ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p06-028

Integral dupla, superfícies quádricas e as obras de Antoní Gaudi: possibilidade de elaboração de um modelo epistemológico de referência

Double integral, quadric surfaces and the works of Antoní Gaudi: Possibility of elaboration of an epistemological model of reference

Doble integral, superficies cuádricas y las obras de Antoní Gaudí: posibilidad de elaboración de un modelo epistemológico de referencia

Intégrale Double, surfaces quadratiques et œuvres d'Antoní Gaudi: possibilité de développer un modèle de référence épistémologique

Ana Karine Dias Caires Brandão[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA)
Doutorado em Educação Matemática
http://orcid.org/0000-0002-2403-1050

Saddo Ag Almouloud[2]
Universidade Federal do Pará (UFPA)
Doutorado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Maria José Ferreira da Silva[3]
Pontifical Catholic University of São Paulo (PUC-SP)
PhD in Mathematics Education
https://orcid.org/0000-0002-1249-8091

Resumo

Com o intuito de ensinar o objeto matemático integral dupla, elaboramos um modelo epistemológico de referência (MER)para a construção de um dispositivo de ensino denominado percurso de estudo e pesquisa (PEP), que foi aplicado em um curso com treze estudantes das engenharias e da licenciatura em matemática de duas instituições públicas do interior da Bahia. Teoricamente apoiamos nossa pesquisa na teoria antropológica do didático e os processos metodológicos foram pautados nas estruturas que regem o PEP. Em análise aos resultados, destacamos que houve diferenças entre o MER construído antes e depois da execução do PEP; os estudantes selecionaram de forma apropriada os objetos matemáticos que os ajudaram a

[1] karinedias33@gmail.com
[2] saddoag@gmail.com
[3] maze.fsilva@gmail.com

responder à questão geratriz do PEP e articularam outras áreas de conhecimento para assegurar uma “boa resposta” para o questionamento proposto.

Palavras-chave: Integral dupla, Modelo epistemológico de referência, Percurso de estudo e pesquisa.

Abstract

In order to teach the mathematical object double integral, we developed a reference epistemological model (REM) to construct a teaching device called study and research path (SRP), which was applied in a course with thirteen engineering and mathematics undergraduate students from two public institutions Bahia countryside. Theoretically, we supported our research in the anthropological theory of didactics, and the methodological processes were based on the structures that govern the SRP. In the analysis, we highlighted that there were differences between the REM constructed before and after the execution of the SRP; the students appropriately selected the mathematical objects that helped them answer the guiding question of the SRP and articulated other areas of knowledge to ensure a “good answer” to the proposed question.

Keywords: Double integral, Epistemological reference model, Study and research path.

Resumen

Para la enseñanza del objeto matemático integral doble, desarrollamos un modelo epistemológico de referencia (MER) para construir un dispositivo de enseñanza denominado recorrido de estudio e investigación (REI), que fue aplicado en un curso con trece estudiantes de grado de ingeniería y matemáticas de dos instituciones públicas del interior de Bahía. Teóricamente, sustentamos nuestra investigación en la teoría antropológica de lo didáctico, y los procesos metodológicos se basaron en las estructuras que rigen el REI. En el análisis, destacamos que hubo diferencias entre el MER construido antes y después de la ejecución del REI; los estudiantes seleccionaron adecuadamente los objetos matemáticos que los ayudaron a responder la pregunta orientadora del REI y articularon otras áreas de conocimiento para garantizar una “buena respuesta” a la pregunta propuesta.

Palabras clave: Integral doble, Modelo epistemológico de referencia, Recorrido de estudio e investigación.

Résumé

Afin d'enseigner l'objet mathématique intégrale double, nous avons développé un modèle épistémologique de référence (MER) pour la construction d'un dispositif d'enseignement appelé parcours d'étude et de recherche (PER), qui a été appliqué dans un cours avec treize étudiants de licence en ingénierie et en mathématiques de deux institutions publiques de l'intérieur de Bahia. Sur le plan théorique, nous avons fondé notre recherche sur la théorie anthropologique du didactique et les processus méthodologiques ont été basés sur les structures qui régissent le PER. En analysant les résultats, nous soulignons qu'il existe des différences entre le MER construit avant et après la mise en œuvre du PER ; les étudiants ont sélectionné de manière appropriée les objets mathématiques qui les ont aidés à répondre à la question qui a généré le PER et ont articulé d'autres domaines de connaissances pour garantir une « bonne réponse » à la question proposée.

Mots-clés : Intégrale double**,** Modèle épistémologique de référence, Parcours d'étude et de recherche.

Integral dupla, superfícies quádricas e as obras de Antoní Gaudi: Possibilidade de elaboração de um modelo epistemológico de referência

O exercício de ensinar demanda do docente um planejamento prévio, com o estudo do objeto de ensino e a forma como será ensinado aos estudantes. Chevallard (1999) denominou esse processo de organização matemática e didática, respectivamente.

Nossa ênfase será no estudo da dimensão epistemológica da integral dupla e em como estruturar uma organização matemática para o desenvolvimento de um percurso de estudo e pesquisa (PEP). Nesse sentido, o objeto é um ente a ser percebido. As definições, proposições, teoremas, símbolos e regras são entes que podem ou não serem visualizados e materializados. Quando os entes são visíveis, são denominados objetos ostensivos, geralmente representados por meio de gráficos, palavras, símbolos, mapas, entre outros. Os objetos não ostensivos são aqueles formados por esquemas mentais de alguém —não são físicos ou materiais. A ideia, uma definição, um pensamento são exemplos.

No entanto, há um entrelace entre os dois objetos, pois para que o objeto não ostensivo se faça presente, seja comunicado, seja representado, deverá usar objetos ostensivos. Ou seja, o objeto ostensivo divulga o objeto não ostensivo. Por conseguinte, ao estudar um objeto, acessamos a ideia e a sua representação concomitantemente e estabelecemos associações com outros objetos para tecer uma rede neural de pensamentos que são percebidos por representações.

No campo científico, um objeto tem sua razão de existir. Ele atendeu a um pedido, a uma exigência e emergiu baseado em um novo problema observado. No entanto, ao ser validado, passa da categoria do senso comum para a categoria científica e toda uma estrutura (origem, limite, valor lógico, princípios, campo de atuação, regras, entre outros) delineada para comprovar a sua existência. Ao analisar criticamente as estruturas e comprová-las por métodos científicos, adquire o status de objeto epistemológico.

Uma pessoa que estuda o objeto matemático integral dupla, por exemplo, está a desvendar toda ou parte das estruturas que foram validadas no cânone científico. A integral dupla é um objeto epistemológico pertencente à ciência e ao campo da matemática, que tem por razão de existir o cálculo da medida de uma área. No entanto, a integral dupla é uma imagem mental simplificada e idealizada que se permite ser representada (com maior ou menor precisão) para descrever o comportamento de um sistema de ideias, representações e símbolos que estão conectados com outros objetos epistemológicos matemáticos e não-matemáticos.

Estes objetos se relacionam de forma ampla e possibilitam a origem de novos objetos que, quando associados, acrescentam informações relevantes para um sujeito. Metaforicamente, um objeto pode estar relacionado com muitos outros, como os galhos de uma árvore. Chamamos modelo a esse conjunto de objetos epistemológicos que preservam características em comum e fazem parte de um mesmo sistema. Weyne (2009, p.12) define modelo como “uma representação ou interpretação simplificada da realidade, ou uma interpretação de um fragmento de um sistema, segundo uma estrutura de conceitos mentais ou experimentais."

