ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p081-114

Elementos epistemológicos para o ensino de densidade e massa: tarefas exploratórias por meio de integrais de uma e mais variáveis

Epistemological elements for teaching density and mass: exploratory tasks through integrals of one and more variables

Elementos epistemológicos para la enseñanza de densidad y masa: tareas exploratorias a través de integrales de una y más variables.

Éléments épistémologiques pour l'enseignement de la densité et de la masse : tâches exploratoires à travers les intégrales d'une et plusieurs variables

Tainá Taiza de Araujo[1]
Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná - SEED/PR
Mestre em Ensino de Matemática
https://orcid.org/0000-0002-1798-1074

André Luis Trevisan[2]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0001-8732-1912

Resumo

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é uma disciplina essencial para o ensino da Matemática e outras ciências. Apesar dessa importância, observamos um insucesso dos estudantes e elevados índices de reprovação ou evasão, o que justifica a relevância de considerar aspectos epistemológicos que possibilitam compreender diversos fenômenos no ensino dessa disciplina. Nesse sentido, propomos um estudo de elementos epistemológicos dos saberes de densidade e massa, por meio de integrais multivariacionais, visto que integral é um saber essencial para a área das exatas. O objetivo deste estudo é investigar a elaboração e implementação de uma proposta de intervenção, centrada nas atividades de estudo e pesquisa, que ofereça aos estudantes de CDI oportunidades para explorar o conceito de integral de uma ou mais variáveis. Para tanto, realizamos uma investigação a partir da criação e implementação de uma intervenção baseada em episódios de resolução de tarefas, a fim de analisar os movimentos de generalização que os estudantes realizaram para definir uma integral definida multivariacional com base em integrais definidas de uma variável. Os resultados apontaram que os alunos mobilizaram um conjunto de conhecimentos de integrais múltiplas a partir do contexto de

[1] taina.taiza.araujo@gmail.com
[2] andreluistrevisan@gmail.com

cálculo de massa em uma, duas e três dimensões. A generalização expansiva foi utilizada para expandir questões procedimentais do cálculo de uma integral, enquanto a generalização reconstrutiva foi utilizada na compreensão de aspectos estruturais da integral de Riemann de mais de uma variável.

Palavras-chave: Ensino de cálculo diferencial e integral, Integrais multivariacionais, Epistemologia do saber, Densidade e massa, Tarefas exploratórias.

Abstract

Differential and Integral Calculus (CDI) is an essential subject for teaching Mathematics and other sciences. Despite this importance, we observed student failure and high rates of failure or dropout, which justifies the relevance of considering epistemological aspects that make it possible to understand different phenomena in the teaching of this discipline. In this sense, we propose a study of epistemological elements of density and mass knowledge, through multivariational integrals, since integral is essential knowledge for the area of exact sciences. The objective of this study is to investigate the development and implementation of an intervention proposal, centered on study and research activities, that offers CDI students opportunities to explore the concept of the integral of one and more variables. To this end, we carried out an investigation through the creation and implementation of an intervention based on work with task-solving episodes, in order to analyze generalization movement(s) that students performed to define a multivariational defined integral from defined integrals of a variable. The results showed that the students mobilized a set of knowledge of multiple integrals, from the context of calculating mass in one, two and three dimensions. Expansive generalization was used to expand procedural issues in the calculation of an integral, while reconstructive generalization was used to understand structural aspects of the Riemann integral of more than one variable.

Keywords: Teaching differential and integral calculus, Multivariational integrals, Epistemology of knowledge, Density and mass, Exploratory tasks.

