ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p116-141

Obstáculos epistemológicos na aprendizagem de limite de funções reais de uma variável real

Epistemological obstacles in learning limit of real functions of a real variable

Obstáculos epistemológicos en aprendizaje de límite de funciones reales de una variable real

Obstacles épistémologiques à l'apprentissage de la limite des fonctions réelles d'une variable réelle

Emili Boniecki Carneiro[1]
Universidade Estadual do Paraná
Licenciada em Matemática
https://orcid.org/0000-0002-1733-8724

Maria Ivete Basniak[2]
Universidade Estadual do Paraná
Doutora em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0001-5172-981X

Dion Ross Pasievitch Boni Alves[3]
Universidade Estadual do Paraná
Doutor em Matemática
https://orcid.org/0009-0000-8382-0263

Resumo

O objetivo deste artigo é identificar obstáculos epistemológicos manifestados na aprendizagem de Limite de funções reais com uma variável real e associá-los às categorias propostas por estudos anteriores. Para isso, coletamos produções no Catálogo de Teses e Dissertações (CTD) da Capes, com os filtros para produções acadêmicas de mestrado e doutorado publicadas nos últimos dez anos. Elaboramos um quadro teórico a partir dos pesquisadores que categorizam obstáculos epistemológicos dentro do conteúdo de Limite, que também foram referência para os trabalhos selecionados no CTD. As categorias propostas pelos autores foram associadas entre si, e a partir dessa discussão conjunta, uma categorização própria foi elaborada a fim de agrupar obstáculos epistemológicos discutidos por esses autores. Essa categorização subsidiou a análise das dificuldades relatadas em cinco dissertações e uma tese, que descreveram dificuldades dos estudantes relacionadas a diversos aspectos envolvendo Limite. A partir da análise realizada, concluiu-se que as dificuldades mais comuns estão associadas aos obstáculos categorizados em E1, E2 e E4: *Complexidade dos objetos matemáticos básicos, Noção e formalização de Limite* e *Rupturas do Cálculo*.

[1] emilieb022@gmail.com
[2] basniak2000@gmail.com
[3] dion.rss@gmail.com

Palavras-chave: Cálculo diferencial e integral, Dificuldades em aprendizagem de limite, Educação matemática.

Abstract

The objective of this article is at identifying epistemological obstacles manifested in learning Limit of real functions with a real variable and associate them with categories proposed by previous studies. Thereunto, we collect productions from the Theses and Dissertations Catalog (CTD in Portuguese acronym) by Capes, with filters for academic master's and doctorate productions published in the last ten years. We developed a theoretical framework based on researchers who categorize epistemological obstacles within the content of Limit, which were also a reference for the works selected in CTD. Categories proposed by the authors were associated with each other, and based on this joint discussion, a specific categorization was created for grouping epistemological obstacles discussed by these authors. This categorization supported the analysis of difficulties reported in five dissertations and one thesis, which described students' difficulties regarding various aspects involving Limit. From the analysis carried out, it was concluded that the most common difficulties are associated with obstacles categorized into E1, E2 and E4: *Complexity of basic mathematical objects, Notion and formalization of Limit* and *Calculus Ruptures*.

Keywords: Differential and integral calculus, Limit learning difficulties, Mathematics education.

Resumen

El objetivo de este artículo es identificar obstáculos epistemológicos que se manifiestan en el aprendizaje del Límite de funciones reales con una variable real y asociarlos con las categorías propuestas por estudios previos. Para ello, Recopilamos producciones en el Catálogo de Tesis y Disertaciones (CTD) Capes, con los filtros para producciones académicas de maestría y doctorado publicadas en los últimos diez años. Elaboramos un marco teórico basado en investigadores que categorizan los obstáculos epistemológicos dentro del contenido de Límite, que también fueron referencia para los trabajos seleccionados desde el CTD. Las categorías propuestas por los autores fueron asociadas entre sí, y desde esa discusión conjunta, se creó una categorización específica para agrupar los obstáculos epistemológicos discutidos por esos autores. Esa categorización apoyó el análisis de las dificultades reportadas en cinco disertaciones y una tesis, quien describieron dificultades de los estudiantes, relacionadas con diversos aspectos que involucran Límite. A partir del análisis realizado, se concluyó que las dificultades más comunes están asociadas a obstáculos categorizados en E1, E2 y E4: *Complejidad de los objetos matemáticos básicos, Noción y formalización de Límites* y *Quiebres en Cálculo*.

Palabras clave: Cálculo diferencial e integral, Dificultades en aprendizaje de Límite, Educación matemática.

Résumé

L'objectif de cet article est d'identifier les obstacles épistémologiques manifestés dans l'apprentissage de la limite des fonctions réelles avec une variable réelle et de les associer aux catégories proposées par les études précédentes. Pour ce faire, nous avons effectué une recherche dans le Catalogue des Thèses et Masters de la Capes (Coordination pour l'Amélioration du Personnel de l'Enseignement Supérieur) (CTM), en utilisant les filtres pour les productions académiques de master et de doctorat publiées au cours des dix dernières années. Nous avons élaboré un cadre théorique basé sur les chercheurs qui catégorisent les obstacles épistémologiques liés au concept de limite, ce cadre théorique a également servi de référence pour les travaux sélectionnés dans le CTM. Les catégories proposées par les auteurs ont été associées les unes aux autres et, sur la base de cette discussion commune, une catégorisation propre a été élaborée afin de regrouper les obstacles épistémologiques discutés par ces auteurs. Cette catégorisation a servi de support à l'analyse des difficultés rapportées dans cinq mémoires de master et une thèse, qui décrivent les difficultés des étudiants liées à divers aspects du concept de limite. L'analyse a montré que les difficultés les plus fréquentes sont associées aux obstacles catégorisés E1, E2 et E4: *Complexité des objets mathématiques de base, Notion et formalisation des Limites* et *Ruptures du Calcul*.

Mots-clés : Calcul différentiel et intégral, Difficultés d'apprentissage du concept de limite, Éducation mathématique.

Obstáculos epistemológicos na aprendizagem de limite de funções reais de uma variável real

O alto índice de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral tem sido objeto de estudo tanto no Brasil quanto internacionalmente (Rezende, 2003). Ao longo dos anos, a disciplina passou por alterações desde a sua implementação, como a reorganização do conteúdo e do currículo, no intuito de contornar obstáculos na aprendizagem e diminuir a significativa taxa de reprovação (Lima, 2013). Frequentemente, as dificuldades com a disciplina de Cálculo têm sua gênese associada à falta de conhecimento dos acadêmicos no que se refere a conteúdos vistos nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. Segundo Rezende (2003), algumas instituições sugerem ensinar aos acadêmicos a matemática necessária à realização técnica do Cálculo. Entretanto, as defasagens na formação do acadêmico recém-egresso do Ensino Médio não deveriam ser um problema específico do ensino de Cálculo, uma vez que é igualmente importante para o ensino de outras disciplinas do curso superior, e nem por isso seus resultados são tão preocupantes como quando comparados à disciplina de Cálculo (Rezende, 2003).

Compreendemos que diversos fatores podem influenciar na reprovação da disciplina, e dentre esses fatores estão as dificuldades de aprendizagem relacionadas aos obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1986). Obstáculos epistemológicos são aqueles que surgem de conflitos ocorridos ao longo do desenvolvimento histórico de conceitos matemáticos, resultantes da interação entre conhecimentos antigos e novos (Sierpinska, 1985). O conceito surgiu no âmbito da discussão do desenvolvimento da ciência por Bachelard (Mendes; Moraes, 2020), entendendo o erro como intrínseco ao conhecimento. O autor afirma que é "no ato mesmo de conhecer, intimamente, onde aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, os entorpecimentos e as confusões", que evidencia "as causas de estancamento e até de retrocesso, [...] onde discerniremos causas de inércia que chamaremos obstáculos epistemológicos" (Bachelard, 1947, p. 15).

