

Subsídios para o desenvolvimento de um modelo epistemológico de referência para a compreensão do conceito de equações diferenciais ordinárias

Subsidies for the development of an epistemological reference model for the understanding of the concept of ordinary differential equations

Subvenciones para el desarrollo de un modelo epistemológico de referencia para la comprensión del concepto de ecuaciones diferenciales ordinarias

Subventions pour le développement d'un modèle de référence épistémologique pour la compréhension du concept d'équations différentielles ordinaires

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar¹

Pontifical Catholic University of São Paulo (PUC-SP)

PhD in Mathematics

<http://orcid.org/0000-0002-6685-9956>

Amábile Jeovana Neiris Mesquita²

Universidade Estadual de Goiás (UEG)

Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional

<https://orcid.org/0000-0003-3884-7541>

Resumo

O número especial da revista Educação Matemática Pesquisa (EMP) apresenta a questão: Como elaborar um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para o ensino de Cálculo? Para colaborarmos com a resposta a essa questão, apresentamos um excerto de uma pesquisa de doutorado em andamento sobre Equações Diferenciais Ordinárias. Como fatores a serem consideradas em um MER ressaltamos as contribuições da Matemática Crítica que destaca uma análise sobre o fracasso escolar, com um foco específico na matemática, e como isso está relacionado às práticas curriculares e aos modelos epistemológicos subjacentes dominantes, os quais enfatizam a transmissão de conhecimento de forma passiva e descontextualizada. A ideia central é que esses modelos não devem ser aceitos passivamente, mas sim questionados e revisados constantemente. Neste estudo foram considerados alguns elementos históricos sobre o tema, assim como dificuldades e avanços do processo de ensino e de aprendizagem tomando resultados de algumas pesquisas. A evolução do conceito de Equações Diferenciais Ordinárias ao longo do tempo, está intrinsecamente ligada às contribuições dos matemáticos na sua definição e compreensão. A modelagem e a teoria dos registros de representação semiótica possibilitaram compor um cenário que evidenciasse os conhecimentos necessários para o ensino

¹ abarcaap@pucsp.br

² amabile.mesquita@ueg.br

de equações diferenciais ordinárias. O saber tecnológico, presente na pesquisa, compreende o conhecimento do GeoGebra que auxiliou no processo de ensino e de aprendizagem deste tema. Estudos preliminares de um Modelo Epistemológico Dominante (MED) sobre um objeto matemático, no caso Equações Diferenciais Ordinárias, podem decorrer em implicações relevantes, na medida em que motiva a construção de um MER.

Palavras-chave: Educação matemática, Ensino de equações diferenciais ordinárias, Matemática crítica, Modelo epistemológico de referência

Abstract

The special issue of the journal *Educação Matemática Pesquisa* (EMP) presents the question: How to develop an Epistemological Reference Model (ERM) for the teaching of Calculus? To help answer this question, we present an excerpt from ongoing doctoral research on Ordinary Differential Equations. As factors to be considered in an ERM, we highlight the contributions of Critical Mathematics, which highlights an analysis of school failure, with a specific focus on mathematics, and how this is related to curricular practices and dominant underlying epistemological models, which emphasize the transmission of knowledge in a passive and decontextualized way. The central idea is that these models should not be passively accepted, but rather questioned and constantly revised. In this study, some historical elements on the subject were considered, as well as difficulties and advances in the teaching and learning process, taking the results of some research. The evolution of the concept of Ordinary Differential Equations over time is intrinsically linked to the contributions of mathematicians in their definition and understanding. Modeling and the theory of Registers of Semiotic Representation made it possible to compose a scenario that evidenced the necessary knowledge for the teaching of ordinary differential equations. The technological knowledge present in the research comprises the knowledge of GeoGebra that helped in the teaching and learning process of this theme. Preliminary studies of a Dominant Epistemological Model (DEM) on a mathematical object, in this case Ordinary Differential Equations, may have relevant implications, as it motivates the construction of an ERM.

Keywords: Mathematics education, Teaching of ordinary differential equations, Critical mathematics, Epistemological reference model

Resumen

El número especial de la revista *Educação Matemática Pesquisa* (EMP) presenta la pregunta: ¿Cómo desarrollar un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) para la enseñanza del Cálculo? Para ayudar

a responder esta pregunta, presentamos un extracto de una investigación doctoral en curso sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Como factores a considerar en un MER, destacamos los aportes de la Matemática Crítica, que destaca un análisis del fracaso escolar, con un enfoque específico en las matemáticas, y cómo este se relaciona con las prácticas curriculares y los modelos epistemológicos subyacentes dominantes, que enfatizan la transmisión del conocimiento de manera pasiva y descontextualizada. La idea central es que estos modelos no deben ser aceptados pasivamente, sino cuestionados y revisados constantemente. En este estudio se consideraron algunos elementos históricos sobre el tema, así como dificultades y avances en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tomando los resultados de algunas investigaciones. La evolución del concepto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a lo largo del tiempo está intrínsecamente ligada a las aportaciones de los matemáticos en su definición y comprensión. Modelización y la teoría de los Registros de la Representación Semiótica permitió componer un escenario que evidenció los conocimientos necesarios para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El conocimiento tecnológico presente en la investigación comprende el conocimiento de GeoGebra que ayudó en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este tema. Los estudios preliminares de un Modelo Epistemológico Dominante (MED) sobre un objeto matemático, en este caso las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, pueden tener implicaciones relevantes, ya que motivan la construcción de un MER.