Resumen

El Cálculo Diferencial e Integral (CDI) es una asignatura imprescindible para la enseñanza de las Matemáticas y otras ciencias. A pesar de esta importancia, observamos fracaso estudiantil y altos índices de fracaso o deserción, lo que justifica la relevancia de considerar aspectos epistemológicos que permitan comprender diferentes fenómenos en la enseñanza de esta disciplina. En este sentido, proponemos un estudio de elementos epistemológicos del conocimiento de densidad y masa, a través de integrales multivariantes, ya que la integral es un conocimiento imprescindible para el área de las ciencias exactas. El objetivo de este estudio es investigar el desarrollo e implementación de una propuesta de intervención, centrada en actividades de estudio e investigación, que ofrezca a los estudiantes del CDI oportunidades para explorar el concepto de integral de una y más variables. Para ello, llevamos a cabo una investigación mediante la creación e implementación de una intervención basada en el trabajo con episodios de resolución de tareas, con el fin de analizar el(los) movimiento(s) de generalización que realizaron los estudiantes para definir una integral definida multivariacional a partir de integrales definidas de una variable. Los resultados mostraron que los estudiantes movilizaron un conjunto de conocimientos de integrales múltiples, a partir del contexto del cálculo de masas en una, dos y tres dimensiones. La generalización expansiva se utilizó para ampliar cuestiones de procedimiento en el cálculo de una integral, mientras que la generalización reconstructiva se utilizó para comprender aspectos estructurales de la integral de Riemann de más de una variable.

Palabras clave: Enseñanza del cálculo diferencial e integral, Integrales multivariantes, Epistemología del conocimiento, Densidad y masa, Tareas exploratorias.

Résumé

Le calcul différentiel et intégral (CDI) est une matière essentielle pour l'enseignement des mathématiques et des autres sciences. Malgré cette importance, nous observons des échecs chez les étudiants et des taux élevés d'échec ou d'abandon, ce qui justifie la pertinence de considérer les aspects épistémologiques qui permettent de comprendre divers phénomènes dans l'enseignement de cette matière. Dans ce sens, nous proposons une étude des éléments épistémologiques de la connaissance de la densité et de la masse, en utilisant les intégrales multivariables, étant donné que les intégrales sont des connaissances essentielles pour les sciences exactes. L'objectif de cette étude est d'examiner la conception et la mise en œuvre d'une proposition d'intervention, centrée sur des activités d'étude et de recherche, qui offre aux élèves du CDI des opportunités d'explorer le concept d'intégrale d'une ou plusieurs variables. À cette fin, nous avons mené une enquête basée sur la création et la mise en œuvre d'une intervention fondée sur des épisodes de résolution de tâches, afin d'analyser les mouvements de généralisation effectués par les élèves pour définir une intégrale définie multivariable à partir d'intégrales définies d'une variable. Les résultats ont montré que les élèves ont mobilisé un ensemble de connaissances sur les intégrales multiples à partir du contexte du calcul de la masse en une, deux et trois dimensions. La généralisation expansive a été utilisée pour élargir les questions de procédure dans le calcul d'une intégrale, tandis que la généralisation reconstructive a été utilisée pour comprendre certains aspects de l'intégrale.

Mots-clés : Enseignement du calcul différentiel et intégral, Intégrales multivariées, Épistémologie de la connaissance, Densité et masse, Tâches exploratoires.

Elementos epistemológicos para o ensino de densidade e massa: tarefas exploratórias por meio de integrais de uma e mais variáveis

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), em nível tanto nacional quanto internacional, tem registrado há várias décadas altos índices de reprovação e desistência, tanto em cursos de disciplinas como Matemática e Física, quanto em cursos de Engenharia (Silva, 2013; Zarpelon, 2022). Um dos motivos para altos índices de desistência está relacionado a "como" a disciplina de CDI geralmente tem sido abordada nas universidades.

> Tradicionalmente, as disciplinas matemáticas, tanto na Educação Básica quanto (e principalmente) no Ensino Superior, são "cartesianas", sustentadas pelo tripé definição exemplo-exercício, seguido de uma avaliação cumulativa que prioriza a reprodução de procedimentos. Um dos efeitos gerados por essa tradição é tornar essas disciplinas, na visão dos estudantes, maçantes e algorítmicas, sem objetivos e desmotivadoras, principalmente para cursos de engenharia. (Couto; Fonseca & Trevisan, 2017, p. 51).

