ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p515-533

Uma discussão sobre a definição de limite de uma sequência

A discussion on the definition of the limit of a sequence

Discusión sobre la definición del límite de una sucesión

Discussion sur la définition de la limite d'une suite

Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato[1]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)
Doutorado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0001-8403-6032

Claudemir Aniz[2]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)
Doutorado em Matemática
https://orcid.org/0000-0002-9023-4470

Lilian Milena Ramos Carvalho[3]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)
Doutorado em Ciências da Computação e Matemática Computacional
https://orcid.org/0000-0002-5117-2035

Resumo

Neste artigo apresentamos um estudo sobre dificuldades no processo de aprendizagem da definição de limite de uma sequência. É uma pesquisa qualitativa cujo objetivo foi analisar as ações de um sujeito ao lidar com uma situação envolvendo essa definição. Para isso, trouxemos uma discussão sobre os conceitos envolvidos no campo conceitual dessa definição, juntamente com a análise de uma situação proposta. Os dados foram produzidos por meio da produção escrita e oral, coletada pelas folhas de resolução da atividade e por áudio e vídeo produzidos durante a sessão realizada. As análises evidenciam a dificuldade em se desvincular de representações gráficas mobilizadas para tratar situações particulares, no caso de sequências que convergem, mesmo quando o sujeito é confrontado com estudo dos elementos conceituais envolvidos na definição formal.

Palavras-chave: Limite de sequência, Definição formal, Representações, Ensino superior.

[1] sonia.burigato@ufms.br
[2] claudemir.aniz@ufms.br
[3] lilian.carvalho@ufms.br

Abstract

In this article we present a study on difficulties in the process of learning the definition of the limit of a sequence. It is a qualitative study whose aim was to analyze the actions of a subject when dealing with a situation involving this definition. To this end, we discussed the concepts involved in the conceptual field of this definition, together with the analysis of a proposed situation. The data was produced through written and oral production, collected from the activity resolution sheets and audio and video produced during the session. The analyses show the difficulty in disengaging from graphic representations used to deal with particular situations, in the case of sequences that converge, even when the subject is confronted with a study of the conceptual elements involved in the formal definition.

Keywords: Limit of sequence, Formal definition, Representations, Higher education.

Resumen

En este artículo presentamos un estudio sobre las dificultades en el proceso de aprendizaje de la definición de límite de una sucesión. Se trata de un estudio cualitativo cuyo objetivo fue analizar la actuación de un sujeto ante una situación que implicaba esta definición. Para ello, se discutieron los conceptos implicados en el campo conceptual de esta definición, junto con el análisis de una situación propuesta. Los datos se obtuvieron a través de la producción escrita y oral, recogida de las fichas de resolución de actividades y de audio y vídeo producidos durante la sesión. Los análisis muestran que es difícil desprenderse de las representaciones gráficas utilizadas para tratar situaciones particulares, en el caso de secuencias que convergen, incluso cuando el sujeto se enfrenta a un estudio de los elementos conceptuales implicados en la definición formal.

Palabras clave: Límite de secuencia, Definición formal, Representaciones, Enseñanza superior.

Résumé

Dans cet article, nous présentons une étude sur les difficultés dans le processus d'apprentissage de la définition de la limite d'une suite. Il s'agit d'une étude qualitative dont l'objectif est d'analyser les actions d'un sujet face à une situation impliquant cette définition. Pour ce faire, nous avons abordé les concepts impliqués dans le champ conceptuel de cette définition, ainsi que l'analyse d'une situation proposée. Les données ont été produites par le biais de productions écrites et orales, recueillies à partir des fiches de résolution des activités et des productions audio et vidéo réalisées pendant la session. Les analyses montrent qu'il est difficile de se détacher des représentations graphiques utilisées pour traiter des situations particulières, dans le cas de séquences convergentes, même lorsque le sujet est confronté à l'étude des éléments conceptuels impliqués dans la définition formelle.

Mots-clés : Limite d’une suite, Définition formelle, Représentations, Enseignement supérieur.

Uma discussão sobre a definição de limite de uma sequência

Neste artigo trazemos para discussão e análise uma situação observada durante o evento Estudos integrados – Cálculo no Ensino Médio e Superior, realizado na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, em uma sessão na qual foi apresentada e discutida a definição para o limite de uma sequência. Esse evento está relacionado a um projeto de pesquisa aprovado no CNPq edital universal de 2021. Um dos objetivos desse projeto é estudar o Modelo Epistemológico de Referência - MER (Chevallard, 1999) em diversas instituições do Brasil, buscando compreender como o conceito de limite vive, no sentido *ecológico* (Chevallard, 1994), em determinada instituição. Para isso, foram aplicadas e discutidas diversas atividades para introdução do conceito de limites buscando construir um MER sobre este conceito.

Diversos estudos vêm sendo realizados sobre dificuldades envolvendo a definição de limite com uso dos quantificadores, seja de uma função ou de sequência (Bloch, 2017; Burigato, 2019; Fernandes, 2015). Algumas trazem que existem obstáculos epistemológicos importantes com relação aos conceitos envolvidos na construção da definição, como, por exemplo, a noção de infinito, de função, etc. (Cornu, 1991), ou com outros conceitos que aparecem nessa definição, como as inequações envolvendo módulo, quantificadores e a notação *f(x)* (Doumbia, 2020). Evidenciando como alguns conceitos que aparecem na definição de limite podem trazer problemas a compreensão desse conceito.