Palabras clave: Educación matemática, Enseñanza de ecuaciones diferenciales ordinarias, Matemática crítica, Modelo epistemológico de referencia

Résumé

Le numéro spécial de la revue Educação Matemática Pesquisa (EMP) présente la question suivante: Comment développer un modèle épistémologique de référence (MER) pour l'enseignement du calcul? Pour aider à répondre à cette question, nous présentons un extrait d'une recherche doctorale en cours sur les équations différentielles ordinaires. En tant que facteurs à prendre en compte dans un MER, nous soulignons les apports des mathématiques critiques, qui mettent en évidence une analyse de l'échec scolaire, avec un accent particulier sur les mathématiques, et comment cela est lié aux pratiques curriculaires et aux modèles épistémologiques sous-jacents dominants, qui mettent l'accent sur la transmission des savoirs de manière passive et décontextualisée. L'idée centrale est que ces modèles ne doivent pas être acceptés passivement, mais plutôt remis en question et constamment révisés. Dans cette étude, certains éléments historiques sur le sujet ont été pris en compte, ainsi que les difficultés et les avancées dans le processus d'enseignement et d'apprentissage, en prenant les résultats de certaines recherches. L'évolution du concept d'équations différentielles ordinaires au cours du temps est intrinsèquement liée aux contributions des mathématiciens dans leur définition et leur compréhension. La Modélisation et la théorie des Registres de Représentation Sémiotique a permis de composer un scénario qui mettait en évidence les connaissances nécessaires à l'enseignement des équations différentielles ordinaires. Les connaissances technologiques présentes dans la recherche comprennent

les connaissances de GeoGebra qui ont aidé dans le processus d'enseignement et d'apprentissage de ce thème. Les études préliminaires d'une Modèle Épistémologique Dominant (MED) sur un objet mathématique, en l'occurrence les équations différentielles ordinaires, peuvent avoir des implications pertinentes, car elles motivent la construction d'un MER.

Mots-clés : Enseignement des mathématiques, Enseignement des équations différentielles ordinaires, Mathématiques critiques, Modèle de référence épistémologique

Subsídios para o desenvolvimento de um modelo epistemológico de referência para a compreensão do conceito de equações diferenciais ordinárias

Os Modelos Epistemológicos Dominantes (MED) e os Modelos Epistemológicos de Referência (MER) representam abordagens distintas na compreensão e construção do conhecimento em uma determinada área, como a matemática. A reflexão sobre esses dois modelos e suas relações é fundamental para entendermos como o conhecimento é construído e transmitido no contexto educacional.

O Modelo Epistemológico Dominante (MED) refere-se à abordagem que prevalece em determinado momento na história e na prática educacional. Ele representa as concepções predominantes sobre como o conhecimento é produzido, validado e transmitido. No contexto da matemática, por exemplo, o Modelo Epistemológico Dominante pode estar associado a uma visão mais formalista ou conteudista, na qual a ênfase é colocada na memorização de fórmulas e procedimentos, sem necessariamente explorar as conexões conceituais e as aplicações práticas.

Por outro lado, o Modelo Epistemológico de Referência (MER) é uma abordagem alternativa, que busca questionar e ampliar as concepções estabelecidas pelo modelo dominante. Ele representa uma visão mais crítica e reflexiva sobre o conhecimento, enfatizando a importância da contextualização, da interdisciplinaridade e da construção ativa do saber pelo aluno. No caso da matemática, um Modelo Epistemológico de Referência pode promover uma abordagem mais investigativa, na qual os alunos são incentivados a explorar conceitos matemáticos por meio de problemas do mundo real, discussões em grupo e experimentação.

Gascón (2014) indica que um MER é um conjunto de ideias, princípios e abordagens que podem ser considerados para compor quadros teóricos ou metodológicos para o estudo de uma área específica do conhecimento, neste caso, o ensino da Matemática.

As relações entre esses dois modelos são dinâmicas e complexas. Em muitos casos, o Modelo Epistemológico de Referência emerge como uma resposta às limitações percebidas no modelo dominante, buscando superar suas fragilidades e promover uma abordagem mais inclusiva e significativa do conhecimento. No entanto, o modelo dominante pode resistir a mudanças e desafiar a adoção de novas práticas pedagógicas, especialmente se elas representarem uma ruptura com as tradições estabelecidas.