Defendemos que ambientes de ensino e de aprendizagem que difiram dos métodos tradicionais se fazem necessários no âmbito de disciplinas matemáticas no Ensino Superior, já que oportunizam aos estudantes o protagonismo, potencializando a compreensão de conceitos matemáticos (Trevisan & Mendes, 2018; Trevisan; Alves & Negrini, 2021; Trevisan & Araman, 2021; Trevisan, 2022).

Uma abordagem potencial envolve a utilização de tarefas exploratórias (Ponte, 2005, 2014) com características mais abertas, que podem ser resolvidas de forma intuitiva, sem que uma definição formal tenha sido apresentada anteriormente, o que incentiva os alunos a pensarem de forma autônoma e, com auxílio de intervenção do professor, a explorarem conceitos matemáticos e não apenas a reproduzi-los. Sendo assim, prioriza-se o trabalho colaborativo (Granberg & Olsson, 2015; Carlsen, 2018), que fomenta a interação entre os colegas, momento em que a contribuição de um estudante pode influenciar as hipóteses de outros, especialmente quando um aluno está seguindo um caminho improcedente.

No contexto específico do conceito de Integral de Riemann via Somas de Riemann, foco deste estudo, compreender esse conceito é crucial não apenas na Matemática, mas também em disciplinas subsequentes das Ciências (Haddad, 2013; Greefrath et al., 2021). No entanto, muitos alunos, mesmo após concluírem a disciplina de CDI, têm dificuldades em compreender esse conceito, mobilizando apenas os conhecimentos operacionais, e desconsiderando os conceitos e propriedades matemáticas. Mostra-se fundamental, assim, refletir sobre situações didáticas, por meio de conceitos epistemológicos e didáticos (Schneider & Job, 2016) que circunscrevem o conceito de integral.

De acordo com Jones, Lim e Chandler (2017), vários estudos recentes evidenciam que os alunos de CDI frequentemente enfrentam dificuldades ao utilizar o conceito de integração, tanto em cursos de Matemática quanto em disciplinas subsequentes das Ciências. Ao analisar essas dificuldades e suas causas, reconhece-se que "as ideias contidas na estrutura de soma de Riemann são fundamentais para uma compreensão robusta da integração definida" (Jones; Lim & Chandler, 2017, p. 1076).

Por sua vez, Mateus-Nieves e Moll (2021, p.23), ao refletirem sobre a complexidade epistêmica do objeto matemático *integral*, defendem que "uma estratégia para garantir a competência dos alunos no uso da integral para a resolução de problemas consiste em desenhar sequências de tarefas destinadas a apresentar diferentes significados parciais da integral interligados". Nesse sentido, elencamos, como elementos epistemológicos, para este estudo, os saberes de densidade e massa, por meio de integrais multivariacionais, como forma de ilustrar uma possibilidade de intervenção centrada em atividades de estudo de pesquisa, que apresentem, de forma interligada, alguns significados da integral.

Em especial, a elaboração de um modelo epistemológico de referência (MER) (Gascón, 2011) para o ensino de integrais multivariacionais implica na reflexão sobre aspectos ou dimensões do problema didático de ensinar esse conteúdo de CDI. Neste trabalho, em especial, assumimos esse MER enquanto uma organização didática de tarefas exploratórias (Ponte, 2005), que experimentamos em duas turmas de Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná campus Londrina, na disciplina de CDI 2.