Neste sentido, concordamos com Vergnaud (1990) da importância em se considerar o campo conceitual envolvido na construção de determinado conceito, quando estamos interessados na sua aprendizagem. Um conceito não é apresentado isoladamente, esse autor argumenta que não basta a apresentação de uma definição para que o estudante compreenda todos os aspectos envolvidos na construção de um conceito. É importante considerar o conjunto de situações em que este conceito está envolvido, ou é apresentado para o estudante, os *invariantes operatórios* relacionados às situações, no caso os conhecimentos matemáticos, além do conjunto de representações utilizados nas situações.

No caso da situação que trazemos para discussão, neste texto, vamos debater a importância de estudarmos cada conceito envolvido na definição que foi apresentada aos participantes e como esses elementos podem influenciar na compreensão do conceito. Por exemplo, identificar quais filiações são mais pertinentes, ou quais rupturas são necessárias para se avançar nessa compreensão.

A seguir, trazemos alguns subsídios teóricos e uma discussão dos elementos matemáticos envolvidos em duas propostas para a introdução da definição de limite de uma sequência que foram mobilizados neste estudo.

Elementos teóricos mobilizados para estudo da situação

Para Vergnaud (1990) o campo conceitual é constituído pelo conjunto de situações envolvendo o conceito, objeto do ensino, juntamente com um conjunto de outros conceitos envolvidos na sua construção.

Outro elemento teórico importante é o de *esquema*, que para Vergnaud (1990) é a organização invariante da ação do sujeito ao lidar com um conjunto de situação, que guarda certa similaridade. Assim, ao reconhecer essa semelhança com outras situações enfrentadas, ele identifica o objetivo, e os subobjetivos, e por meio de regras em ação "se eu fizer isso... então terei...", seleciona os conceitos pertinentes e as propriedades matemáticas relacionadas que são os *invariantes operatórios*, no caso os *conceitos em ação* e os *teoremas em ação*, sendo que esses últimos podem não serem corretos do ponto de vista matemático. E, ao mesmo tempo, ele tem mecanismos de controle sobre as ações que vão sendo realizadas, bem como inferências sobre o que vai acontecer; essas ações são realizadas de modo autônomas com idas e vindas.

Deste modo, ao precisar lidar com uma situação, de construção de um novo conceito ou mesmo envolvendo novos aspectos de um conceito em desenvolvimento, o estudante irá mobilizar um esquema que foi efetivo para tratar situações que ele, de algum modo, reconheceu como semelhante a alguma atividade que ele precisou lidar e que teve sucesso. Ou seja, que ele conseguiu resolver. Por exemplo, na introdução do conceito de limite de função em um ponto é usual utilizar uma definição intuitiva envolvendo a notação algébrica $\lim_{x \to p} f(x) = L$ e, em linguagem natural, apresenta expressões como "*quando x tende a p, $f(x)$ tende a L*". Algumas vezes os limites inicialmente são resolvidos calculando valores de *f(x)*, por meio de tabelas, para valores de *x* próximos de *p*. Um aluno iniciante ao precisar lidar com casos como $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, irá mobilizar um esquema que está em desenvolvimento para construção do novo conceito. Provavelmente, ele iniciará calculando imagens da função dada, escolhendo pontos próximos de dois, à direita e à esquerda de dois, pois ele considera que precisa descobrir o que acontece com os valores da função "*quando x tende a p*", sendo que neste caso *p=2*. Podemos inferir que ele mobiliza o teorema em ação: *Se preciso descobrir o limite de uma função, então eu devo calcular os valores das imagens próximas ao ponto de investigação do limite*. Esse teorema pode ser efetivo para esta situação, caso ele não erre as contas, mas sabemos que esse conhecimento não é suficiente para resolver, ou tratar, todas as situações de limite. Pelo contrário, ele pode levar a erros importantes envolvendo a construção desse conceito.

De fato, Job e Schneider (2016) argumentam que os estudantes têm muita dificuldade quando precisam fazer a transição entre aspectos informais do cálculo para compreender aspectos mais formais. As escolhas didáticas que o ensino propõe para introdução do conceito de limite podem dificultar muito essa transição, como o uso de *ostensivos* para exemplificar casos particulares de estudo de limites, mobilizando algumas representações gráficas, ou uso de tabelas.

Neste caso, para compreender o conceito, objeto de ensino da situação, o estudante precisará fazer, o que Vergnaud denomina de rupturas com conhecimentos anteriores que foram mobilizados em seus esquemas para tratar outras atividades. Como no caso, citado dos ostensivos, algumas vezes o estudo de limite vem articulado a representações que servem de "modelos" dos casos de limites, em que por observação gráfica o aluno deve identificar o limite. Assim, para lidar com uma situação envolvendo a definição formal de limite ele precisará romper com a ideia de que basta "lembrar" das representações estudadas para resolver a situação, pois algumas vezes a representação gráfica que ele tinha eram casos particulares que não dão conta de todos os aspectos que envolvem a definição formal de limite. Neste caso, estamos nos referindo à definição de limite utilizando os quantificadores.

A seguir, trazemos uma delimitação do campo conceitual da noção de limite de sequência que foi considerado em nosso estudo. Além disso, apresentamos elementos importantes para a definição desse conceito por meio de uma discussão sobre duas definições, A e B.

Elementos do campo conceitual envolvidos na definição de limite de uma sequência

A definição de limite de uma sequência com uso de quantificadores envolve diversos conceitos que são estudados ao longo do ensino e, com isso, os professores podem ser levados a acreditar que esses conceitos estão bem construídos, e compreendidos pelos estudantes, e que serão mobilizados para a construção e compreensão quando essa definição é apresentada. Todavia, muitos aspectos importantes nem sempre são compreendidos pelos alunos e precisam ser retomados e ampliados como, por exemplo, a noção de aproximação de um número.