No contexto do Cálculo, não somente como disciplina, investigamos obstáculos epistemológicos em torno do conteúdo de Limite de funções reais de uma variável real, definição que consideramos a partir de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), aprimorada por Karl Weierstrass (1815-1897) e Bernhard Riemann (1826-1866), que deram ao Cálculo uma base rigorosa, usando a Álgebra de desigualdades já existente, construindo uma estrutura de teoremas logicamente conectada sobre os conceitos do Cálculo (Grabiner, 1983).

Dessa forma, propomo-nos identificar obstáculos epistemológicos manifestados na aprendizagem de Limite de funções reais com uma variável real e associá-los às categorias propostas por estudos anteriores. Para tanto, realizamos uma revisão bibliográfica de teses e dissertações que relatam dificuldades dos estudantes em aprender esse conceito, publicadas entre 2014 e 2024, disponíveis no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (CTD). Utilizamos a palavra *Limite* com inicial maiúscula quando nos referimos ao conceito matemático, e com inicial minúscula quando nos referimos ao termo como operação matemática ou respeitando a notação definida pelo autor citado. A partir das referências utilizadas nesses trabalhos, identificamos autores que discutem obstáculos epistemológicos na aprendizagem de Limite, que passaram a integrar nosso quadro teórico, conforme detalhamos na seção que segue.

Procedimentos teórico-metodológicos

Esta pesquisa se caracteriza como revisão de literatura por meio de coleta[4] realizada no Catálogo de Teses e Dissertações (CTD) da Capes em publicações entre os anos de 2014 e 2024. Reconhecemos que muitos artigos acadêmicos são desenvolvidos a partir de dissertações e teses, o que nos permite obter uma compreensão abrangente sobre o tema em questão. O período considerado foi dos últimos dez anos considerando que vários softwares e recursos digitais foram incorporados ao ensino nesse período.

A primeira etapa da busca consistiu em inserir, na caixa de busca do CTD da Capes, as seguintes expressões: *Ensino de Cálculo Diferencial e Integral* e *Dificuldades no ensino de Cálculo Diferencial e Integral*. Os resultados encontrados englobam uma ampla quantidade de produções que se propõem a investigar, desde o uso de diferentes metodologias para o ensino de Cálculo, o uso de tecnologias digitais, até o ensino das noções de Cálculo no Ensino Médio.

Os filtros utilizados foram o período indicado (2014 a 2024) e produções de doutorado e mestrado acadêmico em Educação. Essa seleção resultou em 51 produções, das quais doze não possuíam divulgação autorizada, ou seja, não se pode ter acesso aos arquivos por meio do CTD da Capes. A partir da leitura dos resumos, descartamos todas aquelas que não realizavam uma discussão específica das dificuldades relativas à aprendizagem de Limite.

Para identificar as seções que discutiam as dificuldades, foi realizada a leitura das palavras-chave do trabalho, resumo, sumário e conclusões. Nos limitamos a investigar as dificuldades da aprendizagem no Ensino Superior descartando. Portanto, as pesquisas realizadas no Ensino Médio, visto que o conteúdo de Limite não consta na Base Nacional

[4] Coleta realizada em janeiro de 2024.

Curricular Comum.[5] Foram excluídos também as investigações sobre Limite com funções reais de mais de uma variável, os trabalhos cujos resultados discutem apenas problemas metodológicos, e motivos pessoais dos estudantes para a reprovação ou desempenho insuficiente, como falta de tempo ou motivação para estudar. Buscamos identificar seções que relatam, apresentam ou discutem dificuldades na aprendizagem de Limite. Essa seleção inicial foi organizada em um arquivo .xlsx que continha os dados principais de cada trabalho, como o título, autor, instituição, ano da publicação, filtros da busca e enlace para acesso ao trabalho.

Após esses procedimentos descritos, listamos as cinco dissertações e uma tese que discutem, de forma específica e mais detalhada, dificuldades dos estudantes na aprendizagem de Limite, organizadas na Tabela 1.

Tabela 1.

Lista de teses e dissertações selecionadas a partir do CTD

Referência	**Título do trabalho**	**Grau**
Araújo, 2020	A construção do conceito de Limite através da resolução de problemas	Dissertação
Carvalho, 2016	A análise dos erros dos alunos em Cálculo I como estratégia de ensino	Dissertação
Eckl, 2020	Ensino do conceito de Limite: aplicação de UEPS para identificar indícios de aprendizagem significativa com estudantes de ciências contábeis	Dissertação
Moraes, 2013	Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função em seu ensino e aprendizagem	Dissertação
Muller, 2015	Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de Cálculo: uma proposta baseada em análise de erros	Tese
Costa Neto, 2017	O ensino e a aprendizagem de Cálculo 1 na universidade: entender e intervir	Dissertação

A dissertação de Moraes (2013) não foi obtida nessa busca, mas compartilhada pela própria autora, após leitura de um artigo publicado que apresenta implicações didático-pedagógicas na construção do conceito de Limite de função real de uma variável real (Moraes; Mendes, 2016). A discussão parte do estudo de obstáculos epistemológicos de Limite listados por Cornu (1983, *apud* Moraes; Mendes, 2016), Sierpinska (1985) e Rezende (2003). Após a leitura do artigo, entramos em contato solicitando a disponibilização do arquivo da dissertação para inclusão em nossa análise.

[5] Documento normativo para as redes públicas e privadas de ensino. Referência para elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas para a Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio no Brasil (Brasil, 2017).

As bases teóricas utilizadas nessas dissertações (Tabela 1), identificadas após leitura inicial desses trabalhos, foram os estudos de Artigue (1995), Cornu (2002) e Sierpinska (1985; 1987), que dialogam entre si. Além disso, esses autores propõem categorias[6] para obstáculos epistemológicos da aprendizagem de Limite, e por isso sustentam o quadro teórico utilizado em nossas análises. Os trabalhos de Cornu (1981), Rezende (2003) e Tall (1993, 2012) ampliam as discussões desses autores acerca dos obstáculos de aprendizagem em Limite.

Ao final, elaboramos uma tabela que aproxima os obstáculos categorizados pelos autores (Tabela 5), de acordo com nossa leitura, utilizado nas análises para identificar e compreender as dificuldades pontuadas nas teses e dissertações brasileiras. Compreendemos, entretanto, que elas se relacionam umas com as outras, podendo estar intrinsecamente ligadas. Assim, a categorização proposta não tem como intuito limitar ou findar as discussões, mas facilitar a articulação na análise tencionada neste artigo.

Na sequência, discutimos obstáculos epistemológicos segundo Artigue (1995), Cornu (2002) e Sierpinska (1985; 1987).

Obstáculos epistemológicos na aprendizagem de limite

Assumimos como obstáculos epistemológicos na aprendizagem de Limite o que Sierpinska (1985) caracteriza como os desafios enfrentados pelos matemáticos, ao longo da história, para definir conceitos dentro de um conteúdo matemático e que ainda hoje apresentam elevado grau de dificuldade na compreensão para os estudantes no seu processo de aprendizagem. Para a autora, são situações que podem ser identificadas como causas na lentidão do processo de compreensão de um conceito matemático. Obstáculos epistemológicos podem envolver as particularidades do conceito e as especificidades necessárias para o desenvolvimento desse conceito (Sierpinska, 1985).

Artigue (1995) define dificuldades na aprendizagem de Limite em três categorias[7] (Tabela 1). Cornu (2002) e Sierpinska (1985, 1987) elaboram 4 e 5 categorias, respectivamente, para organizar as dificuldades específicas da aprendizagem de Limite (Tabelas 3 e 4).

Denotamos as categorias dos obstáculos definidos por autor, nas Tabelas 2, 3 e 4, com a letra inicial de seu nome, Artigue (A), Cornu (C) e Sierpinska (S), seguida do número cardinal

[6] Artigue (1995) utiliza o termo *dificuldades* para propor sua categorização, mas compreendemos que o termo pode apresentar variações linguísticas devido às traduções feitas da publicação original.

[7] Pode-se traduzir como grupos, tipos, classes ou categorias. Este último termo foi adotado ao longo deste trabalho.

(1, 2, 3, 4 ou 5) para distinguir as categorias do mesmo autor. As cores indicam quais serão discutidos conjuntamente e associados na Tabela 5.