Assim, o objetivo deste estudo é *investigar a elaboração e implementação de uma proposta de intervenção, centrada nas atividades de estudo e pesquisa, que ofereça aos estudantes de CDI oportunidades para explorar o conceito de integral de uma e mais variáveis*. Para tanto, realizamos uma investigação por meio da criação e implementação de uma intervenção baseada no trabalho com episódios de resolução de tarefas, considerando os conceitos de camadas do conhecimento associadas ao conceito de integral definida (Sealy, 2006, 2014), juntamente com a ideia de Somas de Base Multiplicativa (Jones; Lim & Chandler, 2017), bem como os movimentos de generalização envolvidos na definição de integrais multivariadas (Jones, 2015).

Elementos epistemológicos para o ensino de densidade e massa por meio de integrais

Em um modelo epistemológico na Matemática, segundo Almouloud (2007), o processo de construção de conceitos científicos matemáticos deve, para além de relacionar, integrar seus contextos históricos – a evolução do saber – e sua gênese, e analisar como o sujeito compreende esse processo.

Segundo Mateus-Nieves (2021), há uma escassez de literatura relacionada a estudos sobre a integral como conceito científico de matemática, o que salienta a importância de trabalhos como este, na medida em que se propõe discutir alguns elementos epistemológicos fundamentais no processo de sua constituição teórica. Além de contribuir com uma melhor compreensão do conceito de integral em si, esse estudo pode oferecer ferramentas que merecem ser levadas em conta para a construção de um modelo epistemológico de referência (MER) para o ensino do CDI de modo geral.

Partindo desse contexto, apresentamos alguns elementos epistemológicos para o ensino dos saberes de densidade e massa usando integrais de uma ou mais variáveis. Para tanto, analisamos como se desenvolve o raciocínio matemático (RM), considerando seus diferentes processos, com destaque para a generalização e seus tipos. Na sequência, argumentamos como a utilização das integrais se mostra fundamental para que os alunos possam reestruturar e reconstruir os conceitos de densidade e massa.

Processos de raciocínio matemático

O desenvolvimento do raciocínio matemático é um objetivo importante dentro do contexto do ensino de Matemática, em todos os níveis escolares (Goos & Kaya, 2020). De acordo com Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020, p.7), o raciocínio matemático envolve "realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado". Essa perspectiva é compartilhada por Jeannotte e Kieran (2017, p.7), que afirmam que raciocinar matematicamente é "inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos".

A compreensão do raciocínio matemático, no entanto, abrange outras nuances para além de sua definição. Jeannotte e Kieran (2017) propõem uma abordagem do raciocínio matemático sob duas perspectivas, a estrutural e a processual. No âmbito estrutural, o raciocínio matemático é categorizado como dedutivo, indutivo e abdutivo. Quanto ao aspecto processual, as autoras identificam nove processos distintos, porém interligados: generalização, conjectura, identificação de padrões, comparação, classificação, validação, justificação, prova e prova formal (Jeannotte & Kieran, 2017). Em especial, a análise de diferentes processos de raciocínio matemático, no contexto do trabalho com tarefas exploratórias (Ponte, 2005) em aulas de CDI, tem sido foco do grupo de pesquisa na qual este artigo se desenvolve (Negrini; Trevisan & Araman, 2024, no prelo; Trevisan; Araman & Serrazina, 2023).

Nosso enfoque, neste artigo, recai no processo de generalização. A generalização envolve "inferir narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos do conjunto a partir de um subconjunto desse conjunto" (Jeannotte & Kieran, 2017, p. 9). Nesse processo, reconhece-se um padrão ou uma propriedade comum a um conjunto de objetos, permitindo expandir o domínio de validade desta propriedade para um conjunto maior de objetos (Ponte & Mata-Pereira, 2017).

Atrelada a essas definições a teoria de Harel e Tall (1991), define que o

> [...] termo "generalização" é usado tanto dentro como fora da matemática para significar o processo de aplicação de um determinado argumento num contexto mais amplo. Porém, os processos cognitivos exigidos pela generalização matemática dependerão do conhecimento atual do indivíduo (Harel & Tall, 1991, p. 1).

