur moindre à craindre à l'issue de ces observations est $\frac{\sum_{i=1}^{n} {\Delta_i}^2}{n}$. L'erreur moindre à craindre devient alors $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n}}$.

En 1893, au cours d'une conférence qu'il anime devant la *Royal Society* de Londres, Karl Pearson donne à l'erreur moyenne à craindre le nom de *standard deviation* et la note par la lettre grecque σ (Dodge, 2010). L'écart type est la traduction en langue française de *standard deviation*.

Conclusion

L'écart type, autrefois appelé erreur moyenne à craindre est né au cours de recherches dont il n'était pas au centre. En effet, il a été découvert entre le 18ème et le 19ème siècle lors de la recherche d'une loi de distribution des erreurs. L'objectif de ces recherches était de faire de l'Astronomie et de la Géodésie des sciences objectives et viables. Ceci montre que ce qui était un accident de l'histoire est devenu un outil efficace pour étudier la notion de dispersion et un objet d'enseignement.

Au terme de cette étude, nous avons pu montrer que les concepts Mathématiques ne sont pas des absolus épistémologiques. Ils sont des constructions humaines et leur enseignement devrait en tenir compte pour restaurer les péripéties qui ont jalonné leur moment de découverte. L'étude a montré que la moyenne arithmétique ne prend son sens que si nous voulons estimer la vraie valeur théorique d'une grandeur physique. Lorsque nous avons une grandeur physique dont nous ne connaissons pas la vraie valeur et dont nous disposons un ensemble de mesures qui ne sont pas très éloignées les unes des autres alors nous pouvons prendre la moyenne arithmétique des mesures comme valeur approchée de la vraie valeur de cette grandeur. Dans ce cas, nous perdons de l'information sur la vraie valeur de la grandeur. L'information perdue est la distance entre la moyenne arithmétique des valeurs mesurées et la vraie valeur de la grandeur dont sont issues les mesures. Elle représente la précision, l'incertitude ou la marge d'erreurs pour laquelle la moyenne arithmétique est la valeur approchée de la « valeur normale » d'une grandeur. Elle est appelée écart type.

L'erreur contenue dans la moyenne arithmétique d'un ensemble de mesures est plus petite que l'erreur contenue dans chaque mesure de l'ensemble.

Ce que la recherche n'a pas encore montré c'est que l'étude épistémologique est un outil qui peut être efficace pour la formation des enseignants. Elle permettrait aux enseignants de cerner le développement historique des concepts à enseigner, les pertes et les rajouts dans le processus de création et de transposition des concepts à enseigner. Une étude historique et épistémologique offrirait également des ressources et pour les enseignants et pour les formateurs des enseignants.

Références

Armatte, M. (2004). La théorie des erreurs (1750-1820) : enjeux, problématiques, résultats. Dans E. Barbin, & J.-P. Lamarche, *Histoires de probabilités et de statistiques* (pp. 141-160).

Armatte, M. (2010). Statut de la Dispersion : de l'erreur à la variabilité. *Journal électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique, 6*(1).

Bru, B. (2006). La courbe de Gauss ou le théorème de Bernouilli raconté aux enfants. *Math. Sci. hum, Mathematics and Social Sciences*(175), 5-23.

Dodge, Y. (2010). *Statistique. Dictionnaire encyclopédique.* Paris, France: Springer-Verlag.

Dorier, J. (1997). Recherches en Histoire et en Didactique des mathématiques sur l'Algèbre linéaire—Perspective théorique sur leurs interactions. domain_other. Université Joseph-Fourier. - Grenoble I, ⟨tel-00338400⟩. https://theses.hal.science/tel-00338400

Droesbeke, J.-J., & Tassi, P. (1990). *Histoire de la Statistique* (éd. 2e édition). Paris: Les Éditions de la Chenelière inc.

Fourez, G. et Larochelle, M. (2002). *Apprivoiser l'épistémologie.* https://doi.org/10.3917/dbu.foure.2002.01

Gauss, C.-F. (1855). *Méthode des moindres carrés. Mémoire sur la combinaison des observations.* Paris: Traduit par Joseph Bertrand, Mallet-Bachelier.

Noel, G., & Tilleuil, P. (2005). D'où sort la méthode des moindres carrés? *Mathématiques et Pédagogie*(151), 17-44.