ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i4p160-188

O desenvolvimento do pensamento algébrico associado às operações polinomiais no Mathigon

The development of algebraic thinking associated with polynomial pperations in Mathigon

El desarrollo del pensamiento algebraico asociado a las operaciones polinómicas en Mathigon

Le développement de la pensée algébrique associée aux opérations polynomiales à Mathigon

Rúbia Carla Pereira[1]
Instituto Federal do Espírito Santo
Mestrado em Educação em Ciências e Matemática
https://orcid.org/0009-0009-0026-1378

Alex Jordane[2]
Instituto Federal do Espírito Santo
Doutorado em Educação
https://orcid.org/0000-0001-8666-3275

Alex Mofardini Ramos[3]
Instituto Federal do Espírito Santo
Mestrado em Matemática
https://orcid.org/0009-0003-9759-6153

Resumo

Este trabalho, desenvolvido no âmbito do Grupo de Pesquisa Educação Matemática e Tecnologias Digitais – EMATED, tem por objetivo apresentar e analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico movimentado na realização de tarefas sobre polinômios e suas operações, usando o recurso Ladrilhos da Álgebra na plataforma *Mathigon*. Para isso, partiu-se da ideia de área de regiões retangulares para a representação de polinômios com grau inferior a três. Foram aplicadas tarefas sobre representação e as quatro operações com polinômios. Os participantes são estudantes da terceira série do Ensino Médio. Usamos o laboratório de informática em um período de seis horas-aulas. Na perspectiva teórica que adotamos nesta pesquisa, compreender o pensamento algébrico pressupõe uma posição epistemológica de natureza histórica. Para tanto, essa base epistemológica descreve três condições caracterizantes desse tipo de pensamento matemático: o objeto, a sua representação simbólica e a analiticidade. Tal

[1] rubia.pereira@ifes.edu.br
[2] jordane@ifes.edu.br
[3] alex.ramos@ifes.edu.br

compreensão sobre o pensamento algébrico e também a Teoria da Objetivação nos deram o suporte epistemológico para a análise dos dados, registrados por áudio e vídeo. Os dados foram analisados tendo como foco os processos de generalização e abstração, presentes no pensamento algébrico. O resultado aponta o desenvolvimento do pensamento algébrico relativo às operações com polinômios tanto de grau dois, exploradas nas tarefas, quanto de grau superior a dois.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Polinômios, Teoria da objetivação.

Abstract

This work, developed within the framework of the Mathematics Education and Digital Technologies Research Group (EMATED), aims to present and analyze the development of algebraic thinking involved in performing tasks on polynomials and their operations, using the Algebra Tiles resource on the Mathigon platform. To do this, the idea of the area of rectangular regions was used to represent polynomials of degree less than three. Tasks on representation and the four operations on polynomials were applied. The participants were students in the third year of secondary school. We used the computer laboratory for six hours. From the theoretical perspective adopted in this research, the understanding of algebraic thinking presupposes an epistemological position of a historical nature. To this end, this epistemological basis describes three conditions that characterize this type of mathematical thinking: the object, its symbolic representation and analyticity. This understanding of algebraic thinking and objectivation theory provided us with the epistemological support for analyzing the data recorded by audio and video. The data was analyzed with a focus on the processes of generalization and abstraction present in algebraic thinking. The result shows the development of algebraic thinking in relation to operations with polynomials of both degree two, as explored in the tasks, and degree greater than two.

Keywords: Algebraic thinking, Polynomials, Theory of objectification.

Resumen

Este trabajo, desarrollado en el marco del Grupo de Investigación en Educación Matemática y Tecnologías Digitales (EMATED), tiene como objetivo presentar y analizar el desarrollo del pensamiento algebraico implicado en la realización de tareas sobre polinomios y sus operaciones, utilizando el recurso Algebra Tiles de la plataforma Mathigon. Para ello, se utilizó la idea del área de regiones rectangulares para representar polinomios de grado inferior a tres. Se realizaron tareas de representación y de las cuatro operaciones con polinomios. Los participantes eran alumnos de tercer curso de secundaria. Las sesiones de trabajo se realizaron en el laboratorio de informática durante un período de seis horas. Desde la perspectiva teórica adoptada en esta investigación, la comprensión del pensamiento algebraico presupone una posición epistemológica de carácter histórico. Desde esta base epistemológica, se describen tres condiciones que caracterizan este tipo de pensamiento matemático: el objeto, su representación simbólica y la analiticidad. Esta comprensión del pensamiento algebraico y de la Teoría de la Objetivación nos proporcionó el soporte epistemológico necesario para analizar los datos grabados en audio y vídeo. Los datos se analizaron centrándose en los procesos de generalización y abstracción presentes en el pensamiento algebraico. El resultado muestra el desarrollo del pensamiento algebraico en relación con las operaciones con polinomios, tanto de grado dos, como las exploradas en las tareas, como de grado mayor que dos.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, Polinomios, Teoría de la objetivación.

Résumé

Ce travail, développé dans le cadre du Groupe de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques et les Technologies Numériques – EMATED, a pour objectif de présenter et d’analyser le développement de la pensée algébrique dans l’exécution de tâches sur les polynômes et leurs opérations à l’aide de la ressource *Algebra Tiles* sur la plateforme *Mathigon*. À cette fin, l’idée de l’aire des régions rectangulaires a été associée à la représentation de polynômes, avec un degré inférieur à trois. Les tâches sur la représentation et les quatre opérations avec des polynômes ont été appliquées. Les participants sont des élèves de troisième année du secondaire. Nous avons utilisé le laboratoire informatique pendant une période de six heures de cours. Dans la perspective théorique que nous adoptons dans cette recherche, la compréhension de la pensée algébrique présuppose une position épistémologique de nature historique. À cette fin, cette base épistémologique décrit trois conditions qui caractérisent ce type de pensée mathématique : l’objet, sa représentation symbolique et l’analyticité. Une telle compréhension de la pensée algébrique, ainsi que la théorie de l’objectivation, nous ont fourni le support épistémologique pour l’analyse des données, enregistrées par audio et vidéo. Les données ont été analysées en se concentrant sur les processus de généralisation et d’abstraction, présents dans la pensée algébrique. Une telle analyse indique le développement de la pensée algébrique liée aux opérations avec des polynômes, à la fois de degré deux, explorés dans les tâches, et de degré supérieur à deux.

Mots-clés: Pensée algébrique, Polynômes, Théorie de l’objectivation.

O desenvolvimento do pensamento algébrico associado às operações polinomiais no Mathigon

O desenvolvimento das Tecnologias Digitais (TD) provocou mudanças significativas na sociedade, principalmente de natureza cultural e na relação com o trabalho. Sua utilização na vida cotidiana passou a ser útil na comunicação e expressão do pensamento. Consequentemente, as formas de ensinar e aprender agregam e são impactadas pelas TD, uma vez que os ambientes de ensino e aprendizagem são lugares de encontro com saberes culturalmente históricos, de reflexão social e ética, com o objetivo de formar humanisticamente e de forma omnilateral. Na nossa concepção, esse desenvolvimento humano perpassa o uso consciente e não alienado das TD. Nessa configuração, compreendemos que as TD são um produto humano incorporado à nossa sociedade, tornando-se um artefato, com vozes históricas, indo além da materialização do pensamento, mas tornando-o "pensamento-com-e-através-de-artefatos" (Radford, 2011a, p. 324).

De fato, o pensamento matemático é uma práxis social reflexiva mediada (Radford, 2011), em que processos cognitivos do indivíduo se relacionam com os significados atribuídos aos objetos de saber. Tais processos se aprofundam processualmente até que o indivíduo alcance a compreensão de conceitos. Durante esse percurso, as TD podem atuar como ferramentas para significar conteúdos abstratos da matemática, como, por exemplo, os polinômios.

Lautenschlager e Ribeiro (2017) apontam uma redução, ao longo da história, na ênfase aos tópicos relacionados ao conteúdo de polinômios na educação básica. Isso representa uma perda, pois o trabalho com esse saber pode desenvolver formas de generalização algébrica e aprofundamentos conceituais matemáticos importantes, como o Teorema Fundamental da Álgebra:

> Trata-se de um fato preocupante, tendo em vista que as macroavaliações apontam que a maioria dos alunos apresenta grande dificuldade em entender não apenas os conceitos, as definições, os teoremas, as aplicações envolvendo polinômios, mas também o processo de fatoração e sua relação com as raízes de polinômios (Lautenschlager & Ribeiro, 2017, p. 238–239).