É importante destacar que os modelos epistemológicos não são necessariamente mutuamente excludentes. Eles podem coexistir e interagir de maneiras diversas no contexto educacional, influenciando tanto a prática dos professores quanto a experiência de aprendizagem dos alunos. Uma abordagem eficaz para aprimorar o ensino e a aprendizagem da

matemática envolve a reflexão crítica sobre esses modelos, reconhecendo suas potencialidades e limitações e buscando integrar elementos de ambos para criar uma experiência educacional mais rica e significativa.

Nesse aspecto podemos considerar Skovsmose (2001) que oferece uma análise crítica sobre o fracasso escolar, com um foco específico na matemática, e como isso está relacionado às práticas curriculares e aos modelos epistemológicos subjacentes. Embora o autor não aborde diretamente os termos "modelo epistemológico dominante" e "modelo epistemológico de referência" em sua obra, ele discute conceitos e abordagens que estão relacionados a esses modelos.

Skovsmose (2001) argumenta que o fracasso escolar não é apenas uma questão individual, mas sim um fenômeno social e cultural complexo, influenciado por diversos fatores, incluindo as práticas educacionais e as concepções sobre conhecimento e aprendizagem. Nesse sentido, ele critica abordagens tradicionais de ensino de matemática que se baseiam em Modelos Epistemológicos Dominantes, os quais enfatizam a transmissão de conhecimento de forma passiva e descontextualizada.

Ao propor uma análise crítica das reformas curriculares em matemática, Skovsmose (2001) destaca a necessidade de questionar e reformular os modelos epistemológicos subjacentes a essas práticas educacionais. Ele defende uma abordagem mais reflexiva e contextualizada, que reconheça a matemática como uma atividade culturalmente situada e promova uma visão mais inclusiva e democrática do conhecimento matemático.

A abordagem da "Matemática Crítica" proposta por Ole Skovsmose está intimamente ligada à análise e crítica tanto do Modelo Epistemológico Dominante quanto do Modelo Epistemológico de Referência na educação matemática.

O MED na educação matemática muitas vezes se baseia em uma visão tradicional da matemática como uma disciplina neutra e objetiva e o conhecimento é transmitido de forma hierárquica pelo professor aos alunos. Esse modelo tende a enfatizar a memorização de fórmulas e procedimentos, desconsiderando muitas vezes as conexões conceituais e as aplicações práticas da matemática. Skovsmose (2001) desafia essa visão, argumentando que a matemática é uma atividade culturalmente situada, moldada por valores, crenças e poderes dominantes.

Por outro lado, o MER na educação matemática propõe uma abordagem alternativa e crítica ao modelo dominante. Ele busca questionar as concepções estabelecidas sobre o conhecimento matemático e promover uma visão mais inclusiva e contextualizada da disciplina. Nesse sentido, a "Matemática Crítica" de Skovsmose pode ser considerada uma

expressão desse MER, que valoriza a análise crítica das práticas matemáticas e pedagógicas, bem como das relações sociais e políticas que influenciam a produção e o uso do conhecimento matemático.

Portanto, a abordagem da Matemática Crítica de Skovsmose representa uma alternativa tanto ao MED quanto ao MER na educação matemática. Ela desafia as suposições subjacentes a esses modelos, promovendo uma visão mais reflexiva, inclusiva e socialmente engajada da disciplina. Essa abordagem tem o potencial de capacitar os alunos a se tornarem pensadores críticos e agentes de mudança em suas comunidades.

Skovsmose (2001), também propõe o trabalho com modelagem na educação matemática, inspirado por Rodney Bassanezi, como um possível caminho para que o aspecto democrático se apresente na sala de aula.

[...] é extremamente importante que os estudantes aprendam sobre a construção de modelos, e a melhor maneira de aprender isso é construindo modelos. A tendência pragmática constrói-se sobre uma suposição filosófica acerca da matemática, que afirma que um aspecto essencial da matemática é sua utilidade (completamente contrário à filosofia estruturalista e formalista, que afirma que o aspecto essencial da matemática é sua “arquitetura lógica”) (Skovsmose, 2001, p. 40)

O desenvolvimento de um MER pode ser considerado como uma alternativa à epistemologia dominante no ensino de matemática. Ele propõe uma abordagem mais crítica e reflexiva na qual se analisa, não apenas o conteúdo matemático em si, mas também os processos de transposição didática, ou seja, como esse conhecimento é transformado e transmitido em sala de aula.

Os modelos epistemológicos são essencialmente suposições ou estruturas de pensamento que fundamentam como o conhecimento matemático é construído e transposto. A ideia central é que esses modelos não devem ser aceitos passivamente, mas sim questionados e revisados constantemente.

