ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p442-461

Prolegomena for building a reference epistemological model for teaching calculus: What are models? What is calculus?

Prolegómenos para la construcción de un modelo epistemológico de referencia para la enseñanza del cálculo: ¿Qué son los modelos? ¿Qué es el cálculo?

Prolégomènes pour la construction d'un modèle épistémologique de référence pour l'enseignement du calcul : Que sont les modèles ? Qu'est-ce que le calcul ?

Prolegômenos para construção de um modelo epistemológico de referência para o ensino de cálculo: O que são modelos? O que é cálculo?

Bartira Fernandes Teixeira[1]
Universidade Federal da Bahia
Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências
https://orcid.org/0000-0003-2786-0249

Edmo Fernandes Carvalho[2]
Universidade Federal da Bahia
Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências
https://orcid.org/0000-0002-6959-2652

Luiz Marcio Santos Farias[3]
Universidade Federal da Bahia
Docteur em Didactique des Sciences et Mathématiques
https://orcid.org/0000-0002-2374-3873

Resumo

Este artigo propõe uma reflexão teórica sobre o que são modelos e o que é Cálculo, apontando noções preliminares e princípios básicos para que se possa construir um modelo epistemológico de referência para o ensino desta disciplina. Para atingir esse objetivo, examinamos alguns modelos presentes no nosso cotidiano, numa tentativa de sugerir uma generalização do termo. A seguir, apresentamos o modelo representativo proposto pela teoria antropológica do didático, para, posteriormente, definir modelo epistemológico dominante, modelo epistemológico de referência e modelo didático de referência. Ultrapassadas essas definições, desenvolvemos uma breve história do termo para esclarecer o que entendemos hoje por Cálculo e como foi utilizado ao longo do tempo. Os resultados da pesquisa teórico-bibliográfica serão úteis para que os

[1] bartiraft@yahoo.com.br
[2] edmofc@gmail.com
[3] lmsfarias@ufba.br

pesquisadores em didática possam construir um modelo epistemológico de referência para o ensino do Cálculo.

Palavras-chave: Modelos, Modelo epistemológico de referência, Cálculo.

Abstract

This article proposes a theoretical reflection on models and Calculus, pointing out preliminary notions and basic principles for building a reference epistemological model to teach this subject. To this end, we examine some models present in our daily lives to suggest a generalization of the term. Next, we present the representative model proposed by the anthropological theory of the didactic to subsequently define the dominant and the reference epistemological models as well as the didactic model of reference. Having overcome these definitions, we develop a brief history of the term to clarify what we understand today by Calculus and how it has been used over time. The results of the theoretical-bibliographical research will be valuable for didactic researchers in constructing a reference epistemological model for teaching Calculus.

***Keyword*s**: Models, Reference epistemological model, Calculus.

Resumen

Este artículo propone una reflexión teórica sobre qué son los modelos y qué es el Cálculo, señalando nociones preliminares y principios básicos para construir un modelo epistemológico de referencia para la enseñanza de esta asignatura. Para ello, examinamos algunos modelos presentes en nuestra vida cotidiana, en un intento de sugerir una generalización del término. A continuación, presentamos el modelo representativo que propone la teoría antropológica de lo didáctico para, posteriormente, definir el modelo epistemológico dominante, el modelo epistemológico de referencia y el modelo didáctico de referencia. Superadas estas definiciones, desarrollamos una breve historia del término para aclarar qué entendemos hoy por Cálculo y cómo ha sido utilizado a lo largo del tiempo. Los resultados de la investigación teórico-bibliográfica serán de utilidad para que los investigadores didácticos construyan un modelo epistemológico de referencia para la enseñanza del Cálculo.

Palabras clave: Modelos, Modelo epistemológico de referencia, Cálculo.

Résumé

Cet article, soumis à *Educação Matemática Pesquisa* magazine, propose une réflexion théorique sur ce que sont les modèles et ce qu'est le calcul, en soulignant les notions préliminaires et les principes de base afin qu'un modèle épistémologique de référence pour l'enseignement du calcul puisse être construit. Pour atteindre cet objectif, nous avons examiné quelques modèles présents dans notre vie quotidienne, pour tenter de suggérer une généralisation du terme. Ensuite, nous présentons le modèle représentatif proposé par la Théorie Anthropologique de la Didactique, pour définir ultérieurement le modèle épistémologique dominant, le modèle épistémologique de référence et le modèle didactique de référence. Après avoir surmonté ces définitions, nous avons développé un bref historique du calcul pour clarifier ce que nous entendons par calcul aujourd'hui et comment ce terme a été utilisé au fil du temps. Les résultats de la recherche théorique et bibliographique seront utiles pour que les chercheurs en didactique puissent construire un modèle épistémologique de référence pour l'enseignement du calcul.

Mots-clés : Modèles, Modèle épistémologique de référence, Calcul.

Prolegômenos para construção de um modelo epistemológico de referência para o ensino de cálculo: O que são modelos? O que é cálculo?

Toda a matéria existente no universo é formada por átomos. A palavra átomo vem do grego e significa “indivisível”, ou seja, “aquilo que não se parte.” Esta partícula microscópica é a unidade fundamental de toda e qualquer substância, unidade esta que, por muito tempo, se pensou ser indivisível em unidades menores, crença que não se sustenta mais. Atualmente, sabemos que o átomo é composto por duas regiões distintas, núcleo e eletrosfera, onde encontramos, por exemplo, nêutrons, prótons e elétrons.

No decorrer do tempo, várias teorias atômicas foram formuladas, e cada uma delas apresentava um diferente modelo atômico. A primeira ideia de átomo tem por fundamento deduções filosóficas, e os gregos imaginavam que a matéria poderia ser repartida em unidades menores até ser alcançada uma unidade que não mais suportava novas divisões.