Tabela 2.

Dificuldades em Cálculo segundo Artigue (1995)

Categoria	Dificuldade	Descrição
A1	Complexidade dos objetos matemáticos básicos	Incompreensão de diferentes objetos matemáticos importantes para a formação matemática do indivíduo, como números reais, sequências e funções.
A2	Noção e formalização de Limite	Conceitualização, formalização da noção de Limite, dificuldades com a linguagem, uso de termos (*tendendo a*, *tão pequeno quanto se queira*).
A3	Ruptura Álgebra/Cálculo	Rupturas necessárias em relação aos modos de pensamento puramente algébricos, muito familiarizado com as especificidades do trabalho técnico no Cálculo.

Tabela 3.

Obstáculos epistemológicos relacionados ao Limite segundo Cornu (2002)

Categoria	Obstáculo	Descrição
C1	Transposição numérica	Passagem do conceito geométrico para o numérico.
C2	Infinito	Obstáculo associado à noção de *infinitamente grande* e *infinitamente pequeno*.
C3	Metafísica	Introdução de ideias que não são apenas cálculos ou deduções lógicas, com a introdução do Limite sendo discutida mais no campo da metafísica e filosofia do que da Matemática.
C4	Limite atingir ou não	Discussão associada ao Limite atingir ou não atingir o valor ao qual está tendendo para.

Tabela 4.
Obstáculos epistemológicos relacionados ao Limite segundo Sierpinska (1985, 1987)

Categoria	**Obstáculo**	**Descrição**
S1	Horror ao Infinito	Refere-se à recusa ao conjunto do infinito e ao *status* de operação matemática atribuído ao Limite.
S2	Noção de funções	Dificuldades associadas à compreensão e aplicação da noção de função no contexto de Limite.
S3	Obstáculos geométricos	Desafios ligados à interpretação geométrica das grandezas e à continuidade.
S4	Obstáculos lógicos	Dificuldades de natureza lógica na compreensão do conceito de Limite.
S5	Obstáculos simbólicos	Dificuldades relacionadas à interpretação e manipulação de símbolos matemáticos no contexto de Limite.

As dificuldades da categoria A1 estão relacionadas a objetos que os estudantes deveriam ter algum contato ao longo da sua formação no Ensino Fundamental e Médio, como os números reais e funções (Artigue, 1995). A autora cita, como exemplos, a falta de clareza sobre quais são as diferenças entre os conjuntos numéricos, pois os estudantes tendem a confundir as diferentes categorias numéricas, como inteiros, números racionais e números irracionais.

No que diz respeito às funções, obstáculo específico da categoria S2, Artigue (1995) cita os resultados obtidos em pesquisas, como as realizadas por Eisenberg (2002), Leinhardt et al., (Artigue, 1995), e Dubinski e Harel (Artigue, 1995), que evidenciam um conjunto de dificuldades na aprendizagem desse conteúdo que dificilmente seriam resolvidas na disciplina de Cálculo. Eisenberg (2002) afirma que a ausência de habilidades para a compreensão gráfica de funções e a perda de significado através do processo intelectual de abstração matemática são alguns exemplos de dificuldades comuns na aprendizagem de funções.

Tall (1993) destaca que, além disso, os estudantes de Cálculo podem construir uma noção restrita do conceito de função, não compreendendo exemplos distintos daqueles que são abordados na aula. Segundo o autor, é preciso que os estudantes não apenas conheçam casos específicos de função, mas que também compreendam o conceito, de modo que tais dificuldades sejam superadas.

No que se refere a categoria A2, Artigue (1995) cita que, para o ensino de Cálculo, "o conceito de Limite ocupa um lugar essencial, dada a posição central do conceito nesse campo" (p. 112). Nesse contexto, para a autora, associado à compreensão do conceito de Limite está o sentido atribuído à palavra *Limite*, que pode sugerir uma barreira intransponível e inalcançável, uma concepção estática do Limite. Cornu (1981) associa essa dificuldade à discussão sobre o Limite poder ser ou não atingido, na categoria C4.

Tall (1993) descreve problemas relacionados aos diferentes registros simbólicos, como a representação gráfica e algébrica, o que Artigue (1995) associa com obstáculos de noção e formalização de Limite. A autora sugere que o trabalho com computadores e calculadoras gráficas pode ser útil para amenizar as dificuldades na compreensão dos diferentes registros, citando pesquisas com resultados promissores envolvendo o uso de softwares para representar Limite de formas distintas.

Ainda na categoria A2, existem os problemas relacionados com a dupla situação operacional e estrutural do Limite, o que se evidencia na dificuldade em separar o processo algébrico para obter o Limite do seu significado (Artigue, 1995). Tall (1993) afirma que há dificuldades em torno da linguagem e uso de termos, como *tender a, aproximação, tão pequeno quanto se queira,* entre outros. O autor lembra que tais termos são carregados de significados na linguagem coloquial, e que podem entrar em conflito com os conceitos formais e operacionais ao longo dos processos de ensino e aprendizagem.

Cornu (1981) propõe uma discussão a respeito dos múltiplos significados que são atribuídos aos termos utilizados para tratar de Limites. O autor considera que os estudantes possuem o que ele chama de *modelos espontâneos,* que são os significados prévios, distintos ou não do *modelo matemático* apresentado pelo professor. Ao longo do processo de aprendizagem, esses dois modelos entrarão em conflito, gerando adaptações que resultarão no desenvolvimento de *modelos próprios*, podendo ser múltiplos para um mesmo conceito.

Ainda para Cornu (1981), os modelos não estão nem totalmente errados nem totalmente certos em termos de conceito matemático, e no caso dos *modelos próprios,* muitas vezes são matematicamente imprecisos. Os *modelos próprios* evoluem à medida que são utilizados nas aulas ou estudos, tornando-se mais precisos e exatos, embora possam continuar distantes do *modelo matemático*. Um exemplo de conflito dos modelos citado pelo autor está associado à palavra *Limite*, que é mais comum na linguagem cotidiana dos estudantes. A palavra quase sempre se refere a algo estático, fixo, como um limite geográfico, um limite que não deve ser ultrapassado (moral ou regulamentar), um limite que nos proibimos de ultrapassar. Essa é a noção de dificuldade em capturar a ideia de aproximação, não um valor a ser atingido e, portanto, a noção de se *aproximar indefinidamente*. O significado intransponível (marco) do Limite é predominante, visto que, no significado comum, limite é o que separa duas coisas, e essa compreensão terá consequências para a atividade matemática. No senso comum, a noção de um Limite não contém ideia de variação, movimento ou aproximação (Cornu, 1981).

Portanto, compreendemos que esse obstáculo permite discutir não somente as dificuldades associadas à categoria C4, mas também aqueles derivados da linguagem. A compreensão da palavra *Limite* como barreira a ser respeitada, algo que não pode ser transpassado, é um exemplo de diferentes significados entre a língua materna e a linguagem Matemática. Entendemos que o uso de certas expressões para ensinar o conteúdo de Limite surge da necessidade de oferecer uma abordagem intuitiva, mas é importante levar em conta que há múltiplos significados atribuídos pelos *modelos espontâneos* dos estudantes. Considerando que na comunicação oral utilizamos a língua materna, que difere da linguagem Matemática, ambas possuem simbologias e significados próprios que devem ser observados.

Um exemplo citado por Sierpinska (1985) evidencia a presença de *modelos espontâneos* na sua investigação com os estudantes. Ela se deparou com a ausência de quantificadores para a definição de Limite utilizada por eles.

> Os meninos nunca dizem que os valores da função $\frac{sen\,(x)}{x}$ diferem, tão pequenos quanto desejamos para valores de x suficientemente próximos de zero; eles dizem apenas que, se x está próximo de zero, então $\frac{sen\,(x)}{x}$ está próximo de 1, ou que a diferença entre os valores de x e $sen\ x$ se torna cada vez menor (Sierpinska, 1985, p. 54).

Para a autora, a ausência de quantificadores e o não uso de símbolos para denotar a passagem para o Limite no processo de construção de *modelos próprios* representa o obstáculo lógico, caracterizado pela categoria S4 neste trabalho.