O autor ainda discorre que a construção de um modelo matemático, especificamente, será "a representação aproximada e seletiva de uma dada situação que pode ser expressa em termos matemáticos" (ibid, 2009, p.12). Ao selecionar uma determinada circunstância, sempre há escolhas a serem feitas para suprimir alguns objetos matemáticos e acrescentar outros pertencentes ao universo matemático ou não.

Quando nos referimos a um modelo epistemológico, evidenciamos um modelo científico mediado por comprovações teóricas e empíricas dos objetos teóricos aceitos pelos pares, e sujeitas à correção das hipóteses sempre que necessário.

A descoberta do problema ocorre muitas vezes com o levantamento da hipótese para solucioná-lo, o que consiste em um raciocínio abdutivo, aquele livre de julgamentos ou de comprovações iniciais. Tal hipótese vai se articulando com argumentos que possam assegurar que ela é coerente e possível de ser confirmada como verdade (mesmo que momentaneamente).

Uma hipótese pode ser atestada como científica e, com o decorrer do tempo, pode ser falseada ou ser acrescida de novas informações, processos naturais da ciência. Neste sentido, um modelo epistemológico pode ser o dominante em uma comunidade científica até que algo ou alguém modifique aquele sistema.

Muitas vezes, ao realizar um "recorte" no sistema vigente para responder a um determinado problema, criamos um modelo epistemológico que servirá de referência para aquele contexto, denominado modelo epistemológico de referência (MER).

Neste texto descrevemos um MER desenvolvido para a aplicação de um dispositivo de ensino nomeado de percurso de estudo e pesquisa (PEP) com o intuito de ensinar o objeto matemático integral dupla.

O avir do MER

Chevallard (2005), ao perceber que as instituições de ensino mantinham um modelo epistemológico vigente[4] para o ensino de objetos matemáticos, pautado em um ensino "monumentalista" –que o definiu como aquele em que as obras matemáticas são visitadas como estátuas, estagnadas– propôs uma quebra deste paradigma para apresentar a perspectiva de "questionamento do mundo" (Chevallard, 2015).

No entanto, essa mudança de paradigma solicitava alterações na forma de ensinar os objetos matemáticos colocando-os como saberes não estáticos, mas em movimento com o mundo e, por este motivo, questionáveis. Ao perceber que a matemática e o seu ensino, assim como a ciência, precisam buscar respostas para perguntas que emergem, Chevallard (2009a) desenvolveu um dispositivo de ensino/pesquisa denominado percurso de estudo e pesquisa

[4] Em Gascón (2021, p. 14) o autor afirma "em trabalhos anteriores temos denominado *modelo epistemológico dominante* (MED) que aqui denominamos *modelo epistemológico vigente* (MEV) em uma instituição docente."

(PEP), em que descreve como um grupo de estudantes busca respostas a uma questão proposta inicialmente, designada de questão geratriz.

No intuito de responder a uma questão geratriz, os discentes realizarão investigações em diferentes meios e mídias que produzem indagações e respostas intermediárias, até que consigam chegar a uma resposta comprovada por argumentos sólidos. Um dos aspectos considerados relevantes neste processo é que os estudantes entram em contato com a necessidade de propor respostas, o que os insere em procedimentos de validação do método científico.

Todavia, o PEP demanda uma nova estrutura para o trabalho como os objetos matemáticos, pois o modelo epistemológico vigente pode não corresponder às respostas e questionamentos que emergem dos estudantes e, principalmente, a forma linear com que se encontram dispostos o currículo matemático e escolar. Por este motivo, ressaltamos que há um rompimento do paradigma vigente e a necessidade de avaliar e ultrapassar as possíveis restrições que surgem quando nos propomos movimentar ações em torno de questionamentos.

Nesse sentido, a construção do MER exige a análise de novos fenômenos que emergem da necessidade de romper com o modelo dominante nas instituições para incorporar tarefas diferentes, suportes técnicos e materiais que possam contribuir para a "emancipação da Didática da Matemática" (Gascón, 2014, p.106). Mas demanda, também, que o professor estude o objeto epistemológico e suas relações com outros saberes para criar uma hipótese para um modelo epistemológico matemático que o guiará na condução do PEP. Esse modelo serve para os docentes como referência para os possíveis caminhos que os estudantes podem tomar ao buscar suas próprias respostas.

Como é uma hipótese, pode ser modificada durante o percurso, algumas vezes ampliada, em outras simplificada, pois o MER garante a existência de uma variedade extensa de objetos matemáticos e não matemáticos que podem ser mobilizados pelos estudantes. O conhecimento amplo do estudo do objeto matemático faculta ao docente conhecer a sua razão de existir, as relações que possui com outros campos de conhecimento e com o campo interno da matemática, a história que permeia o surgimento do objeto e a relação com o contexto social e cultural da época em que foi construído.

O MER é um modelo alternativo para contrapor ao modelo epistemológico vigente e intrinsicamente é uma ação que dá voz e autonomia ao professor, pois ao criar sua questão geratriz e selecionar os objetos matemáticos que "abastecerão" o PEP, é um cocriador do currículo. Nesse processo, podem emergir saberes que não são propostos em documentos oficiais ou para a faixa etária daquele estudante, o que requer do professor uma percepção do mundo de forma mais crítica e questionadora, além de tomar decisões rápidas e uma mudança da cultura escolar vigente. Para Gascón (2014, p.100), "o professor precisa analisar criticamente os modelos epistemológicos da matemática dominantes nas instituições envolvidas e, assim, libertar-se do pressuposto acrítico desses modelos."

Uma das restrições ao implantar-se a metodologia do PEP tem início com o rompimento da cultura/crenças escolares de que o “bom professor é aquele que vai para o quadro e explica seu conteúdo, enquanto os alunos copiam em seus cadernos” e quando não o faz, está “enrolando” ou conversando em sala de aula. A subjetividade deste tipo de interpretação é velada, mas é um pensamento coletivo institucionalizado, enraizado, em que o docente que tenta romper, muitas vezes, é posto como iludido, esperançoso. Morin (1989, p. 189) ressalta que “é preciso que os educadores iniciem o processo de reforma do pensamento, apesar das instituições tentarem bloquear suas iniciativas, pois um dia, suas ideias vingarão.”

Outro aspecto relevante para a elaboração de um MER é que ele identifica as características pessoais do professor e sua relação com o objeto epistemológico e com a instituição. Um professor autônomo e criativo, frequentemente, não se adapta a uma instituição tecnicista ou que prefere conservar o modelo vigente de ensino. Nesse sentido, Chevallard (1996) esclarece que o conjunto de relações estabelecidas por uma pessoa (X) em uma instituição (I), representada por R (X, I), é que determina a existência do objeto. Essas relações se modificam com o passar do tempo e por influências das várias instituições que o docente fará parte no decurso de sua vida profissional.