No início do século XIX, John Dalton acreditava que o átomo era uma esfera maciça e indivisível. Já no final daquele século, Thomson apresentou o átomo como uma esfera uniforme, de carga positiva, impregnada de elétrons sobre ela (as cargas elétricas negativas compensavam as positivas e o conjunto permanecia neutro). O modelo de Thomson ficou conhecido como pudim de passas. Por volta de 1914, Rutherford idealizou o átomo como sendo um núcleo denso, carregado positivamente, com elétrons de carga negativa girando à sua volta, numa região chamada eletrosfera (era o modelo planetário). Este modelo foi aperfeiçoado por Bohr, que dividiu a eletrosfera em sete camadas, chamadas camadas de valência.

Em resumo, os modelos atômicos são tentativas de representação dos principais componentes do átomo e de sua estrutura. Não são a realidade, mas uma representação dela.

Em 1953, James Watson e Francis Crick apresentaram outro importante modelo científico: a estrutura de dupla hélice do DNA. Cada molécula de DNA, no modelo de Watson e Crick, é constituída por dois filamentos de nucleotídeos que se ligam através de bases nitrogenadas por meio de pontes de hidrogênio.

Poderíamos citar outros tantos tipos de modelos científicos, sendo oportuno avaliar o que os caracteriza como tal. Por que são denominados “modelos”?

Gilles Willet, professor pesquisador do Departamento de Informação e Comunicação da Universidade Laval (Quebec), que concentra seu trabalho na comunicação dentro das organizações, no fenômeno das telecomunicações e suas tecnologias, teorias da comunicação e o direito de comunicar, publicou, em 1996, o artigo intitulado *Paradigme, théorie, modèle, schéma: qu’est-ce donc?*, numa tentativa de tornar estes termos mais claros, enfatizando o que os torna diferentes. Julien Cartier, por sua vez, em *Qu'est-ce qu'un modèle?* (2019) explica de uma forma bem simples como podemos buscar uma definição para esse termo.

No primeiro momento, nosso foco neste estudo será a caracterização dos modelos. Citamos anteriormente dois importantes modelos científicos, o modelo atômico, sua evolução, e o modelo da molécula de DNA, que não serão os modelos aqui estudados. Interessa-nos, pois, três importantes modelos da didática das ciências: o modelo epistemológico dominante (MED), o modelo epistemológico de referência (MER) e o modelo didático de referência (MDR), utilizados, muitas vezes, de forma aleatória e sem critérios. De forma semelhante à Willet, nossa pretensão é modesta. Apenas clarificar os termos e trazer elementos que nos permitam entender por quais razões são chamados de modelos.

A seguir, na estrutura do texto, nos dedicaremos à definição de cálculo, trazendo uma breve evolução histórica. Para fomentar nossa discussão vejamos o que o *Dicionário Online de Português* (https://www.dicio.com.br/) apresenta como definição:

> Significado de Cálculo
> substantivo masculino
> Resolução de problemas que envolvam números.
> Operação feita para achar o resultado da combinação de vários números; cômputo.
> [Aritmética] Arte de resolver problemas de aritmética elementar. [...]
> [...]
> Cálculo mental. Cálculo aritmético efetuado de cabeça.
> Cálculo algébrico. Cálculo que se faz com expressões algébricas.
> Cálculo aritmético. Realização de operações aritméticas.
> Cálculo diferencial. Calculo relativo às derivadas e diferenciais.
> Cálculo integral. Cálculo relativo às integrais.
> Etimologia (origem da palavra cálculo). A palavra cálculo deriva do latim “calculus, i”, com o sentido de pedra pequena. [...]

Desta forma, entendemos ser importante essa reflexão para que se possa teorizar a elaboração do MER e responder perguntas tais como: Quais ferramentas devem ser utilizadas para o desenvolvimento de modelos epistemológicos de referência? Quais métodos devem ser adotados para a construção desses modelos? Quais critérios devem ser utilizados para testar e avaliar o MER proposto?

Estruturamos os nossos escritos da seguinte maneira: após uma primeira tentativa de esclarecer o que é um modelo, passaremos à análise de três importantes modelos da didática das ciências, o modelo epistemológico dominante (MED), o modelo epistemológico de referência (MER) e o modelo didático de referência (MDR). Ultrapassadas essas definições, desenvolvemos uma breve história do cálculo para esclarecer o que entendemos hoje por cálculo e como tal termo foi utilizado ao longo do tempo. Os resultados da pesquisa teórico-bibliográfica serão úteis para que os pesquisadores em didática possam construir um modelo epistemológico de referência para o ensino do cálculo.

Modelo: uma tentativa de generalização

Existe uma vasta literatura dedicada ao trabalho de definição de um modelo. Não há um consenso e este artigo não visa alcançar a síntese que tantos especialistas vêm buscando há muitas décadas.

Cartier (2019, seção *Comme disait Saint-Augustin*) ressalta que muita gente sabe o que é um modelo, mas quando uma definição é solicitada, um problema se instaura. Sinaliza o autor que a dificuldade deste empreendimento deve-se em grande parte à polissemia da própria palavra, tanto no campo científico como na linguagem cotidiana, uma polissemia que é perfeitamente ilustrada pela diversidade de objetos que encontramos rotulados com o termo *modelo*.

No entanto, segundo Cartier (2019, seção *Comme disait Saint-Augustin*) é seguro dizer que uma definição consensual deve ser ampla o suficiente para abranger o maior número possível de casos. Nesta direção, afirma que um modelo é uma representação. É possível, então, representar quase tudo e qualquer coisa. E principalmente, o modelo é uma representação (integral ou parcial) daquilo que os cientistas chamam de "teoria."