Podemos associar, ainda à A2, a dificuldade em compreender conceitos complexos e ideias novas em um tempo muito pequeno (Tall, 1993). Os estudantes geralmente são confrontados por uma multiplicidade de definições e, segundo Robert e Boschet (1984 *apud* Tall, 1993), os estudantes que conseguem ser mais bem sucedidos em Cálculo são aqueles que têm maior facilidade na mudança entre as diferentes representações. Segundo Tall (1993), esses estudantes

> precisam desenvolver uma capacidade de lidar com a complexidade do assunto, voltando-se, quase intuitivamente, para a representação que irá provar ser útil na causa específica. Pode ser que o cálculo funcione para aqueles que conseguem pensar com flexibilidade e falham para aqueles que buscam orientação nos métodos mais procedimentais para ajudá-los a superar seus problemas (p. 8).

O obstáculo associado à ruptura Álgebra/Cálculo (A3) é descrito como a necessidade de mudar o raciocínio para lidar com problemas que dependem da manipulação algébrica, que por si só não satisfaz as soluções necessárias aos problemas do Cálculo. Por exemplo, saber que não há um limite definido para $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ não finda a investigação, visto que é possível olhar para o comportamento de Limites infinitos, Limites no infinito, assíntotas, entre outros aspectos. Para Artigue (1995), “os modos de raciocínio subjacentes a esse trabalho são novos para os estudantes, e [...] as técnicas matemáticas envolvidas são delicadas” (p. 115). Nesse sentido, saber manipular Limites algebricamente é importante para compreender os conteúdos do Cálculo, mas não deve ser o único objetivo da disciplina.

A ruptura entre Álgebra e Cálculo é agravada quando a tarefa do estudante se resume a resolver listas de exercícios. Artigue (1995) argumenta que o ensino tradicional, com base na explicação expositiva e resolução de listas, não colabora para minimizar as dificuldades dos estudantes, mantendo a ilusão de uma aprendizagem progressiva e contínua (Artigue, 1995). Normalmente, as demonstrações ficam a cargo do professor, recebem maior foco nas aulas e nas avaliações, e prevalece a aplicação de técnicas, cálculos de Limites, de Derivadas, de Antiderivadas e Integrais, priorizando o estudo da técnica em detrimento do significado, gerando conflito pedagógico (Rezende, 2003).

Segundo Artigue (1995), para o estudante, também é importante saber operar com as definições formais no tratamento de problemas, porque em cada estágio do processo é preciso entender quais informações podem ser consideradas e o nível de precisão requerido para poder avançar na resolução. Isso exige não só familiaridade com expressões e com ordens de tamanho, como também uma compreensão clara dos conceitos que estão sendo abordados no problema.

Nesse sentido, como é no Cálculo que o estudante é confrontado pela primeira vez com o conceito de Limite, ele precisará de uma abordagem diferente do ensino tradicional, visto que esse conceito não envolve apenas cálculos desenvolvidos por um tratamento simples, aritmético ou algébrico (Tall, 1993). Em um trabalho posterior, Tall (2012) propõe uma *abordagem sensível* ao Cálculo, fundamentada nos processos de ensino e de aprendizagem nas percepções humanas e no uso dos sentidos para formular e compreender os conceitos matemáticos. Essa abordagem busca desenvolver as ideias de Cálculo a partir de origens sensíveis[8], permitindo que os conceitos fundamentais sejam compreendidos de maneira intuitiva. O objetivo é fornecer uma base sólida para o entendimento de conceitos mais avançados, como o conceito de Limite e Infinitesimais. Em vez de introduzir conceitos abstratos de forma isolada, Tall (2012) sugere

[8] Tall (2012) considera *origens sensíveis* aquelas situações que possibilitam o uso das percepções humanas e dos sentidos como ponto de partida para a compreensão dos conceitos matemáticos.

uma abordagem que busque relacionar o aprendizado matemático com a experiência do mundo real, tornando os conceitos mais tangíveis para os estudantes.

As categorias associadas à passagem da interpretação geométrica do Limite, denominada obstáculo geométrico ou transposição numérica, estão indicadas como C1 e S3. Esse obstáculo origina-se do significativo tempo transcorrido entre o método da Exaustão, desenvolvido pelos gregos no século V a.C., e a definição mais precisa de Limite, surgida a partir do século XVII. Segundo Sierpinska (1985), é possível identificar esse obstáculo epistemológico no uso excessivo apenas da interpretação geométrica de Limite.

Cornu (2002) afirma que a solução desenvolvida pelos gregos para calcular a área de um círculo, por exemplo, oferecia uma oportunidade para desenvolver ferramentas muito similares ao conceito de Limite. A possibilidade de reduzir sucessivamente algo, a ponto de atingir um tamanho tão pequeno quanto se queira, como no caso do princípio de Exaustão, aproxima-se bastante da ideia de Limite, mas não se pode afirmar que ela é a mesma concepção que temos hoje. Tanto Sierpinska (1987) quanto Cornu (2002) assumem o método da Exaustão como puramente geométrico.

Esse tratamento geométrico e não numérico gera outro obstáculo epistemológico distinto, denotado por S1 e C2, que dizem respeito exclusivamente aos problemas em torno da compreensão inadequada do infinito. Para Sierpinska (1985),

> embora seja paradoxal, não podemos entender a noção de limite sem ter entendido a noção de número real, e os números reais só são realmente compreendidos quando entendemos a própria noção de limite, mas isso não pode servir de base para uma definição. Esse paradoxo não pode ser resolvido, a menos que aceitemos a existência de conjuntos infinitos, de infinitos diferentes, aceitando-os como de fato, e não apenas potencialmente infinitos (p. 35).

A falta de compreensão a respeito do infinito estende-se, ainda, no tratamento de quantidades infinitamente pequenas. Cornu (2002) destaca (categoria C2) que o conceito de infinitesimal impulsionou o progresso no desenvolvimento de parte da noção de Limite. Nesse obstáculo epistemológico, o autor descreve a dificuldade em compreender quantidades infinitamente pequenas e infinitamente grandes, na questão que surge da possibilidade de "ter quantidades tão pequenas que sejam quase zero, e ainda não ter um tamanho 'atribuível' específico" (Cornu, 2002, p. 160).

Ainda sobre a dificuldade em lidar com o infinito, trazemos um exemplo discutido por Rezende (2003), sobre procedimentos comuns realizados nos cálculos de Limites. O autor discute o erro recorrente dos estudantes em afirmar que o limite $\lim_{x \to \infty} x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ resulta em zero. O procedimento dos estudantes para chegar a essa conclusão inconsistente é um caso evidente de incompreensão das indeterminações. A resolução dos estudantes, exemplificada pelo autor, é de que, quando $x \to \infty$ então $\frac{1}{x} \to 0$ e $sen\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$; logo, dessas afirmações, obtém-se que $x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) \to \infty \cdot 0 = 0$, porque todo número multiplicado por zero resulta em zero. Exemplos como esse trazidos por Rezende (1994), que o autor denomina *álgebra do infinito*, constituem um obstáculo epistemológico para a compreensão do infinito, que podemos incluir nas categorias S1 e C2.

Por fim, está a categoria C3, relacionada ao aspecto metafísico do Limite, e a categoria S5, relacionada aos problemas com a simbologia. Em C3, Cornu (2002) afirma que, ao introduzir o conceito de Limite, há uma mudança significativa de paradigma, indo além de cálculos ou deduções lógicas. O autor argumenta que, na Matemática clássica, o infinito não era considerado parte do campo de estudo. Tanto o infinito quanto a noção de Limite eram vistos como mais relacionados à metafísica ou filosofia do que à Matemática.

Na categoria S5 está a barreira do símbolo. Sierpinska (1985) afirma que a criação de um símbolo para representar a operação de Limite foi tardiamente introduzida por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Esse obstáculo se manifesta, por exemplo, na falta de compreensão da notação utilizada para denotar a operação de Limite por parte dos estudantes.