Os números irracionais não admitem representação decimal finita e nem periódica. Quando escrevemos $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ estamos querendo dizer que $1 < \sqrt{2} < 2$, 1,4< $\sqrt{2} <$ 1,5, $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, etc. Todo número irracional pode ser aproximado por números racionais dado que todo intervalo aberto da reta contém números racionais e irracionais. Podemos efetuar o processo de aproximação de forma empírica, mas é desejável fazê-lo de forma algorítmica. Por exemplo, a expressão

$a_{m+1} = \frac{1}{2}\left(a_m + \frac{2}{a_m}\right),\ m \geq 1$, nos fornece uma sequência que aproxima o valor de $\sqrt{2}$.

A sequência a_m é uma recorrência de primeira ordem, isto é, o termo a_{m+1} é definido por meio do termo a_m e fica totalmente definida ao atribuirmos valor para a_1. Fixando $a_1 = 2$, obtemos $a_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}$ e $a_3 = \frac{1}{2}\left(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}\right) = \frac{17}{12}$. Note que a_m é um número racional para todo $m \in N$, e os valores de a_m se aproximam do valor $\sqrt{2}$, e quanto maior for *m*, mais próximo a_m estará de $\sqrt{2}$.

Resgatando o significado da palavra convergente: *encaminhar-se para um mesmo ponto comum a outro*, podemos dizer que a sequência a_m converge para $\sqrt{2}$. Uma das demonstrações de que a sequência a_m se aproxima de $\sqrt{2}$ usa fortemente o fato de que a_m é uma sequência de Cauchy (Lima, 2013), isto é, seus termos se aproximam uns dos outros tanto quanto se queira quando *m* se torna grande o suficiente.

O comportamento da sequência a_m pode ser traduzido em termos da linguagem matemática com a noção de limite de sequência, vejamos a definição.

Definição de limite de sequência (A):

$$\lim_{m \to +\infty} a_m = a \leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n \geq 1\ \ \forall\ m >\ n{:}\ |a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{(A)}$$

Esta definição (A) significa que a sequência de números reais a_m tem limite *a* e dizemos que a sequência converge para *a*, quando, fixado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n \in N$ tal que os termos da sequência cujos índices superam *n* estão a uma distância menor do que ε de *a*.

Como o valor de ε é arbitrário, podemos dizer também que os termos da sequência a_m estão tão próximos de *a* quanto se queira, a partir de certo índice.

Se fixarmos, por exemplo, $\varepsilon = \frac{1}{10^2}$, os termos a_m pertencem ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para $m > n$, isto é, se aproximarmos o número *a* por qualquer a_m cometemos um erro menor do que ε , que neste caso, equivale a uma precisão de duas casas decimais. Quanto menor for ε, maior é a precisão da aproximação de *a* por a_m. Outro fato, é que o conjunto de índices dos termos que não estão a uma distância de *a* menor que ε forma um conjunto finito, a saber, $N_n = \{1,2, \ldots, n\}$. O número *n* depende de ε, assim, se $\varepsilon_1 <\ \varepsilon$, então é de se supor que o natural m_1 que torne a desigualdade $|a_m - a|<\varepsilon_1$ verdadeira para $m > m_1$ não pertence a N_n.

Em outras palavras, é de se esperar, que quanto maior for *m*, mais próximo a_m estará de *a*.

Isto de fato ocorre pelo argumento de que há duas possibilidades para a sequência a_m:

i) Existe $p \in N$ tal que $x_p \neq a$ com $p > n$, ou

ii) $x_m = a$ para todo $m > n$.

No caso i), considere $\varepsilon_1 = \left|a_p - a\right| > 0$. Pela definição (A), existe $m_1 \in N$ tal que $|a_m - a| < \varepsilon_1$ para todo $m > m_1$. Note que $m_1 > p > n$, pois $\left|a_p - a\right| = \varepsilon_1$.

O caso ii) significa que a sequência é constante para $m > n$.

O limite de uma sequência, se existir, é único, pois dois números reais distintos não estão tão próximos quanto se queira, ou seja, se $\lim_{m\to+\infty} a_m = a$, então nenhum $b \neq a$ pode ser limite de a_m. De fato, fixando $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, existe $n \in N$ tal que $|a_m - a| < \varepsilon$ para todo $m > n$. Portanto,

$$\begin{aligned} |a_m - b| &= \left|(-b + a) - (a - a_{m)}\right| \\ &\geq |-b + a| - |a - a_m| \\ &> |-b + a| - \frac{|a - b|}{2} \\ &= \frac{2|a - b| - |a - b|}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $m > n$ e a_m não pode convergir para b.

Toda sequência convergente é também uma sequência de Cauchy. De fato, dado $\frac{\varepsilon}{2}$, existe $n \in N$ tal que $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $m > n$. Portanto,

$\left|a_p - a_m\right| \leq \left|a_p - a\right| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ para todo $p, m > n$, cuja interpretação é que os termos a_p e a_m estão tão próximos quanto se queira para *m* suficientemente grande.

Sugestão de definição de limite de sequência (B):

$$\lim_{m\to+\infty} a_m = a \leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{(B)}$$

A definição (B) significa que se uma sequência a_m tem limite *a* quando, fixado qualquer $\varepsilon > 0$, existe algum índice *n* tal que o termo associado a este índice está a uma distância menor do que ε de *a*.