Segundo Bacharach (1989, p. 496) uma teoria é uma "expressão de uma relação entre unidades observadas, diretamente ou por aproximação, do mundo empírico." A ciência se preocupa com os fatos, tão numerosos e desarticulados, que se faz necessária uma articulação entre eles. Essa articulação é o trabalho de uma teoria. "Um pensamento integrador de fatos," segundo Cartier (2019, p.1). O objetivo principal de uma teoria é responder a questões de *como*, *quando* e *por quê*. Cartier (2019) ainda defende que os fatos estão fora de nós, enquanto a teoria, como objeto de pensamento, reside dentro de nós.

Mas e o modelo? O modelo, ainda segundo o autor, está na interface entre a teoria e os fatos. Ele constitui um meio de materializar a teoria, de torná-la apreensível, comunicável, explicável. É um meio que nos permite refletir, questionar nosso próprio pensamento. Assim, longe de ser uma pura abstração, ou um artifício desvinculado da realidade, o modelo é construído a partir de fatos e é enriquecido por constantes idas e vindas entre o pensamento e a realidade, afirma Cartier (2019).

Ainda trazendo à colação o pensamento de Cartier (2019), a principal vantagem desta definição de modelo é permitir que vários objetos sejam classificados como modelos (desde um mapa geográfico, passando por fórmulas matemáticas até chegar ao estudante que é o 'modelo' de aluno e que representa o comportamento esperado).

Criar, fazer ou projetar um modelo significa **modelar.** Assim como "formar de acordo com um modelo," como por exemplo, no sentido expresso em "o pintor moldou as características da musa." Chamamos a atenção para o fato de que, na língua portuguesa, não se confundem os termos *modelar* e *modalizar* (https://www.dicio.com.br/):

> **Significado de Modelar**
> **[...]**
> verbo transitivo direto
> Fazer o modelo ou o molde de uma peça; forjar: modelar argila.
> [Figurado] Formar de acordo com um modelo: o pintor moldou as características da musa.
>
> **Significado de Modalizar**
> verbo transitivo direto
> Impor modalidades a: Modalizar o ensino. Variar, dar outra feição a: O pastor modalizou a liturgia.

Modalizar significa, portanto, impor modalidades. É relativo a modo, modal, maneira própria de se fazer algo. Não encontramos o termo "mod**e**lizar" em língua portuguesa. Deriva do termo "modelo" ainda, a palavra **modelagem** que nada mais é do que "a ação ou efeito de modelar" (https://www.dicio.com.br/). A modelagem matemática, por exemplo, de uma forma simples, resume-se à criação de um modelo matemático capaz de explicar um determinado fenômeno.

Como afirmado anteriormente, essa representação pode ser parcial. Na representação da molécula de DNA (modelo citado no início deste texto), muitas informações são omitidas (tamanho da sequência, natureza das moléculas, etc.), não sendo necessário representar milhares de nucleotídeos para que se compreenda o modelo de DNA, assegura Cartier. Portanto, segundo o autor, devemos aceitar que "a pobreza relativa de um modelo é consubstancial de sua operacionalidade." (Cartier, 2019)

Passaremos agora, de forma sucinta e esquemática, a expor algumas considerações relativas à definição de modelo trazida por Gilles Willet (1996), que se assemelham àquelas de Cartier (2019).

Tabela 1.

O que é um modelo (Willet, 1996, pp.10-13)

O que é um modelo?
Um modelo é uma projeção de uma teoria. Mas, por se referir a uma gama mais limitada do que a teoria, o modelo é de menor aplicação.
Um modelo representa apenas certas características do objeto ou fenômeno estudado. Essas características são expressas na forma de um conjunto de proposições sistemáticas relativas a observações e medições feitas sobre certos aspectos de um objeto ou fenômeno.
Um modelo é sempre mais simples do que o objeto, fenômeno ou processo que deve representar e explicar.
Os modelos facilitam a explicação e a popularização de uma teoria, ao fornecer de maneira simples um conhecimento que, de outra forma, permaneceria complicado ou ambíguo.
Nenhum modelo é sagrado. Um modelo é apenas uma representação simplificada, relativa, incompleta e temporária de uma parte da realidade ou de um fenômeno. Nunca é nem o real, nem o fenômeno estudado.
Nenhum modelo único pode ser aplicado a todos os níveis de análise e todos os objetivos de pesquisa. Os modelos devem ser sempre verificados e comparados com as circunstâncias, situações e casos a que se aplicam, e devem ser transformados em resultado.
Um modelo deve ser específico o suficiente para representar corretamente certos aspectos de seu propósito; mas não deve ser muito detalhado, pois deve ser generalizável para mais de uma situação observada.
A arte de modelar requer habilidades como abstração, dedução, avaliação e, finalmente, um conhecimento profundo de modelos já conhecidos.
Para desenvolver um modelo, é preciso saber abstrair os aspectos mais importantes do real estudado, ou seja, formá-los intelectualmente.
Deve-se ser capaz de deduzir ou inferir consequências e previsões do modelo proposto. As inferências que podem ser tiradas de um modelo dependem do contexto geral da situação analisada e representada e do enunciado teórico que o fundamenta. A riqueza do significado de um modelo dependerá da relevância das deduções, suposições e previsões às quais ele terá dado origem.
Os modelos não são neutros. Frequentemente, eles constituem a base de nossa percepção do mundo e condicionam nossas formas de agir e de comportamento.

Desta forma, se desejamos construir um modelo para o ensino de Cálculo necessitamos, em síntese: de algo que represente certas características do objeto ou fenômeno (Cálculo); que seja capaz de facilitar a explicação e a popularização de algo relativo à disciplina; que seja uma representação simplificada, relativa, incompleta; que possa se comparado com outros; e que seja específico o suficiente para representar corretamente certos aspectos de seu propósito (ensinar Cálculo). Postas estas características do termo modelo, podemos nos aprofundar nos modelos da didática.