Certamente existem outros obstáculos epistemológicos que não foram citados aqui. Optamos por discutir brevemente aqueles citados pelos autores de referência e categorizá-los, mas concordamos com Sierpinska (1987), que essa lista não deve ser definitiva. As categorias devem ser exploradas, investigadas e colocadas em discussão em sala de aula, de modo a serem modificadas e aprofundadas. Cornu (2002) afirma que os erros cometidos pelos estudantes podem ser fontes de investigação para identificar obstáculos epistemológicos. Concordamos com o autor que obstáculos epistemológicos devem ser considerados pelo professor ao pensar o processo de ensino desses conceitos, não evitando que os estudantes se deparem com esses obstáculos, mas caso isso ocorra, oportunize discussões no intuito de superá-los (Cornu, 2002). Assim, no Tabela 5, sintetizamos esses obstáculos epistemológicos relacionados à aprendizagem de Limite, servindo como referência para as análises da tese e dissertações coletadas, auxiliando na organização e na articulação das dificuldades encontradas na aprendizagem de Limite de funções reais de uma variável real.

Tabela 5.

Obstáculos epistemológicos

Categoria	**Obstáculo**	**Descrição**
E1	Complexidade dos objetos matemáticos básicos	Dificuldades associadas à compreensão de conteúdos de matemática da Educação Básica, como números reais, operações algébricas, sequências, funções, etc.
E2	Noção e formalização de Limite	Conceitualização, formalização da noção de Limite, dificuldades com a linguagem, uso de termos (*tendendo a, tão pequeno quanto se queira*). Discussão associada ao Limite atingir ou não atingir o valor ao qual está tendendo para.
E3	Infinito	Refere-se à recusa ao conjunto do infinito e ao status de operação matemática atribuído ao Limite. Obstáculo associado à noção de *infinitamente grande* e *infinitamente pequeno*.
E4	Rupturas do Cálculo	Rupturas necessárias em relação aos modos de pensamento puramente algébricos, muito familiarizado com as especificidades do trabalho técnico no cálculo. Desafios ligados à interpretação geométrica das grandezas e à continuidade. Dificuldades de natureza lógica na compreensão do conceito de Limite. Introdução de ideias que não são apenas cálculos ou deduções lógicas, com a introdução do Limite sendo discutida mais no campo da metafísica e filosofia do que da Matemática.
E5	Obstáculos da linguagem	Dificuldades relacionadas à interpretação e manipulação de símbolos matemáticos no contexto de Limite. Diferenças entre a língua materna e a linguagem Matemática.

As categorias estão referenciadas com a letra E seguida do número cardinal correspondente. Os nomes dos obstáculos foram reorganizados para contemplar aqueles definidos por Artigue (1995), Cornu (2002) e Sierpinska (1985, 1987), citados neste trabalho e indicados pela cor utilizada no grifo. Na sequência, analisamos e discutimos a tese e as dissertações coletadas para a análise neste artigo.

Dificuldades na aprendizagem em Limite

A partir da tese e das dissertações selecionadas (Tabela 1), analisamos as principais dificuldades na aprendizagem de Limite, estabelecendo relações com os obstáculos epistemológicos da Tabela 5, elaborada à luz do referencial teórico adotado, buscando estabelecer as dificuldades epistemológicas nas pesquisas brasileiras. Denotamos a associação com os obstáculos através da indicação, em parênteses, da categoria e o seu número cardinal.

Obstáculos epistemológicos identificados por meio das pesquisas brasileiras

Partimos da pesquisa de Araújo (2020), que investiga erros cometidos por estudantes de Cálculo e como esses erros podem auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem de Limite. A análise parte de trabalhos e atividades realizadas pelos estudantes da disciplina de Cálculo no ano de 2018 em uma universidade pública. Sua conclusão denota que o conceito de Limite não é bem compreendido pelos estudantes, além de apontar para dificuldades nos aspectos algébricos da Educação Básica (Araújo, 2020).

Os principais erros identificados são os de cunho algébrico e interpretativo (E1). Araújo (2020) afirma "que os estudantes evocam uma imagem conceitual alusiva à ideia de que o Limite funciona como recurso para aproximação" (p. 96). O autor identifica que os estudantes entendem *tender a algum valor* como um valor numérico a ser substituído (E2). Eles assumem que a finalidade da igualdade no contexto dos Limites é apenas indicar um cálculo a ser realizado, do ponto de vista operacional (E2).

Há indícios, nas respostas dos estudantes, de que o Limite não foi compreendido em sua totalidade, seja pela sua definição e/ou representação geométrica em casos de um Limite infinito (E4). Um caso que evidencia essa dificuldade é demonstrado pela resposta incoerente do estudante, ao dizer que o limite $\lim_{x \to -3} \frac{2}{|x+3|}$ existe e é igual a -3. Pode-se associar esse erro tanto a E1 quanto a E4, dado que o estudante não conseguiu compreender corretamente o gráfico dessa função, o que lhe impediu de entender seu comportamento quando x tende a -3. É possível considerar que o estudante associou o Limite a um valor para o qual os pontos do gráfico tendem, mas sem diferenciar se essa aproximação ocorre no domínio da função ou no conjunto imagem.

Araújo (2020) declara que

> o Limite de uma função é visto [pelos estudantes] como uma operação algébrica, onde operamos com valores e encontramos um valor numérico; A compreensão de Limite [é vista] como uma noção intuitiva; dessa forma foi possível chegarmos à conclusão de que a compreensão do conceito de Limite por parte dos estudantes não é internalizada corretamente, uma vez que, essa compreensão não é evidenciada e entra em conflito com a definição conceitual de Limite (p. 102).

O autor traz exemplos em que os estudantes apresentam dificuldade em reconhecer padrões (E1) e identificar indeterminações (E4), reconhecendo ∞ como um número (E3) (Araújo, 2020). Um exemplo que ilustra esse obstáculo é a realização daquilo que Rezende (2003) chama de *Álgebra do infinito*: ao tentar encontrar o Limite de uma função quando x

tende ao infinito, no processo de resolução, o estudante se depara com $\infty - \infty$, e sua resposta é ∞.

Em sua conclusão, Araújo (2020) afirma que o ensino tecnicista de Limites, desprovido de contexto e baseado na resolução de longas listas e uso de livros-textos de Cálculo como única fonte, tem papel significativo no baixo rendimento dos estudantes na disciplina, sem conseguir promover a compreensão de vários tópicos da Educação Básica. Isso reafirma o que Tall (2012) discute a respeito de um ensino para o Cálculo que favoreça uma abordagem intuitiva, como alternativa consistente ao ensino baseado apenas em demonstrações e resoluções de listas de exercícios.

A pesquisa de Carvalho (2016) teve como objetivo identificar os erros mais frequentes dos estudantes das turmas de Cálculo no segundo semestre do ano de 2015, nos cursos de Engenharia Civil e de Produção. A análise buscou entender as dificuldades mais comuns, propondo abordagens e estratégias de ensino, além de sugerir possíveis ajustes na ementa dos cursos (Carvalho, 2016).

A autora desenvolveu uma organização para os tipos de erros descritos na sua pesquisa, em que o erro tipo 1 se refere à quando o estudante não possui conhecimento específico da disciplina Cálculo, em que ele pode não utilizar corretamente técnicas de derivação, não identificar o conceito de Limite em uma função e não relacionar Limites laterais com a continuidade de funções (Carvalho, 2016). Os erros do tipo 2 referem-se à falta de conhecimentos básicos da matemática, como técnicas de fatoração, propriedades de potências e interpretação dos gráficos de funções (Carvalho, 2016). Erros do tipo 3 são aqueles cometidos por distração e derivados da manipulação aritmética (Carvalho, 2016).

A partir da análise dos erros cometidos em duas provas, foi possível destacar a proeminência dos erros do tipo 1 e 2 entre as respostas dos estudantes. Os erros do tipo 1 representaram aproximadamente de 55% dos erros cometidos, e os de tipo 2 e 3, 45% e 5%, respectivamente. Carvalho (2016) destaca, com a análise das resoluções dos estudantes, que eles não compreenderam Limites laterais e Limites da função em um ponto específico (E2). A autora também identificou erros na fatoração de polinômios (E1).