O MER proporciona conhecer o objeto matemático e sua rede de associação com outros saberes para evidenciar os aspectos relevantes para a formulação de problemas didáticos que contemplará as dimensões epistemológica, econômica, ecológica e da linguagem (Brandão, 2021). A dimensão epistemológica circunscreve o problema didático no estudo do conhecimento acerca do objeto epistemológico, a dimensão econômica delimita uma unidade mínima eficaz e econômica para ensinar esse objeto, a dimensão ecológica fornece as condições e restrições para o estudo daquele objeto nas instituições e a dimensão da linguagem caracteriza como esse objeto é comunicado, visualizado, significado e interpretado nas diferentes instituições.

Assim, a construção do MER e do PEP contribuem para a emancipação didática, pois promove um caos no meio educacional, um movimento de resistência ao modelo vigente que demanda a autorregulação para fazer emergir novas possibilidades de educação, de comunicação e de questionamento do mundo.

Quando estruturamos o percurso de estudo e pesquisa para o ensino da integral dupla, nos deparamos com a necessidade do estudo daquele objeto epistemológico e das relações que ele estabelece com outros saberes, o que impulsionou a construção de um modelo epistemológico de referência que apresentamos na seção seguinte.

O MER elaborado para o ensino da integral dupla

Buscamos em livros de cálculo diferencial e integral (CDI) o modelo epistemológico dominante (ou vigente) – MED– sobre a integral dupla utilizado nas instituições de ensino superior brasileiras e constatamos que as definições são construídas pelos autores, não havendo processos de questionamentos ou aplicações em torno do tema, seguidos de demonstrações de propriedades e exercícios resolvidos com procedimentos de técnicas algorítmicas. A Figura 1 registra a forma como um dos livros (Leithold, 1996, p.1024) de CDI expõe o MED.

Definição: Seja f uma função definida numa região retangular fechada R. O número L será limite das somas da forma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i A$ se L satisfizer a propriedade de que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que para toda partição Δ, para a qual $|\Delta| < \delta$ e para todas as possíveis seleções do ponto (ξ_i, γ_i) no i-ésimo retângulo i = 1, 2, ..., n,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i A - \mathrm{L}\right| < \varepsilon.$$

Se tal número existir, escrevemos

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i A = L$$

Se existir um número L satisfazendo a Definição 18.1.1, podemos mostrar que ele é único. A demonstração é similar à prova do Teorema (2,1.2) a respeito da unicidade do limite de uma função.

Definição: Uma função f de duas variáveis será dita integrável numa região retangular fechada R se f estiver definida em R e o número L da definição 18.1.1 existir. Esse número L será chamado de integral dupla de f em R, e escrevemos

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i A = \iint_R f(x, y)dA$$

Figura 1

Definição de integral dupla (Leithold,1996, p.1024)

Para a implementação do dispositivo do PEP pautado no paradigma do questionamento do mundo, o MED exposto não nos possibilitaria associar as definições sobre o objeto matemático e as suas aplicações pragmáticas, pois a linguagem usada está restrita ao campo interno da matemática.

Em busca de outras referências para o que tínhamos como intuito, verificamos as publicações das áreas sobre a integral dupla e verificamos que em relação aos objetos matemáticos integral dupla e superfície quádrica há escassez ou inexistência de publicações em que eles são aplicados em situações adversas à matemática e ao tema proposto. Pesquisas como as de Silva e Morretti (2018a; 2018b) sobre as superfícies quádricas e a de Henriques (2006) sobre as integrais múltiplas trazem valiosas contribuições no que tange aos objetos de forma individual, voltadas ao campo interno da matemática e ao uso de artefatos tecnológicos, mas não refletem suas aplicações em graduações para não matemáticos. Com relação às aplicações desses objetos matemáticos, Romo-Vázquez (2010a) e Romo-Vázquez e Chávez (2017) discutem atividades que envolvem a transformada de Laplace e equações diferenciais para futuros engenheiros, mas não refletem na mesma direção que propomos.

Como o MED e as pesquisas sobre o tema não abarcavam as pretensões que tínhamos em torno do ensino da integral dupla, organizamos um curso intitulado “(Se) Integre Duplamente a Superfície Quádrica” em que 13 estudantes, seis estudantes da licenciatura em matemática e sete das engenharias (civil, ambiental e elétrica), participaram dos cinco encontros presenciais.

Para a questão geratriz do PEP, formulamos a pergunta Q_o: Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo? baseando-nos nas obras de Antoni Gaudí, arquiteto catalão que utilizou as superfícies quádricas e elementos da física para construir suas obras.

Para o desenvolvimento do PEP foram construídas duas organizações, a matemática e a didática; no entanto, para este estudo, enfatizamos a organização matemática para a constituição do MER.

No primeiro momento de estudo do objeto epistemológico –integral dupla– o professor/pesquisador priorizou investigar todas as possíveis relações que poderiam emergir quando os estudantes pesquisassem e estabeleceu uma hipótese, uma inferência de um modelo epistemológico de referência elaborado antes do PEP.

Norteados por essa hipótese, precisávamos conhecer o ecossistema matemático de que a integral dupla faz parte, ou seja, a rede de objetos associados a ela. Com base nesse viés, criamos o seguinte problema didático: *Como organizar os objetos imediatos*[5]*/ostensivos e dinâmicos/não ostensivos que caracterizam as integrais duplas no cálculo da medida das superfícies quádricas, para ser usado em um modelo matemático que permita produzir significados, raciocínios abdutivos e praxeologias diferenciadas que atendam aos interesses dos graduandos das engenharias e da matemática?*

Para esse percurso, procuramos construir o ecossistema matemático que gira em torno da integral dupla e que é composto por dois níveis tróficos[6]: no primeiro nível, tece uma teia de relações com os objetos matemáticos –números, funções, geometria espacial, superfícies quádricas, matrizes, coordenadas– que contribuem como fonte de alimento para a constituição do objeto em estudo. No segundo nível, desempenha um papel secundário, pois passa a alimentar outros ramos da matemática (como por exemplo, a topologia), outras áreas de conhecimento (engenharia, arquitetura, física, entre outras) e, outros objetos matemáticos, como as integrais triplas, as integrais de superfície, as equações diferenciais, as variáveis complexas, as séries.

É possível identificar a existência de fatores bióticos e abióticos[7] que compõem cada um dos níveis tróficos e são condicionados por objetos imediatos/ostensivos e dinâmicos/não ostensivos. No primeiro nível trófico, apresentamos os objetos matemáticos que "alimentam" a integral dupla: número, funções, geometria, superfícies, matrizes, coordenadas e integrais de Lebesgue. Cada um com sua função biótica: para o número, são as noções de medida, quantidade e ordem; para as funções de uma e duas variáveis, são os limites, as derivadas e a integral; na geometria, são a plana, a espacial e a analítica; nas superfícies, as cônicas e as quádricas; para as coordenadas, cilíndricas, esféricas e cartesianas; para as matrizes, vetores, determinantes e sistemas lineares; para a integral de Lebesgue, integrais, espaço vetorial e subespaço.

---

[5] Peirce (2005, p.79-80) distingue os objetos em imediatos e dinâmicos. Os objetos imediatos são aqueles que podem ser visualizados, são ostensivos, representados por símbolos e os objetos dinâmicos são aqueles que não estão visíveis, estão na mente do interpretante e não ostensivos.