O modelo representativo da teoria antropológica do didático

A teoria antropológica do didático (TAD) é, como o próprio nome sugere, uma teoria ‘do didático’. Yves Chevallard (matemático a quem é atribuída a TAD) sustenta que a didática deveria ser definida como a ciência da difusão do conhecimento. Fazer didática seria, portanto, fazer pesquisa, produzir peças de conhecimento e organizar estas peças em termos de 'corpos de conhecimento'. A ideia por trás desta ciência seria a de que alguém se esforça para que outro alguém aprenda alguma coisa. Segundo Chevallard (2013), ela estuda trabalhos que, socialmente, são gestos didáticos que são ou podem ser feitos sobre eles, assim como os efeitos do encontro de estudo e aprendizado associado a esses gestos. ‘Didático’ refere-se, portanto, “ao conjunto de gestos em dada sociedade” (Chevallard, 2013, p.1) objeto de estudo da didática.

O conhecimento, por sua vez, se difunde entre as pessoas e as instituições. Mas neste processo, tanto o saber como suas práticas (o saber fazer) são de igual importância. As atividades humanas envolvem tanto o conhecimento, como a parte prática deste conhecimento, o que Chevallard (2013) conseguiu representar por meio de uma palavra: a praxeologia. Praxeologia - que é igual a práxis (prática) + logos (conhecimento) - é a palavra-chave da teoria antropológica. Todas as condutas humanas podem ser representadas por meio deste termo.

A praxeologia, por sua vez, é composta de quatro noções: tarefa (T), técnica (t), tecnologia (θ) e teoria (Θ) , modelada pelo quarteto $[T, t, \theta, \Theta]$. O modelo praxeológico é capaz de decompor todas as condutas humanas. Analisaremos cada variável separadamente.

Qualquer atividade humana pode ser decomposta em uma sucessão de tarefas. Uma tarefa é quase sempre identificável em determinado idioma por um verbo de ação, tais como andar, cantar, gritar, chorar, calcular, desenhar, etc. Esse gênero de tarefa pode ser de determinado tipo quando associado a um objeto (por exemplo, “desenhar um triângulo equilátero”).

Ato contínuo, a conclusão de tarefas necessita da implementação de uma técnica (uma arte, um know-how), isto é, a colocação em prática de uma determinada “maneira de fazer.” Toda técnica deve ser construída. Tarefa e técnica formam o chamado bloco do saber-fazer (bloco da praxis, prático).

A prática, pura e simples, não persiste por muito tempo sem estar fundamentada em algo. Ela baseia-se em um chamado “discurso tecnológico”, uma tecnologia (discurso – logia, sobre a técnica – tecno). A tecnologia, por sua vez, exige que certos aspectos não justificáveis por si só, mas que contém significados, sejam explicados, razão pela qual necessita estar sedimentada em uma teoria. Está formado então o segundo bloco, o bloco do conhecimento (logos), pela junção da tecnologia e da teoria.

Praxeologia [T, t, θ, Θ]

[tarefa, técnica, tecnologia, teoria]

Tentemos descrever, então, em termos praxeológicos, qualquer conduta humana. Fazer um bolo, resolver uma equação ou plantar uma árvore. A conduta descrita em ‘fazer um bolo’ engloba uma tarefa, representada, sobretudo, pelo verbo de ação ‘fazer’. Para que esta tarefa seja realizada, faz-se necessária, por sua vez, a implementação de uma técnica. Existe uma técnica para se colocar os ingredientes (colocá-los em determinada ordem, a determinada temperatura e com uma quantidade específica). Além disso, uma tecnologia exige, por exemplo, que a farinha não seja batida com veemência e que o fermento químico seja colocado por último, após todos os ingredientes. Tudo isso justificável por uma teoria (uma teoria da química, da física ou mesmo da matemática).

As pesquisas que adotam como referencial teórico a teoria antropológica do didático não podem se distanciar destes postulados, pois a atividade de ensinar matemática é uma atividade humana e, portanto, pode sempre ser descrita em termos praxeológicos.

Para os estudiosos da teoria antropológica do didático, definir os quatros elementos da praxeologia já é corriqueiro, sendo difícil encontrar um referencial teórico da TAD que não faça referência ao modelo praxeológico. Mas como o objetivo deste artigo é discutir os modelos, não poderíamos deixar de citá-lo.

É comum também que as pesquisas em didática façam referências a três outros modelos que discutiremos a seguir.

Modelo epistemológico dominante (MED), modelo epistemológico de referência (MER) e modelo didático de referência (MDR)

Adotaremos agora como cerne para nosso estudo o artigo escrito pelos professores Berta Barquero, Marianna Bosch e Josep Gascón intitulado *Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática* (2013), no qual os autores abordam dois importantes modelos para as pesquisas em didática: o modelo epistemológico dominante e modelo epistemológico de referência.

Como o próprio título sugere, os autores analisam as dimensões fundamentais do problema didático da modelação matemática (MM). Mas o que os professores propõem no texto pode ser utilizado como estratégia de análise de qualquer investigação em didática. Expliquemos.

Quando se objetiva investigar algo (ou formular um problema para que seja investigado didaticamente) faz-se necessário analisar as ideias dominantes em determinada cultura (na cultura escolar, por exemplo). Assim, sugerem os autores que

> [...] a fim de transformar o problema (da modelação matemática) para começar a formulá-lo como um problema de investigação em didática no âmbito da TAD, é necessário questionar a forma de interpretar [...] a MM, ou seja, o modelo epistemológico da MM dominante, não apenas nas instituições escolares, mas também na noosfera. (Barquero, Bosch, & Gascón , 2013, p.3)

Explicitam os professores que são produções da noosfera os programas oficiais, os livros texto, as recomendações dos professores, os materiais didáticos. Acrescentemos ainda, no âmbito brasileiro, as normas, as leis, os Parâmetros Curriculares, a Base Curricular Comum, etc. Tudo aquilo que "é dominante" em determinada cultura.