Com isso, os autores distinguem a generalização em três tipos diferentes: generalização disjuntiva, generalização reconstrutiva e generalização expansiva. O primeiro caso "ocorre quando, ao passar de um contexto familiar para um novo, o sujeito constrói um novo esquema disjunto para lidar com o novo contexto e o adiciona ao conjunto de esquemas disponíveis" (Harel & Tall, 1991, p.2). A generalização expansiva ocorre "quando o sujeito expande a faixa de aplicabilidade de um esquema existente sem reconstruí-lo" (Harel & Tall, 1991, p.2). Já "a generalização reconstrutiva ocorre quando o sujeito reconstrói um esquema existente para ampliar sua faixa de aplicabilidade." (Harel & Tall, 1991, p.2). Por fim,

> [...] a generalização reconstrutiva é uma generalização verdadeira no sentido de que os esquemas anteriores são incluídos diretamente como casos especiais no esquema final. A generalização reconstrutiva difere porque o esquema antigo é modificado e enriquecido antes de ser englobado no esquema mais geral (Harel & Tall, 1991, p.2,).

Aplicadas ao conceito de integrais definidas, as generalizações do tipo disjuntiva e expansiva se mostram insuficientes para expandirmos a compreensão de integral de uma variável para integrais multivariáveis, sendo necessário que o estudante alcance a generalização reconstrutiva, pois é preciso de algumas modificações do esquema da integral definida de uma variável para englobar mais variáveis.

Integrais multivariacionais

O objetivo desta subseção é apresentar uma discussão acerca da sistematização do conceito de integrais definidas multivariadas como uma generalização do conceito de integrais definidas de uma única variável. No âmbito do ensino desses conceitos, embora seja claro para os especialistas que os tópicos de cálculo multivariável são extensões naturais de tópicos de cálculo de variável única, como os alunos veem a relação entre ideias como função e taxa de mudança em cálculo de variável única e multivariável não é bem compreendido (Dorko & Weber, 2014, p. 2*)*.

Sendo assim, estender o conceito de integral de uma variável para integral de múltiplas variáveis pode não ser trivial para os estudantes (Jones, 2015), já que, nesse processo, para que a conceitualização de integrais multivariadas ocorra, é necessária a reestruturação ou a expansão dos conceitos de integrais de uma variável. Jones (2015) aponta que os entendimentos de integrais múltiplas que os alunos detêm estão fortemente enraizados em concepções anteriores de integrais de uma variável. Dessa forma, esse alunos "podem não ser capazes de simplesmente estender seu conhecimento para o domínio multivariado, mas eles podem precisar revisitar as ideias contidas em concepções integrais únicas e reestruturá-las para criar entendimentos para integrais múltiplas" (Jones, 2015, p.167).

O autor pauta esse processo de reestruturação das integrais múltiplas nos três diferentes processos de generalização da teoria de Harel e Tall (1991) apresentados anteriormente. Assim, as sucessivas generalizações das técnicas de integração de uma integral definida no R^1, R^2 e R^3 são essencialmente um caso de aplicação das mesmas técnicas para determinar o valor da integral definida dentro de cada dimensão. Os aspectos algébricos desse processo provavelmente serão uma generalização expansiva para a maioria dos alunos. Entretanto, os aspectos geométricos de integral definida, no R^1, R^2 e R^3 – modificar as ideias geométricas no espaço uni, bi e tridimensional – provavelmente exigirão uma generalização reconstrutiva, que poucos conseguem realizar (Jones, 2015).

Logo, nossa proposta é, a partir de contextos em que se utiliza a integral definida de uma variável, organizar uma intervenção por meio de uma sequência de tarefas exploratórias que possibilite ao estudante que cursa CDI estabelecer uma expansão ou uma reconstrução do conceito de integral de uma para múltiplas variáveis. Considerando que a maioria da matemática usada no mundo real envolve funções de muitas variáveis, partiremos do contexto da Física, elegendo o conceito de densidade e massa de um objeto unidimensional para, a partir dele, reconstruir e expandir o conceito de integral definida para os contextos bi e tridimensional.