A representação geométrica do Limite (E4) também foi um desafio na pesquisa de Carvalho (2016). Os estudantes não conseguiram perceber, observando o gráfico, a descontinuidade da função (E1), e cometeram erros na observação dos Limites laterais da função (E2). Além disso, alguns estudantes não conseguiram perceber a ideia, mesmo que intuitiva, de Limite da função, Limite lateral, tampouco continuidade (E2), utilizando erroneamente a noção de Funções crescentes (E1).

A dissertação de Eckl (2020) teve como objeto de pesquisa o ensino e a aprendizagem de conhecimentos matemáticos relacionados ao conceito de Limite de função com uma variável real. O autor investigou o desenvolvimento de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) e suas possíveis contribuições para a aprendizagem de conceitos relacionados a Limite. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi conduzida com estudantes de um curso de ensino superior em Ciências Contábeis.

Na análise do desenvolvimento da UEPS criada, o autor identificou, por meio das respostas às primeiras tarefas propostas, que os estudantes apresentavam conhecimento prévio sobre funções, mas uma grande parte apresentou respostas apenas parcialmente corretas (E1), com resultados que destoavam de como as variáveis estavam definidas no problema (Eckl, 2020). Analisando as respostas dos estudantes nas tarefas iniciais sobre funções, o autor afirma que as respostas não convergem para o que foi questionado inicialmente, mas que, posteriormente, é possível identificar indícios de amadurecimento do entendimento sobre variáveis, com uma interpretação coerente sobre a relação de dependência nas tarefas seguintes.

Na segunda tarefa, segundo o autor, foi possível concluir que uma quantidade parcial dos estudantes compreendeu o comportamento de crescimento dos termos da sequência apresentada (E2 e E4). A situação-problema foi enunciada da seguinte forma: “Divida 100 fardos de cevada entre cinco homens em progressão aritmética, de modo que a soma dos dois menores é um sétimo da soma dos três maiores” (Eckl, 2020, p. 103-104). O problema apresentava a sequência $\frac{10}{6}, \frac{65}{6}, \frac{120}{6}, \frac{175}{6}, \frac{230}{6}$, mas a maioria não soube explicar corretamente a ocorrência dos aumentos e a tendência presentes no comportamento analisado, indicando dificuldades em expressar suas interpretações na forma escrita (E1 e E2).

As respostas dos estudantes relacionaram Limite com a ideia de análise de funções por meio de aproximações de valores, sem atribuir uma explicação para possíveis tendências, interpretações parciais sobre o comportamento, aparecendo o contexto das aproximações, mas sem precisão elaborada nas respostas, conforme pode ser lido no excerto a seguir.

> O limite é algo que não podemos dizer [a]onde vai, mas sim que pode existir um final em determinada equação ou situação. Tem o objetivo de determinar o comportamento da função quando há valores. O limite ajuda na compreensão de várias funções, através de pontos como mínimo e máximo ou até mesmo os pontos de meio termo entre as funções. O limite é o infinito, ilimitado [resposta dos estudantes] (Eckl, 2020, p. 107).

Os estudantes demonstraram interpretações pouco elaboradas. Dessa forma, entende-se que eles tiveram dificuldades de entendimento/interpretação do questionamento e/ou da situação-problema (E2).

A pesquisa realizada por Moraes (2013), na sua dissertação, teve como objetivo identificar quais obstáculos epistemológicos estão presentes no processo de construção do conceito de Limite. A autora parte do quadro teórico de Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994) para analisar se os obstáculos estão presentes e de que modo se manifestam nas respostas dos estudantes, por meio de questionários.

A autora identificou que a definição de Limite, quando enunciada pelos estudantes com base na definição formal de Weierstrass, apresenta uma confusão simbólica (E2). O estudante, quando questionado, transmite a ideia de Limite da seguinte forma: "Dada uma função e um ponto definido na função ou não, temos o limite da função a este ponto, quando temos valores próximos a esse ponto, suas imagens tendem a um número na qual é o limite da função naquele ponto", e acrescenta: "$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ |x - a|\delta >\Rightarrow |f(x) - L| > \varepsilon$" [resposta dos estudantes] (Moraes, 2013, p. 95). O estudante demonstra compreender a ideia intuitiva de Limite, mas não sua definição (E2).

Outra dificuldade identificada por Moraes (2013) foi em relação ao uso de termos como *se aproxima de*, *tende a*, *tenta se aproximar, aproxima infinitamente, aproximado, aproxima-se*. A autora associa o uso desses termos ao aspecto dinâmico do Limite, destacando que os estudantes não compreenderam a natureza estática do Limite (E4). Em uma das respostas, a autora notou que o estudante considera apenas o caso em que a função é definida em a ($\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$): "O valor $f(x)$ tende a um limite. O valor desse limite é quando um ponto x (que tem imagem $f(x)$) tenta se aproximar de um ponto y que se aproxima infinitamente de um valor L. Limite é o valor de $f(x)$ quando x tende a y" (Moraes, 2013, p. 96). O estudante considera uma definição de forma dinâmica, não apenas estática, mas desconsidera o caso em que $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq f(a)$. A autora associa dificuldades semelhantes a esse exemplo e o uso dos termos de forma inapropriada ao obstáculo Geométrico da Sierpinska (1985) e o da Transposição Numérica de Cornu (2002) (E4).

Em relação a obstáculos geométricos (E4), a autora traz excertos com as respostas a respeito do que entendiam por Limite: "O limite da função é o ponto máximo como o nome já diz, um limite, máximo [a]onde a função pode chegar", ou "Estudar o comportamento do gráfico com relação a um ponto pertencente ao domínio" (Moraes, 2013, p. 98). Elas denotam dificuldades relacionadas ao conceito de Limite (E2).

As dificuldades associadas ao infinito ficam mais evidentes na segunda questão analisada por Moraes (2013), em que a autora solicita, no questionário, uma descrição breve do que se compreende por infinito. As respostas dos estudantes caracterizam o infinito como algo incomensurável, extenso, sem início ou fim (E3). Alguns estudantes o veem como um número inalcançável: "Infinito se define como algum lugar, espaço ou mesmo número inalcançável, onde você sabe que sempre vai existir, mas que você não consegue chegar. Em limite, torna-se um número extremamente grande ou extremamente pequeno" (Moraes, 2013, p. 100). Outras respostas associam o infinito a algo que se pode discutir no âmbito da filosofia, conforme pode ser lido no excerto a seguir.

> Infinito não é um número real, o infinito está além dos conceitos, por isso não temos domínio com operações de soma, subtração, multiplicação, divisão quando envolve o infinito. Filosoficamente o infinito está além da compreensão humana, sendo assim, pode ser abstraído mais não existe no concreto. Matematicamente é um valor incomensurável [resposta do estudante] (Moraes, 2013, p. 100).

Uma das respostas que evidencia a dificuldade em compreender como o Limite se comporta no infinito é a que o associa à ideia de indeterminação: "Seja: $\lim_{x\to\infty} f(x) =$ ocorre uma indeterminação. Infinito é denotado como uma aproximação do gráfico que vai do $+\infty$ ou $-\infty$" [resposta do estudante] (Moraes, 2013, p.101). Portanto, o estudante não assimila a existência do Limite com x tendendo ao infinito (E3). Há respostas em que se assume o infinito apenas como um símbolo: "Infinito é uma simbologia que representa um valor de grande escala", ou "Infinito é quando não consegue se determinar um valor, pois ele é muito alto, o ∞ é um símbolo e não um número" (E3) (Moraes, 2013, 101-102).

Moraes (2013) realiza uma discussão, em sua análise, a respeito dessas dificuldades associadas à compreensão do infinito. A autora identifica que os estudantes apresentam variações nas concepções sobre o infinito, que ela classifica em aspectos físicos ou simbólicos. Essas duas interpretações são citadas por Rezende (2003), quando discute a introdução do símbolo ∞ para quantidades infinitamente grandes ou como um número sujeito às operações aritméticas. Nas respostas dos estudantes, observa-se principalmente a primeira interpretação, que para Moraes (2013), apresenta uma aritmetização do Cálculo.