Por meio de uma revisão de literatura, pela ferramenta Buscad[4], é possível concluir que a mesma redução se manifesta em trabalhos acadêmicos brasileiros que relacionam o conteúdo

[4] Ferramenta de busca de trabalhos científicos desenvolvida por Daniel Redinz Mansur em colaboração com Renan Altoé. Mansur e Altoé (2021). Disponível em https://bit.ly/buscad_form.

de polinômios com o pensamento algébrico, como pode ser verificado na Tabela 1. Nela, explicitamos a quantidade de trabalhos encontrados, em diferentes plataformas, a partir dos descritores "pensamento algébrico" e (AND) "polinômios".

Tabela 1.

Contagem de trabalhos acadêmicos (os autores usando a planilha BUSCAd)

Combinação de Descritores	Plataformas					
	Capes: T&D	Scielo	Periódicos Capes	DOAJ	BDTD	Total
'Pensamento Algébrico' AND Polinômios	1	0	3	1	1	6

Na expectativa de tornar o estudo de polinômios uma experiência mais sensorial, o Grupo de Pesquisa Educação Matemática e Tecnologias Digitais – EMATED estudou a plataforma *Mathigon*[5] como artefato para o ensino e aprendizagem desse conteúdo. Este artigo é o produto desse desafio e tem por objetivo **apresentar e analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico movimentado na realização de tarefas sobre polinômios e suas operações, usando o recurso Ladrilhos da Álgebra na plataforma *Mathigon***. As tarefas foram formuladas na perspectiva da Atividade de Ensino-Aprendizagem da Teoria da Objetivação, na intervenção para a recuperação da aprendizagem, em sala de aula de matemática, de uma turma de terceira série do Ensino Médio. Cabe ressaltar que o conteúdo de polinômios está previsto no currículo da terceira série do Ensino Médio, na escola que a pesquisa foi desenvolvida. A partir disso, constatamos que os estudantes tinham pouco ou nenhum conhecimento acerca de polinômios. Além do mais, eles apresentavam dificuldades em trabalhar com formas de pensamento algébrico.

Para a caracterização desse tipo de pensamento, consideramos a perspectiva de Radford (2021) e a Teoria da Objetivação que, neste artigo, é base epistemológica e ferramenta analítica dos dados construídos na investigação. Na sequência, apresentaremos os princípios dessa teoria.

A teoria da objetivação e o pensamento algébrico

A Teoria da Objetivação – TO – teve sua origem em um movimento que se iniciou na Educação Matemática nos anos 90. De acordo com Luis Radford (2021b), autor da teoria, tem

[5] O Mathigon, criado pela Mathigon Ltd, em 2009, é uma plataforma de aprendizagem interativa para a matemática e pode ser acessado em: https://mathigon.org.

base na cultura como principal influência na formação do sujeito e na sua compreensão do mundo:

> A Teoria da Objetivação situa-se num projeto educativo diferente: vê o objetivo da educação matemática como um esforço político, social, histórico e cultural que visa à criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em discursos e práticas matemáticas históricas e culturais constituídas, e que ponderam novas possibilidades de ação e pensamento (Radford, 2021b, p. 38).

Para a TO, o ensino e a aprendizagem são processos indissociáveis que alcançam o conhecimento e a formação dos sujeitos, isto é, trabalham na dimensão do saber e do ser. Dessa forma, a aprendizagem é compreendida por um processo social, no qual os estudantes se encontram com formas de ações e pensamentos construídos historicamente, em determinada cultura. Ao se depararem com essas formas, se transformam. Isto é,

> são os processos ativos, incorporados, discursivos, simbólicos e materiais por meio dos quais os estudantes se encontram, notam e se familiarizam criticamente com sistemas de pensamento, reflexão e ação cultural e historicamente constituídos. Nesse encontro, os estudantes são confrontados com o desconhecido: o outro. Esse encontro é sentido como algo que objeta (etimologicamente falando, algo que é colocado contra ou que se opõe) ao indivíduo (Radford, 2021b, p. 61).

A objetivação, na TO, é um processo dialético, transformador e criativo entre sujeito e objeto que se influenciam mutuamente, o qual vai além da atualização do saber e atinge a transformação do ser. Dessa forma, pode-se compreender que as salas de aulas de matemática não só produzem e reproduzem conhecimento (Radford, 2021b, p. 61). A TO compreende, portanto, que a objetivação é um processo vinculado à atividade.

A atividade, ao afetar o ser, o atualiza em um movimento contínuo. Nesse movimento, no contexto da sala de aula, alunos e professores operam, na forma de trabalho conjunto, ombro-a-ombro, como sujeitos que se afetam mutuamente e colaboram, por meio de cooperação mútua, com solidariedade, responsabilidade coletiva e ética.

A ética, na TO, assume papel de protagonismo, e tem seu conceito na ética comunitária, baseada nas constituições reflexivas e críticas do que Marx (2004, p.110) classificou de capacidades humanas. Nessa lógica, Radford (2020, p. 35) propõe um conceito centrado na responsabilidade, no compromisso e no cuidado com o outro, e afirma que esses três vetores configuram a estrutura essencial da subjetivação.

Os processos de subjetivação se referem às transformações pelas quais os sujeitos passam no encontro com o objeto cultural, em que o foco não são os processos cognitivos de aprendizagem (objetivação) e, sim, como o sujeito foi afetado na dimensão social. Em síntese, os processos de objetivação atualizam o saber, enquanto os de subjetivação atualizam o ser. Ambos acontecem simultaneamente, dialeticamente e indissociavelmente por meio da atividade.

Em um movimento colaborativo de professores com estudantes, a atividade e os vetores da ética comunitária formam a unidade ontológica da TO, chamada de labor conjunto. A aprendizagem de um novo conhecimento concretiza-se por meio da atividade em sala de aula, de forma não-alienante da vida construída historicamente, na qual matéria, corpo, movimentos, signos e artefatos trazem à tona a atividade como labor conjunto. Radford explana:

> Para atender às suas necessidades (necessidades de sobrevivência e necessidades artísticas, espirituais e outras criadas pela/na sociedade), o ser humano se lança ativamente ao mundo. Eles se expõem e, se expondo, produzem. O que eles produzem para satisfazer suas necessidades é produzido em um processo social que é, ao mesmo tempo, o processo de inscrição dos indivíduos no mundo social e a produção de sua própria existência. O nome desse processo [...] chamei de labor conjunto (Radford, 2020, p. 23, tradução nossa).

Na TO, o pensamento é considerado como "uma reflexão mediada de acordo com a forma ou o modo de atividade dos indivíduos" (Radford, 2011a, p. 316). A mediação é feita pela atividade na realização de práticas sociais. Nessa dinâmica, os artefatos são partes constitutivas e consubstanciais do pensamento – pensamos com e por meio de artefatos culturais (Radford, 2011a, p. 261). Isto é, para o autor, os artefatos são parte integrante do pensamento e da atividade humana. Especificamente na educação matemática, o autor aduz que:

> Os artefatos não podem mais ser considerados como um meio de acessar objetos matemáticos e formas matemáticas de raciocínio, pois estes não são concebidos como entidades transcendentais. Os artefatos, ao contrário, são considerados parte da matemática como prática material. Nesse contexto, a matemática aparece como uma atividade coletiva, espacialmente situada, que se desdobra em um determinado espaço de tempo, onde se fundem as vozes históricas embutidas nos artefatos e as vozes de alunos e professores. Observemos que, nessa perspectiva, as discussões sobre provas matemáticas assistidas por computadores (Devlin, 1992) tomam outro rumo. O computador não está ajudando o matemático a realizar alguns cálculos. Ambos se tornam parte de um coro cantando uma canção polifônica (Radford, 2012, p. 287, tradução nossa).

Nessa perspectiva da TO, planejamos e apresentamos uma atividade de ensino-aprendizagem para um grupo de alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Tal atividade focava em polinômios e suas operações, de forma mais concreta e materializada por meio do recurso do *Mathigon*, fazendo com que os estudantes pensassem, desenvolvessem suas hipóteses e conclusões acerca desse conteúdo.

Nesse contexto, destaca-se o pensamento algébrico que, assim como o pensamento científico e o matemático, em geral, tem origem na junção de vários processos sociais em um movimento de produção, modificação e reconstrução nas diversas interações nas quais ocorre. Os pensamentos e, em particular, o pensamento matemático é fator que emerge na interação do indivíduo com a sociedade, de forma a construir, modificar e reconstruir os pensamentos do próprio individuo, de outros e da sociedade.