E continuam:

> Nos referimos a los modelos epistemológicos o formas de interpretar y describir la geometría euclidiana, el álgebra escolar, la MM, la proporcionalidad o la estadística que son predominantes en las instituciones escolares, pero también en la noosfera y en las instituciones productoras del saber matemático. (Ibid., p.4)

São modelos epistemológicos ou **formas de interpretar e descrever qualquer saber matemático em jogo**. Esta forma de interpretar "dominante" é, geralmente assumida de forma acrítica ("Los problemas docentes se formulan, normalmente, asumiendo y sin cuestionar no sólo las nociones sino también las ideas dominantes en la citada cultura escolar.") (Ibid., p.3).

A epistemologia dominante (ou o modelo epistemológico dominante) em determinada cultura não pode passar despercebida (o) em uma investigação didática, tamanha é sua influência sobre o processo de ensino-aprendizagem.

> Epistemologia representa a junção dos termos *episteme* (ciência) e *logos* (estudo, discurso), com o significado de discurso ou estudo sobre a ciência. A epistemologia é definida por Runes (1998) como um ramo da filosofia que investiga aspectos referentes ao conhecimento: a origem, a estrutura, os métodos e a validade. Para Lalande (1999, p.313), a epistemologia consiste em um "estudo crítico dos princípios, hipóteses e resultados de diversas ciências, destinado a determinar a sua origem lógica, o seu valor e a sua importância objetiva. (OLIVEIRA, Ivanilde Apoluceno de. Epistemologia e Educação: bases conceituais e racionalidades científicas e históricas. Petrópolis, RJ: Vozes, 2016, p.17).

São atitudes representativas deste modelo dominante (denominado por Berta Barquero, Marianna Bosch e Josep Gascón de "aplicacionismo"): supor que os modelos matemáticos preexistem e se aplicam a todos os sistemas científicos e supor que nem os modelos nem os sistemas evoluem. Constata-se, desta forma, um modelo dominante de análise e de interpretação do saber matemático.

Esse modelo de descrição e interpretação necessita, todavia, ser explicitado. Faz-se necessário, ainda segundo os professores, sejam descontruídas e reconstruídas praxeologias que se pretendem analisar. Ou seja, faz-se necessário questionar essa forma dominante de descrever e interpretar. Neste momento, se apresenta o modelo de referência:

> Se le llama modelo epistemológico de referencia (MER) y tiene um carácter siempre provisional. Es el instrumento con el cual el didacta puede deconstruir y reconstruir las praxeologías cuya difusión intrainstitucional e interinstitucional pretende analizar. Por esta razón el MER constituye un instrumento de emancipación del didacta y de la ciência didáctica puesto que permite cuestionar la forma como las instituciones involucradas en la problemática didáctica interpretan el saber matemático. (Barquero, Bosch, & Gascón, 2013, p.5)

O modelo epistemológico de referência, defendem os professores, condiciona decisivamente a amplitude do campo de pesquisa; os fenômenos didáticos que serão "visíveis" ao pesquisador; os tipos de problemas de pesquisa que podem ser colocados; e as explicações provisórias que se podem propor, ou seja, o tipo de soluções que serão consideradas "admissíveis" (Ibid., p.5).

Os modelos epistemológicos (dominante e de referência) são adotados como hipóteses, não são definitivos, podem e devem ser modificados.

Ainda segundo Mariana Bosh e Josep Gascón (2010, p.55) a necessidade da didática da matemática de elaborar seus próprios modelos epistemológicos dos saberes matemáticos constitui uma contribuição fundamental da teoria das situações didáticas (absorvida pela TAD). No caso da teoria antropológica, segundo os autores, a praxeologia serve de modelo tanto do saber matemático como das atividades didáticas de difusão e estudo desse saber.

Em seguida, os professores trazem uma importante reflexão sobre os modelos em didática ao afirmar que "toda organização ou praxeologia didática que vive em uma instituição determinada está sustentada e fortemente condicionada pelo modelo epistemológico da matemática dominante na dita instituição" (Bosh & Gascón, 2010, p.60). Como afirmado acima, essa forma "dominante" é recebida pelos professores acriticamente (o que caracteriza a epistemologia "espontânea" do professor, segundo Brousseau. Espontâneo porque decorre naturalmente, como reprodução espontânea da epistemologia dominante). Urge então a necessidade, para os didatas, de elaboração de modelos epistemológicos que sirvam de referência para a elaboração de novas praxeologias:

> En los trabajos citados, hemos explicitado modelos epistemológicos de referencia (MER) específicos de cada uno de los ámbitos matemáticos considerados: el álgebra elemental, los límites de funciones, la modelización matemática, los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. Dichos modelos, elaborados por la didáctica de las matemáticas para el análisis y el diseño didácticos, deben ser considerados como sistemas de referencia relativos y provisionales para el investigador. Los hemos utilizado, en cada caso, como instrumentos de análisis del modelo epistemológico de las matemáticas dominante en la institución escolar y como auxiliares para caracterizar los modelos docentes espontáneos que se sustentan en el citado modelo epistemológico. Han resultado asimismo imprescindibles para diseñar, gestionar y evaluar propuestas de nuevas organizaciones didácticas. (Ibid., p.60).

Sabemos que a teoria antropológica descreve as atividades humanas em termos de praxeologias ou organizações praxeológicas, o que conduz à possibilidade de adotarmos a expressão modelo *praxeológico* dominante (MPD), ao invés de epistemológico dominante (MED) e modelo *praxeológico* de referência (MPR) ao invés de modelo epistemológico de referência (MER), para analisarmos as praxeologias que circundam aquela *episteme*, aquele conhecimento. Entretanto, entendemos que as expressões MED e MER aparecem com maior frequência nas pesquisas.

Continuam os professores Bosh e Gascón reconhecendo que tanto os modelos epistemológicos "ingênuos" (como se referiu Brousseau) como os MER utilizados nas investigações não são puramente epistemológicos, no sentido clássico do termo. Deveríamos considera-los "epistemológicos-didáticos."