A quarta questão propunha verificar as concepções dos estudantes quanto à exatidão do valor do Limite da função. Apenas um estudante respondeu corretamente à questão, dentre os trinta e três participantes. A autora justifica a escolha das alternativas incorretas ao obstáculo de associação do Limite a um aspecto estritamente dinâmico, obstáculo C4 de Cornu (2002). Outra inconsistência explicitada foi a escolha dos estudantes em escrever ao lado da representação gráfica "$\lim_{x\to a} f(x) = L$", mas optaram pela alternativa que descreve que os valores das coordenadas da função, quando x tende para a pela esquerda, ou pela direita se aproxima, mas não atinge L (Moraes, 2013). A autora associa essa dificuldade ao obstáculo da transposição numérica descrita por Cornu (2002) (E4).

A quarta questão solicitava que os estudantes explicassem quais eram as diferenças entre duas funções, f e g, representadas apenas graficamente, em que f é uma função contínua definida em $\mathbb{R}$; e g, sua restrição no conjunto dos reais, exceto no ponto a. Nos eixos, estavam projetados com segmentos pontilhados os valores de a e de $L = f(a) = \lim_{x \to a} g(x)$

As diferenças entre as funções foram expressas de variadas formas, sendo recorrente o uso dos termos *contínuo* e *descontínuo*. Entre as respostas dos estudantes, podemos destacar: "A função f é contínua e a função g é descontínua, pois existe um 'buraco' no gráfico" e "Uma está definida em a e a outra não está, ou seja, f é definida em a e g não está, mas ambas são contínuas" [resposta do estudante] (Moraes, 2013, p. 105). Nas respostas, nota-se que o primeiro estudante considera continuidade como um *gráfico sem buracos;* e na segunda resposta, observa-se que o conceito de continuidade de uma função não é compreendido (E1).

Outras indicações para as diferenças entre as funções foi assumir a existência do Limite apenas para f ou que o Limite está se aproximando de L: "O limite de $f(x)$ é exatamente L quando x tender para a. O limite de $g(x)$ tende a L mas nunca será L" [resposta do estudante] (Moraes, 2013, p. 106). Aqui, consideramos que não conseguiram interpretar o Limite com base na sua representação gráfica (E4), transferindo, como citado por Moraes (2013), noções de Limite para as propriedades da função (E1). A autora relaciona essas dificuldades ao obstáculo do Limite ser ou não atingido (Cornu, 2002).

Em um segundo item, nessa mesma questão, a autora buscou verificar se o estudante compreende o que é necessário e suficiente para a existência do Limite de uma função em um ponto. Alguns estudantes afirmam que, em: "$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, o limite não existe, pois o limite existe quando x se aproxima de a e não quando x é a" [resposta do estudante] (Moraes, 2013, p. 108). A autora assume que foi um erro de escrita na resposta x tender ao infinito. Grande parte das respostas afirmam a não existência do Limite em g, justificada pela descontinuidade da função em a (E4). Nesse item, a autora identifica que um obstáculo evidente nas respostas é o aspecto de movimento presente no obstáculo cinético discutido por Rezende (1994), que associamos às rupturas do cálculo presentes na categoria E4 deste trabalho.

A última questão tinha como intuito verificar a compreensão de Limites no infinito. Apresentava as funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 1$ e solicitava a resposta aos seguintes itens: a)$\lim_{x \to \infty} f(x)$; b)$\lim_{x \to \infty} g(x)$; c)$\lim_{x \to \infty} f(x)$+$\lim_{x \to \infty} g(x)$; d)$\lim_{x \to \infty} f(x) - \lim_{x \to \infty} g(x)$; e)$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)}$. As principais dificuldades identificadas nas respostas dessa questão estavam relacionadas com erros de notação (E5), com os símbolos (E5) e as indeterminações (E4). Um estudante considerou $\infty + 3$ uma indeterminação, que a autora relacionou ao obstáculo definido por Sierpinska (1995), do *Horror ao infinito* (E3).

Moraes (2013) identificou, nas respostas a essa questão, dificuldades provenientes da manipulação algébrica (E1), em que o infinito era considerado um número, e manipulado sem nenhuma interpretação específica dos estudantes. O maior número de erros cometidos foi no item e), em que poucos conseguiram utilizar propriedades do Cálculo para encontrar o Limite corretamente (E3), assumindo o resultado como indeterminado ou uma das múltiplas respostas "$\lim_{x\to\infty} \frac{-\infty}{\infty} = -\infty, \lim_{x\to\infty} \frac{-\infty}{+\infty} = -\infty, \frac{-\infty}{\infty} = -\infty, \frac{-\infty}{+\infty} = +\infty$" [resposta dos estudantes] (Moraes, 2013, p. 113).

Muller (2015) teve como objetivo analisar dificuldades de aprendizagem apresentadas por estudantes de Cálculo, e testar possibilidades para a redução dessas dificuldades por meio de recursos tecnológicos. Na primeira fase da pesquisa, a autora analisou erros cometidos por estudantes de Cálculo de duas turmas distintas, uma no curso de Sistemas de Informação e outra em um curso de Engenharia, na realização de uma prova. Os resultados dessa fase apontaram que as maiores dificuldades estavam relacionadas a conteúdos de matemática básica (E1). As questões apresentadas no primeiro questionário eram relativas a cálculo de Limites, Derivadas e análise do comportamento de funções. No segundo teste para a sondagem dessas dificuldades, a autora focou as questões nos conteúdos em que considerou a compreensão mais insuficiente: frações algébricas, propriedades distributivas, equações, funções e razões trigonométricas. Não houve uma discussão específica a respeito das dificuldades em Limites.

Costa Neto (2017) investigou os índices de reprovação em Cálculo na Universidade de Brasília (UnB) entre 2010 e 2016. O Objetivo da sua pesquisa foi investigar a necessidade de implementar uma disciplina de Pré-Cálculo no Departamento de Matemática da Universidade, propondo o uso de aplicativos, como Excel e Calc, para trabalhar aspectos mais intuitivos das ferramentas do Cálculo para posteriormente inserir os conceitos de maneira formalizada (Costa Neto, 2017). O que interessa para a nossa pesquisa foi a análise feita pelo autor, de questões que foram cobradas em provas de Cálculo anteriores, realizada por meio de duas teorias psicométricas: Teoria Clássica dos Testes (TCT) e a Teoria da Resposta ao Item (TRI).

As três questões analisadas sobre Limite e Continuidade exigiam, do estudante, formular e articular argumentos adequadamente sobre Limites ordinários e Limites envolvendo o infinito, em que duas questões eram consideradas de nível médio e uma difícil (Costa Neto, 2017). Todas as questões apresentavam múltiplas alternativas.

A primeira solicitava uma condição para que $\frac{x}{x+1} > 1 - 10^{-3}$, com $x > 0$ como hipótese. Embora o tema da questão seja considerado o de Limites tendendo ao infinito, a resolução correta exigia apenas conhecimento de matemática básica. Apenas 37,5% responderam, e desses, 62,5% erraram (E1) (Costa Neto, 2017).

A segunda questão pedia o limite $\lim_{t \to \infty} \frac{sen(t)}{t}$, em que a resposta correta seria a existência do limite, dado que $sen(t)$ é limitado e o quociente $\frac{1}{t}$ tende a zero. As opções que mais atraíram escolhas foram as alternativas incorretas B, C e E, com 30%, 25% e 21% respectivamente (Costa Neto, 2017). A opção B tratava do Limite Fundamental, o qual é o Limite do mesmo quociente mencionado na questão, mas tendendo a 0 (E2). A opção C menciona os Limites inferior e superior da função seno: o estudante falhou em distinguir esse intervalo, para o qual a função seno está definida, com a noção de Limite lateral (E2). Já a opção E apresenta um erro que revela a dificuldade em diferenciar o domínio da imagem da função seno (E1).