Especificamente sobre o pensamento algébrico, Radford (2006) afirma que o ser humano não se apropria desse processo cognitivo de forma natural e que a apropriação não depende de amadurecimento genético. O autor aponta que "o pensamento algébrico é um tipo muito sofisticado de reflexão e ação cultural, um modo de pensamento que foi refinado sucessivamente ao longo de séculos antes de alcançar sua forma atual" (Radford, 2011b, p. 319, tradução nossa).

Na perspectiva teórica, o pensamento algébrico é caracterizado não somente na natureza da grandeza, mas no tipo de raciocínio que é feito com a grandeza. Mais especificamente, três condições caracterizam esse pensamento: (i) indeterminação de grandezas – as grandezas indeterminadas, como incógnitas, variáveis e parâmetros usados na resolução de problemas, nos referiremos a essas grandezas, simplesmente, como indeterminadas; (ii) denotação – utilização de signos, gestos, linguagem natural ou/e a mistura de todos para simbolizar grandezas indeterminadas; e (iii) analiticidade – manipulação das grandezas desconhecidas, isto é, o pensar algebricamente permite que, mesmo que não se conheça uma grandeza indeterminada, seja possível operar de forma dedutiva.

Para Radford (2021a), ao pensar algebricamente, o estudante raciocina com grandezas determinadas e indeterminadas, significando relações entre ambos os tipos de grandeza, tratando grandezas desconhecidas como se fossem conhecidas, operando-as com outras grandezas. Ao fazer isso, reconceitualiza as operações envolvidas. Essas ações de reconceituar afloram outro fator importante, presente no pensar algébrico, o sistema semiótico, pois se configura o modo de significar. Na TO, o autor recorre ao ressignificado de sistema semiótico, dado por Vigotski, que conceitua os signos como ferramentas de reflexão as quais permitem aos indivíduos organizar pensamentos e comportamentos, planejar ações, comunicar e expressar, dando significados aos objetos do saber cultural.

Segundo Radford (2003, p. 41), a objetivação dos objetos matemáticos está associada aos esforços mediados e reflexivos dos sujeitos voltados ao alcance do objetivo de sua atividade. Para isso, os sujeitos recorrem a um conjunto de meios, como manipulação de objetos concretos, desenhos/esquemas, gestos e categorias linguísticas, analogias e metáforas. Em síntese, a fim de alcançar o objetivo, os sujeitos envolvidos articulam diversas ferramentas, signos e dispositivos linguísticos por meio dos quais organizam suas ações no espaço e no tempo. Esses objetos, ferramentas, dispositivos linguísticos e signos, utilizados intencionalmente em processos de construção de significados sociais para alcançar uma forma estável de consciência, tornar aparentes suas intenções e realizar suas ações para atingir o objetivo de suas atividades, são definidos, na TO, como meios semióticos de objetivação.

Outro elemento algébrico que aborda a dimensão semiótica, na TO, é a generalização. O autor segue a linha da Teoria Histórico-Cultural, destacando que "como os conceitos não derivam de regras lógicas – como sugerido pelo racionalismo – nem de impressões externas – como sugerido pelo empirismo – a origem de todos os conceitos, argumentou Vygotsky, encontra-se nas generalizações" (Radford, 2008, p. 83, tradução nossa).

Nessa perspectiva, generalizar é a capacidade de compreender semelhanças em uma particularidade e estender a lógica destas semelhanças para termos ou identidades subsequentes, sendo capaz de usar elementos em comum para fornecer uma expressão direta de qualquer termo ou identidade.

Radford (2008) categoriza três tipos de generalização e as examina em termos dos meios semióticos de objetivação que os alunos usam em processos de generalização matemática. São os tipos: generalização factual, generalização contextual e generalização simbólica. O primeiro tipo, generalização factual, tem o raciocínio ligado ao concreto, caracteriza-se pela percepção, sentimentos e elementos espaciais e temporais do ambiente físico do aluno ou do problema, e é demonstrado por gestos, objetos concretos, linguagem natural e corporificada, bem como elementos linguísticos relacionados a uma situação/enunciado de momento. Já a generalização contextual é caracterizada pela introdução do sistema semiótico. Isto é, o estudante ainda utiliza a sensibilidade material, mas de forma mediada pelo uso de signos, introduzindo os primeiros elementos da linguagem simbólica. Por sua vez, a generalização simbólica, já não conta com o raciocínio incorporado aos elementos espaciais e temporais do ambiente ou do problema/enunciado. Nessa categoria, o pensamento está sobre o objeto, se localiza no espaço abstrato e geral, e envolve o uso de sistemas semióticos.

Por fim, o autor destaca um dos elementos cognitivos mais importantes na formação de conceitos matemáticos, a abstração, e afirma que esse processo não é instantâneo. Ademais, é o que nos permite ir além de alguns casos particulares em direção a algo mais geral. Assim, define:

> Abstração é um processo. Durante esse processo, o aluno mobiliza ideias já adquiridas e chega, usando linguagem, símbolos e artefatos culturais, para fazer conexões que não fazia antes e, portanto, constitui uma ideia nova. Do ponto de vista do ensino e da aprendizagem da matemática, a questão é determinar as ações didáticas que permitem que os alunos se envolvam em processos de abstração (Radford et al., 2009, p. 7, tradução nossa).

Segundo Radford, Demers e Miranda (2009), as abstrações matemáticas partem de uma experiência sensorial concreta para criar categorias gerais. Estas, rapidamente, se relacionarão não mais com objetos concretos, mas com símbolos que os representam, que concatenarão entre si, dando origem a novas abstrações, em processo contínuo. Buscando essa experiencia sensorial concreta é que percebemos um potencial para trabalhar polinômios com o artefato *Mathigon*.

Metodologia

Esta pesquisa tem o caráter qualitativo e se desenvolveu no coletivo de professores – pesquisadores do Grupo de Pesquisa Educação Matemática e Tecnologias Digitais – EMATED. Este grupo de pesquisa é formado por professores vinculados ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – Educimat, do Instituto Federal do Espírito Santo, por alunos de mestrado e doutorado deste programa, por alunos de licenciatura e por professores de matemática e pedagogos servidores nas esferas estaduais e federais.

Este artigo apresenta um estudo, com alunos da terceira série do ensino médio, sobre formas de pensamento algébrico, através do conteúdo de polinômios e suas operações, usando as potencialidades da plataforma *Mathigon* como artefato. Nesse contexto, elaboramos uma intervenção com tarefas[6] em que o recurso Ladrilhos da Álgebra (*Algebra Tiles* original em inglês)[7] é um sistema semiótico para significar polinômios.

A intervenção foi necessária, porque os estudantes apresentavam dificuldades ao significar polinômios e as generalizações das operações para uma expressão polinomial de grau n. Outra dificuldade estava em trabalhar com polinômios com mais de uma indeterminada, por exemplo, expressões da forma $p(x, y) = x^2y - 3xy + xy^2$ que são usadas para modelar problemas nas disciplinas técnicas de logística.

A pesquisa de campo se desenvolveu na sala de laboratório de informática, com um grupo de seis estudantes da terceira série do curso técnico em Logística integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal do Espírito Santo – campus avançado de Viana e três professores-

[6] As tarefas podem ser acessadas na íntegra em http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/746183
[7] Disponível em https://polypad.amplify.com/p#algebra-tiles

pesquisadores, autores deste artigo, por um período de cinco aulas, de cinquenta minutos cada, organizadas em três encontros. As aulas se constituíram como o ambiente de produção dos dados, registrados em formato de áudio e vídeo, constituindo, assim, unidade de análise da pesquisa. Mantendo a coerência, a análise dos dados produzidos passou por processos de “apreensão da realidade”. Esse foi o procedimento, uma vez que,

> para superar tanto a imediaticidade empírica do fenômeno (sua condição singular imediata) quanto a sua genericidade abstrata (sua condição genérica formal), é preciso apreender o fenômeno em seu movimento constante e objetivo entre esses traços singulares e gerais que o constituem (Araujo & Moraes, 2017, p. 61).