> En efecto, en los primeros trabajos del enfoque antropológico (Chevallard, 1991, 1992) ya se postulaba la necesidad de ampliar substancialmente la *epistemología* a fin de integrar en su objeto de estudio, junto a la génesis y desarrollo del saber, la enseñanza, la utilización y la transposición institucional del mismo. Se ampliaba así, paralelamente, la noción misma de fenómeno didáctico y, por consiguiente, el objeto de estudio de la didáctica [...](Bosh & Gascón,2010, p.61).

Assim, a didática das ciências também deve elaborar, segundo os autores, seus próprios modelos didáticos de referência (MDR), que podem ser considerados "ampliação dos modelos epistemológicos de referência" (Ibid., p.61).

> Una de las funciones esenciales del uso de dichos modelos es la de constituir, para el investigador en didáctica y para la propia disciplina, un instrumento de emancipación respecto las diferentes instituciones que forman parte de su objeto de estudio: la institución matemática, la clase, la institución escolar y la sociedade (Chevallard, 2007; Bosch & Gascón, 2007). En particular deben servir para cuestionar, analizar y evaluar (en lugar de aceptar acríticamente) los dos tipos de modelos dominantes en estas instituciones [...](Ibid., p.61).

Caracterizados estão, portanto, a praxeologia, o MED, o MER e o MDR, restando-nos, neste estudo, uma breve discussão sobre o que se entende por Cálculo. O que faremos a seguir.

O que é Cálculo: uma breve história

> Um cálculo é uma maneira de calcular, de modo que os matemáticos algumas vezes falam a respeito de "cálculo da lógica", de "cálculo da probabilidade" e daí por diante. Mas todos nós concordamos que só há realmente um Cálculo, puro e simples, e que é escrito com C maiúsculo (Crilly, 2017, p.78).

Nesta seção utilizaremos como referência principal o livro *Histoire du Calcul,* de René Taton, publicado em 1946 pela Presses Universitaires de France, em Paris. Uma obra que percorre a história daquilo que conhecemos por Cálculo, desde a aritmética, passando pelo cálculo numérico, cálculo algébrico, trigonométrico e probabilístico.

Interessante observar que os livros de Cálculo (com C maiúsculo) geralmente iniciam com um capítulo destinado à numeração. Vejamos por exemplo:

> Piskounov, N. (1990) *Cálculo Diferencial e Integral*. Edições Lopes da Silva.
>
> CAPÍTULO I - NÚMERO, VARIÁVEL, FUNÇÕES.
> § 1. Números reais. Representação dos números reais pelos pontos do eixo numérico.
> § 2. Valor absoluto de um número real
> § 3. Grandezas variáveis e grandezas constantes.
> § 4. Domínio de definição duma variável.
> § 5. Variável ordenada. Variável crescente e variável decrescente. Variável limitada
> § 6. Função
> § 7. Diversas formas de expressão das funções
> § 8. Principais funções elementares. Funções elementares
> § 9. Funções algébricas
> § 10. Sistema de coordenadas polares.
>
> Leithold, L. (1994) O *Cálculo com Geometria Analítica*. Editora HARBRA.
>
> CAPÍTULO 1 – NÚMEROS REAIS, FUNÇÕES E GRÁFICOS.
> 1.1 Números Reais e Desigualdades
> 1.2 Retas e Coordenadas
> 1.3 Circunferências e Gráficos de Equações
> 1.4 Funções
> 1.5 Gáficos de Funções
> 1.6 As Funções Trigonométricas

Parece-me pertinente a pergunta: Ensinar números reais, por exemplo, é ensinar Cálculo?

Esclarece René Taton (1946) que o homem moderno vive em meio a muitos números, desde aqueles utilizados no comércio, salários, impostos, às temperaturas, comprimentos e, por onde quer que vá, existe uma infinidade de operações e cálculos a serem realizados. Entretanto, por mais que se trate de matemática, o cálculo aqui citado não se refere às operações elementares para encontrar um resultado, ao contrário, tem outros objetivos e outras finalidades bem mais específicas.

Mas o Cálculo que hoje conhecemos, durante muito tempo, foi limitado à aritmética e à álgebra, ganhando uma extensão no século XVII para a criação do cálculo diferencial e do cálculo integral (Taton, 1946). Leithold (1994) narra que:

> Algumas ideias do Cálculo podem ser encontradas nos trabalhos dos matemáticos gregos da Antiguidade, da época de Arquimedes (287-212 A.C.) e em trabalhos do início do século dezessete por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Entretanto, a invenção do Cálculo é frequentemente atribuída a Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pois eles começaram a efetuar a generalização e unificação do assunto. Havia outros matemáticos do século dezessete e dezoito que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo; alguns deles foram Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph L. Lagrange (1736-1813). No entanto, não foi antes do século dezenove que os processos do Cálculo receberam fundamentação sólida por parte de matemáticos como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) e Richard Dedekind (1831-1916).

De fato, a diferenciação e a integração são essenciais e são, segundo Crilly (2017, p.78), "os picos gêmeos do Cálculo como estabelecido por Newton e Leibniz. As palavras são derivadas do *differentialis* de Leibniz (tomar as diferenças ou "partir") e *integralis* (a soma das partes ou "juntar")". Diferenciação e integração são, portanto, os dois lados da mesma moeda.