[6] Construímos uma analogia com a ecologia, em que os níveis tróficos são aqueles que produzem seu próprio alimento e aqueles que não o produzem. Nesse sentido, todos os objetos que auxiliam na definição da integral dupla, como: funções de várias variáveis, derivadas parciais, entre outros, alimentam a integral dupla, são os produtores. Enquanto que os objetos que utilizam a integral dupla como uma ferramenta, tais como o centro de massa e o teorema de Green, pertencem ao segundo nível trófico, são os consumidores.

[7] Consideramos os fatores bióticos como objetos matemáticos que alimentam a Integral Dupla e interacionam com o primeiro nível trófico, são os produtores. Os fatores abióticos são fatores externos que influenciam a existência ou o uso da Integral Dupla, são as propriedades, os teoremas que pertencem ao cálculo ou a outras áreas de conhecimento.

No segundo nível, as integrais duplas servem de alimento para ramos na própria matemática e para outras áreas. Para ramos da matemática, topologia, campos vetoriais, variáveis complexas, equações diferenciais e integrais tripla, os fatores bióticos são assim organizados: na topologia são as funções e derivadas; nos campos vetoriais são os vetores, integral de linha, integrais de superfície; em variáveis complexas são as funções, as derivadas e as integrais; em equações diferenciais, são equações, derivadas, integrais e séries e para a integral tripla, são as integrais. Como fatores abióticos: na topologia são o espaço topológico, o teorema de Gauss-Bessot, a teoria de Morse, o teorema do índice e Hopf e a teoria dos nós; para os campos vetoriais, são teorema de Gauss, teorema de Green, independência do caminho, teorema de Stokes; para as variáveis complexas, são as funções hiperbólicas, teorema de Cauchy, equação de Euler, equação de Laplace, serie de Laurente; para as equações diferenciais, são as equações, derivadas, teorema das equações homogêneas, método do coeficiente a determinar; para as integrais triplas, são as coordenadas esféricas e cilíndricas e a transformação jacobiana.

Para as outras áreas, a integral dupla dá suporte para a física, a química, a biologia, a engenharia e a economia. A integral é a função biótica de todas elas e se diferem quanto à função abiótica: na física, são medida escalar, medida vetorial, massa e momento de inércia; na química, pressão de um gás, volume, área, reações químicas; na biologia, capacidade cardíaca, diluição por contraste, taxa de crescimento; na engenharia, fluxo de energia vibratória em estruturas, volume, momento de inércia, centro de massa, eletromagnetismo, termologia; na economia, valor futuro, fluxo de renda contínuo, controle de qualidade.

Na Figura 2 apresentamos, o objeto matemático, os níveis tróficos e os fatores que auxiliam na construção da integral dupla, além de sintetizar as relações entre objetos matemáticos, propriedades, definições, teoremas que contribuíram para a construção do modelo epistemológico de referência – MER.

EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p06-028

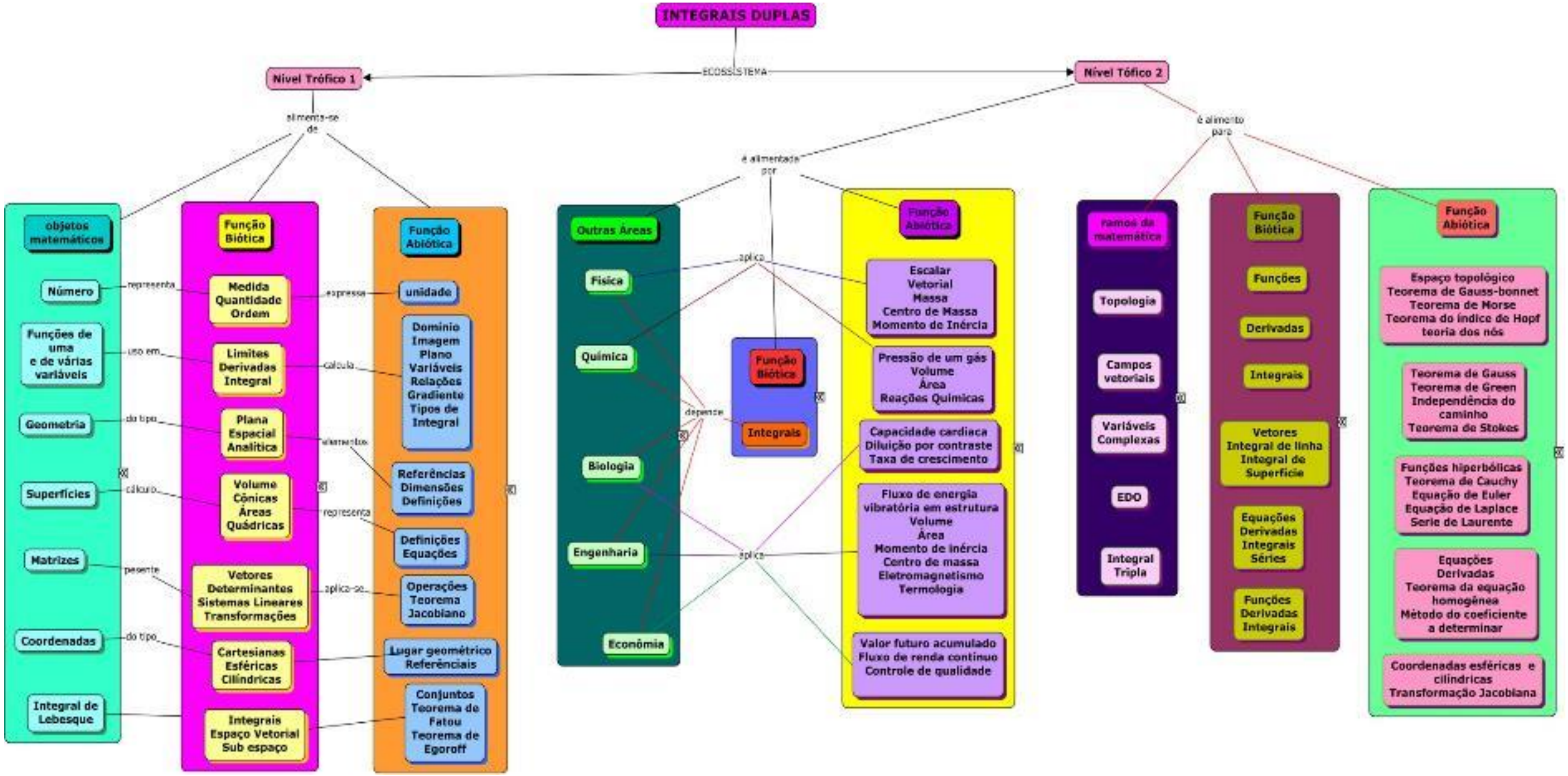

Figura 2.

Ecossistema das Integrais Duplas (Brandão, 2021, p.133)

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p06-028

Todavia precisávamos buscar elementos para a solução do problema didático e para isso o estudo dos objetos ostensivos e não ostensivos ao redor da integral dupla surgem como entes essenciais na constituição do MER. A Figura 3 retrata o primeiro MER desenhado, que foi criado pelo professor/pesquisador antes do desenvolvimento do PEP.

A Figura 3 inicia com o tema área que associa o número como medida de grandeza que se relaciona com a física escalar e vetorial para calcular a massa e fundamentar a geometria vetorial. A área também exprime a razão de existir da integral, que possibilita o cálculo da medida do volume e relaciona as funções com limites, derivadas e geometria analítica que, por sua vez, contribuem para as matrizes, os determinantes e os sistemas lineares e se associam com a geometria espacial e a geometria plana. Todos juntos auxiliam na formação das funções de várias variáveis que utilizam as superfícies quádricas oriundas parcialmente das cônicas. O estudo da massa, das funções de várias variáveis e a ampliação das integrais dão origem à integral dupla, que alimenta as integrais de superfície, outras áreas de conhecimento e o cálculo da medida de volumes em espaços tridimensionais. Na física, a integral dupla servirá para o cálculo do centro de massa e para o momento de inércia.

Esta hipótese inicial para o MER é bem ampla e apresenta elementos ricos para alimentar o PEP com novas perguntas que abarquem objetos epistemológicos matemáticos e não matemáticos. Para o professor/pesquisador, o MER abre um leque de possibilidades de percursos que os estudantes podem trazer no desenvolvimento do PEP, e minimiza as incertezas e vulnerabilidades a que ficam submetidos ao propor uma questão que extrapolou o campo matemático.

Como uma inferência pode ser constatada/falseada parcialmente ou integralmente, nos dá um caminho de volta para ajustar o que não produziu argumentação sólida ou de fato não se aplicou em uma determinada circunstância. O MER proposto na Figura 2 buscou contemplar o maior número de objetos epistemológicos matemáticos que se associam de forma direta ou indireta com a integral dupla. (Figura 3)

EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p06-028

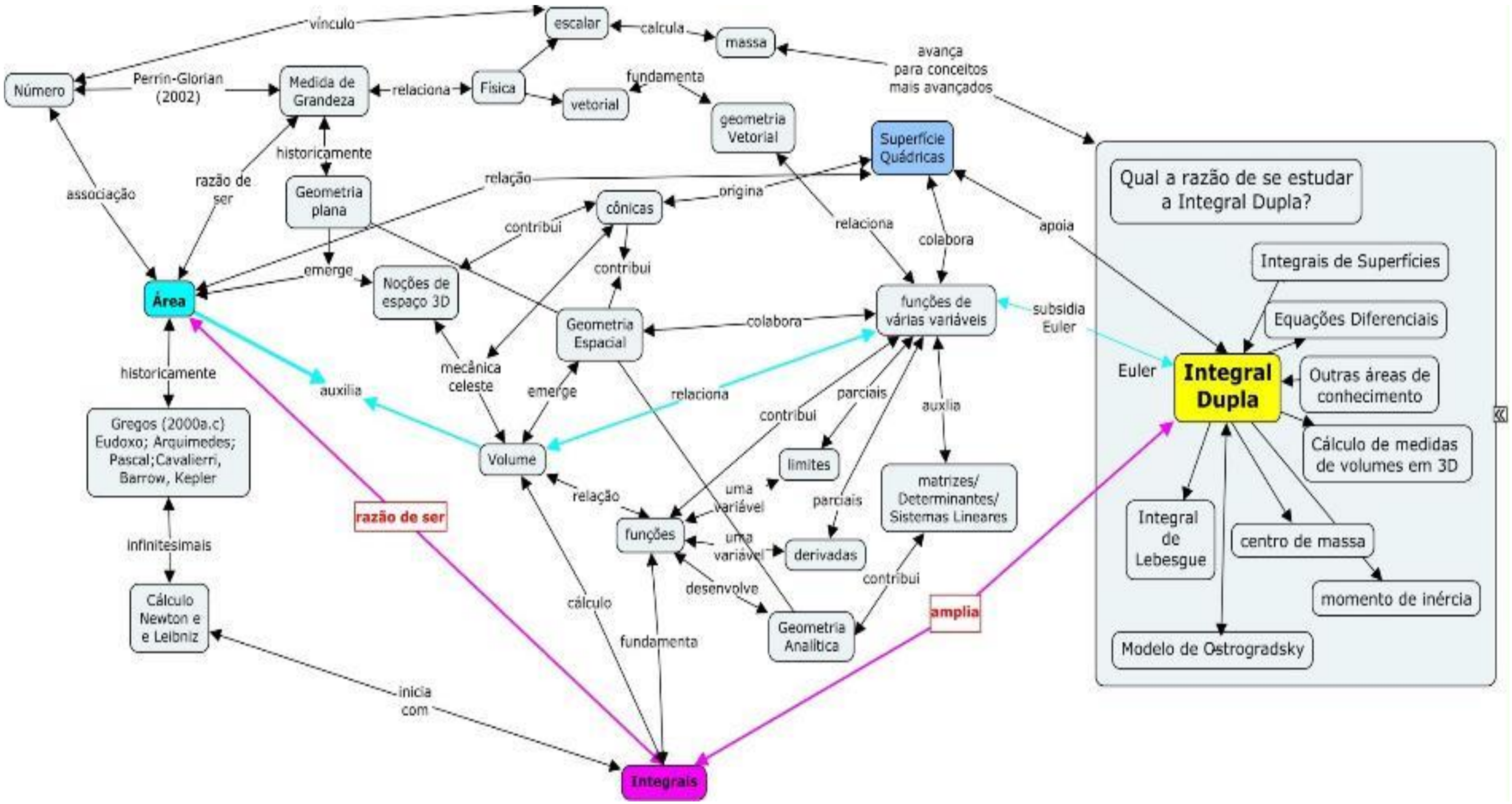

Figura 3.

Objetos ostensivos e não-ostensivos associados à integral dupla (Brandão, 2021, p.138)

EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p06-028

No entanto, a previsibilidade didática não é uma característica dos espaços de sala de aula, nem tudo que é planejado ocorre de forma integral, e é no decorrer do processo de ensino que alguns elementos se modificam. Vernet (1975) e Chevallard (1982) denominaram esse processo de transposição didática interna[8].

O desenvolvimento do PEP mobilizou conhecimentos postos na Figura 3, mas não de forma total, pois a supressão de alguns objetos matemáticos foi observada no transcorrer do curso. Assim, a partir dos questionamentos dos estudantes e da busca por respostas, o MER foi modificado no ensino da integral dupla.

O MER oriundo das pesquisas dos estudantes

Os percursos que os estudantes trilham ao fazer uma pesquisa são inúmeros e marcam a imprevisibilidade dos saberes que adquirem e relacionam. Como professores, muitas vezes somos interpelados com perguntas inusitadas para as quais nem sempre sabemos uma resposta. Essa vulnerabilidade pode ocorrer ao estruturarmos as organizações matemáticas e didáticas, e cabe neste momento que o docente tenha uma atitude rápida e ações imediatas para lidar com o inesperado.

No MER elaborado previamente, foram feitas articulações de objetos ostensivos e não ostensivos sob a ótica do professor/pesquisador que procurou fazer uma rede de conexões prováveis que os estudantes do curso poderiam mobilizar. No entanto, os estudantes foram mais sucintos e alcançaram uma parte desse MER.

Não descreveremos neste artigo o desenvolvimento do PEP[9], mas registraremos algumas falas/escritas pontuais que comprovam as articulações feitas pelos discentes entre os objetos epistemológicos matemáticos que constituíram o MER posterior.

No primeiro encontro, a conversa com os cursistas focou em suas impressões acerca da matemática, o local que ela ocupa no mundo, se ela pode ser considerada como criativa, se ela está na natureza e nas construções feitas pelo homem. Nesse contexto, a professora perguntou a P_1: *Qual a relação entre o girassol, a margarida e o pavão?* O aluno E_{10} respondeu: *Há elementos da Geometria em sua estrutura física, acho que a* ***geometria plana****, a* ***geometria espacial*** *e fractais.* Em seguida, outro aluno E_2 respondeu: *Todos tem uma* ***área****!* A professora devolveu uma pergunta à turma P_2: *Como vocês calculariam a área de um pavão que é bem irregular?* A aluna E_3 respondeu: *Nesse caso iria fazer uma separação de cada partezinha para tentar ficar o* ***mais próximo possível****. Igual em* ***integral,*** *você faz os retângulos e vai calculando cada pedacinho fazendo uma estimativa.* O estudante E_7 complementou: *Mas, mesmo assim, seria uma aproximação, por isso usa* ***limite****.*

Observamos que os primeiros objetos epistemológicos não ostensivos emergem da fala dos estudantes. Essa sequência continua no segundo encontro, quando trazem os resultados das

---

[8] Do original : "La transposition didactique désigne donc le passage du savoir savant au savoir enseigné" (CHEVALLARD, 1982, p. 6). Tradução nossa: "A transposição didática designa a passagem do saber matemático ao saber ensinado."

[9] Para uma descrição mais aprofundada do PEP, consultar Brandão (2021), in: https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/24405

primeiras pesquisas a respeito de Q_o: Como as obras de Gaudí resistiriam às intempéries do tempo?

Esclarecemos que, ao final do primeiro encontro, os estudantes formularam três perguntas intermediárias Q_1: Quem foi Antoní Gaudí? Q_2: Quais foram as suas obras? Q_3: Qual relação existe entre essas obras e a matemática? Destas pesquisas, resultaram algumas associações com outros objetos matemáticos que são retratados nos fragmentos de falas expostos a seguir.

> *E_5: De início na pesquisa que fiz vi um **prisma**, depois **elipsoides**, **paraboloides**, **hipérboles**, **hiperboloides**, **paraboloides hiperbólicos**. Este último tinha na sacada da sagrada família e na chave das portas de algumas casas que ele construiu.*
> *E_8: Ele falou do paraboloide hiperbólico na sacada, mas nós vimos **no cálculo estrutural**. A gente achou um artigo que falava que a concepção estrutural das suas obras ele usava a **geometria**.*

Neste trecho, os estudantes mobilizaram os objetos matemáticos cônicas e superfícies quádricas, mas apareceu a relação com outros objetos epistemológicos que pertencem aos cursos das engenharias – o cálculo estrutural. Na sequência das discussões a professora indagou P_4: *Qual a diferença entre área e superfície?* Registramos algumas das respostas.

> *E_9: Quando fala em superfície eu penso em área. Área tem largura e comprimento e a superfície a gente também ver isso.*
> *E_1: A área é mais restrita ao comprimento e a largura. Quando você fala em superfície envolve **três ou mais dimensões**.*

Neste diálogo os estudantes tentaram diferenciar uma área de uma superfície, e nesta busca, se depararam com o espaço constituído de n variáveis, que está associado ao objeto epistemológico funções de várias variáveis.

Ressaltamos que no início deste segundo encontro houve uma mesa redonda com profissionais de algumas áreas de conhecimento: engenheiro eletricista, engenheiro ambiental, engenheiro civil, um professor de física, um professor de matemática e um arquiteto. Na abordagem realizada pelo engenheiro eletricista, ele discutiu a importância das fiações entre os postes para condução da eletricidade e afirmou que a curva formada pelos fios é uma catenária. Quando os estudantes se encontraram com o professor para discutir as respostas para Q_1, Q_2 e Q_3, o estudante E_8 mencionou: *O engenheiro eletricista falou das **catenárias** e eu vi que Gaudi usou muito os arcos catenários em suas obras.*

Após uma breve explicação da professora para catenárias, ela perguntou se eles pesquisaram algo deste tema. O aluno E_7 respondeu: *Eu lembro de ter visto a **equação** da catenária que é um **cosseno hiperbólico** tem algo com Euler elevado a x menos o número de Euler elevado a -x e tudo dividido por dois.*

No terceiro encontro, os estudantes tiveram dois momentos: no primeiro assistiram uma palestra com o professor Afonso Henriques sobre o uso das impressoras 3D para o estudo de crivos geométricos. Em seguida, os estudantes foram solicitados a usarem massa acrílica e palitos de churrasco para reproduzirem algum dos sólidos encontrados nas obras de Gaudí. Durante o processo, alguns elementos como força de equilíbrio emergiram das conversas entre os alunos que estavam distribuídos por grupos. Um dos registros foi da estudante E_{11}, quando falou: *A gente precisa fazer uma base com os palitinhos.* O estudante E_4 mencionou: *Os palitinhos não vão aguentar, vai cair!* O estudante E_3 resolveu a situação ao sugerir: *Vamos fazer uma base quadradinha, aí ela sustenta o sólido. A base quadrada dará o* ***equilíbrio*** *ao sólido.*

Indiretamente, os estudantes começaram a construir elementos (a noção de equilíbrio, partição de um sólido em regiões menores, a base quadrada) para responder à questão geratriz Q_o, e surgem os primeiros indícios dos objetos epistemológicos, centro de massa, momento de inércia, que serão fundamentais para a resposta.

Ao apresentarem seus sólidos, a professora os indagou como calculariam a medida do volume daquelas obras. Após um breve silêncio, o estudante E_8 respondeu: *Como fiz para calcular na integral quadrados, só que agora como tem altura faria prismas, paralelepípedos. É isso pró?* Em seguida, a discente E_5 respondeu: *Ah! Chegamos à* ***integral dupla****. Por isso, o nome do curso! (se integre duplamente as superfícies quádricas).*

No quarto e quinto encontro, que ocorreram em turno integral, os estudantes resolveram algumas atividades, trouxeram respostas para as questões Q_4: Qual a relação das integrais duplas com as superfícies quádricas? e Q_5: Qual relação existe entre a integral dupla e a resistência das obras de Gaudí? E, ao final, apresentaram uma resposta para Q_o.

No que diz respeito à primeira atividade –que solicitava o cálculo da medida de uma faixa de supressão da vegetação de uma floresta que tinha o formato de um paraboloide hiperbólico– alguns objetos epistemológicos como a derivada parcial, coordenadas polares e volume apareceram nas discussões dos exercícios. Registramos falas de alguns cursistas:

> *E_6: Se a vegetação está sobre o paraboloide hiperbólico então vamos calcular o* ***volume****.*
> *E_{11}: Sim, para isso usamos a integral dupla com dx e dy.*
> *E_{13}: Você fez o domínio da Integral original?*
> *E_6: Eu usei coordenadas polares.*

Na solução da segunda atividade– o cálculo do centro de massa onde deveria ser instalado a torre de transmissão de energia– foi possível detectar o uso dos momentos de inércia em relação ao eixo das abscissas e ao eixo das ordenadas na fala da cursista E_8: *Lembrem-se que quando você usa* ***Mx*** *na fórmula é y na equação e quando usa* ***My*** *na fórmula é x.* Nesta fala, a estudante se refere às representações algébricas para as equações do momento de inércia registradas por $M_x = \iint yf(x,y)dA$ e $M_y = \iint xf(x,y)dA$.