Densidade e massa de uma haste unidimensional

Nesta e nas próximas duas seções traremos uma breve discussão do conceito de integral definida multivariacional como extensão do conceito de integral definida de uma variável, com respaldo em Stewart (2013, 2016).

A densidade linear é a medida de uma quantidade de qualquer valor característico por unidade de comprimento. Para exemplificar, consideremos uma haste longa e fina de massa m e comprimento Δx. A densidade deste objeto unidimensional é expressa por $\rho = \frac{m}{\Delta x}$. Logo, a massa desse objeto é dada pela fórmula $m = \Delta x \,.\, \rho$.

A equação anterior define a massa desde que a densidade seja constante. Mas o que acontece se a densidade for variável? Ou seja, se $m = \Delta x \,.\, \rho(x)$. Suponhamos que um objeto unidimensional esteja posicionado, ao longo de um eixo coordenado, entre $x = a$ e $x = b$, e sujeito a uma densidade variável $\rho(x)$ de modo que seja particionado em cinco subintervalos de $[a, b]$ (Figura 1).

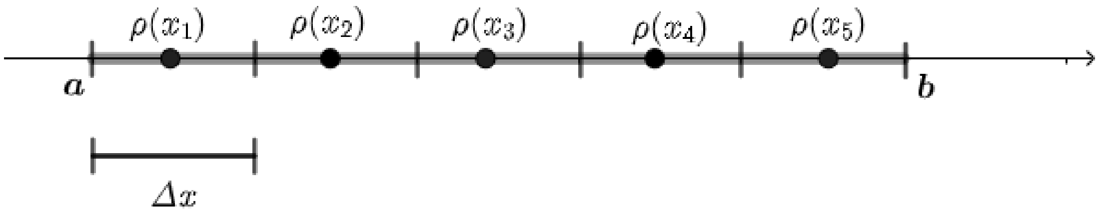


Figura 1.

Haste não-homogênea particionada em 5 subintervalos. (imagem dos autores, 2022)

No caso de a densidade ser variável, assumimos uma densidade representativa (que podemos chamar também de densidade amostral) em cada subintervalo para calcularmos uma aproximação da massa desse objeto unidimensional. Sendo assim, a aproximação do valor da massa desse objeto será dada pelo somatório do produto entre o comprimento e a densidade representativa em cada subintervalo de $[a, b]$. Ou seja,

$$m \simeq \rho(x_1)\Delta x + \rho(x_2)\Delta x + \rho(x_3)\Delta x + \rho(x_4)\Delta x + \rho(x_5)\Delta x = \sum_{i=1}^{5} \rho(x_i)\Delta x$$

Agora, se particionarmos o intervalo $[a, b]$ em 10 subintervalos (Figura 2) e assumirmos uma densidade representativa em cada um desses subintervalos, como mostra a figura a seguir, temos que a massa dessa haste é calculada pela soma dos produtos de Δx pela densidade representativa em cada subintervalo:

$$m \simeq \rho(x_1)\Delta x + \rho(x_2)\Delta x + \rho(x_3)\Delta x + \rho(x_4)\Delta x + \rho(x_5)\Delta x + \rho(x_6)\Delta x + \rho(x_7)\Delta x$$
$$+ \rho(x_8)\Delta x + \rho(x_9)\Delta x + \rho(x_{10})\Delta x = \sum_{i=1}^{10} \rho(x_i)\Delta x$$