Mas a história por trás do cálculo diferencial e integral é longa e impossível de ser esgotada aqui. A ideia deste tópico é apenas provocar uma reflexão sobre algo que nos parece comum e corriqueiro, mas que existe justificação histórica e uma razão de ser, afinal, "nem sempre foi assim". Tudo pode ser explicado e justificado:

> A palavra "calcular" é um diminutivo de "calx", que, em latim, significa "pedra". No passado significou "fazer contas por meios de seixos". As contribuições dos matemáticos para o nascimento do Cálculo são inúmeras. MOAR (2003) assegura que muitos deles tais como Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler utilizavam conceitos do Cálculo para resolver vários problemas. Porém naquele tempo não existia uma construção logicamente estruturada, ou seja, cada autor possuía sua proposição de como os conteúdos se estruturava dificultando a percepção das inter-relações entre os conteúdos. O desenvolvimento e o aperfeiçoamento das técnicas associadas ao Cálculo aconteceram com Newton e Leibniz, os quais deram origem aos fundamentos mais

> importantes para o ensino do Cálculo, como a formalização das Derivadas e as Integrais. Segundo MOAR (2003), o Cálculo pode ser dividido em duas partes: uma relacionada às Derivadas ou Cálculo Diferencial e Integral, e outra, relacionada às Integrais, ou simplesmente Cálculo Integral. (Torres, & Giraffa, 2009, p.1-2)

O professor Gabriel Loureiro de Lima (2008) esclarece que a disciplina Cálculo Diferencial e Integral foi introduzida pela primeira vez no currículo brasileiro em 1810 no curso matemático da Real Academia Militar do Rio de Janeiro e baseava-se no livro *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* do francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843), que considerava que o conceito de função era o ponto de partida para o desenvolvimento do Cálculo (Lima, 2008, p.3).

Assim, como dito anteriormente, a ideia aqui não é esgotar a história da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, mas provocar a reflexão sobre a necessidade de justificação, da busca da razão de ser, que deve o professor se preocupar ao iniciar a aula de qualquer objeto matemático. Elaborar um modelo epistemológico de referência para o ensino de Cálculo exige do professor uma atitude crítica, para que possa escapar dos “modelos epistemológicos ingênuos”, como denominou Brousseau, como citado por Bosh & Gascón (2010).

Conhecer o Cálculo exige do aluno o conhecimento de alguns conceitos matemáticos importantes, como, por exemplo, de álgebra e geometria. O estudante precisa ser capaz de realizar operações com desenvoltura (razão pela qual os livros começam pelos números inteiros). A ideia de função é outro conceito chave que necessita ser explorado com profundidade, sobretudo as funções contínuas, funções trigonométricas e seus gráficos. Para em seguida, se introduzir o conceito de limite. Limite, integração e derivação, são os três pilares do que chamamos hoje de Cálculo.

Um modelo para o ensino de Cálculo

A reflexão teórica proposta nas páginas anteriores contribui para o objetivo primeiro desta publicação temática que é a construção de um modelo epistemológico de referência para o ensino de Cálculo (aqui entendido como a gama de conceitos que abarcam a noção de limite, de derivação e de integração). Para exemplificar os modelos citados, apresentaremos uma tarefa, do componente Cálculo Diferencial, envolvendo o cálculo de limites por definição e que tem se apresentado como uma das mais complexas para os estudantes dos cursos de graduação.

Antes de apresentar a tarefa, apresentamos a definição de limite, para mais adiante termos condições de inferir sobre o modelo epistemológico que a sustenta.

II. Definição de limite

24. Seja I um intervalo aberto ao qual pertence o número real a. Seja f uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L e escrevemos $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Figura 1.

Definição de limite de um livro didático de Cálculo (Iezzi, Murakami, Machado (2013,p.23)

Como se pode observar, a definição de limite de uma função é um produto da aritmetização da análise, e que caracteriza o modelo epistemológico dominante do cálculo diferencial. Segundo Cornu (2002, p. 153) essa noção ocupa uma posição central que permeia toda análise matemática.

Exemplificando, segue uma tarefa que evoca a definição acima:

Tarefa 1: Demonstrar, usando a definição de limite, que $\lim\limits_{x \to 1}(3x + 2) = 5$.

O processo cognitivo indicado pelo verbo que expressa a tarefa (demonstrar), reflete sobremaneira o modelo epistemológico que mencionamos anteriormente, haja vista fundamentar-se numa estrutura lógico-formal que embasa a análise matemática. De forma mais contundente, podemos afirmar que se trata de uma estrutura que tem fundamento no logicismo[4] (Amaral, 2020), movimento pulsante no século XIX.

Complementa a praxeologia iniciada pela tarefa acima a técnica apresentada na figura 2 abaixo:

[4] "O termo logicismo refere-se à uma tendência, programa ou doutrina que reduz a matemática à lógica. É corriqueiro encontrar na literatura que Frege e Russell foram os primeiros proponentes de tal visão.17 Endossando isso, retenha-se as palavras de Carnap que, em uma conhecida passagem, definiu esse programa nos seguintes termos: Logicismo é a tese que afirma que a matemática pode ser reduzida a lógica, sendo, pois, parte dela. Frege foi o primeiro a expor tal visão. No majestoso livro, Principia Mathematica, os matemáticos ingleses A. N. Whitehead e B. Russell produziram uma sistematização da lógica a partir da qual eles construíram a matemática." (AMARAL, L. A. D. . A filosofia da matemática de Kant no (novo) tribunal da razão: alguns aspectos do anti-intuicionismo no século dezenove e uma variante neokantiana. SYNESIS (ON LINE) , v. 12, p. 67-87, 2020.)

19. Usando a definição, demonstre que $\lim_{x \to 1} (3x + 2) = 5$.

Solução

Devemos mostrar que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |(3x + 2) - 5| < \varepsilon$

Notemos que:

$|(3x + 2) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$

Assim, se escolhermos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, teremos:

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0 \mid 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |(3x + 2) - 5| < \varepsilon$

De fato, se

$0 < |x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |3x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |(3x + 2) - 5| < \varepsilon$

Figura 2.

Técnica de resolução da Tarefa 1 (Iezzi, Murakami, Machado (2013, p.27)

O discurso tecnológico-teórico apresenta elementos que vão apontar para uma aplicação direta da definição. Desse modo, a própria definição formal de limite é o discurso tecnológico para o cálculo do limite pela definição. Entretanto, isso não parece ser tão natural, já que essa mesma definição é também a tecnologia para o cálculo de limites em outros contextos, como situações-problema que podem ser solucionadas com o uso da noção de limite de uma função.