Esse olhar duplo, a partir das dimensões singulares e gerais, determina a “apreensão da realidade”. Nessa perspectiva, constitui-se a unidade como uma parte do todo complexo. Ela é “o produto da análise que, ao contrário dos elementos, conserva todas as propriedades fundamentais do todo e que não pode ser subdividido sem que aquelas se percam” (Vygotsky, 2002, p. 11). Dessa forma, buscamos, a partir de unidades, apreender a totalidade dos fenômenos estudados – o encontro com o pensamento algébrico.

Para tratamento dos dados, estruturamos duas categorias de análise, a partir da Teoria da Objetivação, especificamente, a caracterização da semiótica e do Labor Conjunto como elementos ontológicos da atividade de ensino-aprendizagem. A semiótica se relaciona com o reconhecimento da estrutura semiótica para a representação dos polinômios, o uso desta para a operação polinomial e a adoção de significados no processo de comunicação, expressão e ensino-aprendizagem dos estudantes e professores. O Labor Conjunto se refere à percepção de caracterizações de atividade com o pensamento algébrico, na forma da materialização de processos de generalização e abstração, por meio do uso do artefato, em sistemas dinâmicos de cooperação e ética comunitária entre estudantes e professores. A seguir, apresentamos o *Mathigon*, as tarefas realizadas, as interações ao longo da realização das tarefas e nossa análise dos dados produzidos.

O estudo de polinômios por meio do *Mathigon*

O *Mathigon*, criado pela Mathigon Ltd, em 2009, é, segundo os desenvolvedores, uma plataforma de aprendizagem interativa para a matemática, que promete tornar o aprendizado mais personalizado. Umas das ferramentas disponíveis no *Mathigon* é o *Polypad*. Tal ferramenta oferece recursos relativos a Geometria, Números, Frações, Álgebra, Probabilidade e Dados, bem como Jogos e Aplicações. Além dessa ferramenta, a plataforma oferece, ainda, cursos sobre conteúdos da matemática para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino

Médio; atividades – tarefas sobre diversos assuntos; e lições – quebra-cabeças, atividades e planos de aula.

Segundo Takinaga e Manrique (2023, p. 197), "a posição que a tarefa ocupa, na estrutura da atividade de ensino-aprendizagem, coloca-a em alinhamento com os objetivos da atividade" e delineia três níveis conceituais das tarefas, intencionando o encontro gradual e progressivo com o saber histórico-cultural:

> - O primeiro nível é associado a uma experiência sensorial concreta, isto é, a uma experimentação e uma reflexão através do uso de materiais concretos;
> - O segundo nível de conceitualização envolve uma reflexão teórica baseada no uso de objetos concretos que poderiam realçar possíveis ligações emergentes as quais dão significado aos objetos matemáticos;
> - O terceiro nível de conceitualização aparece com a manipulação de símbolos matemáticos com os quais os estudantes elevam a experiência anterior (experiência sensorial, concreta) para outro nível de consciência (Takinaga & Manrique, 2023, p. 198–199).

A proposta de tarefa que apresentamos desenvolve os três níveis apontados pela atividade de ensino-aprendizagem. No primeiro nível, os Ladrilhos da Álgebra, da plataforma *Mathigon*, são artefatos para essa experiencia sensorial e concreta, que pode ser vinculada a uma significação (*Figura 1*). A partir disso, se atinge o segundo nível, em labor conjunto (professores e alunos juntos), para caracterizar objetos matemáticos (*Figura 2*). Por fim, há uma expansão para conceitos mais amplos e formais (*Figura 3*).

Figura 1.

Representação de polinômios com Ladrilhos da Álgebra

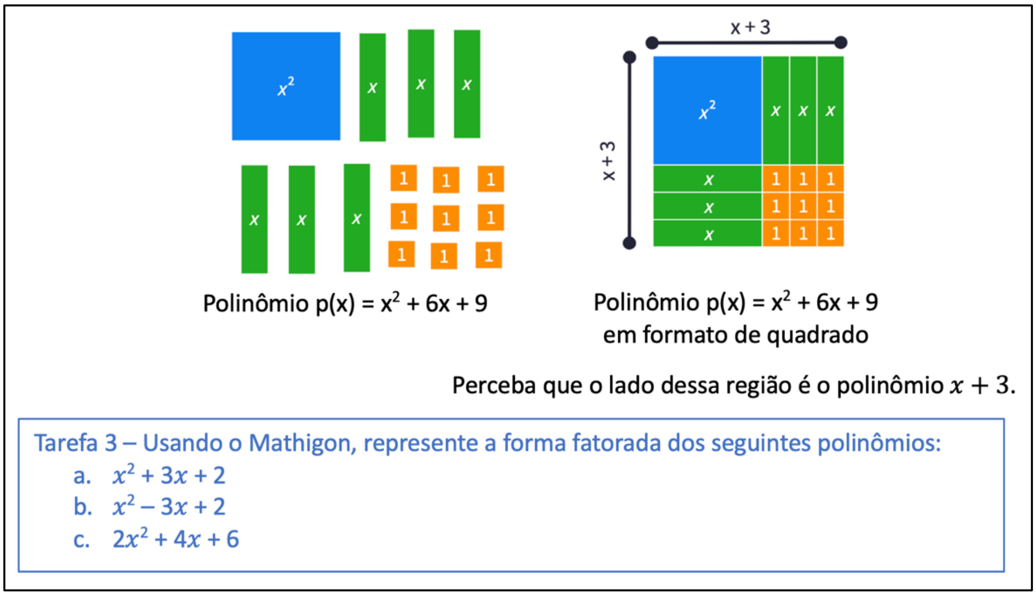

Figura 2.

Recorte do material elaborado

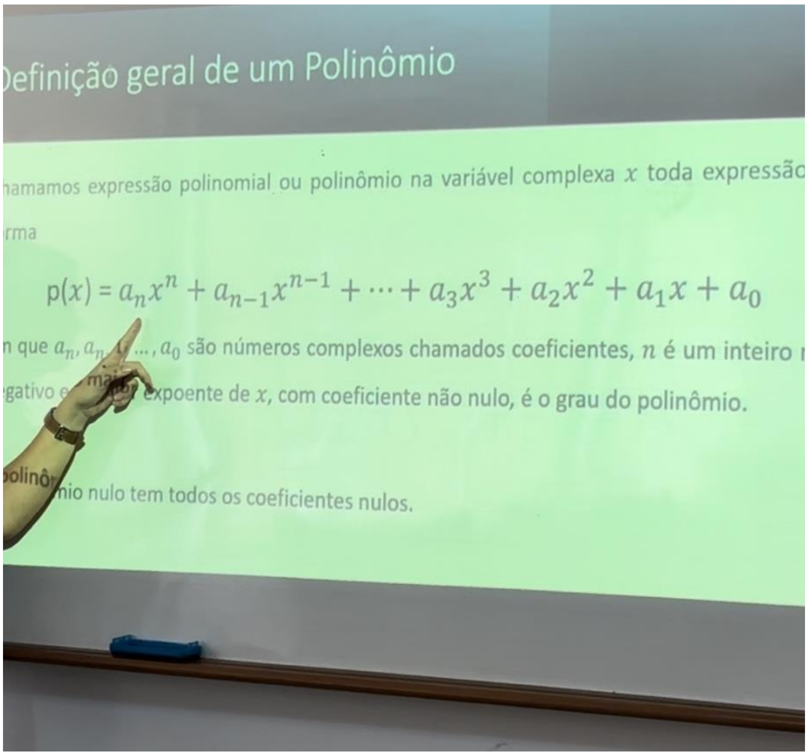

Figura 3.

Discussão geral sobre uma generalização de uma expressão polinomial

Em nossas tarefas, exploramos o grupo Ladrilhos da Álgebra, que se encontra nos recursos sobre Álgebra. Particularmente, consideramos que a plataforma oferece um grande potencial de desenvolvimento de tarefas sobre os diversos conteúdos de matemática, desde que sejam produzidas em trabalho conjunto de professores e estudantes.

Com esse olhar, construímos um conjunto de tarefas, por meio do aporte da Teoria da Objetivação, sobre o conteúdo Polinômios e suas operações. As tarefas foram divididas em cinco momentos: (i) representação de polinômios, usando os ladrilhos da álgebra, (ii) fatoração, (iii) adição e subtração, (iv) multiplicação e (v) divisão de Polinômios, a partir das representações com os ladrilhos. Todos os trabalhos foram desenvolvidos com a organização dos estudantes em pequenos grupos de discussão, de forma que cada grupo utilizasse um computador para a realização das tarefas.