Uma das chaves desse modelo é a capacidade de analisar de maneira crítica documentos oficiais, concepções dos professores e alunos, livros didáticos, planos de estudos e outras práticas pedagógicas. Isso permite uma construção inicial do modelo que esteja mais alinhada com as necessidades e desafios enfrentados no contexto educacional específico.

Neste texto apresentamos um excerto de uma pesquisa de doutorado em andamento sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), no qual são considerados alguns elementos históricos, assim como dificuldades e avanços dos processos de ensino e de aprendizagem

tomando resultados de algumas pesquisas e que podem ser considerados como subsídios para a construção de um MER.

A evolução do conceito de equações diferenciais ordinárias ao longo do tempo, está intrinsecamente ligada às contribuições dos matemáticos na sua definição e compreensão. À medida que o conceito de equações diferenciais foi se expandindo e refinando, possibilitou também novos horizontes de aplicação em outros campos. Uma investigação histórica pode permitir analisar e ajustar modelos epistemológicos particulares de uma área específica da prática matemática (Gascón, 2014). Compreender o contexto histórico permite obter informações sobre a essência do conceito, como afeta seu ensino e a aprendizagem e auxiliam na construção de um MER.

O MED representa as práticas e concepções de ensino de matemática que prevalecem em determinado contexto histórico e cultural. No caso das EDO, o MED enfatiza abordagens algébricas e o uso de métodos de resolução padronizados, na qual os estudantes se concentram em resolver equações sem necessariamente compreender a relação entre as soluções e o contexto que originou a equação. Assim, o ensino tende a ser descontextualizado e focado na transmissão passiva de técnicas.

Já o MER propõe uma alternativa que valoriza a construção ativa do conhecimento pelos alunos, incorporando contextos e aplicações práticas. A construção de um MER para o ensino de EDO pode se basear em uma análise histórica, na qual se considera a evolução do conceito ao longo do tempo e suas diversas aplicações. Esse modelo considera o uso de tecnologias como o GeoGebra e a modelagem matemática, possibilitando uma abordagem investigativa que contextualiza os conceitos e ajuda os alunos a compreenderem o papel das EDO na modelagem de fenômenos reais.

O referencial teórico da pesquisa tomou como base a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1993) que pode auxiliar a compor um cenário que evidencie os saberes que condicionam a construção dos conhecimentos necessários para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias e trazer subsídios para o desenvolvimento de um MER. O saber tecnológico, presente na pesquisa, compreende o conhecimento da interface, funcionalidade e características do GeoGebra que pode auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem deste tema, também inspirador para o desenvolvimento de um MER.

Ao articular esses elementos com o ensino de Cálculo, percebe-se que o MER permite uma visão crítica e inclusiva e o conhecimento matemático é compreendido como um processo dinâmico e situado culturalmente. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval complementa essa abordagem, pois permite que os alunos façam a transição entre diferentes

representações (algébrica, gráfica, numérica) e compreendam o conceito de EDO de maneira integrada.

Portanto, a construção de um MER para o ensino de Cálculo com foco em EDO requer a superação do MED tradicional. Ele deve incluir elementos históricos, modelagem matemática e recursos tecnológicos, promovendo uma educação que incentive a interpretação crítica e a aplicação prática do conhecimento, ampliando o entendimento matemático dos alunos e tornando-o mais significativo no contexto educacional.

Estudos preliminares de um Modelo Epistemológico Dominante (MED) sobre um objeto matemático, no caso Equações Diferenciais Ordinárias, podem decorrer em implicações relevantes, na medida em que motiva a construção de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para a exploração não só do conteúdo matemático em si, mas também para os processos de transposição didática.

Elementos históricos e resultados de pesquisas sobre Equações Diferenciais

Um MED pode apresentar alguns elementos históricos, assim como dificuldades e avanços do processo de ensino e de aprendizagem tomando resultados de algumas pesquisas, para serem considerados como subsídios para a construção de um MER.

Uma perspectiva histórica para uma compreensão abrangente das EDO, é necessária ser realizada, pois pode destacar a evolução dos conhecimentos, as influências recebidas e os debates ocorridos ao longo do tempo.

O surgimento das equações diferenciais está relacionado ao desenvolvimento do cálculo no final do século XVII e desempenha papel crucial para muitas das realizações fundamentais na matemática e na ciência. A história das equações diferenciais começa com os trabalhos de dois matemáticos proeminentes: Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que desenvolveram os conceitos de derivada e integral, embora de maneiras diferentes, criando as fundações do que viria a ser conhecido como cálculo diferencial e integral.

Newton utilizou equações diferenciais principalmente para descrever problemas de mecânica, como o movimento dos planetas e outros corpos sob a influência da gravidade. Ele introduziu o conceito de taxa de variação e formulou leis do movimento que podiam ser expressas matematicamente por meio de equações diferenciais.