A terceira questão pedia para discutir acerca da inexistência do limite $\lim_{x \to 0} x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$, exigindo conhecimento de propriedades fundamentais de Limite (Costa Neto, 2017). Era necessário identificar que a função seno é limitada no intervalo fechado entre -1 e 1, e que o limite $\lim_{x \to 0} x = 0$. Os estudantes entenderam que todo e qualquer Limite denota continuidade, substituindo equivocadamente $x = 0$ (E2). A alternativa B é considerada pouco plausível, pois o aluno substituiria $x = 0$ na função em questão e determinaria incorretamente o valor máximo da função seno. A opção C, escolhida por aproximadamente 15% dos estudantes, apresenta um erro semelhante ao descrito na opção A. Já o item E indica um erro relacionado à matemática básica, devido à multiplicação por 0 (E1) (Costa Neto, 2017).

Por fim, Costa Neto (2017) destaca que essa questão revela duas dificuldades comuns entre os estudantes: a tendência de confundir os pontos de máximo da função seno com os da função cosseno, o que é indicado pela escolha da opção E por 21% dos estudantes (E1), e a dificuldade em compreender o valor numérico exato de uma função em um determinado ponto e o valor aproximado, como é o caso do Limite (E2).

Concluindo a análise da tese e das dissertações acima, percebemos que os obstáculos mais presentes foram aqueles associados às categorias E1, E2 e E4 propostas. Notamos que diferentes categorias foram citadas em uma mesma questão, e disso inferimos correlações entre diferentes obstáculos epistemológicos na aprendizagem de Limite.

Considerações finais

Ao longo da pesquisa, buscamos estabelecer conexões entre as dificuldades específicas mencionadas nos trabalhos e os conceitos mais amplos abordados pelo quadro teórico proposto. Esse processo permitiu articular os desafios enfrentados no processo de aprendizagem apresentados pelas pesquisas (Tabela 1) e relacioná-los com os obstáculos epistemológicos elencados (Tabela 5).

Foi possível identificar várias dificuldades enfrentadas pelos estudantes no processo de aprendizagem de Limite, as quais estão intrinsecamente ligadas aos obstáculos epistemológicos discutidos. As pesquisas nos ajudaram a perceber que as dificuldades são muitas, em diferentes tipos de assuntos, e que não terminam apenas com a análise realizada. As questões apresentadas e analisadas pelos autores foram de grande ajuda, oferecendo uma noção dos conceitos relacionados ao Limite, que os estudantes enfrentam dificuldades em compreender.

Com base na análise, identificamos que as dificuldades mais recorrentes envolvem a complexidade dos objetos matemáticos básicos (E1), a noção e formalização de Limite (E2) e as rupturas do Cálculo (E4). Os estudantes podem enfrentar dificuldades relacionadas à compreensão de números reais, sequências e funções, que são fundamentais para o entendimento do conceito de Limite. Compreendemos, todavia, que o objetivo da disciplina de Cálculo não é suprir a defasagem de conteúdos não assimilados pelos estudantes ao longo da sua formação matemática básica, no Ensino Fundamental e Médio. Entretanto, não podemos desconsiderar tais dificuldades, visto que é evidentemente um obstáculo que impede a compreensão efetiva do estudante ao aprender Limite.

A própria noção e formalização de Limite (E2) é agravada se o aluno apresenta dificuldades das categorias E1 e E5. A incompreensão da linguagem Matemática e objetos matemáticos básicos pode acarretar dificuldades relacionadas à conceitualização do Limite e sua formalização Matemática (E2), em que a compreensão das definições ocorre de forma incompleta ou parcial. O estudante não compreende a diferença entre Limites infinitos ou no infinito (E3), não realiza uma análise gráfica ou uma interpretação do comportamento (E4), assumindo o Limite apenas como um valor a ser encontrado por meio da manipulação algébrica, o que por si só não é suficiente para resolver questões de Cálculo.

Além dessas dificuldades específicas, é importante ressaltar que a transição entre diferentes representações do Limite, as próprias mudanças e rupturas que o Cálculo historicamente propõe, a compreensão de conceitos complexos em um curto espaço de tempo, e a necessidade de desenvolver flexibilidade no pensamento matemático também podem representar obstáculos significativos na aprendizagem de Limite. Entendemos que é fundamental compreender que as categorias de obstáculos apresentadas não devem ser consideradas definitivas. O intuito da pesquisa de propor uma classificação para as dificuldades relatadas na literatura, mas que podem e devem ser exploradas, investigadas e debatidas, não somente em pesquisas posteriores, também em sala de aula.

Entendemos que os erros relacionados a Limites não são explicados somente pelos obstáculos epistemológicos do Cálculo, mas a associação proposta permitiu classificar essas dificuldades, muitas vezes consequentes de um ou dois obstáculos simultaneamente. Ao categorizar os obstáculos epistemológicos, a identificação das dificuldades específicas que os estudantes enfrentam ao aprender sobre o conceito de Limite ocorre de forma mais clara. Isso permite uma abordagem mais direcionada e eficaz para superar tais obstáculos.

Concluímos que a categorização proposta por Artigue (1995), Cornu (2002) e Sierpinska (1985; 1987) permite ampliar a compreensão das dificuldades e erros cometidos pelos estudantes no processo de aprendizagem de Limite de funções reais de uma variável real. Reconhecemos as limitações deste trabalho e propomos, após a reflexão sobre as questões discutidas, a ampliação da análise de erros para futuras pesquisas, investigando diferentes conteúdos relacionados a Limite dentro do Cálculo para compreensão mais detalhada, possibilitando entender as implicações dos obstáculos epistemológicos na aprendizagem de Limite.

Referências

Araujo, M. M. (2020). *A construção do conceito de Limite através da resolução de problemas. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática*. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

Artigue, M. (1995) Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, v. 25, p. 109-132, 1992.

Bachelard, G. (1947-1996). *La formation de l'ésprit scientifique*. Paris: J. Vrin. Tradução por Estela dos Santos Abreu. A formação do espírito científico. Rio de Janeiro: Contraponto.

Brasil. Ministério da Educação. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br

Brousseau, G. (1986). *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches em Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée SauvageÉditions, v.7.2, 33-116.

Carvalho, H. A. (2016). *A análise dos erros dos alunos em Cálculo I como estratégia de ensino. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*. Pontifícia Universidade Católica Do Rio De Janeiro, Rio de Janeiro.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite : modèles spontanés et modèles propres. *In Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME* (pp. 322-326).

Cornu, B. (2002). Limits. In: *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Springer Netherlands, p. 153-166.

Costa Neto, A. D. (2017). *O Ensino e a Aprendizagem de Cálculo 1 na Universidade: Entender e Intervir*. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade de Brasília, Brasília.

Eckl, W. C. (2020). *Ensino do conceito de Limite: aplicação de UEPS para identificar indícios de aprendizagem significativa com estudantes de Ciências Contábeis*. Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Regional De Blumenau, Blumenau.

Eisenberg, T. (2002). Functions and associated learning difficulties. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Dordrecht: Springer Netherlands.

Grabiner, J. V. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *The American Mathematical Monthly*, 90(3), 185-194.

Lima, G. L. (2013). A Implantação e o Desenvolvimento da Disciplina de Cálculo no Brasil: o modelo difundido pela USP. *Actas del VII Congresso Iberoamericano de Etnomatemática* - CIBEM. Montevideo, Uruguay.

Moraes, M. S. F. (2013). *Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função em seu ensino e aprendizagem*. Dissertação (Mestrado). Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém.

Moraes, M. S. F., & Freitas Mendes, M. J. (2016). Obstáculos epistemológicos relativos ao conceito de Limite de função. *Encontro Nacional de Educação Matemática* – ENEM. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo.

Muller, T. J. (2015). *Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de cálculo: uma proposta baseada em análise de erros*. Doutorado em Informática na Educação. Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre.

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Doutorado em Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques* (Revue), 6(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and Epistemological Obstacles Related to Limits, *Educational Studies in Mathematics*, 18,4, 371–87.

Tall, D. Students' difficulties in calculus. In: *Proceedings of working group*. 1993. p. 13-28.

Tall, D. A sensible approach to the calculus. *El cálculo y su enseñanza*, v. 3, p. 81-128, 2012.