Da análise praxeológica apresentada, podemos apontar características do modelo epistemológico dominante bem como a forma que se apresenta no livro didático. Dessa análise, observa-se que a definição posta não se sustenta como discurso tecnológico-teórico para tarefas diversas que não fazem referência explicita ao cálculo de limites pela definição. Esta foi a preocupação de Chevallard e tantos colaboradores, no que tange à indissociabilidade dos blocos técnico-prático e tecnológico-teórico, indissociabilidade não alcançada em inúmeras praxeologias apresentadas em livros didáticos de cálculo diferencial.

O modelo epistemológico dominante supracitado modela as praxeologias na parte inicial nos cursos de Cálculo, e, portanto, define um modelo praxeológico também dominante, que parece por vezes abandonado no restante dos cursos, mas fortemente requerido para formalizar a noção de limite de uma função.

Cornu (2002) chama atenção para que pensemos um modelo didático de referência que sustente as formas pelas quais o referido saber será difundido numa dada instituição. Primeiro, esse pesquisador destaca que há uma diferença entre definição e conceito, e que tal distinção é didaticamente importante. Isso porque, segundo ele, lembrar a definição de limite é distinto de compreender a sua concepção fundamental. A ideia de aproximação, por exemplo, normalmente apresentada antes da definição, relacionada a uma noção dinâmica de limite, expressa a forma como essa noção é colocada em prática para resolver problemas reais, não dependendo diretamente da definição. Todavia, um modelo didático pautado exclusivamente nesse princípio da aproximação pode levar os estudantes a acreditar que compreenderam a definição, sem que de fato tenham adquirido as implicações do conceito formal.

Considerações provisórias

Aproximamos nossa compreensão de modelo didático daquela considerada no campo da pesquisa em ensino das ciências da natureza, na qual "o modelo didático é um esquema mediador entre a realidade e o pensamento do professor, uma estrutura na qual se organiza o conhecimento" (Chrobak, 2006 apud Júnior &Marcondes, 2010 p. 101 -116). O caráter desse modelo é provisório, mutável e de aproximação com uma realidade (na qual estão inseridos professores e estudantes), sendo um recurso para desenvolver e fundamentar a prática docente.

Assim, nessa breve reflexão teórica foram trazidas noções preliminares e princípios básicos (prolegômenos) para auxiliar os professores que ensinam cálculo diferencial e integral. Examinou-se os modelos para caracterizar, posteriormente, o modelo epistemológico dominante, modelo epistemológico de referência e modelo didático de referência, não importando de que forma eles apareçam em pesquisas e investigações ou em qual momento, sempre serão aquilo que, de fato, significam. São modelos, na acepção correta do termo, um dominante (que prevalece, preponderante, influente, predominante), outro utilizado como referência (a que se faz alusão, se menciona, utiliza-se como exemplo).

Posto isto, esperamos que estes escritos possam auxiliar os professores e pesquisadores na construção de modelos epistemológicos de referência para o ensino de Cálculo. A educação matemática exige tal mudança no ensino da disciplina.

Referências

Amaral, L.A. (2020). A Filosofia da Matematica de Kant no (novo) tribunal da razão: alguns aspectos do anti-intuicionismo no século dezenove e uma variante neokantiana. Synesis, v.12, n.2, 67-87.

Bacharach, S. B. (1989). Organizational Theories: Some Criteria for Evaluation. *Academy of Management Review*, 14(4), 496-515.

Barqueiro, Berta.; Bosh, M. Gascón, J. (2013) Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28.

Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estúdio e investigación”. *IUFM de l’académie de Montpellier*.

Cálculo. In: DICIO, *Dicionário Online de Português*. Porto: 7 Graus, 2024. https://www.dicio.com.br/trabalho/.

Cartier, Julien Qu’est-ce qu’un modèle? (2019). https://www.pedagogie.ac-nice.fr/svt/?p=1392.

Cornu, B. (2002). Limits. In: Tall, D. (eds) Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10.

Crilly, T. (2017). *50 ideias de matemática que você precisa conhecer*. Planeta.

Junior, João Batista Santos; Marcondes, Maria Eunice Ribeiro (2010). Identificando os modelos didáticos de um grupo de professor de Química. Revista Ensaio. Belo Horizonte – MG: vol. 12.

Lima, G. L. de (2008). *O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil entre 1810 e 1934: os cursos das escolas militares do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo.* http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/57-1-A-gt10_lima_ta.pdf

Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica*. Editora HARBRA.

Modelar. In: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7 Graus, 2024. https://www.dicio.com.br/trabalho/.

Modelizar. In: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7 Graus, 2024. https://www.dicio.com.br/trabalho/.

Oliveira, Ivanilde Apoluceno de. (2016) *Epistemologia e Educação: bases conceituais e racionalidades científicas e históricas*. Petrópolis, RJ: Vozes.[

Piskounov, N. (1990) *Cálculo Diferencial e Integral*. Edições Lopes da Silva.

Saïd Assar; Redouane EL Amrani. Théories et théorisation : esquisse d’une analyse avec la recherche sur les ERP. https://www.researchgate.net/publication/261634340

Taton, R. *Histoire du Calcul* (1946). Presses Universitaires de France.

Torres, T.I.M .& Giraffa, L.M.M. (2009) REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V4.1, p.18-25, UFSC file:///C:/Users/Home/Downloads/administrador,+revista_2009_02_completo_%20(1).pdf

Willett, Gilles. Paradigme, théorie, modèle, schéma : qu’est-ce donc?, *Communication et organisation*. http:// journals.openedition.org/communicationorganisation/1873; DOI: https://doi.org/10.4000/communicationorganisation.1873

Zuchi,I. (2005). A abordagem do conceito de limite via sequência didáIItica: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional.Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis.