

Conhecimentos docentes mobilizados e reelaborados por professores de matemática na perspectiva do *lesson study* e das representações semióticas

Teaching knowledge mobilized and re-elaborated by mathematics teachers from the perspective of lesson study and semiotic representations

Conocimientos didácticos movilizados y reelaborados por profesores de matemáticas desde la perspectiva del estudio de la lección y las representaciones semióticas

Savoirs pédagogiques mobilisés et réélaborés par les professeurs de mathématiques sous l'angle de l'étude des leçons et des représentations sémiotiques

Mikaelle Barboza Cardoso¹

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Mestre em Educação (UECE)

<https://orcid.org/0000-0001-9465-917X>

Marcilia Chagas Barreto²

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Doutora em Educação Brasileira (UFC)

<https://orcid.org/0000-0003-3378-772X>

Resumo

Este estudo tem como objetivo analisar a reelaboração dos conhecimentos matemáticos para o ensino, a partir da vivência de processo formativo baseado no *Lesson Study* (LS), com a contribuição da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. De natureza qualitativa e com características de investigação-ação, utilizou-se a abordagem de análise de dados de Eventos Críticos. A vivência do LS evidenciou para os professores as distintas fases de organização e efetivação de uma aula. Ressaltou ainda a importância da colaboração entre professores na construção de práticas pedagógicas eficazes. Com relação ao uso da teoria das representações semióticas, os professores que iniciaram o processo formativo distante de seus fundamentos, chegaram a perceber a necessidade de trabalhar com as distintas representações do conceito de função afim, e os desafios para a realização dos processos de conversão necessários ao efetivo domínio conceitual em matemática. Dessa forma, considera-se que a articulação entre ambas as teorias colaborou para a reelaboração dos conhecimentos matemáticos para o ensino de função.

¹ mikaelle.cardoso@ifce.edu.br

² marcilia.barreto@uece.br

Palavras-chave: Conhecimento matemático, Estudos de aula, Ensino; Função.

Abstract

This study aims to analyze the re-elaboration of mathematical knowledge for teaching, based on the experience of a training process based on Lesson Study, with the contribution of the Theory of Semiotic Representation Registers. Qualitative in nature and with action research characteristics, the Critical Events data analysis approach was used. The LS experience demonstrated to the teachers the different phases of organizing and implementing a class. He also highlighted the importance of collaboration between teachers in building effective pedagogical practices. Regarding the use of the theory of semiotic representations, teachers who started the training process far from its foundations came to realize the need to work with the different representations of the concept of related function, and the challenges in carrying out the necessary conversion processes to effective conceptual mastery in mathematics. In this way, it is considered that the articulation between both theories contributed to the re-elaboration of mathematical knowledge for teaching function.

Keywords: Mathematical knowledge, Class studies, Teaching, Function.

Resumen

Este estudio tiene como objetivo analizar la reelaboración del conocimiento matemático para la enseñanza, a partir de la experiencia de un proceso de formación basado en el Estudio de Lecciones, con el aporte de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica. De carácter cualitativo y con características de investigación-acción, se utilizó el enfoque de análisis de datos de Eventos Críticos. La experiencia de LS demostró a los profesores las diferentes fases de organización e implementación de una clase. También destacó la importancia de la colaboración entre docentes en la construcción de prácticas pedagógicas efectivas. Respecto al uso de la teoría de las representaciones semióticas, los docentes que iniciaron el proceso de formación lejos de sus fundamentos se dieron cuenta de la necesidad de trabajar con las diferentes representaciones del concepto de función relacionada, y de los desafíos para llevar a cabo los procesos necesarios de conversión a efectivos. Dominio conceptual en matemáticas. De esta manera, se considera que la articulación entre ambas teorías contribuyó a la reelaboración del conocimiento matemático para la función docente.

Palabras clave: Conocimiento matemático, Estudios de clase, Enseñando, Función.

Résumé

Cette étude vise à analyser la réélaboration des connaissances mathématiques pour l'enseignement, à partir de l'expérience d'un processus de formation basé sur l'étude des leçons, avec l'apport de la Théorie des Registres de Représentation Sémiotique. De nature qualitative et présentant des caractéristiques de recherche-action, l'approche d'analyse des données sur les événements critiques a été utilisée. L'expérience LS a montré aux enseignants les différentes phases d'organisation et de mise en œuvre d'une classe. Il a également souligné l'importance de la collaboration entre les enseignants dans la construction de pratiques pédagogiques efficaces. En ce qui concerne l'utilisation de la théorie des registres de représentation sémiotique, les enseignants qui ont commencé le processus de formation loin de ses fondements ont pris conscience de la nécessité de travailler avec les différentes représentations du concept de fonction associée, et des défis liés à la réalisation des processus de conversion nécessaires vers des représentations sémiotiques efficaces nécessaires à la maîtrise conceptuelle en mathématiques. De cette manière, on considère que l'articulation entre les deux théories a contribué à la réélaboration des connaissances mathématiques à des fins pédagogiques.

Mots-clés : Connaissances mathématiques, Études en classe, Enseignement, Fonction.

Conhecimentos docentes mobilizados e reelaborados por professores de matemática na perspectiva do *lesson study* e das representações semióticas

A compreensão da complexidade dos conhecimentos necessários à prática docente avançou a partir da década de 1980. Desde então, aprofundaram-se as discussões, e muitos autores passaram a ponderar “que a profissão do professor é excessivamente complexa para ser constituída, total e definitivamente, na formação inicial” (Maldaner, 2000, p.5); ao que Gatti *et. al.* (2019, p.37) acrescentam que a formação docente deve sair da perspectiva “cognitiva relativa ao domínio de conteúdo e integrando formação pedagógica, metodológica, histórico-cultural, psicossocial”. Em relação à Matemática estudos foram realizados tendo em vista a especificidade da área

Nesse sentido, este artigo, oriundo de pesquisa de uma tese de doutorado em andamento, mostra-se relevante, uma vez que trata de contribuições de teorias da didática da Matemática para a elaboração da gama de conhecimentos necessária à formação de professores da área. Nos diferentes processos de formação, espera-se a elaboração dos fundamentos para a prática docente que proporcione aos estudantes condições de construção de conhecimentos e habilidades matemáticas, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018).

Foi no bojo desses alertas acerca das necessidades formativas dos professores de matemática que se definiu o objetivo deste estudo: analisar a reelaboração dos conhecimentos matemáticos para o ensino, a partir da vivência de processo formativo baseado no *Lesson Study*, com a contribuição da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).

A articulação entre essas teorias na formação de professores de Matemática também aponta a relevância desse trabalho, uma vez que o levantamento da literatura (Rodrigues; Teixeira, 2020; Cardoso; Fialho; Barreto, 2023; Cardoso; Barreto; Pinheiro, 2024) revela escassez de pesquisas relativas à articulação entre a *Lesson Study* (LS) e os conhecimentos matemáticos para o ensino, em especial ao tratar do trabalho com o conceito de função. Em relação à interseção com os princípios da TRRS nenhum trabalho foi identificado. Destaca-se também que a opção pelo trabalho com o LS decorreu do fato de a literatura considerar que o processo formativo baseado nessa teoria favorece ao desenvolvimento e à mobilização de conhecimentos matemáticos (Cardoso; Barreto; Pinheiro, 2024).

Os conhecimentos matemáticos para o ensino foram analisados conforme as categorias propostas por Ball, Thames e Phelps (2008), que aprofundaram os conhecimentos propostos por Shulman (2014), com vistas especificamente ao professor de Matemática. O acréscimo da TRRS deveu-se ao fato de a Matemática, como ciência abstrata (Duval, 2009), necessitar do trabalho com as diferentes representações para a construção de um mesmo objeto matemático.

Segundo o autor (Duval, 2011a, 2011b), não há elaboração conceitual sem que se perceba a distinção entre o conceito e suas correspondentes representações, o que as torna imprescindíveis no trabalho docente.

Bases teórico-metodológicas do processo formativo

Este artigo, uma vez que trata da análise da formação de professores de Matemática, tema ainda considerado desafiador na realidade brasileira, conforme já se mencionou, tomou referência em três distintas teorias, em relação às quais se discutem os fundamentos aqui utilizados.

Estruturação do processo formativo

Nesta pesquisa, o *Lesson Study* ocupou o papel de estruturação do processo formativo, seguindo a proposta de Lewis, Perry e Hurd (2009). Tal escolha decorreu do fato de os autores terem dirigido seus estudos especificamente para a formação continuada de professores de Matemática, o que se aproxima do objeto desta pesquisa.

Para a formação com base no LS, os autores propuseram o desenvolvimento de ciclos. A vivência de cada ciclo prevê a realização de quatro etapas com objetivos delimitados e ações a serem realizadas pelos sujeitos envolvidos, são elas: i) investigação; ii) planejamento de aula; iii) execução da aula de pesquisa; e iv) reflexão. A estruturação do ciclo deve ser adaptada às condições da realidade institucional e do grupo de professores que se propõe a viver o processo formativo, permitindo-se, inclusive, a determinação da duração de cada etapa, conforme os interesses e necessidades observados. O ciclo pode ser repetido no decorrer do processo formativo, a depender dos objetivos e condições do grupo.

Na etapa de investigação, os professores devem estudar normas, currículos oficiais, além de lições relacionadas aos fundamentos dos conceitos matemáticos em estudo. Na mesma perspectiva devem resolver problemas, compartilhar e discutir suas soluções, sempre considerando o pensamento dos alunos. Nessa etapa, constroem-se os fundamentos para a estruturação da aula componente do ciclo LS.

A segunda etapa – planejamento da aula – requer que os professores desenvolvam o plano de aula com objetivos, metodologia e procedimentos; destaquem as habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, selecionem as tarefas a serem realizadas, façam previsões das possíveis soluções elaboradas pelos estudantes, no intuito de antever dificuldades que eles possam enfrentar. Essa aula planejada deverá contar com a participação de todos os membros do grupo que vivencia o processo formativo, entre os quais se escolherá o professor ministrante da aula e a turma em que ela será executada.

A terceira etapa – execução da aula planejada – consiste na condução da aula propriamente dita. O professor escolhido ministra a aula, coordenando os trabalhos, enquanto os demais observam e coletam dados sobre a aula, evitando sempre a intervenção na ação do colega. Os dados observados devem ser registrados e servirão de subsídios para a reflexão coletiva a respeito do vivido.

Na última etapa do ciclo – reflexão –, o grupo de professores compartilha e discute os dados coletados, apresentando aspectos sobre a ação do docente, a reação dos estudantes e a aprendizagem do conceito selecionado. Nessa oportunidade, realiza-se síntese do que foi aprendido a partir da vivência do ciclo, podendo promover o redesenho de um novo ciclo.

Lewis, Perry e Hurd (2009) projetam que a realização das quatro etapas deve provocar três tipos de mudanças intervenientes: mudança nos conhecimentos e crença dos professores, mudança na comunidade profissional dos professores, mudança nos recursos de ensino e aprendizagem. Os autores reconhecem que “melhorias instrucionais” só ocorrem de forma gradual, portanto, neste artigo se discute a reelaboração de conhecimentos docentes, que foi possível, a partir da vivência de um ciclo LS.

Conhecimentos matemáticos para o ensino

Para o aprofundamento dos tipos de conhecimentos foram tomadas as contribuições de Ball, Thames e Phelps (2008). Os pesquisadores delimitaram os conhecimentos necessários ao trabalho pedagógico específico com a Matemática, retomando dois dos conhecimentos apontados por Shulman (2014) como necessários à docência. Assim, detalharam: i) conhecimento do conteúdo e ii) conhecimento pedagógico do conteúdo.

Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), o conhecimento do conteúdo é composto por: conhecimento comum do conteúdo; conhecimento especializado do conteúdo; conhecimento do horizonte de conteúdo. O conhecimento comum do conteúdo se revela através do domínio dos conceitos da ciência matemática, sem vinculação intrínseca com a docência. Deve ser de domínio dos professores, mas também de diversos profissionais, em seus distintos afazeres. O conhecimento especializado do conteúdo, entretanto, é exclusivo da docência. É ele que permite que o professor perceba as diferentes ideias matemáticas presentes nos conceitos, e articule-as com estratégias de ensino. Ball; Thames; Phelps (2008) denominam “habilidades referentes à explicação e justificação”. O conhecimento do horizonte de conteúdo permite que o professor compreenda como estão distribuídos os conteúdos matemáticos, ao longo dos anos escolares; a relação que necessita ser estabelecida entre eles em cada um desses anos e com as distintas disciplinas do currículo.

O segundo bloco, conhecimento pedagógico do conteúdo, está mais voltado para as questões pedagógicas da disciplina de Matemática, e é formado por: conhecimento de conteúdo e de ensino; conhecimento do conteúdo e dos estudantes; conhecimento de conteúdo e do currículo. O conhecimento de conteúdo e de ensino requer “interação entre a compreensão matemática específica e a compreensão das questões pedagógicas que afetam o aprendizado do aluno” (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 401). Assim, os professores consideram o conteúdo, as habilidades que esperam ver desenvolvidas pelos alunos, os procedimentos a adotar; tomam decisões referentes ao planejamento. O conhecimento do conteúdo e dos estudantes propicia a percepção da articulação entre o conhecimento matemático e aquilo que os estudantes já foram capazes de elaborar. Assim o professor pode antever resoluções que podem ser elaboradas pelos alunos, percebendo as construções, os equívocos, para gerar estratégias de ensino compatíveis. Por fim, o conhecimento de conteúdo e do currículo se refere ao domínio do conjunto de orientações e diretrizes presentes nos documentos oficiais que compõem uma base normativa e que devem ser eixos norteadores de suas práticas, estando presentes nos materiais educacionais, currículos escolares, livros didáticos.

Teoria dos registros de representação semiótica e os conhecimentos docentes

O fato de a Matemática ser considerada uma ciência abstrata exige o uso de signos (Duval, 2009), que, quando organizados adequadamente, compõem as representações semióticas de cada conceito matemático. O autor considera que o trabalho com as representações semióticas dos objetos matemáticos é essencial para a elaboração do próprio conceito. Diante dessa relevância, é que se tomou como parte do processo formativo a discussão de fundamentos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (2009, 2011a, 2011b), como conhecimento necessário aos professores de Matemática.

Duval (2009) advoga que o trabalho docente considere todos os tipos de representações semióticas capazes de expressar o conceito que está em foco, no caso desta pesquisa, o conceito de função. Para isso, considera necessária a elaboração de três atividades cognitivas por parte do sujeito cognoscente: a formação, o tratamento e a conversão.

A formação consiste na elaboração de uma representação para o conceito, isto é, “a forma como os objetos nos são apresentados (...) a questão do ‘como podemos ter acesso por nós mesmos’” (Duval, 2011a, p. 15). As representações podem ser formadas em distintos registros – numérico, algébrico, desenho, gráfico, tabular etc.

O tratamento, é a atividade cognitiva que deve ser desenvolvida no sentido de busca da solução de um problema matemático. O sujeito cognoscente parte da representação já formada

e procura a solução, através de transformações realizadas dentro do registro em que a representação estava formada, denominado o registro de partida (Duval, 2011a).

As conversões são também transformações entre representações de um mesmo objeto matemático, só que desta feita ela se realiza entre registros distintos – o registro de partida e o registro de chegada – (Duval, 2009). Converter é, então, identificar os elementos significantes no registro de representação de partida e reorganizá-los em outro registro, o de chegada. É uma atividade que requer e ao mesmo tempo provoca a percepção da diferença entre representante e representado. Diferentemente das outras atividades cognitivas, esta não é submetida a regras e depende do processo de identificação e diferenciação das diferentes representações do mesmo objeto matemático.

As questões que são promovidas pelo uso da TRRS são conhecimentos relevantes para a prática docente, de modo que neste texto se buscou evidenciar com quais conhecimentos destacados por Ball, Thames e Phelps (2008) ela se entrelaça e contribui para sua efetivação. Ressalta-se que a aplicação da TRRS em sala de aula e na formação de professores permite a mobilização de distintos conhecimentos necessários à prática docente em Matemática. Cabe aqui destacar em sua concepção epistemológica e didática os tipos de conhecimentos, dentre aqueles apontados por Ball, Thames e Phelps (2008), que podem ser percebidos com potencialidade mais ou menos intensa de serem desenvolvidas, a partir do uso de tal teoria.

O conhecimento comum do conteúdo é o mais trabalhado nos cursos de licenciatura em Matemática. Dessa forma, é comum que os professores do Ensino Médio, licenciados, apresentem tal domínio. Nesta pesquisa não foi possível detectar momentos de elaboração de tal conhecimento, por parte dos professores, de forma que ele não será aqui analisado.

Já a articulação da TRRS com o conhecimento especializado do conteúdo é observada de forma intensa, tendo em vista que este conhecimento se refere à compreensão aprofundada de um determinado conceito, que necessita ir além do que é ensinado aos alunos. A TRRS ao explicitar a necessidade de percepção de distintas representações, a articulação entre elas e as atividades cognitivas que devem ser desenvolvidas com os estudantes, oferece aos docentes elementos do ponto de vista epistemológico, metodológico e cognitivo que lhes favorece o desenvolvimento de uma visão analítica do seu próprio conhecimento e dos obstáculos que podem vir a ser enfrentados por seus estudantes, sendo, portanto, dificuldades para sua própria prática docente.

Segundo Duval (2011a, p. 15), além da importância da compreensão da natureza abstrata dos objetos matemáticos, faz-se necessário compreender “a forma como os objetos nos são apresentados”. Assim, destaca-se a importância de o professor de Matemática tomar

consciência do papel epistemológico e cognitivo que as representações semióticas desempenham para o próprio conhecimento matemático.

Faz-se necessário que o professor de Matemática não compreenda somente o conceito de função, mas também os registros de representações semióticas em que a função pode ser representada, como o registro gráfico, algébrico, tabular, figural, língua materna. Ressalta-se também a relevância de o docente compreender o funcionamento de cada registro de representação e como se relaciona com os demais registros, isto é, as articulações entre os diversos registros de representação semiótica é base fundamental para a aprendizagem matemática.

Nessa mesma perspectiva, a imbricação entre o conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento do conteúdo e do ensino, ressalta a importância da TRRS para os processos de ensino e aprendizagem matemática. O conhecimento do conteúdo e do ensino exige que os professores articulem o conhecimento específico da Matemática e o conhecimento das questões didáticas e pedagógicas que podem influenciar na aprendizagem dos alunos.

Duval (2011a, p.9) defende que “[...] os problemas específicos de compreensão que os alunos enfrentam na aprendizagem da matemática” têm sua origem não somente nas questões vinculadas à organização pedagógica das atividades, mas também “na situação epistemológica particular do conhecimento matemático”. Essas ideias ressaltam a influência da TRRS na compreensão pelos professores das dificuldades enfrentadas pelos estudantes na disciplina de Matemática, revelando relação intensa com o conhecimento de conteúdo e dos estudantes.

O professor de Matemática ao compreender o funcionamento cognitivo do pensamento dos estudantes para aprendizagem matemática, poderá identificar dificuldades dos discentes enfrentadas nas resoluções de problemas, e as possíveis lacunas nas atividades cognitivas desenvolvidas pelos alunos, ou seja, a formação, o tratamento e a conversão entre registros de representação semiótica. Esta identificação é importante à medida que pode servir de diagnósticos para elaboração de práticas pedagógicas articuladas com as necessidades específicas dos estudantes.

Ao categorizar diferentes formas de representação de objetos matemáticos, como a representação no registro gráfico, algébrico, tabular, figural, entre outros, e a articulação entre esses registros, Duval (2009) propõe aspectos teóricos que influenciam os processos de ensino e aprendizagem matemática. Essa influência já é percebida nos documentos curriculares oficiais, articulando a TRRS com o conhecimento do conteúdo e do currículo.

A importância das representações já é percebida na BNCC (2018) em todas as etapas de escolarização na Educação Básica. No Ensino Médio essa ideia é observada de forma mais clara

no documento, onde os estudantes devem “desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados” (BNCC, 2018, p. 529). Termos conceituais desenvolvidos pela TRRS são observados no documento:

As competências que estão diretamente associadas a representar pressupõem a elaboração de *registros para evocar um objeto matemático. [...] nessa área é possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas*. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos *registros de representação* e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade (BNCC, 2018, p. 529, *grifos nossos*).

Dessa forma, a TRRS proporciona uma fundamentação teórica sólida para a análise do conteúdo e consequentemente nas orientações curriculares, uma vez que a BNCC (2018) é o documento que dá as diretrizes nos processos de ensino e aprendizagem de todo o país. Isso permite que os professores e os currículos dos sistemas de ensino considerem as múltiplas maneiras pelas quais o conhecimento pode ser representado e compreendido pelos alunos. A essência dessa ideia é que se considera não apenas “o quê”, mas também o “como ensinar”.

A relação da TRRS com o conhecimento do conteúdo e do currículo, permite a articulação da teoria com o conhecimento do horizonte e do conteúdo à medida que é parte importante do trabalho docente compreender como os conteúdos são distribuídos ao longo de cada ano escolar, como estes se relacionam entre si, quais conhecimentos anteriores e posteriores são essenciais para a compreensão de determinado conteúdo. Cada um desses elementos utiliza símbolos e representações visuais para comunicar conceitos matemáticos. Eles são essenciais para a comunicação e compreensão de ideias matemáticas, e sua correta interpretação é fundamental para o aprendizado e aplicação de conceitos matemáticos.

Vale destacar que esses conhecimentos não são lineares, eles integram um conjunto de ideias, com conhecimentos interconectados, permitindo a possibilidade de compreensão ampla do processo educativo. Outro ponto a destacar é que a TRRS está integrada aos conhecimentos, revelando que os conhecimentos são categorias maiores e que possuem outras características que os definem. Além disso, visa promover uma abordagem integrada e dinâmica na formação de professores de Matemática. Dessa forma, defende-se a ideia de que a TRRS é um conhecimento docente importante no contexto do ensino e da aprendizagem matemática, além de fornecer elementos essenciais para o currículo, alinhando-se com os princípios de que a teoria possui construtos teóricos e metodológicos para a compreensão e o desenvolvimento do Ensino de Matemática, destacando a importância da diversidade de representações e promovendo uma compreensão especializada do conhecimento matemático.

Abordagem metodológica

Este artigo é oriundo de uma pesquisa intervenção, focando na investigação-ação, na qual se observaram as orientações de Ponte (1994, p. 6), quando afirma que “[...] as problemáticas e as decisões relativas ao desenvolvimento da investigação são fortemente compartilhadas pelo investigador e os participantes”

A intervenção consistiu em um processo de formação continuada para o trabalho com função afim. Teve duração de 60 horas, divididas em 17 momentos. No processo vivenciou-se um ciclo de LS, para o trabalho com o conceito de função afim, tomando por base os princípios das três teorias já abordadas anteriormente.

Participaram da formação os três professores de Matemática que compunham o corpo docente de Matemática de uma escola Profissional de Ensino Médio (EM), no Estado do Ceará. O processo foi realizado entre maio de 2022 e janeiro de 2023, perfazendo 17 momentos, assim distribuídos: aproximações e pactuações com o grupo (3 momentos); investigação (8 momentos); planejamento (3 momentos); execução da aula (1 momento) e a reflexão pós-aula (2 momentos). Para a vivência da aula, optou-se por uma turma do 1º ano do Ensino Médio, uma vez que é onde o conceito em foco ocupa o maior tempo curricular.

Fez-se gravação de áudio e registro em diário de campo em todos os encontros. A transcrição dos dados orais foi realizada com apoio do *software Transkriptor* e seus relatórios revisados pelas pesquisadoras. Transcreveram-se os Eventos Críticos, aqueles que explicitam dados que “[...] podem render *insights* a respeito dos significados implícitos e explícitos de participantes em um cenário educacional” (Powell; Francisco; Maher, 2004, p. 26).

A pesquisa teve aprovação pelo Comitê de Ética da Universidade Estadual do Ceará, com parecer consubstanciado³. Toma-se como base os pressupostos teóricos e/ou metodológicos preconizados por Lewis, Perry e Hurd (2009), Ball, Thames e Phelps (2008) e Duval (2009, 2011a, 2011b).

Análise e discussão dos dados

Nas primeiras aproximações e pactuações com o grupo discutiram-se elementos da proposta do processo formativo. Propôs-se que fosse trabalhado com função, por tratar-se de um conceito integrador, constituinte de um campo conceitual (Merli, 2022). Os docentes cogitaram estudar função exponencial, quadrática e afim. Eles optaram pela função afim, conforme suas próprias expressões:

³ 63721822.2.0000.5534.

Professor C:[...] eu acho interessante até pela questão mais em avaliação externa, seja mais palpável é a função afim.

Professor B: Os alunos pediram revisão desse conteúdo.

Professor B: [...] para quem já viu há muito tempo atrás...

Professor C: Ou para quem não viu direito (Processo formativo, 2022).

Percebe-se que a opção dos professores decorreu da importância da função afim nas avaliações externas e do fato de os estudantes ainda apresentarem dificuldades com o conteúdo. A decisão também levou em consideração que ao trabalhar o conceito de função afim os estudantes poderiam seguir aprofundando as demais funções.

Durante os encontros de investigação, foi possível perceber a elaboração e reelaboração de conhecimentos docentes, além da mobilização da TRRS como um conhecimento matemático para o ensino. É imprescindível destacar que a análise da mobilização dos conhecimentos matemáticos para o ensino perpassa pela compreensão de que os conhecimentos docentes são mobilizados de forma imbricada, e estão interligados e conectados. Isso ocorre, pois os conhecimentos são inseparáveis, onde nenhum elemento é totalmente isolado, ou seja, não se concebe a ideia de que mobilização dos conhecimentos docentes possa ser linear, sendo, na verdade, uma teia complexa de conhecimentos que se articulam e relacionam.

A compressão na perspectiva docente das representações semióticas e o papel destas nos processos de ensino e aprendizagem, foi sendo gradualmente compreendida, ao longo do processo formativo, como ponto importante para o planejamento do professor. Apesar de os docentes avaliarem os textos como uma “leitura tranquila”, o Professor C ponderou: “[...] agora compreender alguns termos técnicos que são específicos do autor, é que eu tive uma dificuldade [...]”. Essa avaliação foi confirmada pelos demais professores, que declararam o não contato aprofundado com a TRRS, na formação docente, seja inicial ou continuada.

Nessa perspectiva, as pesquisadoras indagaram aos docentes qual a compreensão inicial da noção das representações semióticas. Os professores assim se expressaram:

Professor C: [...] até pela própria etimologia da palavra, a semiótica tem a ver com o que a pessoa vê [...] A forma como posso associar uma imagem a um conceito, a um objeto, [...] Então, é a forma como vai representar aquilo que é o objeto. É mais uma forma de representar, realmente, pelo visual e que tem uma certa organização também, não é uma coisa feita como rabisco, simplesmente [...] Então, tem todo o padrão também da própria semiótica [...]

Professor B: [...] deu para entender quando a professora exemplificou com o texto, que você começa com palavras, você constrói frases, aí você constrói parágrafos e a redação por inteiro. Acho que agora deu uma clareada mais do que eu estava pensando.

Professor A: Aí agora [dá] para gente conseguir entender melhor sobre ela [representação semiótica], até porque dentro da própria representação semiótica a gente

vê que existem três funções, cada função tem, seu próprio nome diz, a sua particularidade (Etapas de Investigação, 2022).

Foi possível perceber que os professores tinham compreensão ainda incipiente sobre representação semiótica, embora suas percepções variem em termos de detalhes e níveis de aprofundamento. Trata-se de respostas que demonstram desenvolvimento das ideias, como a distinção entre representação e objeto, a percepção das diferentes funções das representações, aproximando-se do que propõe Duval (2009). Destaca-se, nesse particular, que a variedade de compreensão e diversidade de perspectivas dos professores indica as múltiplas facetas dos conceitos da TRRS que podem ser exploradas em contextos educacionais.

Ressalte-se que os professores ainda não demonstraram perceber a importância do trabalho simultâneo com as diferentes representações, visto que não enfocaram a existência dos diferentes registros. Trata-se de lacunas esperadas, visto que os professores não tiveram as necessárias aproximações com a teoria, em sua formação. A ausência do domínio das representações dá indícios de fragilidades no conhecimento especializado do conteúdo e conhecimento do conteúdo e de ensino.

Com o avanço das discussões, os docentes foram gradualmente se apropriando do que eles denominavam “termos técnicos”, conforme aponta a percepção dos professores acerca dos registros de representação semiótica.

Professor A: Em relação aos registros [...] é como se fosse de certa forma um vocabulário. Quanto maior o vocabulário dentro da Matemática, mais a pessoa pode desenvolver, entender mais dessa forma.

Professor B: Eu gosto de citar o exemplo que o Professor C falou [...] quanto mais eles [os alunos] puderem ver que o mesmo número pode ser representado da forma fracionada como decimal e até gráfica também, ele vai entender mais profundamente sobre aquele assunto. Então, aí diz que, quanto mais representações ele fizer, mais apreensão ele tem, e eu concordo com isso, se ele consegue representar a mesma coisa de várias formas diferentes é porque ele entende o que ele está fazendo.

Professor C: [...] ou seja, ele vai ter mais domínio sobre aquele objeto. Não vai se limitar apenas ao modo de conseguir interpretar ou de visualizar aquele objeto ou a situação que é trabalhada (Etapas de Investigação, 2022).

O conjunto dos discursos dos professores demonstra a compreensão da diferença entre o conceito e seus representantes. Nesse sentido, os três professores compartilham a visão de que o uso de múltiplos registros e representações é fundamental para o ensino e aprendizado da Matemática. Eles concordam que utilizar diferentes formas de representação ajuda os alunos a efetivamente elaborarem o conceito em pauta. Essas ideias se aproximam daquelas mencionadas por Duval (2009, 2011a) quando afirma que a abordagem baseada em múltiplas

representações é uma estratégia pedagógica importante para o aprendizado e o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos.

De acordo com as respostas dos professores é possível perceber a mobilização do conhecimento do conteúdo e do ensino e conhecimento do conteúdo e dos estudantes, à medida que destacam uma abordagem pedagógica alinhada à importância das representações semióticas e ao contexto dos alunos, em especial nas falas dos Professores B e C. Mesmo se referindo ao uso de representações distintas, nenhum dos participantes mencionou ainda qualquer atividade cognitiva a ser desenvolvida pelo sujeito aprendente. Essas referências só serão colocadas pelos professores ao analisar uma situação problema, conforme se discutirá posteriormente.

As discussões apontaram também para a importância de os estudantes compreenderem os significados dos símbolos omitidos no estudo da Matemática, que, muitas vezes, é omitido quando é necessário realizar operações algébricas. Os símbolos omitidos na Matemática, não estão visualmente aparentes para os estudantes, faz-se necessário práticas pedagógicas capazes de evidenciar os símbolos e números omitidos na representação, para compreensão matemática dos alunos. O Professor A, complementou explicando que quando é positivo é mais fácil os alunos visualizarem, entretanto, quando se trata, por exemplo, dos símbolos e números omitidos de uma “função polinomial do segundo grau” as dificuldades dos estudantes aumentam consideravelmente.

O Professor B salientou: “também confundem bastante quando você vai somar x mais x , ou você coloca x vezes x . Eles não conseguem entender [...]”. O Professor B também ressaltou que na Matemática existem muitos procedimentos e que acabam confundindo o estudante. O Professor A chamou a atenção que no caso da função afim existem ao menos dois símbolos que podem confundir os estudantes: os coeficientes a e b . O Professor C salientou que de fato se os estudantes estiverem confusos e não compreenderem bem esses símbolos, eles terão dificuldades de obter sucesso e entender o conceito de função afim.

Nesse particular, é possível perceber a mobilização do conhecimento do conteúdo e dos estudantes. Os professores explicitam as principais dificuldades dos estudantes e a confusão que ocorre ao terem que lidar com os símbolos, muitas vezes, omitidos nos tratamentos matemáticos. A partir do momento que os próprios docentes compreendem a importância de entender as dificuldades dos estudantes e como podem estar atreladas à diversidade de procedimentos matemáticos envolvidos em um processo de resolução de problema, em especial símbolos e operações implícitas, é possível que esses professores desenvolvam estratégias

pedagógicas, de modo a ultrapassar os desafios da incompreensão dos estudantes no que se refere às representações semióticas não tão evidentes.

Diante das evidências apresentadas, pode-se inferir que as ideias e as percepções dos professores mostraram avanços na compreensão acerca da TRRS. Eles comentaram que os elementos teóricos propostos pela teoria já eram percebidos pelos professores, mesmo que de modo não consciente, nas suas práticas pedagógicas. Essas afirmações confirmam que a TRRS é um importante conhecimento matemático para o ensino que pode favorecer à formação de professores ressaltando sua característica de múltiplos conhecimentos. Ao tomar consciência do representante e representado, em um processo gradual, os docentes podem desenvolver práticas pedagógicas específicas de modo a privilegiar a articulação entre os diferentes tipos de representação semiótica reelaborando assim o conhecimento do conteúdo e do ensino, conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento do conteúdo e dos estudantes.

Na discussão de uma situação-problema pelo grupo os docentes perceberam as possíveis dificuldades dos estudantes no trabalho com a função afim e detalharam as estratégias pedagógicas para o enfrentamento de tais dificuldades. Observar os símbolos e as representações e como elas se articulam no problema, elaborar adaptações e modificações na situação-problema, foram atividades consideradas importantes no processo formativo. O problema escolhido pelos docentes para discussão pode ser observado a seguir.

5. (UFG-GO) Um padeiro fabrica 300 pães por hora. Considerando esse dado, pede-se:
- a) a lei que representa o número de pães fabricados (p) em função do tempo (t);
 $p = 300t$
- b) quantos pães são fabricados em 3 horas e 30 minutos? 1050 pães

Figura 1

Situação-problema escolhida pelos docentes para discussão (Livro Didático Prisma FDT, 2020, p. 69).

O Professor A argumentou que a escolha do problema foi baseada no fato da situação ser comum para os estudantes e que poderia interessar e motivá-los. O Professor B concordou com essa ideia declarando: “[...] se assemelham mais ao meio deles”.

Os docentes foram categóricos em afirmar que um dos motivos de dificuldades seria o fato de os alunos estarem vinculados às ideias das variáveis x e y , em detrimento de outras letras que possam representar a mesma ideia, no caso do problema t e p . “Tudo para eles é x e y . Temos que fazer essa diferenciação. Na verdade, essa relação x e y . Perceber o que é que é ser

x, o que que é ser **y**” (Professor A). Nesse sentido, os docentes concluíram que as dificuldades iniciais dos estudantes residiam no fato da percepção e distinção das variáveis envolvidas no processo. As falas dos docentes, em especial do Professor A, indica avanços no conhecimento especializado do conteúdo e conhecimento do conteúdo e dos estudantes quer seja por ser o professor regente das turmas dos primeiros anos ou também pela sua intensa participação nas discussões.

Outro ponto ressaltado foi o termo “lei” no enunciado que poderia ocasionar confusão nos estudantes. O enunciado não expressa claramente “lei de formação”, nesse particular os professores se expressaram.

Professor A: [...] Eu acho que também saber o que a questão está pedindo. O que é uma lei de uma função. É uma lei de formação.

Professor B: Para gente que já tem uma formação não, mas para um aluno que está começando a ler pode ficar meio difícil.

Professor A: É. Por exemplo, eu mesmo estou trabalhando provas com questões subjetivas, eu perguntava “qual a função que representa a situação tal” [...] (Etapa de investigação, 2022).

Essas falas demonstram a importância de adaptar o ensino ao nível de compreensão dos alunos e também ressaltam a valorização do entendimento conceitual em oposição à simples memorização de fórmulas. Os docentes revelam compreender as dificuldades dos seus estudantes indicando conhecimento do conteúdo e dos estudantes atreladas às questões do ensino de função afim.

As pesquisadoras perguntaram a respeito das possíveis atividades cognitivas que os estudantes poderiam desenvolver na resolução do problema. O Professor A assim se expressa em relação ao item a: “Foi tratamento, foi? [pausa]. Não, foi conversão. Conversão [...] Da língua materna para representação algébrica”. Neste caso, o Professor A reflete sobre as atividades cognitivas que poderiam vir a ser desenvolvidas pelos estudantes, e conclui de forma correta ser a conversão a atividade a ser realizada, demonstrando indícios de domínio do conhecimento especializado do conteúdo da TRRS.

O Item b foi considerado como possível aspecto que os estudantes apresentariam dificuldades, por se tratar do tempo com duas unidades de medidas (3 horas 30 minutos). “Nesse caso [o estudante] poderia perceber que trinta minutos é meia hora” (Professor A). Outra estratégia discutida foi a possibilidade do uso do cálculo de proporção indicando que 1 hora estava para 60 minutos, assim como (t) horas estava para 30 minutos. “A proporção poderia ser confusa para eles. Depois de fazer isso ainda somar com 3” (Professor A). O Professor B, concordou, afirmando que, de fato, os alunos poderiam considerar que esse número obtido a

partir do cálculo da proporção era o (t) efetivo e substituir na lei de formação, sem somar com as 3 horas que já estavam previstas no enunciado. A estratégia pedagógica para esse item, foi considerada como um desafio para o grupo, entretanto, confirma o domínio dos docentes acerca do conhecimento do conteúdo e dos estudantes.

O Professor B, ressaltou outra possibilidade de estratégia pedagógica: a elaboração de uma tabela por parte dos estudantes de modo que a hora fosse fracionada em meia e meia hora, usando para isso o pensamento lógico matemático. “Pessoal, se eu sei que em uma hora ele produz 300 pães, meia hora ele vai produzir quantos? Eles deverão perceber que será a metade”. Na visão do professor, os estudantes iriam conseguir visualizar de “outra maneira”. Nesse sentido, destaca-se o entrelaçamento entre o conhecimento do conteúdo e dos estudantes e o conhecimento do conteúdo e do ensino, tendo em vista que o docente busca aliar a estratégia pedagógica com o uso de uma representação semiótica de apoio para a ultrapassagem das possíveis dificuldades que os estudantes apresentariam.

O grupo concordou com o acréscimo da construção de uma tabela pelos alunos, onde evidenciaria a articulação de mais um registro de representação semiótica. Eles consideraram ainda que no registro numérico, a soma do tempo 3 horas mais 0,5 (que equivale a 30 minutos) não representaria uma dificuldade para os estudantes.

O Professor B, entretanto, ponderou que talvez alguns estudantes tivessem dificuldades em efetuar o tratamento do item b que envolve a multiplicação: $P = 300 \cdot 3,5 = 1050$ pães, especialmente por conter um número decimal. Para essa questão os professores concordaram que era possível que fosse necessária a realização de uma discussão para esse tipo de multiplicação, ratificando o domínio dos docentes quanto ao conhecimento do conteúdo e dos estudantes.

Outra adaptação proposta pelos docentes foi o acréscimo da representação no registro gráfico. Seu intuito principal consistiu em o problema proporcionar a maior articulação possível entre as diversas representações semióticas do conceito de função afim, conforme Tabela 1.

Tabela 1

Situação-problema reformulada (Acervo da Pesquisa (2022))

Situação-problema (UFG-GO-adaptado)

Um padeiro fabrica 300 pães por hora. Considerando esse dado, pede-se:

- Construa uma tabela, considerando os seguintes tempos: 1 hora, 2 horas, 3 horas, 4 horas e 5 horas, com o quantitativo de pães correspondentes.
- A lei de formação que representa o número de pães fabricados (p) em função do tempo (t);
- Usando a lei de formação, quantos pães são fabricados em 6 horas?
- Observando a tabela do item a, identifique 4 pares ordenados.
- Represente graficamente a relação de pães pelo tempo.

A mobilização pelos professores dos conhecimentos, em especial do conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e do ensino e conhecimento do conteúdo e dos estudantes na etapa de investigação, foi observada à medida que os docentes discutiram em grupo. Ressalta-se a importância da discussão, análise crítica e reflexão por parte dos professores o que progrediu gradualmente nos encontros formativos, a partir do compartilhamento de ideias e engajamento do grupo no enfrentamento dos desafios que podem ocorrer em sala de aula.

Vale destacar que a elaboração, reelaboração e mobilização de conhecimentos foram atingidas de forma diferente por cada professor. O termo reelaborar é aqui utilizado, pois os próprios docentes afirmaram que já utilizavam elementos teóricos propostos por Duval (2009), mas não tinham conhecimentos aprofundados sobre o tema. Ao compreenderem a importância das representações semióticas para a atividade matemática aumentaram a sua perspectiva em relação ao que já vinha sendo desenvolvido por eles no seu dia a dia.

Etapas de Planejamento da aula

Na etapa de planejamento da aula, destaca-se o trabalho coletivo e a colaboração entre os três docentes envolvidos para desenvolvê-lo. Diante da experiência de modificação do problema, conforme já discutido, o professor A propôs que a aula a ser planejada segue essa metodologia, com o que todos concordaram. Decidiram selecionar seis problemas do livro didático do 1º ano. As pesquisadoras questionaram qual seria a metodologia a ser utilizada nesse trabalho com os problemas em sala de aula. Eles assim se manifestaram:

Professor C: [...] no começo meio que orientar a proposta da aula, a partir de um problema, e fazer equipes para cada equipe ter um problema e eles no final conseguirem apresentar o que foi que as equipes conseguiram estruturar.

Pesquisadora: Mas, cada equipe terá um problema diferente?

Professor C: Sim.

Professor A: Eu acho uma coisa, primeiro vamos fazer um problema com todo mundo [...] aí depois entregar um problema a cada um.

Professor C: Isso

Professor A: A gente mesmo fazendo toda essa construção aí, e eles responderem, até expor no Tabela.

Pesquisadora: Então seria no caso um ou dois problemas em grupo?

Professor A: um problema, só um problema [...].

Professor C: Pronto, seis ou sete grupos com seis estudantes.

Pesquisadora: [...] Como vocês escolheriam esses problemas?

Professor C: Do próprio livro também.

Professor B: Mudaria as variáveis.

Professor C: [...] porque é bom que eles vão ver o que são aplicações de função, não é somente aquela mesma história de novo.

Professor A: Ai ver no livro didático, alguns tópicos, os tópicos que vão ser abordados.
Pesquisadora: No caso qual seria o primeiro problema? Seria esse aqui? (dos pães).
Professor C: Poderia ser ele. O ponto de partida e reformulado (Etapa de Planejamento, 2022).

Os docentes adaptaram os problemas, seguindo os cinco itens constantes no Tabela 1. Eles objetivaram enriquecê-los em termos de variação de uso das representações semióticas. Também priorizaram a adaptação e modificação das variáveis envolvidas nos problemas, sempre colocando em pauta as dificuldades que os estudantes poderiam enfrentar na resolução, em especial, como os valores poderiam impactar também na construção gráfica. Essa adaptação consumiu dois momentos de formação. Para estes aspectos os professores revelaram a mobilização do conhecimento do conteúdo e do ensino, conhecimento do conteúdo e dos estudantes e conhecimento especializado do conteúdo. Esses conhecimentos foram percebidos à medida que os docentes demonstraram uma abordagem reflexiva diante do ensino de função afim, observando os desafios a serem enfrentados pelos estudantes, tanto nos aspectos conceituais e de procedimentos matemáticos quanto nas representações semióticas e as atividades cognitivas envolvidas em cada problema. Destaca-se que o Professor C foi o escolhido para ministrar a aula, devido ser aquele de “maior experiência”. Embora não fosse efetivamente o professor regente da turma selecionada era considerado “bom professor” e aceito pela “maioria dos estudantes”.

O diálogo anterior já demonstrava indícios de abordagem metodológica expressada pelos docentes, em especial na fala dos professores A e C, quando sugeriram o trabalho em equipes pelos estudantes, a divisão de problemas, e a discussão de um problema inicial com todos os alunos, ratificando o domínio do conhecimento do conteúdo e do ensino. Os professores aprofundaram a abordagem metodológica, destacando os recursos didáticos e o tempo previsto para a realização das atividades dos estudantes.

Professor A: [...] leva quanto tempo para a equipe resolver?

Professor C: Eu acho que no máximo trinta minutos.

Professor A: [...] o que demora são as duas primeiras equipes depois os demais já entendem. Não tem como deixar as respostas deles no Tabela. Como que faz?

Professor C: Cartaz.

Professor A: Sim e faz até as comparações dos gráficos.

Pesquisadora: O que eles [os alunos] colocariam nos cartazes?

Professor A: A lei de formação e o gráfico.

Professor C: Isso. A gente pede para que eles discutam os outros itens e o cartaz feito.

Professor A: [...] Eles explicam os coeficientes e o gráfico, e apresentam [...] Mas, era bom eles terem os outros problemas, para poder entender o que as equipes estão lá apresentando.

Professor C: Então tem que *imprimir o papel com as questões para cada equipe. [...] deixar espaço na folha para eles resolverem.*

Professor A: Eu acho que seria interessante desse jeito. Muito bom (Etapa de Planejamento, 2022).

A fala dos docentes, reitera a mobilização do conhecimento do conteúdo e do ensino, à medida que debatem sobre as possibilidades de ensino do conteúdo de função afim. A reflexão dos professores, demonstra engajamento em encontrar estratégias para mediar a compreensão dos alunos. Essa reflexão contínua sobre como ensinar a função afim revela não apenas o domínio do conteúdo por parte dos professores, mas também sua habilidade em adaptar e contextualizar o ensino para atender às necessidades e capacidades dos estudantes.

O grupo se dispôs também a discutir habilidades e competências conforme BNCC que poderiam ser desenvolvidas a partir da aula planejada.

Pesquisadora: Eu queria que vocês pensassem um pouco. Será que vamos conseguir trabalhar todas [as habilidades]?

Professor C: Temos que selecionar. [...] (Etapa de Planejamento, 2022).

Nas discussões seguintes, de acordo com o Professor C era necessário ver as competências específicas também. Os docentes compreenderam que um planejamento de uma aula não significava que toda a competência seria contemplada, muitas vezes, eram necessárias sucessivas aulas com objetivos diferentes para que uma competência fosse atingida (Tabela 2). Destaca-se também que os professores afirmaram ter formação contínua sobre a BNCC nas formações oferecidas tanto pela SEDUC-CE como pela própria gestão da escola e estavam familiarizados com o currículo e os documentos oficiais vigentes.

Tabela 2

Habilidades selecionadas pelos professores (BNCC, 2028)

(EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais. (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
--

As habilidades selecionadas pelos docentes, conforme Tabela 2, demonstra indícios de domínio do conhecimento do conteúdo e do currículo, em especial o Professor C, embora os Professores A e B participaram atentos da discussão, o Professor C foi o que mais se expressou no diálogo. Os docentes discutiram acerca dos objetivos da aula

Professor A: Eu acho que o primeiro ponto é a identificação de uma função do primeiro grau [...]. Identificar uma função do primeiro grau.

Professor C: Uma função polinomial (Etapa de Planejamento, 2022).

O grupo concordou que seria interessante dedicar um objetivo acerca da compreensão das representações e sobre a resolução de problemas, conforme detalhamento a seguir.

Tabela 3

Objetivos propostos pelos docentes (Acervo da Pesquisa, 2022)

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">- Compreender/identificar uma função polinomial do 1º grau.- Compreender as diversas representações semióticas da função polinomial do 1º grau e representá-las (Língua Materna, Algébrica, Tabular, Gráfica).- Interpretar situações-problema em contextos diversos. |
|---|

Fonte).

A clareza dos professores ao apresentar uma abordagem metodológica bem definida, destacando as habilidades a serem desenvolvidas em sala de aula e os objetivos estabelecidos, ratifica o domínio dos docentes em relação ao conhecimento do conteúdo e do ensino. Ao comunicarem de forma precisa e organizada as estratégias pedagógicas a serem adotadas, os professores demonstram não apenas um entendimento dos conceitos matemáticos, mas também uma habilidade para transpor esse conhecimento para práticas de ensino. Essas ideias também podem ser observadas na escolha dos recursos didáticos, onde o Professor C pontuou ser necessária a impressão dos problemas:

Professor A: No caso, todas as equipes vão receber todos os problemas, e providenciar cartolina.

Professor C: Seria bom.

Professor B: Eles iam produzindo o cartaz.

Pesquisadora: Entregar folhas para também resolverem as questões. [...]

Professor C: Levar umas 10 cartolinas. Régua (Etapa de Planejamento, 2022).

Além dos recursos apontados como cartazes, régua e papel, o Professor C ressalta o uso do livro didático: “nós usamos o livro didático para planejar, entra nas referências”. O docente definiu que prioritariamente iria utilizar o Tabela branco por considerar que seria uma estratégia metodológica interessante para provocar a participação dos estudantes.

A etapa de planejamento foi importante não somente por promover a mobilização e reelaboração de conhecimentos docentes, em especial o conhecimento do conteúdo e do ensino, conhecimento do conteúdo e dos estudantes, conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento do conteúdo e do currículo, mas também por propiciar a aproximação dos professores entre si e com as pesquisadoras. O grupo se fortaleceu nas relações e se aproximou do que Lewis, Perry e Hurd (2009) salientam do trabalho colaborativo que o LS proporciona.

Execução da aula

Esta etapa consistiu na análise da execução da aula com base no planejamento realizado pelos professores. Considera-se este momento como parte importante do processo formativo onde os docentes executaram a prática pedagógica discutida em grupo.

No primeiro momento da aula, discussão do conceito de Função e Função Afim, o Professor C abordou a temática (Função Afim/função polinomial do 1º grau) e explicitou os três objetivos propostos para a aula (Tabela 3). Discutiu as representações do conceito de função e explicitou vários exemplos no Tabela branco. Nesse particular, os estudantes tiveram intensa participação no desenvolvimento da aula, demonstrando compreender as representações utilizadas.

O docente indagou aos estudantes “O que é uma função afim” e os tipos específicos de função. O docente ainda solicitou exemplos de coeficientes para montar a lei de formação da função afim. Ele teve, entretanto, o cuidado de nomear a ordenada de modos diferentes, conforme os exemplos construídos por ele em conjunto com os alunos:

Ex 1: $f(x) = -2x + 9$ (coeficientes: $a = -2$; $b = 9$);

Ex2: $g(x) = 3x$ (coeficientes: $a=3$; $b=0$);

Ex3: $h(x) = 5$ (coeficientes: $a = 0$; $b=5$).

O professor salientou que o símbolo $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ representavam a mesma ideia, ou seja, representavam o y na função. Nos termos de Duval, poder-se-ia dizer que são representações do mesmo objeto matemático. O professor destacou ainda que a função $h(x)$, era um tipo específico, a função constante. Ele abordou aspectos da função polinomial do primeiro grau, reafirmando a sua relevância para outras áreas do conhecimento, mesmo após o Ensino Médio. Além disso, discutiu com os estudantes a representação no registro gráfico. À medida que os exemplos eram dados, os estudantes acompanhavam a resolução respondendo ativamente.

Conforme os professores haviam previsto no planejamento da aula, os estudantes demonstraram compreender as regras de formação e de tratamento da função afim, no registro algébrico. Demonstraram perceber o conceito de pares ordenados, onde a ordem importa (x,y) . Vale destacar que até aquele momento os estudantes não demonstraram ficar incomodados com as observações do grupo de professores, além disso, se mostraram bastante participativos conforme previsto.

Durante a formação da representação no registro gráfico, foi abordado pelo docente a noção de eixos ordenados negativos e positivos, as escalas, bem como a origem dos eixos. Outro

conceito apontado pelo professor foram os termos “abscissas” e “ordenadas”, o que causou estranheza aos estudantes. O professor tomou a representação gráfica para explicitar tais conceitos, explicando que um dos eixos contempla a ordenada e o outro a abscissa. Assim, ele perguntou: “como surge o gráfico?”. Dois estudantes responderam: “ligando os pontos”; “passa a reta”. O professor afirmou que essa reta é formada por infinitos pontos (pares ordenados) e explicitou o conceito de crescente e decrescente no gráfico da função.

Destaca-se que o docente revelou a mobilização e domínio do conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e do ensino e conhecimento do conteúdo e dos estudantes. Ele apresentou clareza ao comunicar o conceito de função afim e as representações semióticas envolvidas, além disso, estimulou a participação dos estudantes, ao questioná-los durante o desenvolvimento da aula, demonstrando sensibilidade às necessidades da turma. Esta abordagem conduziu a discussão de forma interativa, envolvendo os estudantes em perguntas e incentivando a participação ativa, conforme previu o professor.

Vale destacar neste particular a condição de complexidade, interconectividade e imbricação dos conhecimentos, observados na prática pedagógica do professor, com mobilização simultânea e inseparável. O docente ao mesmo tempo que expressa o domínio do conhecimento especializado do conteúdo, adequa o discurso às necessidades dos estudantes, estimulando a participação e sempre esclarecendo e tirando as dúvidas, não obstante, também busca utilizar uma abordagem metodológica acessível com o objetivo de propiciar a apreensão conceitual dos estudantes acerca de função afim.

A aula foi sendo encaminhada para o terceiro momento, resolução de situações problema em grupo. A turma havia sido previamente dividida em grupos pelo professor da turma, o Professor A. O docente esclareceu que para a divisão das equipes adotou como critério a heterogeneidade dos grupos, de modo que houvesse estudantes de todos os níveis e compreensão do conteúdo. Foram divididos seis grupos de estudantes. Foi necessário realizar a atividade em um outro ambiente com mais espaço para que os estudantes pudessem dialogar e elaborar os cartazes, esse momento estava previsto no planejamento. Percebeu-se que o tamanho da sala não propicia o trabalho em grupo para uma turma de 40 alunos, o que denota a ausência de oportunidades para a troca de conhecimentos entre os estudantes.

Percebeu-se que nesse momento, os professores A e B tiveram dificuldades de assumir o papel apenas de observador, extrapolando o que a abordagem LS atribui para os membros do grupo em formação. Com as altas demandas provocadas pelas discussões das equipes, eles auxiliaram o professor C que assumia a função de regente da aula.

Vale destacar o domínio e a mobilização do conhecimento do conteúdo e do ensino pelos docentes. A prática pedagógica dos professores com ênfase na resolução de situações-problema em equipes, permitiu observar a mobilização do conhecimento na organização dos grupos de estudantes com critérios específicos (heterogeneidade), na definição das tarefas a serem realizadas (resolução de situações-problema e elaboração de cartazes), na escolha do ambiente adequado para a realização da atividade (outro espaço com mais espaço para diálogo e elaboração), e na adaptação durante a execução da atividade (participação ativa dos professores devido às demandas dos alunos).

Outro fator importante foi a tomada de decisão dos professores, a interação com os alunos durante a atividade, a superação de desafios (como o tempo previsto para a atividade e a dificuldade de duas equipes em elaborar o cartaz), e a adaptação das estratégias planejadas diante das circunstâncias, ratificando o domínio dos docentes acerca do conhecimento do conteúdo e do ensino.

O quarto momento da aula, discussão coletiva sobre as representações gráficas e algébricas dos problemas, quatro equipes conseguiram concluir a resolução e o desenvolvimento dos cartazes no tempo adequado, ao passo que 2 equipes apresentaram dificuldades. A representação no registro gráfico indicou o domínio dos estudantes e o entendimento acerca de alguns elementos que constituem esta representação, mas também se percebe a complexidade da articulação entre o registro algébrico e gráfico da função afim tal qual afirma Duval (2011a, 2011b), sendo necessário o trabalho aprofundado acerca das representações semióticas para que os estudantes compreendam as articulações explícitas e implícitas envolvidas na situação-problema. Também vale destacar o papel do professor nesse processo como sendo parte fundamental na aprendizagem dos alunos.

No momento de avaliação da aula, os estudantes manifestaram, de maneira geral, reconhecer a aula como “muito boa”, ressaltando as representações que estudaram. Apontaram que a aula teve características diferentes daquelas trabalhadas normalmente na escola. Essa afirmação, diante das modificações que foram realizadas na regência da aula, implicando inclusive no uso de outro ambiente, nos leva a inferir que os estudantes estavam se referindo à possibilidade de discussão em grupo e de apresentação da produção de cada equipe para troca de conhecimentos gerados. Isso demonstra a importância do que o LS propõe, em relação ao planejamento e à participação coletiva do corpo docente para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos pelos estudantes.

Ratifica-se o efetivo domínio do Professor C acerca do conhecimento do conteúdo e do ensino. O docente se mostrou sempre participativo e um motivador, durante a execução da aula

ministrada. Além disso, procurou seguir o planejamento da aula elaborado em grupo, adaptando ou flexibilizando quando necessário. Isto reflete que um planejamento de aula não deve ser considerado imutável, possui movimento e depende não somente do professor, mas também dos estudantes envolvidos.

Outro ponto a ressaltar é o domínio do docente acerca do conhecimento especializado do conteúdo e do conhecimento do conteúdo e dos estudantes, em todos os momentos o professor se mostrou atento às necessidades dos alunos, adaptando e tirando dúvidas sempre que requisitado. A imbricação dos conhecimentos durante a prática pedagógica, se mostra cada vez mais evidente, ou seja, a mobilização dos conhecimentos docentes, ocorre, muitas vezes de forma simultânea e conectada.

Etapa de reflexão pós-aula

A reflexão pós-aula tinha como intenção realizar discussões acerca da aula ministrada, sob diferentes perspectivas, do professor ministrante, dos professores observadores e das próprias pesquisadoras. Em relação a execução do planejamento da aula, o Professor C se manifestou: “[...] eu já começo falando sobre o tempo. [...] Então, assim vendo de um modo geral o que a gente conseguiu planejar, foi executado, porém o tempo não colaborou para que tudo, de forma integral fosse feito”. A carência de tempo decorreu principalmente em relação aos grupos que receberam problemas relativos à função decrescente. Os professores não perceberam, no momento do planejamento, que tal conceito provocaria maiores dificuldades, o que denotou falhas no conhecimento do conteúdo e do ensino além do conhecimento do conteúdo e dos estudantes.

As pesquisadoras indagaram aos docentes quais aspectos os alunos tiveram mais dificuldades durante a aula, o Professor A comentou: “na realidade foi uma surpresa até positiva. Eu acho que eles não tiveram muita dificuldade não. O que dificultou foi em relação ao gráfico, que trabalhava com números decimais, trabalhava com vírgula, [...] dificultava um pouco a construção do gráfico” [...]. O comentário do docente indica que mesmo assumindo o papel ativo em alguns momentos da aula, o professor não deixou de observar as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos.

Em relação às possíveis modificações da aula, o Professor A afirmou que: “[poderia] acrescentar mais uma questão, sendo uma que não envolvesse a regra de três e dava para rever principalmente questões com vírgulas [números decimais]”. O professor estava com isso se referindo à necessidade de haver uma questão que propiciasse aos alunos perceber que a função

afim não estava sempre ligada à realização de regra de três, o que ocorreu na questão presente no Tabela 1.

Para o Professor C também se faz necessário “um outro momento, de fazer um certo diagnóstico, mesmo a gente fazendo a parte em grupo [e] a parte deles se expressarem, também no final ter uma devolutiva, um teste, por exemplo, para gente poder ver se de fato aquilo é pra todos [...] se atingiu uma certa compreensão”. Essa proposta provocou a discussão:

Professor B: concordo com a modificação que o Professor C falou, uma avaliação individual para cada um.

Professor C: Sim, uma avaliação individual para poder ver a questão do que cada um conseguiu atingir. Porque a gente viu a equipe, a gente não viu o indivíduo.

Professor A: [...] eu trago como sugestão, por exemplo, se a gente trabalhasse com dois problemas, poderia primeiramente apresentar um problema para todos, seria um problema geral e um individual. A gente mostraria o problema para eles e pediria para eles resolverem. Lembrar sobre o assunto. Aí depois dado o tempo para eles tentarem resolver individualmente. [...] sem começar nada sobre o assunto, aí a gente seguir aquele cronograma que o Professor C já seguiu, fez a diferença. Mas, a gente iniciaria com uma questão que seria fechada lá para que ele tentasse resolver com conhecimento já prévios dele.

Professor C: [...] tem esse ponto também que eu ia chamar atenção, a turma era numerosa. Então dificultava a gente ter uma interação mais individual, para que alguns alunos que tinham dificuldades pudessem nos dar um *feedback*. [Eu] não sabia se eles estavam realmente conseguindo fazer. É isso aí, é devido a turma numerosa [...] (Etapa de Reflexão, 2022).

O momento de reflexão pós-aula, permitiu que os professores refletissem sobre diversos aspectos, incluindo a execução do planejamento, as dificuldades dos alunos e possíveis modificações para futuras aulas. O Professor C destacou a questão do tempo como um obstáculo para a realização completa das atividades planejadas, enquanto o Professor A observou que, apesar de algumas dificuldades na construção de gráficos com números decimais, os alunos tiveram um desempenho globalmente positivo.

Sugestões de modificações incluíram a inclusão de mais exemplos práticos e a realização de avaliações individuais para melhor compreensão do progresso de cada aluno, particularmente em uma turma numerosa que dificultava a interação individual. As reflexões destacaram a importância de adaptações no ensino para melhor atender às necessidades e habilidades dos alunos e ratificaram a mobilização do conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e do ensino e o conhecimento do conteúdo e dos estudantes.

Os docentes também realizaram uma avaliação por escrito sobre as principais contribuições para a formação docente advindos do processo formativo realizado, conforme trechos a seguir.

Tabela 4

<p style="text-align: center;">Professor A</p> <p>Principalmente na parte de observações de pequenos processos, onde fica mais evidente que a dificuldade de compreender um assunto está ligado à dificuldade de comunicação, seja através de pequenas lacunas ou no tipo de linguagem matemática que está sendo utilizada.</p>
<p style="text-align: center;">Professor B</p> <p>Neste processo formativo tive grandes aprendizagens, onde posso ressaltar a pesquisa e busca por novas metodologias que ajudem ao ensino de Matemática. Perceber que um professor deve ser um pesquisador, deve estar aberto a novas metodologias, e que essas novas metodologias são eficazes no ensino foram grandes aprendizados. Em relação às reflexões que faço sobre a docência, vão ao encontro com as contribuições que obtive, ser sempre um professor pesquisador, pois isso ajuda muito nas práticas docentes, pois a educação precisa disso, da pesquisa, das novas metodologias.</p>
<p style="text-align: center;">Professor C</p> <p>Inicialmente, gostaria de agradecer pela oportunidade de poder participar do estudo e, através dele, conhecer mais sobre a representação semiótica e da metodologia do Lesson Study, esse último, ainda não sabia nada ao seu respeito. Portanto, minha maior aprendizagem foi de aprender mais sobre esses estudos e metodologias que podem aprimorar cada vez mais a nossa prática docente. No que diz respeito às representações semióticas, todo trabalho envolvido para gerar as diversas representações, a conversão entre as formas de registro, me fizeram refletir mais sobre o processo de como eu posso organizar melhor a minha aula. E também me fizeram questionar, será mesmo que eu estou apresentando corretamente todos os passos necessários para a compreensão dos meus alunos? A partir desse questionamento, pude inserir na minha prática a visão do estudante, em que é permitido o levantamento de dúvidas e questionamentos entre os estudantes sobre o que eles estão estudando e se existe uma clara compreensão, ao ponto que eles manifestem seu domínio dos usos e representações dos conceitos apresentados, exercitando de forma correta e levando-os ao aprendizado satisfatório.</p> <p>No que compete à metodologia do Lesson Study, vale salientar a importância do docente sempre estar aberto ao novo, de que a pesquisa faz parte da preparação das aulas, uma vez que o conhecimento é mutável e há a necessidade para acompanharmos essas mudanças. Portanto, indispensável que o docente planeje sua aula de forma bem articulada com as etapas e cada objetivo que pretende alcançar. Quanto a isso, já era uma prática que costumo realizar, porém, devido às demandas da profissão, nem sempre conseguimos exercer o planejamento da forma como gostaríamos que fosse melhor.</p> <p>E por fim, resalto o engrandecimento profissional que toda essa experiência pode me proporcionar, afinal, foi interessante a articulação do grupo, não somente para os momentos de estudo, mas principalmente quando houve o planejamento da aula que seria realizada, onde todos os detalhes, por menos que sejam, foram bem pensados, prevendo cada situação possível, e que, até no momento final da aula, pode ser executado de forma satisfatória, vindo a contribuir para o sucesso da ação.</p>

De acordo com a avaliação dos docentes, as contribuições provenientes do processo formativo impactaram positivamente cada professor e o grupo como um todo. As falas dos professores revelam que o curso proporcionou compreensões significativas, ressaltando a relevância da comunicação eficaz, da pesquisa constante, da inovação metodológica e do trabalho colaborativo para aprimorar a prática docente. O *feedback* positivo sublinha a eficácia do processo formativo em fortalecer tanto as competências individuais dos docentes quanto a dinâmica colaborativa do grupo, conforme é possível observar na Tabela 5.

Tabela 5

Síntese das contribuições do processo formativo para a formação docente (Elaborado pelas autoras, 2024).

Aspectos	Professor A	Professor B	Professor C	Grupo como um Todo
Aspectos importantes na formação	<ul style="list-style-type: none"> - Mudança de representações matemáticas. - Observação detalhada das respostas dos alunos. - Reconhecimento da complexidade dos processos anteriores ao aprendizado. 	<ul style="list-style-type: none"> - Importância do planejamento adequado. - Valorização do feedback pós-aula - Descoberta sobre representações semióticas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Estudos das temáticas sugeridas. - Conhecimento sobre formas de registro de representações semióticas e prática do Lesson Study. 	<ul style="list-style-type: none"> - Ênfase nas representações semióticas. - Reconhecimento da importância do planejamento e execução de aulas, com destaque para o Lesson Study e flexibilidade na agenda para adaptação.
Contribuições para a docência	<ul style="list-style-type: none"> - Compreensão das representações semióticas e seu impacto na aprendizagem dos estudantes. - Sensibilidade para perceber as dificuldades dos alunos e abordagem proativa para soluções. 	<ul style="list-style-type: none"> - Integração de conhecimentos adquiridos na prática pedagógica. - Valorização do planejamento em detrimento da execução. 	<ul style="list-style-type: none"> - Engajamento coletivo e flexibilidade da agenda para realização de estudos, debates e planejamento de atividades 	<ul style="list-style-type: none"> - Valorização do planejamento, execução de aulas e feedback pós-aula. - Importância do trabalho coletivo e engajamento dos professores.

Por fim, as respostas dos professores indicam uma compreensão reflexiva dos benefícios da formação, abrangendo desde a melhoria na comunicação até um entendimento abrangente sobre o planejamento e a execução de aulas, e uma maior sensibilidade às percepções e dificuldades dos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem, ratificando a mobilização dos conhecimentos matemáticos para o ensino, com a contribuição da TRRS durante o processo formativo baseado no *LS*.

Considerações finais

O objetivo deste trabalho foi analisar a reelaboração dos conhecimentos matemáticos para o ensino, a partir da vivência de processo formativo baseado no *Lesson Study*, com a contribuição da TRRS. Percebeu-se que o processo formativo não apenas fortaleceu o conhecimento do conteúdo, mas também aprimorou as habilidades pedagógicas, promovendo a formação contínua de professores e a mobilização, elaboração e reelaboração dos conhecimentos matemáticos para o ensino com a contribuição do *LS* e da TRRS.

Os encontros de investigação proporcionaram aos professores a imersão na teoria da TRRS, na função afim e na análise de problemas pedagógicos, mobilizando especialmente o conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e do ensino e conhecimento do conteúdo e dos estudantes. A discussão em grupo sobre uma situação-problema destacou a integração entre teoria e prática, enfatizando a importância do domínio do conteúdo, compreensão dos alunos e adaptação dos métodos de ensino. O engajamento coletivo e o reconhecimento da importância das representações semióticas sinalizaram progresso na formação docente e nas práticas de ensino de Matemática.

Durante o planejamento e discussões entre os docentes, destacam-se avanços na elaboração e reelaboração do conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e do ensino, conhecimento do conteúdo e dos estudantes e conhecimento do conteúdo e do currículo. Inclui-se também o trabalho coletivo, adaptação contextualizada dos problemas e reflexões sobre metodologia e recursos didáticos. Os professores demonstraram comprometimento com o trabalho em equipe, adaptando os problemas às representações semióticas da função afim e buscando estratégias para facilitar a elaboração dos conceitos por parte dos alunos. O alinhamento com a BNCC foi evidente, mostrando familiaridade com os objetivos educacionais e compromisso em atender às diretrizes curriculares.

Com base na análise da execução da aula e nos conhecimentos dos docentes, destacou-se a imbricação entre conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo do ensino e conhecimento do conteúdo e dos estudantes durante a prática pedagógica. O Professor C demonstrou domínio do conteúdo de função afim e habilidade em utilizar estratégias de ensino adequadas para os alunos, promovendo engajamento e adaptando sua abordagem conforme as necessidades da turma. Sua capacidade de comunicação acessível e estímulo à participação dos alunos contribuíram para o processo de ensino e aprendizagem matemática.

As reflexões pós-aula dos docentes destacaram a necessidade de adaptação do planejamento, identificação das dificuldades dos alunos, avaliação individualizada, ênfase na comunicação e pesquisa pedagógica, além do valor da colaboração e do crescimento profissional revelando a mobilização do conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e do ensino e o conhecimento do conteúdo e dos estudantes. Essas reflexões são importantes à medida que propiciam o diálogo com vistas a melhorias na prática pedagógica, ressaltando especialmente o alcance do trabalho colaborativo para uma aprendizagem significativa em Matemática.

Concluiu-se que o estudo revelou avanços significativos na elaboração, reelaboração e mobilização dos conhecimentos matemáticos para o ensino, utilizando o *LS* aliado à TRRS,

contribuindo para a formação contínua dos professores de Matemática. Houve progresso na compreensão dos conceitos matemáticos e na integração dos conhecimentos teóricos com as práticas pedagógicas para o ensino de função afim. Como sugestão para futuras pesquisas, propõe-se a formação de grupos colaborativos que incluam etapas de *Lesson Study* e ciclos integrativos com apoio das representações semióticas.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo fomento, apoio financeiro e consolidação do programa de pós-graduação *stricto sensu* em Educação (UECE) e demais programas no Brasil.

Referências

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Brasil. (2018). Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC.
- Bonjorno, J. R.; Giovanni Júnior, J. R. & Sousa, P.R.C. (2020) *Prisma matemática: conjuntos e funções: ensino médio: manual do professor*. – 1. ed. – São Paulo: Editora, FTD.
- Cardoso, M. B., Barreto, M. C., & Pinheiro, J. L. (2024). Conhecimentos matemáticos para o ensino na perspectiva do Lesson Study: uma revisão sistemática de literatura. *Conexões - Ciência E Tecnologia*, 18, e022002.
- Cardoso, M. B., Fialho, L. M. F., & Barreto, M. C. (2023). Lesson Study nas teses e dissertações brasileiras na área de Educação Matemática a partir de uma revisão sistemática de literatura. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 12(28), 86-107.
- Duval, R. (2009). *Semióis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Editora Livraria da Física.
- Duval, R. (2011a). *Ver e ensinar matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. (T. M. M. Campos, Org.). São Paulo: PROEM.
- Duval, R. (2011b). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *REVEMAT*, 6(2), 96–112.
- Gatti, B. A., et al. (2019). *Professores do Brasil: novos cenários de formação*. Brasília: UNESCO.
- Lewis, C. C., Perry, R. R., & Hurd, J. (2009). Improving Mathematics Instruction Through Lesson Study: A Theoretical Model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 285-304.
- Maldaner, O. A. (2000). *A formação inicial e continuada de professores de química: professores/pesquisadores*. Rio Grande do Sul: Editora Unijui.
- Merli, R. F. (2022). Do pensamento funcional ao campo conceitual de função: o desenvolvimento de um conceito. TESE (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

- Ponte, J. P. da. O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, v. 3, n. 1, p. 3-18, 1994.
- Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, 17(21), 81-140.
- Rodrigues, A. L., & Teixeira, B. R. (2020). Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT): um levantamento bibliográfico em dissertações e teses brasileiras. *Revista Prática Docente*, 5(2), 608-625.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (2014). Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. *Cadernos Cenpec*. São Paulo: v.4, n.2, p.196-229, dez. 2014.