Esta definição exige apenas que existam termos da sequência que estejam tão próximos de *a* quanto se queira. Se uma sequência satisfaz (A) também irá satisfazer a condição (B).

Em termos da linguagem matemática, (A) implica (B). Porém, (B) não implica (A) e é importante observar que essas definições não são equivalentes.

Basta considerar a sequência $a_m = (-1)^m$, que assume o valor 1 nos naturais pares N_p e -1 nos naturais ímpares N_i.

A sequência a_m não é convergente, pois oscila entre dois valores, mas satisfaz a condição da definição (B), pois $|a_m - 1| = 0 < \varepsilon$ para qualquer $m \in N_p$ e $|a_m - (-1)| = 0 < \varepsilon$ para qualquer $m \in N_i$. Ou seja, há infinitos valores que se aproximam de 1, infinitos valores que se aproximam de -1 e não é único os valores que satisfazem a definição (B).

Mais ainda, os termos da sequência a_m não se aproximam uns dos outros para m suficientemente grande.

Esses conceitos são importantes para discussão da situação que apresentamos neste artigo. A seguir, trazemos os encaminhamentos metodológicos escolhidos para este estudo

Escolhas metodológicas e os Estudos integrados

Nossa investigação é de natureza qualitativa, estamos interessados nas intenções e nas situações "[...] trata-se de investigar ideias, de descobrir significados nas ações e nas interações sociais a partir da perspectiva dos atores intervenientes no processo." (Coutinho, 2011, p.16). Em particular, iremos descrever e analisar os fatos vivenciados por um sujeito participante de um evento, buscando identificar e analisar elementos dos esquemas mobilizados por ele ao lidar com a situação que envolvia a definição de limite de sequência.

O evento – Estudos Integrados – teve duração de cinco dias, e a sessão que trazemos para análise foi realizada no segundo dia. Participaram estudantes que estavam no último ano do Curso de Matemática - Licenciatura, mestrandos e doutorandos de um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Assim, todos os envolvidos na situação que iremos apresentar já haviam tido experiência com o conceito de limite de função e de sequências.

O sujeito escolhido para nosso estudo é um professor de matemática que já atuou na educação básica e no ensino superior e, naquele momento, estava cursando o doutorado em um Programa de Educação Matemática. Neste artigo, para preservar sua identidade, iremos denominá-lo de Pedro e utilizaremos sua produção escrita e as discussões obtidas por meio de vídeo. A atividade foi resolvida individualmente em uma folha impressa e, em seguida, cada participante discutia com outro colega sobre as suas escolhas e, ao final, todos juntos apresentavam no quadro suas ideias, deixamos livres para que o participante decidisse se gostaria, ou não, de apresentar no quadro. Pedro foi escolhido, pois quis apresentar e discutir com todos os grupos as suas escolhas sobre a situação.

A atividade apresentava um contexto e algumas orientações, que apresentamos a seguir:

O contexto

Nesta questão você tem a oportunidade de vivenciar uma situação realista em que é levado a dar explicações a um estudante que tem dificuldade com a noção de limite.

Esta situação é realista no sentido de que a incompreensão do estudante é encontrada no campo. Não é fruto apenas da nossa imaginação. Então, obrigado por levar isso a sério, porque faz parte do seu trabalho como professor aprender como lidar com esse tipo de situação.

Suponhamos que um colega introduziu a noção de limite finito de uma sequência de números reais aos estudantes, dando a seguinte definição:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \geq 1\ \forall m > n : |a_m - a| < \varepsilon\ (*\,1)$$

Um estudante que seguiu este ensinamento questiona você e não entende por que precisamos da parte $\forall m > n$ na definição. Parece-lhe que tomar

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon\ (*\,2)$$

seria suficiente porque esta expressão $(*\,2)$ indica claramente que se pode "a aproximar-se o quanto quiser" que é, segundo ele, a ideia básica do limite de uma sequência.

Seu trabalho

1. O que $(*\,1)$ significa em linguagem natural (português)? E $(*\,2)$? O que distingue os dois?
2. Escreva um texto que explique detalhadamente ao estudante a sua posição. Você concorda com o argumento dele? Não podemos nos contentar com $(*\,2)$ em vez de $(*\,1)$?

Detalhes do trabalho a realizar

- A sua explicação deve poder ser lida pelo estudante de forma independente, sem intervenção da sua parte e ser *independente*.
- O texto é, portanto, destinado ao estudante.
- O estudante não sabe o que está na sua cabeça. Então você tem que ser bastante explícito em sua explicação e levar em consideração que ele acabou de ter uma primeira aula sobre limites. É um novo conceito para ele. Ainda está longe de dominar todos os aspectos.
- Este é um exercício de simulação do trabalho de um professor para testar a sua capacidade em produzir uma explicação que vai direto ao ponto, sem detalhes desnecessários que possam confundir o estudante.
- Não é permitido acessar à Internet para responder a esta pergunta.

Nesta atividade propomos a discussão de duas definições para o limite de sequência com o contexto de ser uma problemática "criada" por um estudante fictício. Envolve o que apresentamos na delimitação do campo conceitual sobre o fato de que a definição (A) implica a definição (B), mas que o contrário não é verdadeiro, ou seja, (B) não implica (A). É uma situação que permite discutir problemas envolvendo a compreensão da definição de limite e, ao mesmo tempo, evidenciar aspectos importantes do campo conceitual envolvidos na construção desse conceito.