As representações e operações ficaram limitadas a polinômios com grau menor que três, por se associar ao conceito de área. Devido a isso, o objetivo do estudo foi apresentado aos estudantes como *compreender as operações polinomiais, com polinômios de grau menor que três, por meio do recurso Ladrilhos de Álgebra do Mathigon.* No entanto, para surpresa dos pesquisadores, foi possível expandir a compreensão para polinômios de graus superior a dois.

Representação de polinômios usando Ladrilhos da Álgebra no *Mathigon*

O grupo Ladrilhos da Álgebra, do *Mathigon*, é constituído por regiões retangulares indeterminadas, que podem ser arrastadas para a região de construção e operadas (edição de legenda e cores, partição etc.), destacadas na Figura 4.

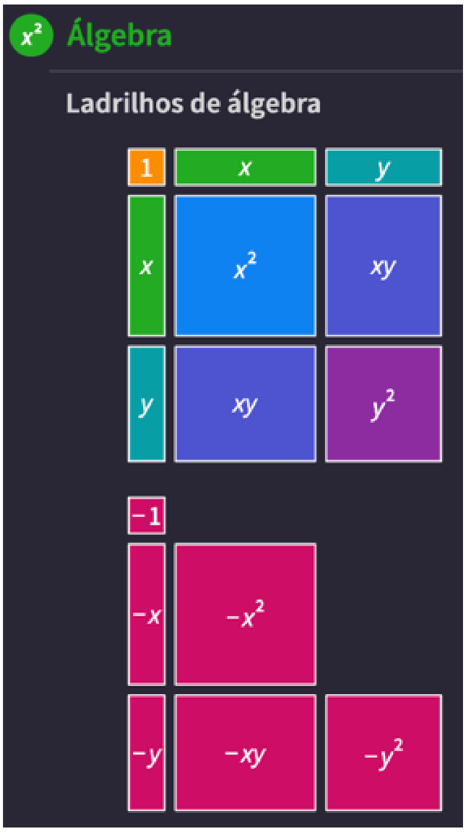

Figura 4.

Ladrilhos da Álgebra (Mathigon)

Para construir os signos, apresentamos a Figura 5 aos alunos, com as regiões retangulares e seus respectivos marcadores descritos na parte interior das regiões, representando suas unidades de áreas.

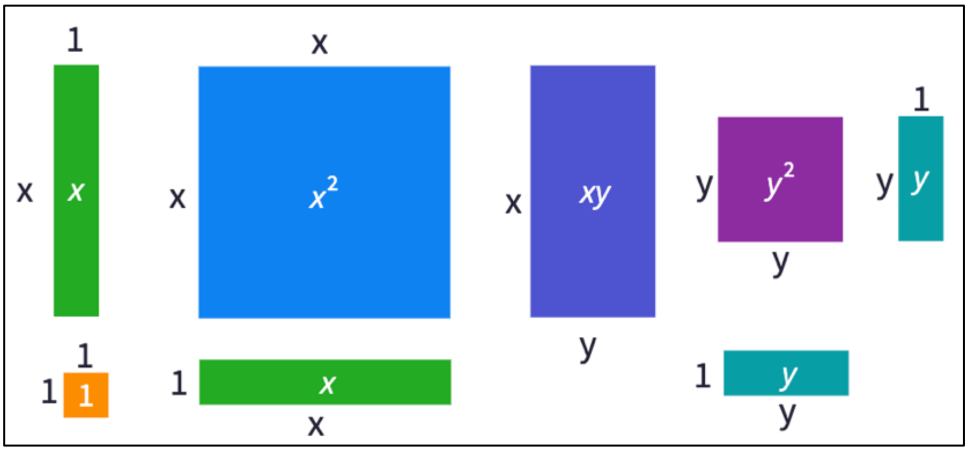

Figura 5.

Signos e significados dos ladrilhos

Além desses blocos, podemos representar blocos negativos, como sendo as negativas das áreas, isto é, a área vezes –1. As medidas x e y são indeterminadas e podem ser alteradas por controles deslizantes, mas ressaltamos aos estudantes que estariam trabalhando com medidas de comprimento desconhecidas. Nesse sentido, percebe-se a presença do indeterminado, elemento de caracterização do pensamento algébrico, segundo Radford (2021a). Também, um sistema semiótico que opera tanto a denotação do indeterminado (x e y) como a adoção de simbologias concretas (regiões retangulares) para significar as áreas. As formas negativas não representaram, em nossa experiência, um obstáculo epistemológico para os alunos, pois facilmente eles significaram as formas algébricas vinculadas ao sistema semiótico e não às áreas.

A seguir, apresentamos a transcrição do diálogo e os gestos, ao longo da realização da tarefa de representação dos polinômios, em um momento que o professor visitava a dupla dos estudantes Ême e Jony[8].

Com a ressignificação das regiões, os estudantes foram convidados a representar o polinômio $p_1(x) = 4x + 6$ e $p_2(x) = x^2 + 3x$, conforme a intuição, considerando apenas o sistema de signos estabelecido (Figura 6).

[8] Os nomes dos alunos são fictícios a fim de preservar suas identidades.

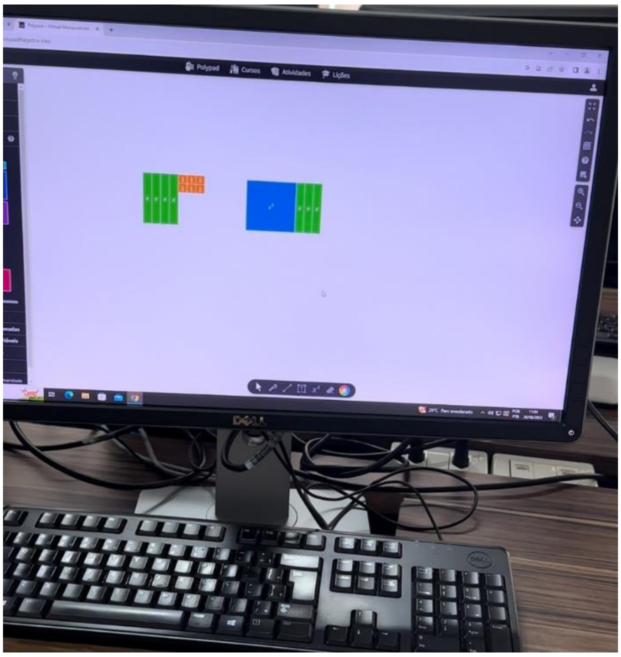

Figura 6.

Representação dos polinômios

A Figura 6 mostra o aluno usando o dedo para mostrar a representação dos polinômios ao professor que visitava o grupo. O diálogo entre eles foi transcrito a seguir.

(1) Prof. Al: Você pode me explicar por que você representou o polinômio assim?

(2) Aluna Ême: Quando a gente pega $4x + 6$, colocamos quatro retângulos verdes e seis quadrados laranjas de 'uns', já o $x^2 + 3x$, a gente colocou um quadradão azul, que é o x^2 e três [retângulos] verdes.

(3) Prof. Al: Mas por que você juntou esses quadrados e retângulos, assim colados um do lado do outro?

(4) Aluna Ême: É... (olhando para Jony), por que Jony?

(5) Aluno Jony: Porque é uma soma, olha (com o dedo ele aponta para o papel com a descrição do polinômio na forma $p_1(x) = 4x + 6$). Aí, a gente juntou. Essa parte é $4x$ (aponta para os retângulos verdes) e essa parte é 6 (aponta para os retângulos laranjas).

(6) Aluna Ême: Então, essa soma dá $4x^2$? (aponta para a representação do polinômio $p_2(x) = x^2 + 3x$).

(7) Prof. Al: Você acha que podemos somar as regiões azul e verde? (Os alunos fizeram um tempo de silêncio). Por que você representou a parte $3x$ com três regiões verdes?

(8) Aluno Jony: Porque elas são 1 vezes x, que dá x. Aí, a gente pegou 3 retângulos verdes, que dá x mais x mais x, $3x$.

(9) Prof. Al: E por que você pegou um quadrado azul?

(10) AlunaÊme: Porque é x vezes x que é x^2. (pausa) Ah, entendi. Não dá para juntar, porque um é 1 vezes x e o outro é x vezes x. São diferentes.

(11) Prof. Al: Isso mesmo! Muito bom. Isso faz referência ao grau do polinômio, por isso não podemos somar (os alunos sinalizam com a cabeça, validando a síntese do professor).

Sobre a representação semiótica, percebemos na linha (2) que Ême opera com o sistema semiótico, usando as cores e os signos (x) como sistema de comunicação e pensamento para a representação do polinômio. Nesse estado, os ladrilhos são parte do pensamento para a materialização do saber – o conhecimento. Percebe-se que os recursos semióticos dos ladrilhos passam a desempenhar um papel crucial na aprendizagem, pois Ême pensa com e por meio do artefato.

No entanto, nas linhas (4) e (6) nota-se que Ême ainda não pode alcançar a totalidade da representação à qual se direciona a tarefa. Ela não consegue ainda compreender que, ao juntar as regiões, a soma que Jony explica é das parcelas $4x$ e 6 e acaba por supor que essa soma se trata de uma soma de áreas.

Jony não compreende assim, mas ainda não consegue formalizar uma resposta verbal. O professor Al exerce a ética comunitária ao manter-se no processo com convites à reflexão. Dessa forma, existem indícios de atividade entre as linhas (7) a (10), uma vez que Al não dá a resposta e não toma para si o produto do pensamento. Al conduz de forma a cooperar com Ême e Jony, tendo responsabilidade com os alunos, uma vez que participa do processo de objetivação deles.

Nesse momento coletivo, é possível perceber indícios do processo de objetivação com o pensamento algébrico. Ême generalizou, uma vez que compreendeu as semelhanças em uma particularidade – as regiões verdes (linha (2)), e estendeu a lógica para a região representada pela área x^2 (‘quadradão azul’).

Já na linha (10), percebemos que Ême mostra indícios do processo de objetivação da abstração, ainda factual (associados a elemento do seu contexto), quando explica que não pode somar a região azul (x^2) com a região representada pelos três retângulos verde ($3x$), porque as dimensões são diferentes, e quando concorda com a síntese do professor.

Dado o espaço disponível para a elaboração deste artigo, não vamos expor aqui as análises dos dados referentes às operações de adição, subtração e divisão, mas vamos, agora, apresentar uma análise dos dados sobre a operação de multiplicação de polinômios.

Multiplicação de polinômio usando Ladrilhos da Álgebra no *Mathigon*

Antes de tudo, é necessário esclarecer que os estudantes compreenderam a adição e a subtração, usando a forma semiótica dos ladrilhos no *Mathigon*. Isso inclui a ideia de anular áreas, que consiste em sobrepor ladrilhos de mesma área com sinais opostos, conforme ilustrado na Figura 7.

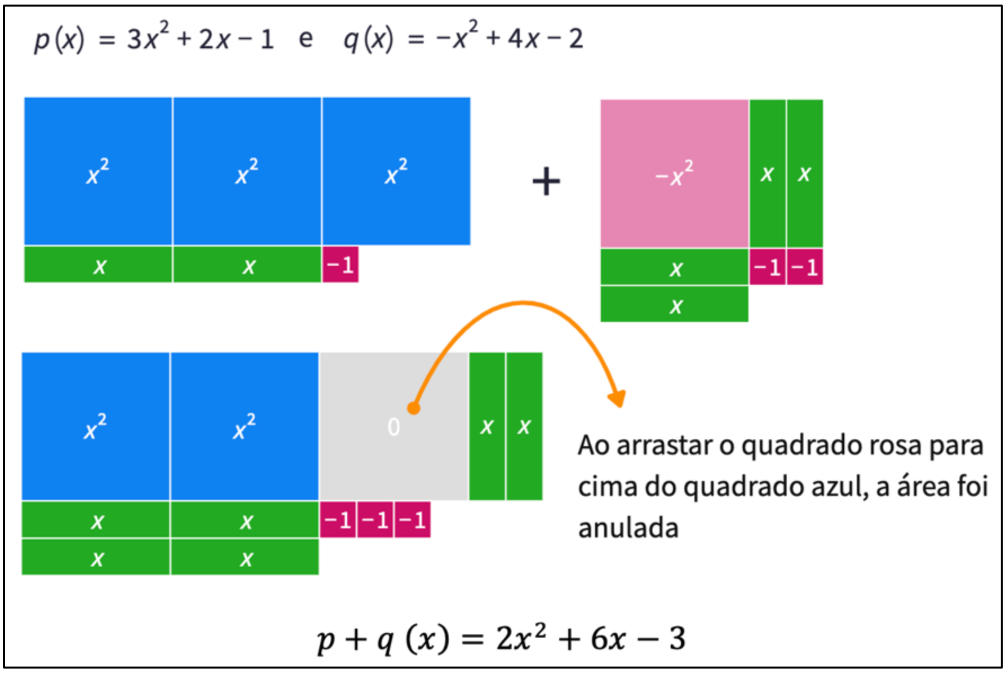

Figura 7.

Áreas sobrepostas anuladas

Os dados que serão analisados, sobre o produto polinomial, são referentes à seguinte tarefa:

Usando os ladrilhos da álgebra do *Mathigon*, calcule os produtos por meio das representações geométricas**.**

a. $(\boldsymbol{x-3})\cdot(\boldsymbol{x-2})$
b. $(\boldsymbol{x-y})^{\boldsymbol{2}}$

O diálogo acontece em um grupo de quatro estudantes, para os quais escolhemos nomes fictícios, com os consentimentos dos indivíduos. São: Amora, Duda, Tetê e Sara.

(12) Amora: A área é lado vezes lado, então faz esse aqui (indicando com os dedos, passando na tela, na horizontal, o polinômio $x-3$) e o segundo, aqui (novamente indicou com os dedos na tela, dessa vez na vertical o polinômio $x-2$).

(13) Sara: Não entendi.

(14) Amora: É que o polinômio não é um retângulo?

(15) Tetê: Lembra lá como a gente representou antes? Era um retângulo, lembra?

(16) Duda: O café na cantina está R$2,00, eu tomo muito café, velho.

(17) Sara: Ah Duda, presta atenção. Lembro. É a área, por isso você quer colocar os lados e aí esse negócio já é o resultado da área? (aponta para a escrita da tarefa no papel).

Elas balançam a cabeça, menos Duda. Então, Sara, controlando o mouse, constrói a seguinte representação (Figura 8):

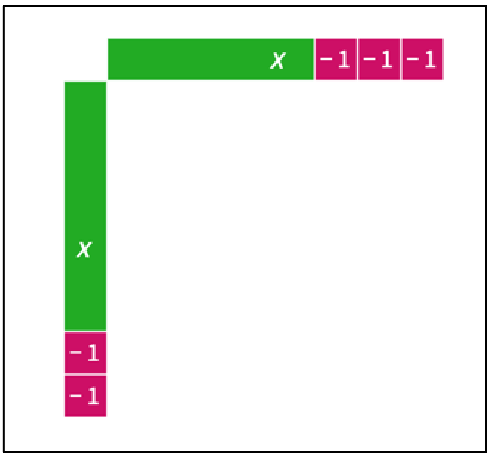

Figura 8.

Formação geométrica da operação de multiplicação de polinômios

Na representação do polinômio $x - 3$, as estudantes colocaram os três ladrilhos de valor -1 sobrepostos ao ladrilho do x, na parte superior. O mesmo ocorre para o polinômio $x - 2$, na lateral esquerda. As estudantes seguiram, completando a região retangular, conforme a Figura 9.

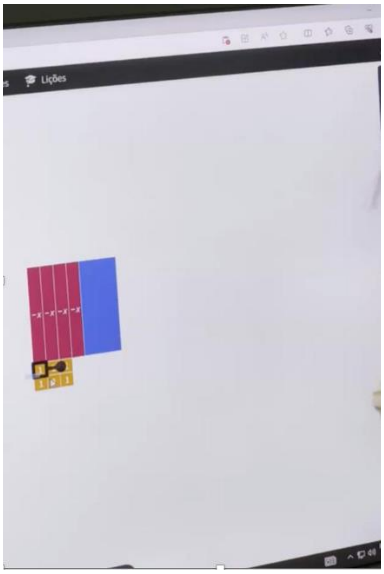

Figura 9.

Representação do produto

(18) Professor Al: Duda, você consegue explicar o que seu grupo produziu nesta figura? (Duda se assusta e se mostra atenciosa com a tarefa)

(19) Duda: Elas colocaram aqui o $x - 3$ e aqui o $x - 2$. (Apontando com o dedo as representações em ladrilhos dos polinômios na tela). Aí, colocaram o [quadrado] azul em cima, sabe? x vezes x? E esses [retângulos] vermelhos aí.

(20) Professor Al: E por que desse jeito? Interpreta isso para mim?

(21) Duda: Não sei. Acho que está errado. Na área x vezes 1 ficou o buraco de -3. Esse pedaço é $x - 3$ (com o dedo na tela, mostra a medida na horizontal referente à parte verde na Figura 8.

(22) Amora: E o que que está errado, Duda?

(23) Duda: Eu acho que vocês deveriam fazer esses quadradinhos fora do [retângulo] verde.

(24) Professor Al: Eu também acho que fica mais fácil, meninas.

(25) Sara, Tetê e Amora: Mas você disse que quando é negativo uma parte anula a outra... faz buraco... e fica sem área.

(26) Professor Al: É isso, mas na representação. Não sei se dá para fazer a multiplicação assim. Eu não tentei.

As estudantes seguem, então, a forma que o professor apontou, e completam o retângulo, calculando o produto polinomial, conforme a figura 7.

(27) Professor Al: Tenta pensar, mesmo sendo um buraco, tenta pensar na ideia do retângulo não colocando o vermelho dentro do azul.

(28) Sara: Não colocando?

As estudantes seguem a orientação do professor, e montam o retângulo, percebendo o resultado do produto polinomial (Figura 10).

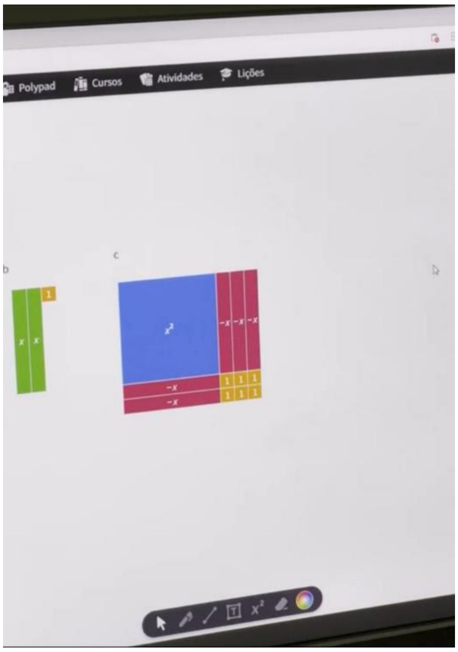

Figura 10.

Resolução da tarefa

(29) Professor Al: Do jeito que vocês estavam pensando... usando a ideia do buraco... (sobreposição de áreas) vamos fazer lá no quadro e aí todos vão ver, vocês ajudam.

O professor vai até o quadro para montar o produto polinomial, usando a ideia de sobreposição. No início, a montagem da representação não estava dando resultado (Figura 11 – imagem à esquerda). Mas o professor e os alunos insistiram na ideia, usando a representação da Figura 10 porém com sobreposição em camadas (Figura 11 – imagem à direita).

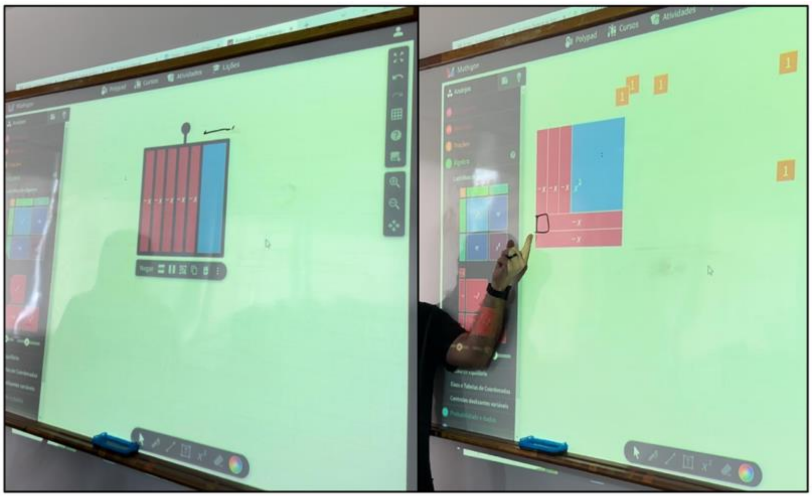

Figura 11.

Cálculo do produto polinomial usando sobre posição

(30) Professor Al: Nesse quadradinho, a gente tem a parte azul do x^2 anulada pela parte vermelha do $-x$, mas aí, tem ainda uma outra camada de $-x$, ou seja, a gente está devendo um quadradinho de 1 por 1 aqui.

(31) Jony: Aí é só colocar [quadrados] laranjinhas, né?!

(32) Professor Al: Exatamente. Muito bonito isso. Eu não tinha pensado nisso, eu não sabia fazer assim, montamos tudo junto. (Figura 12 – imagem à esquerda). Agora, vamos interpretar a resposta do produto, o cálculo.

Aqui, o professor escreve as dimensões e verifica com os estudantes que a região retangular tem dimensões $x-3$ por $x-2$. . Depois, sistematiza o cálculo (Figura 12 – imagem à direita).

Figura 12.

Sistematização do produto polinomial

(33) Professor Al: Quais os retângulos que tenho aqui? O azul...

(34) Alunos: x^2.

(35) Professor Al: Quantos vermelhos?

(36) Alunos: 5.

(37) Professor Al: Mas eu escrevo 5 aqui?

(38) Jony: Não, é $-5x$, são 6 áreas de x por 1 negativa.

(39) Professor Al: Isso. E acabou?

(40) Alunos: Mais 6.

(41) Professor Al: Isso... mais 6. Então, fica como o polinômio do produto de $x-3$ com $x-2$?

(42) Alunos: x^2-5x+6.

(43) Professor Al: Que é o resultado que a gente achou.

(44) Jony: Professor, eu vi que se a gente fizer a distributiva, chega nesse resultado. Aí, é assim para um produto de polinômio de qualquer grau?

(45) Professor Al: O que vocês acham? Como seria se eu fizesse o produto de um polinômio de grau 2 com um de grau 1?

(46) Alguns alunos: Seria um paralelogramo... de grau 3. Por causa do x vezes x^2.

(47) Professor Al: E algebricamente?

(48) Alunos: Faz a distributiva.

Frente a esses dados, queremos ressaltar duas categorias. A primeira, o uso de um sistema semiótico sofisticado para o desenvolvimento das representações polinomiais e sua apropriação enquanto linguagem para o pensamento algébrico, uma vez que os ladrilhos se caracterizam como elementos indeterminados e são usados para as operações. Nessa configuração, a semiótica é caracterizada pelo trato com áreas de regiões retangulares, com dimensões laterais dessas regiões e com o uso desses elementos para pensar a operação da multiplicação de polinômios.

É possível perceber nas linhas (12) a (17) que a aluna Duda não estava em atividade, pois não se mostrava envolvida em resolver a tarefa. Por isso, a colega Sara a repreende. O professor a convida para a atividade, agindo com responsabilidade e preocupação com a aprendizagem da Duda (linha (18)).

As alunas Sara e Amora, usando os ladrilhos da álgebra do *Mathigon*, representam os polinômios $x-3$ e $x-2$ como áreas. Também os posicionam em vertical e horizontal para fazer a multiplicação. No entanto, ao responder o professor, Duda faz uma descrição do que vê na tela (linha (19)). E é possível perceber que a estudante apresenta indícios de um pensamento, usando a propriedade distributiva, quando coloca x vezes x. . Nessa configuração, os ladrilhos atuam como meios semióticos de objetivação. A esse respeito, explana Radford:

> Os objetos, ferramentas, dispositivos linguísticos, e signos que os indivíduos usam intencionalmente nos processos de criação de significados sociais para alcançar uma forma estável de consciência, para tornar claras suas intenções e para realizar suas ações a fim de atingir o objeto de sua atividade, são chamados de meios semióticos de objetivação. Estes são semióticos na medida em que são peça-chave na produção de significados embutidos nos processos de objetivação (Radford, 2021b, p. 136).

Na continuidade do diálogo, na linha (20), o professor demonstra seu interesse pela compreensão que Duda tem do processo. Neste momento, é possível perceber que Duda se manifesta com opinião sobre a resposta das colegas, o que gera uma situação de conflito. Na nossa percepção, Duda não concordava com a forma de representação que as colegas estavam construindo (linhas (22) e (23)) e preferiu não manifestar sua forma de pensar e não participar do processo. A intervenção do professor, no processo de coletividade, foi muito importante para Duda se sentir parte da solução do grupo e ser ouvida. Nesse episódio, percebemos indícios da ética comunitária, coletividade e atividade, o que caracteriza o Labor conjunto.