Com essas falas, podemos perceber que alguns objetos epistemológicos matemáticos e não matemáticos foram emergindo em cada percurso trilhado no desenvolvimento do PEP. Ao final, o MER constituído foi sintetizado no mapa registrado na Figura 4.

EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p06-028

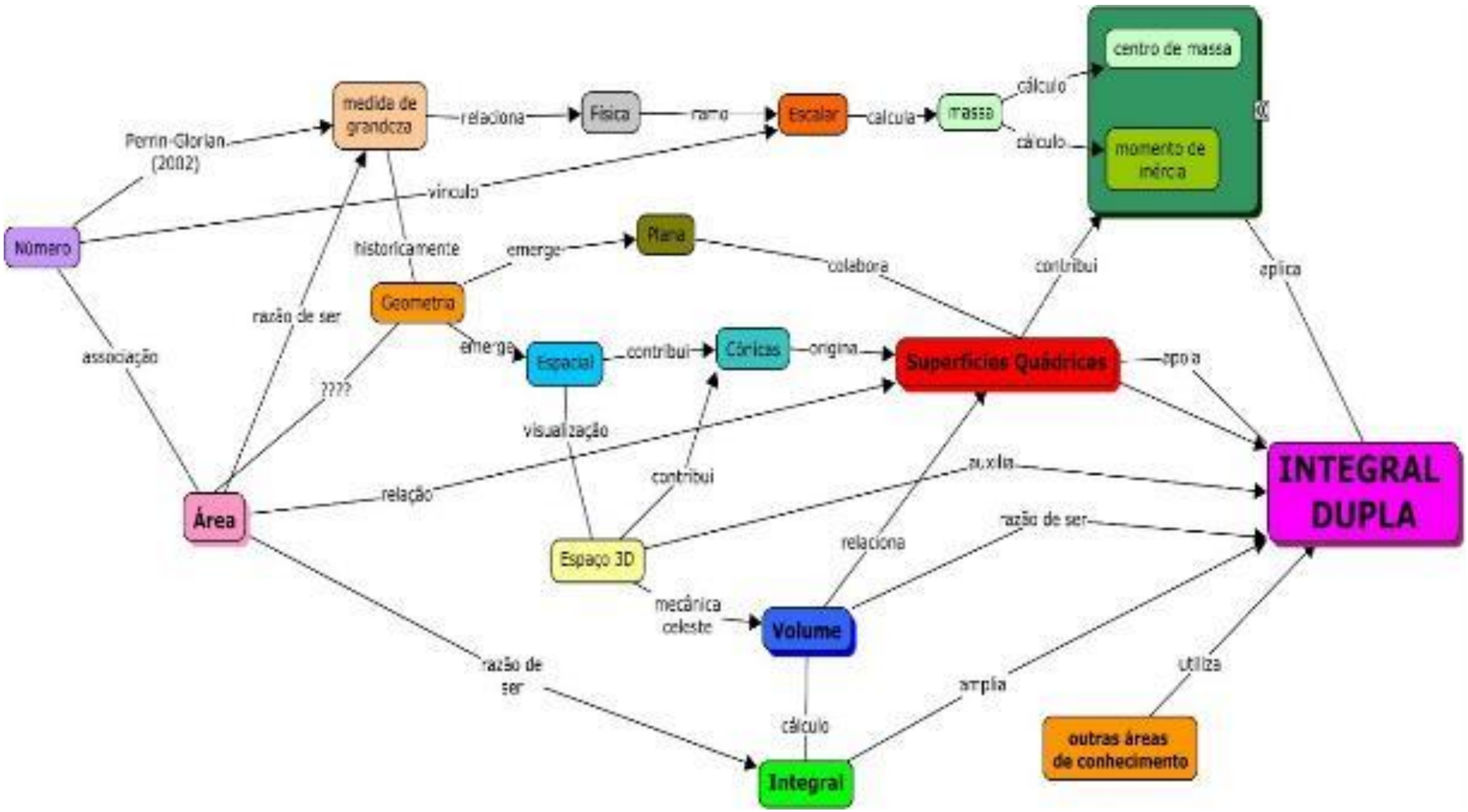

Figura 4.

O MER que orientou o PEP (Brandão, 2021, p.139)

Esse mapa conceitual permitiu uma comparação entre os modelos dominante, o hipotético prévio e o registrado na Figura 4. Como resultado, percebemos que as ideias oriundas da formação da definição matemática registrada no MED aparecem na fala dos estudantes. Sem serem expressas da mesma forma apresentada no livro de CDI, alguns objetos matemáticos foram suprimidos do MER prévio (equações diferenciais, matrizes, sistemas lineares, determinantes, integral de Lebesque, integral de superfície) em decorrência das articulações tecidas pelos estudantes. Comprovou-se que correlações com outras áreas de conhecimento (física, engenharias, mecânica) foram registradas pelos participantes do curso (cálculo estrutural, equilíbrio de estruturas, a catenária e os fios entre os postes de energia).

Quanto à resposta dos estudantes a “Q_o: Como as obras de Gaudí resistiram às intempéries do tempo?”, selecionamos duas respostas que atendem ao MER criado após o PEP pelos objetos pesquisados e relacionados pelos estudantes:

> *E_{10}: Hoje pela manhã eu falei sobre a Basílica de Gaudí que também tem esse formato (refere-se as superfícies quádricas). Eu fiquei lá pensando e aí que fui entender a relação do centro de massa, a relação das construções da viga na disciplina de resistência de materiais que usa os momentos de inércia e o centro de massa e aí se vê arquitetos preocupados com isso, não só nos projetos deles, mas dos outros arquitetos.*
> *E_8: Acho interessante como ele fez a união dentre vários sólidos e deve ser visto como um elemento de resistência porque não é uma união de sólidos, do jeito que a gente fala: “feita de qualquer jeito”. Foi feita mesmo pensando na resistência e no equilíbrio.*

Em resposta ao problema didático: *Como organizar os objetos imediatos/ostensivos e dinâmicos/não ostensivos que caracterizam as integrais duplas no cálculo da medida das superfícies quádricas, para serem usados em um modelo matemático que permita produzir significados, raciocínios abdutivos e praxeologias diferenciadas que atendam aos interesses dos graduandos das engenharias e da matemática?* Inferimos que toda resposta advinda dos estudantes é relevante para que os processos de aprendizagem sejam manifestos. Não se deve subestimar o que um grupo de estudantes pode fornecer como resposta, e ao final do PEP, vimos que eles são capazes de fazer conexões e sintetizarem suas próprias respostas, bem como associar objetos matemáticos e não matemáticos de forma apropriada e coerente.

Após as exposições, considerações e análises tecidas sobre os modelos epistemológicos ousamos construir um modelo epistemológico alternativo de referência (MEAR) para o ensino da integral dupla, pautado no PEP desenvolvido, que registramos na Figura 5.