Para realizar essa atividade os participantes tiveram uma hora, em que deveriam fazer as anotações nas folhas entregues com todo detalhamento solicitado. Eles foram avisados que poderiam tirar fotos, ou copiar em seus cadernos as resoluções, pois as folhas seriam recolhidas posteriormente. Ao final, eles discutiram sobre as resoluções de cada grupo, buscando evidenciar as escolhas, se a definição (*1) ou (*2), e quais argumentos foram utilizados para justificar essa escolha. A seguir, trazemos as discussões e análises sobre os dados produzidos.

Descrição e análise da situação

Após resolução da atividade os participantes foram convidados a apresentar suas considerações sobre a atividade em que juntos, no quadro, cada um ia argumentando sobre suas escolhas.

Quando olhamos para a parte escrita do Pedro, vemos que ele buscou apresentar as duas definições primeiramente com uma representação geométrica seguida pela descrição, em linguagem natural como foi solicitado na atividade, do que significava a definição (*1) e a definição (*2). Como podemos observar na Figura 1 e na Figura 2.

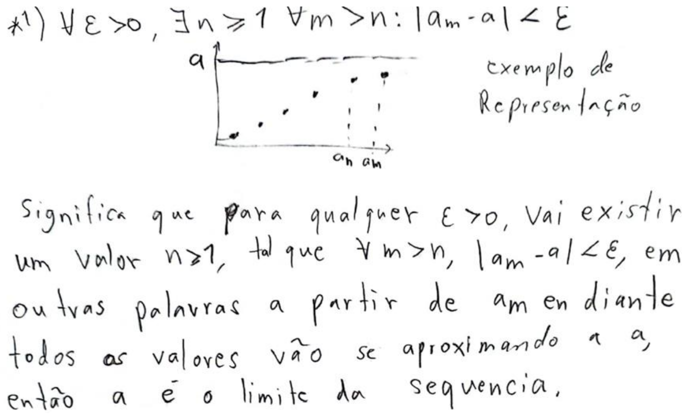

Figura 1.

Primeira parte da resolução de Pedro. Dados da pesquisa.

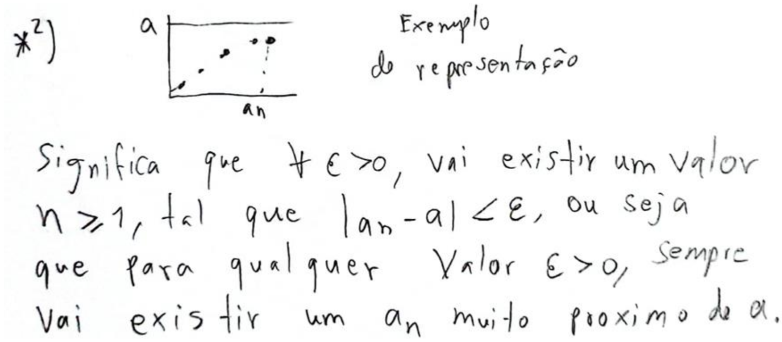

Figura 2.

Segunda parte da resolução de Pedro. Dados da pesquisa.

Pedro busca detalhar as duas definições e podemos observar que ele considera na definição (*1) o fato de que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \geq 1$, tal que para todo $m > n$ teremos $|a_m - a| < \varepsilon$, explicitando que a partir de um a_m, que no caso deveria ser *m*, todos os valores vão se tornar próximos de a. Sendo que no caso da definição (*2) explicitou a diferença entre as escritas das duas definições nessas descrições, mesmo confundindo a_m com m e a_n com n.

Com relação ao questionamento se ele estava de acordo com a argumentação do estudante, proposta na atividade, Pedro escreve:

> Eu acho que as duas expressões podem representar a ideia de limite. A primeira eu acho que é mais formal, mas a segunda é mais prática. Acho que o aluno tem clara a ideia de aproximação. A segunda seria uma opção mais simples.

Pedro se preocupa com a compreensão da ideia de aproximação do limite de uma sequência considerando o fato de que existe um termo $n \geq 1$, tal que os valores da sequência irão se aproximar de a. Como vimos, na discussão sobre o campo conceitual, na discussão sobre as definições (A) e (B), isso não é suficiente para garantir que o limite existe e que será a. Esse é um erro comum em os estudantes mobilizam teoremas em ação que foram efetivos para lidar outras situações, mas que acabam trazendo problemas quando são mobilizados para outras situações, pois envolvem outros aspectos do conceito (Burigato, 2019).

Neste sentido, Vergnaud (1990) argumenta sobre o fato de a apresentação de uma definição ser insuficiente para o estudante compreender todos os aspectos envolvidos na construção de um conceito. Sendo por meio das situações, em que o conceito é objeto de estudo, que será possível o sujeito ir compreendendo as nuances envolvidas. Na atividade em questão, vemos uma possibilidade de explicitação de um teorema em ação mobilizado por Pedro em que "$\forall \varepsilon > 0$, se existe $n \geq 1$, tal que os valores da sequência irão se aproximar de a, o limite da sequência existe e será a.". É um teorema em ação falso, pois não vale para o estudo de limite de uma sequência qualquer. Todavia, ele o mobiliza como sendo correto, provavelmente por outras situações em que esse teorema foi mobilizado e não houve problema, como é o caso da maioria das atividades vivenciadas ao longo do ensino pelos estudantes.