De forma independente, Leibniz desenvolveu técnicas de cálculo e aplicou-as em diversos problemas de tangentes e áreas, o que também levou ao desenvolvimento de equações diferenciais. A notação utilizada por ele para o cálculo diferencial é amplamente utilizada até hoje e facilitou o cálculo de derivadas e integrais.

Durante o século XVIII, as equações diferenciais se tornaram uma ferramenta essencial em física e engenharia. Matemáticos como Leonhard Euler (1707-1783), e Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) expandiram o uso das equações diferenciais, aplicando-as a mais problemas em mecânica.

De acordo com Boyer e Merzbach (2012), o matemático e físico suíço Euler contribuiu com os métodos para resolver equações diferenciais lineares e não-lineares que são encontrados nos cursos de equações diferenciais e, muitos dos problemas encontrados em livros didáticos, remontam aos grandes tratados que Euler escreveu sobre o Cálculo.

Joseph-Louis Lagrange foi um matemático e astrônomo italiano do século XVIII, cujas contribuições tiveram um impacto significativo na formulação e solução de equações diferenciais, especialmente no campo da mecânica. Lagrange é conhecido por seu trabalho na mecânica analítica, que reformulou a mecânica clássica de Newton que emprega grandezas vetoriais como força, velocidade e aceleração, introduzindo um novo formalismo que utiliza grandezas escalares, como energia e coordenadas generalizadas.

O desenvolvimento das equações diferenciais tomou uma direção significativamente nova com a contribuição de Henri Poincaré (1854-1912) no final do século XIX e início do século XX. Poincaré foi pioneiro na abordagem qualitativa das equações diferenciais, que se concentra mais nas propriedades gerais das soluções e na geometria das trajetórias no espaço de fases do que em soluções exatas e específicas.

Muitos problemas que envolvem movimento, taxas de crescimento, eletricidade e outros fenômenos físicos ou biológicos que apresentam taxas de variação são frequentemente modelados usando Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Portanto, o estudo dessas equações estabelece conexões entre a Matemática e outras ciências, criando um ambiente propício para a aprendizagem através da contextualização.

Outro aspecto a ser considerado é sobre a inclusão da disciplina de Equações Diferenciais nas matrizes curriculares das instituições de ensino superior que varia de acordo com o Projeto Pedagógico de cada curso. Frequentemente, Equações Diferenciais é oferecida como uma disciplina autônoma que abrange conceitos fundamentais de equações diferenciais ordinárias e parciais, além de métodos analíticos e numéricos de resolução e suas aplicações em diversas áreas. Contudo, em cursos como Engenharia, essa disciplina pode ser integrada ao Cálculo Diferencial e Integral, tratando os tópicos de equações diferenciais no contexto mais amplo de funções, limites, derivadas e integrais. Essa escolha depende da filosofia do curso, dos objetivos específicos do programa e das necessidades dos alunos, podendo resultar numa abordagem mais detalhada e aprofundada quando oferecida de forma independente, ou mais contextualizada e aplicada quando integrada ao cálculo.

Em algumas Instituições de Ensino Superior (IES) os componentes curriculares são ofertados semestralmente e o curso é organizado em períodos sequenciais, no qual os estudantes avançam de um período para o próximo a cada semestre.

No Bacharelado em Engenharia Civil do Campus de Palmas do Instituto Federal do Tocantins (IFTO), o conteúdo de EDO é integrado como parte da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II (CDI II). Esta disciplina, oferecida no segundo período do curso, conta com uma carga horária total de 60 horas. Conforme Brasil (2023), o planejamento curricular dessa IES é estruturado com base em pré-requisitos, exigindo que os estudantes completem a disciplina de CDI I, também com 60 horas, antes de progredirem para CDI II.

Na Universidade Federal da Bahia (UFBA), nos cursos de Engenharia Mecânica, Química e Civil, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) são abordadas como único tópico da disciplina de Cálculo C, oferecida no terceiro período do curso. Semelhante ao modelo adotado pelo Instituto Federal do Tocantins (IFTO), a Universidade Federal da Bahia (UFBA) estrutura sua matriz curricular com base em uma lógica de pré-requisitos. Para se matricularem em Cálculo C, os estudantes devem primeiro completar as disciplinas de Cálculo B e Álgebra Linear (AL), ambas ofertadas no segundo período. Além disso, Cálculo B requer que os estudantes já tenham cursado Cálculo A e Geometria Analítica (GA), que são ministradas no primeiro período do curso. Todas estas disciplinas possuem uma carga horária de 102 horas.

Na Universidade Federal do Piauí (UFPI), localizada em Teresina, os cursos de Bacharelado em Matemática e Licenciatura em Matemática são organizados segundo uma lógica de pré-requisitos, conforme detalhado nos Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) de 2017. Ambos os cursos compartilham uma estrutura similar nas disciplinas básicas de matemática, como Cálculo Diferencial e Integral (CDI), Geometria Analítica (GA), Álgebra Linear I (AL I) e Elementos de Matemática I (EM I), todas com uma carga horária de 90 horas.

No curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Goiás (UEG), localizado no Câmpus Cora Coralina, na cidade de Goiás, a matriz curricular adotada em 2015 estrutura suas disciplinas, com exceção das relacionadas ao Estágio e ao Trabalho de Conclusão de Curso, com uma carga horária padrão de 60 horas. Um ponto notável desse curso é que ele não segue um sistema de pré-requisitos para as disciplinas, diferenciando-se de muitas outras instituições de ensino superior que adotam essa prática. As EDO são estudadas na disciplina "Equações Diferenciais Aplicadas", que é oferecida no sexto período do curso.

A análise dos currículos de cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática nas instituições de ensino superior revela que as EDO são geralmente introduzidas nos últimos períodos. Esta estruturação curricular é adotada devido à necessidade dos alunos de possuírem uma base sólida em Cálculo, adquirida em disciplinas anteriores, essencial para um melhor entendimento em tais equações. Nestes cursos, elas são frequentemente tratadas como uma disciplina independente, destacando sua complexidade e importância.

Em contraste, nos cursos de Engenharia, disciplinas fundamentais como Cálculo Diferencial e Integral I e II ou Cálculo A, B e C são ministradas nos primeiros períodos. Nesses contextos, as EDO são, muitas vezes, incorporadas dentro dessas disciplinas de Cálculo, seja como um tópico isolado ou em conjunto com outros conceitos.

Conforme destaca Boyce (2020), a estruturação dos cursos que incluem Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) deve levar em conta uma sólida formação em Cálculo e Álgebra Linear. O autor enfatiza que os conteúdos de Cálculo são fundamentais e devem ser ministrados ao longo de dois a três semestres para preparar adequadamente os estudantes. Além disso, a Álgebra Linear é destacada como essencial devido à sua utilização na abordagem de matrizes para a resolução de sistemas de equações diferenciais.

Nas Instituições de Ensino Superior (IES) examinadas, a maioria segue a prática de estabelecer pré-requisitos, com exceção do curso de licenciatura da UEG, que adota uma abordagem mais flexível. Além disso, as disciplinas de cálculo, consideradas essenciais por Boyce, são uma constante em todos os cursos analisados, reforçando a importância desses fundamentos matemáticos conforme sugerido pelo autor.

Pesquisas como de Dullius, Veit e Araujo (2013) e Alvarenga, Dorr e Vieira (2016) apontam que a abordagem adotada no ensino de EDO é predominantemente algébrica e os alunos aprendem métodos de resolução sem analisar o comportamento das soluções obtidas. Isso resulta que os alunos não conseguem interpretar adequadamente os termos das equações, não reconhecem a conexão entre as EDO e os sistemas reais que elas modelam, e não realizam uma análise qualitativa do problema que originou às equações.

Um possível cenário para um MER sobre Equações Diferenciais Ordinárias

A teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval pode alicerçar a construção de um cenário que evidencie os saberes que condicionam o ensino de EDO, indicando subsídios para o desenvolvimento de um MER. Esse cenário também pode envolver o saber tecnológico, como a utilização do GeoGebra para compreender suas funcionalidades e características e auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem deste tema. A Modelagem Matemática, também, pode contribuir como uma estratégia metodológica.

Segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica,

As representações semióticas são produções constituídas pelo uso de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas próprias restrições de significado e de funcionamento (Duval, 1993, p. 39).

Existem três atividades cognitivas que caracterizam os registros de representação semióticas, sendo a primeira, a formação de uma representação identificável que pode ser

determinada através de uma frase compreensível, um desenho, uma figura, uma fórmula entre outros. A segunda, o tratamento de uma representação, que é a transformação dessa representação no próprio registro, como por exemplo, resolver algebricamente as EDO.

Quando a representação de um objeto matemático é transformada em outra representação em outro registro, ocorre a conversão, como por exemplo, quando tem-se a representação gráfica de uma função obtida a partir de uma representação algébrica. Portanto, o tratamento ocorre dentro do mesmo registro e a conversão entre registros diferentes.

Essa teoria proporciona suporte tanto em termos cognitivos, pois permite compreender como ocorre a aquisição do conhecimento, quanto em termos didáticos/metodológicos, quando aborda a forma como se processa a aprendizagem.

Com o intuito de contribuir para o ensino e para a aprendizagem das EDO, a Modelagem Matemática pode ser uma estratégia metodológica por realizar, entre outras coisas, uma interação entre o “mundo real” e a matemática, como enfatiza Bassanezi:

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (Bassanezi, 2022, p.24).

A pesquisa de Dullius, Veit e Araujo (2013) traz indícios de que a Modelagem Matemática pode ser uma facilitadora do aprendizado pois atividades de ensino em ambiente de modelagem fazem emergir vários conceitos matemáticos e extra matemáticos favorecendo a aprendizagem.

Complementando essa metodologia de ensino, pode-se, também, considerar o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Segundo Marin (2008, p. 138), é no desenvolvimento das aulas que “[...] identifica-se que a TIC permite realizar atividades que seriam impossíveis de serem feitas somente com o uso de lápis de papel, proporcionando a organização de situações pedagógicas com maior potencial para aprendizagem”.

Gravina e Santarosa (1998, p.01), relatam que a aprendizagem “depende de ações que caracterizam o ‘fazer matemático’: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar [...]”, sendo assim, as TIC podem contribuir para que os estudantes modelem, analisem simulações, façam experimentos, conjecturem, confrontem e refinem suas ideias.

Blum e Niss (1991) destacam a importância das tecnologias na Modelagem Matemática, evidenciando as seguintes possibilidades que elas oferecem:

- Resolução de problemas complexos: As tecnologias permitem lidar com situações-problema que seriam inabordáveis sem o auxílio de simulações numéricas ou gráficas devido à sua complexidade ou à necessidade de uma base teórica avançada;
- Análise e compreensão Aprofundada: Facilitam a compreensão e a análise das situações-problema através da variação de parâmetros e da realização de estudos numéricos, algébricos e gráficos;
- Foco no processo de modelagem: As tecnologias permitem que os educandos se concentrem mais nos processos de Modelagem, pois reduzem a carga de trabalho manual necessário nos cálculos, permitindo uma exploração mais eficiente e profunda dos modelos matemáticos.

Na pesquisa de doutorado, em andamento, foi utilizado o software GeoGebra, desenvolvido para o ensino e aprendizagem de Matemática nos seus vários níveis de ensino (desde a educação básica até o ensino universitário). Pode ser encontrado de forma gratuita na internet e está disponível em língua portuguesa, favorecendo sua acessibilidade e uso. Foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter como resultado de sua tese de Doutorado na Universidade de Salzburg na Áustria (Hohenwarter; Preiner, 2007).

De acordo com Gerônimo, Barros e Franco (2010), a característica fundamental desse software reúne recursos de Geometria, Álgebra e Cálculo, sendo assim, é possível a construção e manipulação de tabelas, gráficos, funções, pontos, vetores, retas, segmentos de reta, polígonos, entre outros, com a facilidade de utilizá-los em um mesmo ambiente. Dessa forma, o GeoGebra tem como benefício didático a apresentação simultânea de diversas representações de um mesmo objeto.

Uma das vantagens do uso do GeoGebra é que as construções são dinâmicas, isto é, sem a perda dos vínculos geométricos. Isso permite que o usuário faça experimentações que lhe possibilite construir proposições geométricas (Gerônimo, Barros e Franco, 2010, p.11).

O GeoGebra inicialmente apresenta duas diferentes regiões para apresentação dos objetos matemáticos, sendo estas a janela de visualização e a janela de Álgebra. Desse modo, as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e atualizam-se automaticamente com as mudanças realizadas em qualquer uma das janelas.

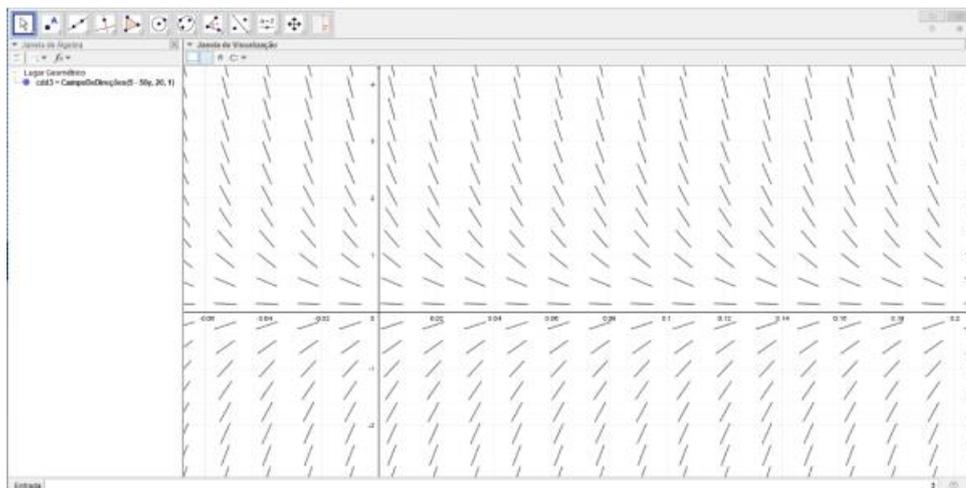


Figura 1

Campo de direções gerado pelo GeoGebra

Uma possibilidade de proposta de atividade, no contexto da Modelagem e considerando um problema real, poderia ser que, após os alunos recuperarem conceitos sobre derivação e integração, iniciar o tema sobre EDO, indicar a construção de um campo de direções no papel quadriculado e depois utilizar o comando *CampodeDireções* e *ResolverEDO* no GeoGebra (Figura 1) e, assim, poderão comparar as resoluções e reconhecerem as funcionalidades proporcionadas pelo software.