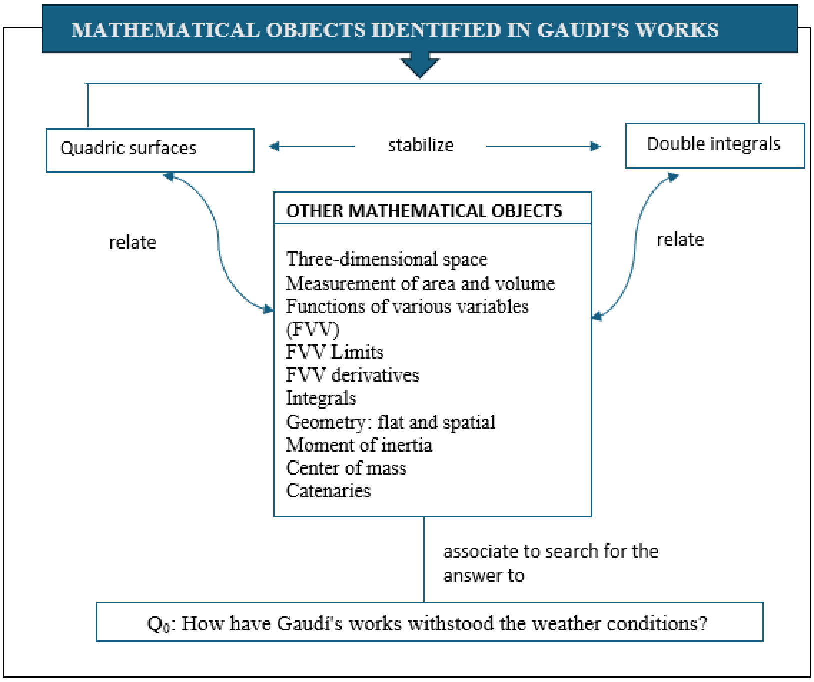

Figura 5

Construção do modelo epistemológico alternativo de referência (pelos autores)

No MEAR elaborado, os objetos matemáticos identificados nas obras de Gaudí com proeminência se concentravam nas superfícies tridimensionais, especificamente, nas superfícies quádricas, no entanto, todos os cálculos estruturais para que as mantivessem estáveis e equilibrados estavam relacionadas aos conceitos de centro de massa e dos momentos de inércia que são aplicações da integral dupla. Entretanto, estes dois objetos se relacionam com outros objetos matemáticos: espaço tridimensional, medidas de área e de volume, funções de várias variáveis, limites, derivadas, integrais, geometria plana e espacial, momento de inercia, centro de massa e catenárias que, quando associados, permitem buscar uma resposta para a questão inicial Q_0: Como as obras de Gaudí resistiram às intempéries do tempo?

Algumas considerações e perspectivas

Neste texto abordamos como os objetos epistemológicos, mais especificamente matemáticos, podem ser classificados em ostensivos e não ostensivos, como interpretamos a definição do modelo epistemológico matemático, e como ele pode ser construído vinculado a um problema didático e ao desenvolvimento de um percurso de estudo e pesquisa.

Quanto ao modelo epistemológico, esclarecemos como entendemos o modelo epistemológico dominante (ou vigente) e o modelo epistemológico de referência para elaborar uma organização matemática em que selecionamos os objetos matemáticos que preservam relações com a integral dupla e as possíveis áreas de conhecimento que a utiliza como ferramenta. No entanto, esse modelo prévio serviu apenas de bússola para o desenvolvimento do PEP, pois os estudantes, ao seguirem seus percursos em busca da resposta para a questão geratriz Q_o, escolheram os objetos matemáticos que acharam mais apropriados para alcançarem o objetivo desejado.

Como resultado, podemos destacar que os estudantes reduziram o MER prévio ao mobilizarem uma quantidade menor de objetos matemáticos para a constituição do MER posterior ao PEP, e suscitaram questões relacionadas ao curso em que estavam matriculados para promover significados pragmáticos (cálculo estrutural, fios entre postes formando a catenária), ou seja, aqueles significados oriundos da prática. Tal conjuntura mostra que ao proporcionar uma metodologia de ensino em que os estudantes se engajam em criar argumentos científicos para comprovarem suas próprias hipóteses, é possível dar autonomia para professores e docentes para que construam um modelo epistemológico alternativo.

Para pesquisas futuras, sugerimos que o PEP seja desenvolvido em sala de aula com o intuito de verificar se com um conjunto maior de alunos e com uma cronologia mais restrita, outros objetos serão pleiteados para a composição do MER.

Referências

Brandão, Ana Karine Dias Caires. (2021). *Um Percurso de Estudo e Pesquisa para o ensino da integral dupla: significados e praxeologias mobilizados por estudantes de engenharia e de licenciatura em matemática.* [Tese de doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/24405.

Chevallard, Yves. (1982). Porquoi la transposition didactique? Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble. Paru dans les **Actes** de l'année. p. 167-194.

Chevallard, Yves. (1996). Les outils sémiotiques du travail mathématiques. **Petit x**. n.42, p. 33-57. Disponível em: https://irem.univ-grenoblealpes.fr/medias/fichier/42x5_1568729887442-pdf. Acesso: 14/04/2024.

Chevallard, Yves. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. p. 221-266.

Chevallard, Yves. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. La place des mathématiques vivantes dansl'éducation secondaire, APMEP, p.239-263.

Chevallard, Yves. (2009a). La notion de PER : problèmes et avancées. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161 . Acesso em: 14/04/2024.

Chevallard, Yves. (2015) Teaching Mathematics in Tomorrow's society: a case for an oncoming. Proceedings of the 12ª International Congress on Mathematical Education (12 ICME). Disponível em: yves.chevallard.free.fr. Acesso: 14/04/2024.

Gascón, Joseph. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, mar.

Gascón, Joseph y \Nicolás, Pedro. (2021). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. *Educación Matemática,* v.33, n. 1, abril.

Henriques, A. L'enseignement et l'apprentissage dês intégrales multiples: analyse didatique intégrant l'usage Du logiciel Maple. 2006, 500f. **Tese** (Doutorado em didática da matemática), Université Joseph Fourier –Grenoble, 2006.

Henriques, Afonso.; Naganine, A.; Serôdio, R. Mobilização de crivos de curvas e de superfícies na resolução de problemas matemáticos: uma aplicação no ensino superior. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, ISSN: 1516-5388, Vol: 22, Issue: 1, 2020.

Morin, Edgar. (1989) Vidal et les siens. Disponível em : https://archive.org/details/vidaletlessiens0000mori/page/n7/mode/2up. Acesso em 14/04/2024.

Peirce, Charles Sanders. (2005). PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. Tradução de: José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005 – (Estudos; 46/ dirigida por J. Guinsburg)

Romo Vázquez, A. Projets D'ingénierie : Étude Dúne activité pratique dans la formation d'ingénieurs. **Anais** de Didactique et sciences Cognitives. v. 15. 2010.a

Romo vázquez, A.; Chávez, O. C. Matemáticas para la vida. Una propuestapara la profesionalizaciòn docente de profesores de matemáticas **Inovacion Educativa.** V.17, n.73, 2017.

Silva, S. F.; Moretti, M.T. Registro em língua natural das superfícies quádricas: análise semiótica e possibilidades de uso de novos registros. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 1, p.294-314, 2018a

Silva, S. F.; Moretti, M.T. A abordagem de interpretação global e na aprendizagem das superfícies quádricas. **Educação Matematica Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p.283-308, 2018b.

Verret, Michel. (1975). Le temps des études. Paris : Honoré Champion.

Weyne, Gastão Rúbio de Sá (2009). Modelos matemáticos em ciência da saúde: resistência e dilatação de vasos sanguíneos. São Paulo: Scortecci/