Voltamos a argumentação de Job e Schneider (2014) sobre a dicotomia existente entre o trabalho com os aspectos formais e intuitivo dos limites, em que a maioria das atividades vivenciadas pelos estudantes envolvem aspectos intuitivos que podem contribuir para a não compreensão dos aspectos dedutivos envolvidos na definição. Favorecendo, com isso, a construção de conhecimentos de modo equivocado, como no caso do teorema em ação falso mobilizado por Pedro.

Após a resolução escrita dos participantes eles foram convidados a discutir com todos os outros, no quadro, como pensaram na situação. Como tínhamos participantes com experiências variadas, tivemos uma diversidade de falas e argumentações. Vejamos alguns exemplos que vamos identificar como participantes 1 e 2:

Participante 1: Eu só consigo ler as expressões, conheço a simbologia matemática, mas não consigo atribuir significado para elas.

Participante 2: Eu escolheria a primeira definição que é mais completa, pois para mim ela contempla a segunda que eu acredito que falta algo nela.

Essas discussões acabaram fomentando em alguns participantes a não aplicabilidade da definição. Um deles argumentou que não utilizou a definição para nada durante a disciplina que fez e que, com isso, parece que ela só era útil para mostrar as propriedades. Diante dessas observações, fizemos uma questão aos participantes: Quando encontramos o limite, como podemos dizer que ele é único? Todos responderam que é a definição de limite que garante que se o limite existe, é único. Com isso, um dos participantes Pedro (nome fictício) pede para apresentar o que ele havia pensado sobre as definições apresentadas.

Pedro: Para mim a segunda definição é suficiente, pois a partir de um certo *n* todas as imagens vão se aproximar do limite *a*, para todo épsilon maior do que zero.

Ele vai argumentando enquanto vai escrevendo no quadro, a representação gráfica, e podemos observar sua escrita na Figura 3.

Figura 3.

*Produção de Pedro sobre a definição (*1).*

Novamente vemos uma confusão com os elementos do domínio da sequência, em que ele escreve como: $a_1, a_2, a_m, a_n, \ldots$. Em seguida, Pedro fala que isso vai acontecer também com a definição (*2), "*Esse é meu ponto de vista*", e diz que vai explicar o porquê. Ele começa a fazer outra representação e vai explicando:

Pedro: Temos a mesma ideia, alguns pontos e o *a* que é nosso limite. Aqui fala (ele se refere a definição) que vai existir para todo épsilon um $\mathrm{a_n}$. Sendo que o épsilon é a proximidade com o limite. (Figura 4). A ideia é que esse épsilon seja muito pequeno, então sempre vai existir um $\mathrm{a_n}$ que leva a valores muito próximo ao valor de a, o limite, e se escolho um épsilon mais pequeno, também vai existir um $\mathrm{a_n}$ que vai ter valores próximos de a. Se o épsilon for maior fica mais para cá (no caso ele se refere mais à esquerda, Figura 4) e se o épsilon for bem pequeno os valores vão ficando mais para cá

(Mais a direita e mais próximos do valor de a que é o limite) e como é para qualquer epsilon sempre vai existir um a_n. Logo, para mim esta definição também é válida.

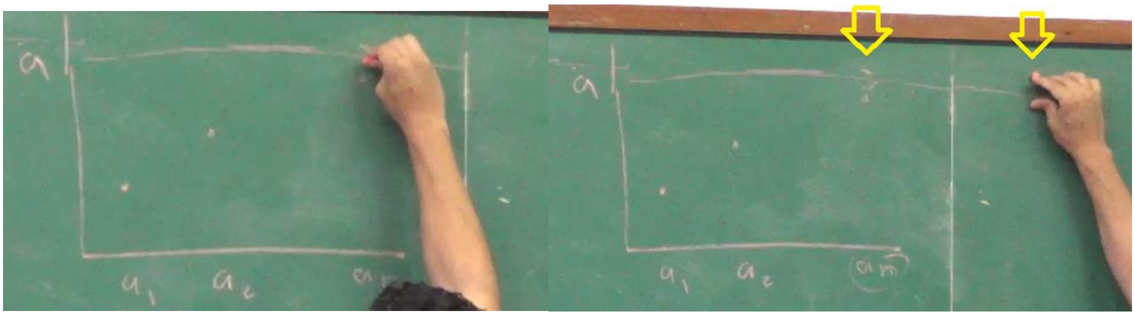

Figura 4.

*Produção de Pedro sobre a definição (*2).*

Na Figura 4 podemos ver as representações que ele foi fazendo enquanto explicava por que acreditava que a segunda definição era suficiente para definir o limite. Houve mais discussões entre os participantes, pois um deles achava que o que o Pedro fez foi para um caso muito específico, no caso a representação que ele utilizou para explicar seu ponto de vista. Além disso, corrigiram os valores que Pedro havia inserido na representação como: $a_1, a_2, a_m, a_n, \ldots$ para os valores corretos *1, 2, 3, n, …*

Figura 5.

*Produção de Pedro sobre as definições (*1) e (*2).*

Pedro foi questionado por que escolheu colocar o *m*, na primeira representação, naquele lugar, por que não colocou um pouco antes ou depois. Fizemos esse questionamento buscando retomar os elementos do campo conceitual envolvidos na definição de limite de uma sequência, conforme apresentado anteriormente em (A).

Ele argumenta que segundo a definição (*1) o *m* é maior do que o *n*, então o que importa é que o *m* esteja à direita de *n*, seja maior, pois tudo depende do épsilon, e para cada épsilon escolhido vai existir um *n* que satisfaz, para as duas definições. Vejamos a reprodução do diálogo:

Pesquisador: Então qual das duas definições você escolhe?
Pedro: As duas, pois tudo depende do épsilon.