Com essas funcionalidades do GeoGebra, é possível obter várias representações de um objeto matemático, indo ao encontro do que preconiza a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, ao considerar que a aprendizagem ocorre quando o indivíduo realiza articulações entre os diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático.

Considerações Finais

Os Modelos Epistemológicos Dominantes (MED) e os Modelos Epistemológicos de Referência (MER) representam abordagens distintas na compreensão e construção do conhecimento em uma determinada área, como a matemática. Eles podem coexistir e interagir de maneiras diversas no contexto educacional, influenciando tanto a prática dos professores quanto a experiência de aprendizagem dos alunos. A reflexão sobre esses dois modelos e suas relações é fundamental para entendermos como o conhecimento é construído e transmitido no contexto educacional.

Uma abordagem eficaz para aprimorar o ensino e a aprendizagem da matemática envolve a reflexão crítica sobre esses modelos, reconhecendo suas potencialidades e limitações

e buscando integrar elementos de ambos para criar uma experiência educacional mais rica e significativa. Desse modo ressaltamos as contribuições da Matemática Crítica de Ole Skovsmose que destaca fatores relacionados às práticas curriculares e aos modelos epistemológicos subjacentes dominantes, que devem ser questionados e revisados constantemente.

Para subsidiar a construção de um MER, apresentamos um excerto de uma pesquisa de doutorado em andamento sobre Equações Diferenciais Ordinárias que sugere elementos de um cenário para a construção de um MER, como a evolução do conceito desse tema ao longo do tempo e dificuldades e avanços do processo de seu ensino e de sua aprendizagem considerando resultados de algumas pesquisas.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica contribuiu para compor esse cenário pois evidenciou os conhecimentos necessários para o ensino de equações diferenciais ordinárias por meio de Registros de Representação Semiótica. O saber tecnológico, que compreendeu o conhecimento do GeoGebra para auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem deste tema também se fez presente.

Ainda com o intuito em contribuir para o ensino e para a aprendizagem das EDO, a Modelagem Matemática pode ser uma estratégia metodológica interessante

O desenvolvimento de um MER para o ensino de Cálculo, com foco nas EDO, exige um repensar das práticas de ensino tradicionais. Enquanto o MED enfatiza a transmissão de técnicas e métodos, o MER propõe uma abordagem mais inclusiva e investigativa, valorizando o contexto histórico, a modelagem e o uso de tecnologias educacionais. A integração dessas práticas, articuladas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica, permite que os alunos desenvolvam uma compreensão mais profunda e crítica das EDO, transformando a experiência de aprendizado em algo significativo e conectado à realidade.

Concluímos que estudos preliminares de um Modelo Epistemológico Dominante (MED) sobre um objeto matemático, no caso Equações Diferenciais Ordinárias, podem decorrer em implicações relevantes, para motivar a construção de um MER.

Referências

- Alvarenga, K. B.; Dorr, R. C.; Vieira, V. D. (2016). O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: características e interseções no Centro-Oeste brasileiro. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, v. 4, n. 2, pp. 46-57.
- Bassanezi, R. C. (2022) *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 4. ed., 2ª reimpressão. São Paulo: Contexto.

- Blum, W.; Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects - State, trends and issues in Mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), pp 36-38.
- Boyce, W.E.; DiPrima, R.C. (2010) *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC.
- Boyer, C. A.; Merzbach, U. C. (2012). *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. São Paulo: Edgar Blücher.
- Dullius, M. M.; Veit, E. A.; Araujo, I. S. (2013). Dificuldades dos Alunos na Aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v.6, n.2, p. 207-228.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, IREM-ULP, v. 5, p. 37-65, Strasbourg.
- Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, 25, 99–123. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854006>
- Gerônimo, J. R.; Barros, R. M. O.; Franco, V. S. (2010). *Geometria euclidiana: um estudo com o software GeoGebra*. Maringá: EDUEM.
- Gravina, M. A.; Santarosa, L. (1998). A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. *IV Congresso Ribie*. Brasília.
- Hohenwarter, M.; Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. ID 1448, vol.7.
- Marin, D. (2008). Professores de Matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior. 2008. 95 f. *Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)* – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro.
- Skovsmose, O. (2000) Cenários para investigação. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 13, n.14, p.66-91, 2000. Disponível em <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635>.
- Skovsmose, O. (2001) *Educação Matemática crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus, Coleção Perspectivas em Educação Matemática, SBEM, 160 p.
- Skovsmose, O. (2014). *Um convite à educação matemática crítica*. Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo. Campinas: Papirus.