Mas ainda existem as tensões, pois, nas linhas (24) a (28), é possível perceber que o professor causa uma ruptura na forma de investigação das estudantes Sara, Tetê e Amora, direcionando um método que lhe era sabido e confortável.

No entanto, a partir da linha (29), o movimento do professor em desenvolver a investigação, a partir da provocação das estudantes, deu uma reviravolta na movimentação do saber, e se ampliou para a participação de todos os alunos e não somente do grupo das estudantes que, naquele momento, eram acompanhadas. Percebemos, aqui, o comprometimento do professor, na direção dos vetores da ética comunitária do labor conjunto.

Além das relações de ética, se apresentam indícios de atividade, no desenvolvimento do pensamento algébrico, especificamente na compreensão da operação do cancelamento de áreas, isto é, áreas sobrepostas anuladas. Aqui, devemos ressaltar que a compreensão do contexto foi facilitada pelo próprio *Mathigon*. A solução da tarefa, apresentada na Figura 10, foi elemento propulsor para o desenho da solução, usando o método de sobreposição de áreas. Esse movimento, Radford (2021b) classifica como contração semiótica.

A contração semiótica, para o autor da TO, é um movimento de caracterização da aprendizagem no qual o indivíduo desenvolve as estratégias mais rapidamente, fazendo ligações mais refinadas das atividades semióticas anteriores, o que a evidencia como um recurso suscetível ao julgamento de sua relevância: “o significado desse processo é que ele reflete em um nível mais profundo de consciência e inteligibilidade do problema em questão. Tomo isso como evidência de aprendizagem. O nome desse processo é contração semiótica" (Radford, 2021b, p. 139). É importante observar que a aprendizagem, apresentada nesses dados, foi uma atividade tanto dos alunos quanto do professor.

Ainda sobre o método, os estudantes construíram, em conjunto com o professor, uma leitura semiótica referente ao cancelamento de áreas sobrepostas. Na linha (31), percebemos que Jony apresenta uma solução para a falta de área, compreendendo e construindo um novo método de solução, o que caracteriza uma atividade de abstração matemática.

Os estudantes demonstram que fizeram parte do labor conjunto, ao participar da síntese, interpretando o cálculo do produto dos polinômios a partir do método de sobreposição de áreas (linhas (33) a (42)).

Na linha (44), o aluno Jony faz um questionamento, demonstrando uma atividade de generalização algébrica, uma vez que, a partir de uma situação mais particular com polinômios de grau inferior a três, o aluno percebeu uma possível generalização do cálculo para polinômios de grau superior a 3.

As operações de adição e subtração de polinômios já foram elementos do desenvolvimento da generalização algébrica, no que se refere ao método do cálculo na forma algébrica. Os processos de objetivação de generalização para adição, subtração e multiplicação com polinômios de grau superior a 2 aconteceram a partir da compreensão das operações usando os ladrilhos, limitados a polinômios de grau inferior a 3. O processo de generalização não era esperado pelos pesquisadores e foi uma agradável surpresa, que apresentamos de forma resumida aqui neste artigo.

Apenas a operação de divisão de polinômios ficou limitada a um método de cálculo com ladrilhos que os estudantes não conseguiram generalizar, e que foi objeto de questionamento por parte deles. O professor, no entanto, explicou que o cálculo algébrico de divisão polinomial se apresentava por um algoritmo próprio e que seria trabalhado em sala de aula posteriormente.

Conclusão

Este trabalho apresentou uma intervenção pedagógica para o desenvolvimento do pensamento algébrico, especificamente, abordando o conteúdo de polinômios e as quatro operações, por meio das representações dos ladrilhos da álgebra da plataforma *Mathigon*.

Nestes termos, na análise dos dados, à luz da Teoria da Objetivação e do pensamento algébrico, de acordo com Luis Radford, percebem-se as três caracterizações apontadas pelo autor para o desenvolvimento desse tipo de pensamento matemático. No que se refere aos três elementos, o indeterminado, a estrutura semiótica e a analiticidade.

A presença do indeterminado está caracterizada nos ladrilhos, cujas áreas das regiões retangulares eram dadas pelas indeterminações $x, y, xy,\ \ x^2$ e y^2. . Esses elementos são parte de uma estrutura semiótica de significados que atribui uma representação geométrica aos polinômios. As dimensões laterais e as áreas das regiões são componentes de significados para o desenvolvimento analítico com o indeterminado.

Todas essas características foram pensadas na elaboração do material, e percebe-se que a interação com a ferramenta do *Mathigon*, no trabalho com os estudantes, para o desenvolvimento desses significados, foi eficiente em termos da aprendizagem à luz da teoria, bem como proporcionou um ambiente para o desenvolvimento dos processos de objetivação do saber, que é o próprio pensamento algébrico.

Na realização das tarefas, em um ambiente proposto pela TO – em grupos menores de estudantes e com a interação do professor –, é possível perceber indícios de labor conjunto, com a observação das relações de ética comunitária e da atividade em relação ao pensamento algébrico, especificamente direcionada ao desenvolvimento da abstração e da generalização, que estiveram presentes no trabalho com cada uma das operações polinomiais cujos dados não foram analisados neste artigo.

Em conclusão, consideramos que as tarefas cumpriram o objetivo tanto do desenvolvimento dos processos de objetivação da aprendizagem sobre o pensamento algébrico quanto dos processos de subjetivação. Isso demonstra que os estudantes se desenvolveram além das expectativas de ensino-aprendizagem dos pesquisadores. Tal desenvolvimento se tornou perceptível, quando os alunos generalizaram os algoritmos de soma, subtração e multiplicação de polinômios com grau superiores a dois, indo além da tarefa proposta, que se focou em operações com polinômios de até segundo grau. A única operação limitada pela representação com os ladrilhos foi a divisão de polinômios com grau superior a dois, dado que o algoritmo, nesse caso, é mais sofisticado.

Finalmente, apontamos que o *Mathigon*, enquanto artefato para o ensino, apresenta possibilidades do desenvolvimento do pensamento algébrico, quando aliado a tarefas que possam provocar nos alunos processo de objetivação e de subjetivação.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes) por meio do Programa Institucional de Difusão Científica (PRODIF).

Referências

Araujo, E. S., & Moraes, S. P. G. de. (2017). Dos princípios da pesquisa em Educação como Atividade. In M. O. de MOURA (Org.), *Educação Escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural* (p. 47–70). Loyola.

Lautenschlager, E., & Ribeiro, A. J. (2017). Formação de professores de matemática e o ensino de polinômios; Mathematics teacher education and teaching of polynomials. *Educação Matemática Pesquisa*, *19*(2). https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p237-263

Mansur, D. R., & Altoé, R. O. (2021). Ferramenta tecnológica para realização de revisão de literatura em pesquisas científicas: importação e tratamento de dados. *Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco*, *10*(1), 8–28.

Marx, K. (2004). *Manuscritos Econômico-Filosóficos*. Boitempo.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0501_02

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (p. 2-21), Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 83–96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2011a). *Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia*. Livraria da Física.

Radford, L. (2011b). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. In J. Cai & E. Knuth (Orgs.), *Early Algebraization A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. (p. 303-322), Springer.

Radford, L. (2012). On the Cognitive, Epistemic, and Ontological Roles of Artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Orgs.), *From text to 'lived' resources* (p. 283–285). Springer.

Radford, L. (2020). Un recorrido a través de la Teoria de la Objetivación. In S. T. Gobara & L. Radford (Orgs.), *Teoria da Objetivação: fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de Ciências e Matemática* (p. 15–42). Livraria da Física.

Radford, L. (2021). O Ensino-aprendizagem da Álgebra na Teoria da Objetivação. In V. Moretti & L. Radford (Orgs.), *Pensamento Algébrico no Anos Iniciais: Diálogos e Complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural* (p. 171–195). Livraria da Física.

Radford, L. (2021b). *Teoria da Objetivação: Uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática*. Livraria da Física.

Radford, L., Demers, S., & Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques*. Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques.

Takinaga, S. S., & Manrique, A. L. (2023, agosto 20). Contribuições da teoria da objetivação para a análise do planejamento de tarefas de um professor de matemática envolvendo alunos com transtorno do espectro autista. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 189–210. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p189-210

Vygotsky, L. S. (2002). *Pensamento e Linguagem*. Ed. Ridendo Castigat Mores.