Pesquisador: Então o que o *m* faz de diferente na primeira definição?
Pedro: A diferença aqui é que se eu escolho épsilon vai existir esse *n* tal que para todos os *m*, depois de *n*, os valores da sequência vão ficar próximos de *a* - Figura 6 - é essa a ideia, daqui para frente todos os valores estão próximos de *a*.

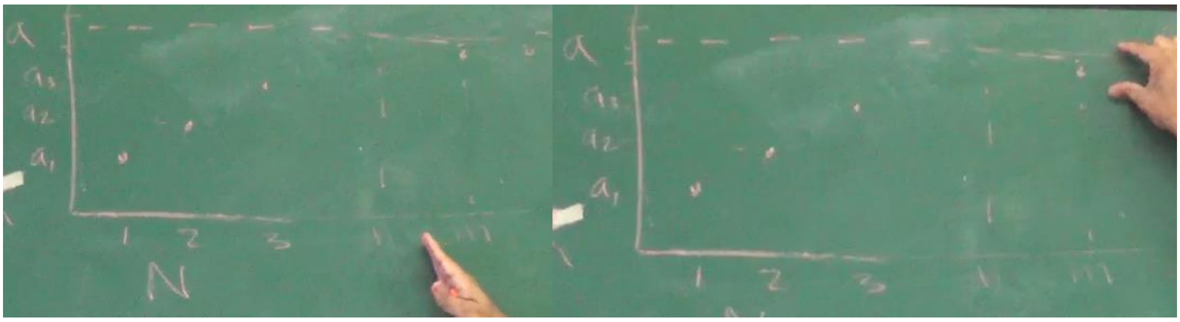

Figura 6.

*Produção de Pedro sobre as definições (*1) e (*2).*

Pedro: E aqui (*2) fala que sempre vai existir um *n*, em que todos os valores estão muito próximos de *a*. Diferente de (*1) que fala mais para frente de *n*.

Nessas argumentações vemos que Pedro mobiliza novamente o teorema em ação que havia utilizado na folha de atividade entregue inicialmente. Ele justifica suas ações por meio da representação gráfica e de gestos, com os dedos, para explicitar que o limite existe, pois podemos escolher um épsilon, bem pequeno, e que vai existir um *n* que irá satisfazer. Os aspectos formais que citamos na delimitação do campo conceitual da definição (A), parecem não serem mobilizados em suas ações, mas sim representações geométricas que, como dito anteriormente, não são interessantes para o estudo das sequências. O professor precisa estar atento às suas escolhas didáticas, com relação ao uso de algumas representações:

> [...] de forma mais geral, se a ostensão pode ser eficaz em certos casos, muitas vezes é baseada em um mal-entendido, pois os alunos não "veem" a mesma coisa que o professor. Além disso, nem sempre é adequada para se definir um objeto matemático de maneira funcional. (Schneider, Job, 2016, p.96).

A discussão com o grupo continuou com a proposta dos participantes buscarem chegar a um acordo sobre a definição.

Pesquisador: Muito interessante, mas precisamos decidir pessoal, pois a definição tem de ser única para todo mundo, como faremos? Participante 2 escolheu a (*1) e Pedro as duas. Que critérios usamos para escolher. Por exemplo, a (*2) é mais simples e dá conta de muitas situações, então por que não escolhemos ela?
Participante 2: Mas isso depende muito da análise, porque eu não sei se um determinado exemplo de sequência vai ser contemplado simplesmente pela segunda. Então a primeira é segura que eu vou poder utilizar sempre para qualquer caso.

Como havia um impasse foi proposto para eles analisarem o caso da sequência $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, em que temos a possibilidade de termos números pares e ímpares, Figura 7.

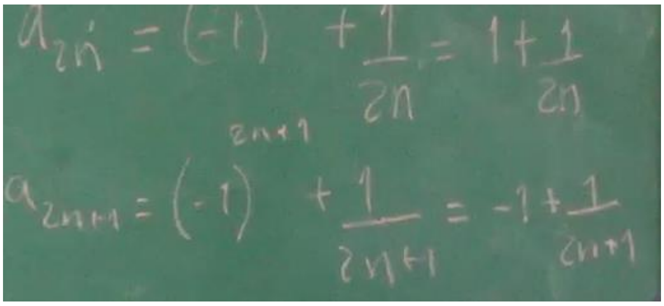

Figura 7.

Representação de Pedro sobre o exemplo de uma sequência particular.

Pedro escreve no quadro os dois casos, Figura 7, para números pares e números ímpares e argumenta que esta sequência não tem limite. Então, ele é questionado sobre a definição (*2) que ele havia escolhido. E se escolhermos *a=1*, por exemplo, o que acontece? Seria possível dado épsilon encontrar um *n* que iria satisfazer? Pedro olha para a situação no quadro e diz que sim, que apesar da sequência não ter limite, utilizando a definição (*2) poderíamos concluir que o limite da sequência seria um, o que é um erro. Argumenta o que trouxemos na discussão anterior sobre os elementos do campo conceitual, que a definição (*1) é a definição para limite de sequência, sendo que a definição (*2) funciona para casos particulares.

Na explicação de Pedro, seguida pela Figura 6, vemos como ele busca justificar sua escolha, no caso o uso do teorema em ação falso que ele havia mobilizado. As representações gráficas acabam sendo um meio para ele justificar sua opção em defender o uso das duas definições. Somente após confrontado com o exemplo da sequência não convergente que ele analisa melhor os elementos envolvidos na definição (*1). De fato, Job e Schneider argumentam sobre isso quando falam sobre o trabalho dos estudantes:

> Eles ficam presos a definições que são "descrições" do que veem do comportamento estudado. Eles não são capazes de imaginar suas definições como algo a ser escolhido para permitir provas, apesar das muitas contradições apontadas pelo professor. Os alunos veem uma definição como uma descrição de algum conceito mental que eles acreditam que cada um deles compartilha. (Job, Schneider, 2014, p.640).

Esse fato é agravado pela falta de atividades em que os alunos possam confrontar os elementos envolvidos na definição, no caso situações que trabalhem com a definição de limite, analisando não somente exemplos que dão certo, mas também com contraexemplos.

Esses elementos, modelizados em teoremas em ação, nos permitem compreender os conhecimentos que podem ser mobilizados pelo estudante ao lidar com a situação para introdução da definição de limite de uma sequência. E, com isso, estudar como o conceito de limite vive, no sentido ecológico, nesta instituição e assim aprofundar nossos estudos no MER (Chevallard, 1999) sobre limites, que ainda estão em seu processo de construção.

Em seguida, trazemos nossas considerações finais sobre o estudo realizado.

Considerações finais

Neste artigo estudamos uma situação vivenciada por um sujeito sobre a definição de limite de uma sequência. Para isso, mobilizamos a teoria dos campos conceituais para analisar sua construção, vimos como as situações, os invariantes operatórios e as representações utilizadas influenciam o modo como o estudante compreende um conceito (Vergnaud, 1990).

O estudo da situação mostra como a construção do conceito demanda de um longo tempo e de reinvestimento. No caso apresentado, o sujeito já havia estudado o limite de uma sequência de modo intuitivo e pela definição formal, com uso dos quantificadores, mas os invariantes operatórios dos esquemas mobilizados para a situação dada estavam relacionados a exemplos particulares e, em grande parte, a representações gráficas de sequências que tinham limites. O interessante é que, mesmo nesses casos, a representação gráfica não é um recurso pertinente, afinal essas funções estão definidas no conjunto dos naturais, o que, de certo modo, não favorece o uso de tais representações. Ou seja, algumas vezes os estudantes precisam romper com alguns aspectos que entram em conflito com pontos importantes da construção de um conceito para poderem ampliar seus esquemas.

É importante lembrar, que em matemática é suficiente apresentar um contraexemplo para comprovar que um resultado é falso. Todavia, apresentar vários exemplos em que o resultado é verdadeiro não é um argumento que o torna válido, no caso das sequências, para o cálculo do seu limite, se existir, e necessário argumentos mais gerais fundamentados na análise real.

Este estudo, com essa definição, será muito importante para a continuidade do nosso projeto. Neste sentido, o mesmo evidenciou que o trabalho por meio da definição de limites por sequência pode ser uma proposta pertinente para auxiliar o desenvolvimento do conceito de limites, que atualmente é amplamente apresentado por meio de tabelas numéricas, representações gráficas e funções algébricas. É interessante pois além de apresentar elementos da intuição matemática com a convergência das sequências, possibilita o desenvolvimento do trabalho dedutivo e a construção do conceito de limite com a demonstração matemática, o que corrobora a ideia de se elaborar um MER que contemple elementos da intuição e da dedução.

Agradecimentos

A pesquisa que originou o presente artigo contou com o apoio do CNPq por meio do edital universal nº 18/2021 e da UFMS via PROAP/CAPES.

Referências

Bloch, I. (2017). L'enseignement de l'analyse: de la limite à la dérivée et au EDO, questions épistémologiques et didactiques. Dans Y. Matheron et al. (Dir.), *Actes de la 18ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 67-91). La Pensée Sauvage.

Burigato, S. M. M. S. (2019). *Um Estudo sobre a Aprendizagem do Conceito de Limite de Função por Estudantes nos Contextos Brasil e França.* 2019. [Tese de Doutorado em Educação Matemática] – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In : *La transposition didactique à l'épreuve*, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 135-180.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique. In : *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19, no 2, pp. 221-266.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153–166). Dordrecht: Kluwer.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia da Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática.* Grupo Almedina (Portugal).

Doumbia, C. O. (2020). *Un modèle didactique de référence pour la construction des savoirs et l'actualisation des connaissances sur la notion de limite au Mali*. 289f. [Tese de doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia]. https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/31999/1/Tese%20completa%20com%20ficha%20catalografica%20Cheick%20Oumar%20Doumbia%202020.pdf

Fernandes, J. A. N. (2015). *Ecologia do Saber: O Ensino de Limite em um Curso de Engenharia.* [Tese de doutorado em Educação em Ciências e Matemática] Universidade Federal do Pará, Belém.

Job, P., Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM Mathematics Education* 46, pp. 635–646. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0604-0

Schneider, M., & Job, P. (2016). Ingénieries entre recherche et formation : Élèves-professeurs en mathématiques aux prises avec des ingénieries didactiques issues de la recherche. Un dispositif de formation à portée phénoménotechnique. *Éducation et didactique*, *2*, 91-112.

Lima, E. L. (2013). *Curso de Análise, volume 1, Funções de uma variável.* Projeto Euclides, IMPA.

Vergnaud, G. (1990). La théorie de Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, v.10, n.2.3, (pp. 133-170). La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (2016). La prise en compte de l'enseignant dans la théorie des champs conceptuels. *Formation des enseignants et étude didactique de l'enseignant*, 3-19.