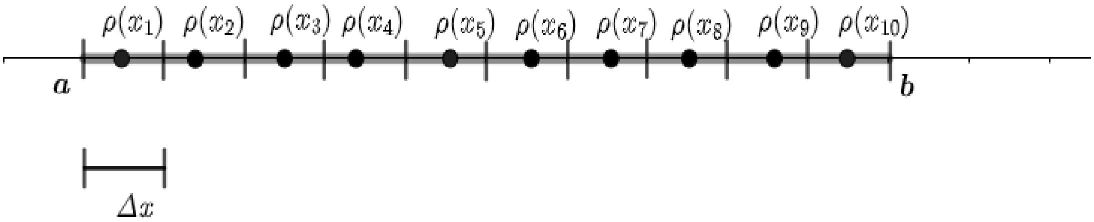


Figura 2

Haste não-homogênea particionada em 10 subintervalos (imagem dos autores, 2022).

Agora, vamos supor que essa haste seja subdividida em n partições e densidade aproximadamente constantes em cada intervalo (Figura 3).

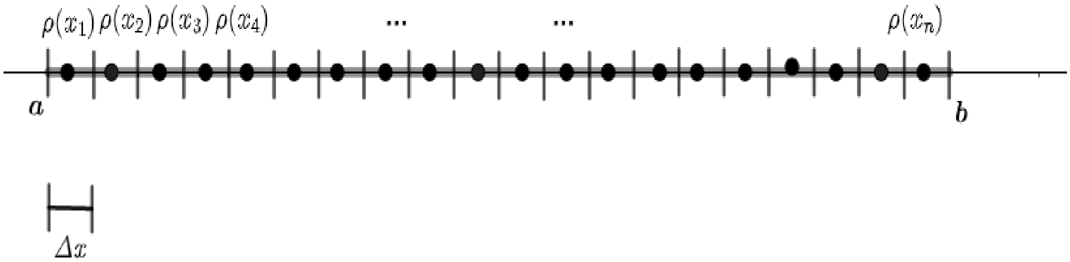


Figura 3.

Haste não-homogênea particionada em n subintervalos (imagem dos autores, 2022).

Teremos que a aproximação da massa dessa haste será dada pelo somatório a seguir,

$$m \simeq \rho(x_1)\Delta x \ + \rho(x_2)\Delta x \ + \rho(x_3)\Delta x \ + \rho(x_4)\Delta x + \ldots + \rho(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\Delta x$$

isto é,

$$m \simeq \textstyle\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\Delta x \qquad (1)$$

Logo, a massa é determinada por uma soma de Riemann, ou seja, uma soma que é de base multiplicativa. Se assumirmos Δx infinitesimalmente pequeno e n tendendo para valor relativamente muito grande, ou seja, $n \to \infty$, isso nos fornecerá o valor exato da massa dessa haste de comprimento $b \ - \ a$.

$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\Delta x = \int_a^b \rho(x)\Delta x = \int_a^b \rho(x)dx$$

Passemos agora a tratar de outro contexto que nos leva à interpretação do conceito de integrais definidas a partir do cálculo da área sob uma curva. Consideremos a área S de uma região delimitada pelo gráfico da função $y = f(x)$, limitada $x = a$ e $x = b$ (Figura 4).

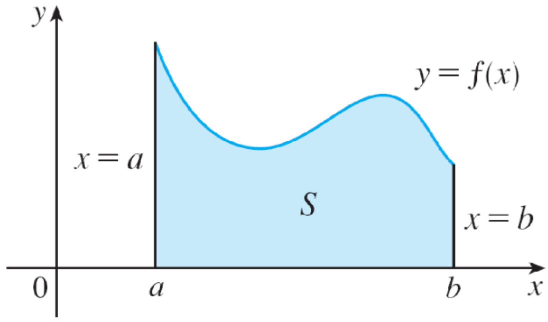


Figura 4.

Área sob a curva de $y = f(x)$*. (Stewart, 2013, p.326).*

Suponha que S seja dividida seja em n subintervalos, $S_1, S_2,\ S_3, \ldots, S_n$, de mesma largura, como ilustrado na Figura 5.

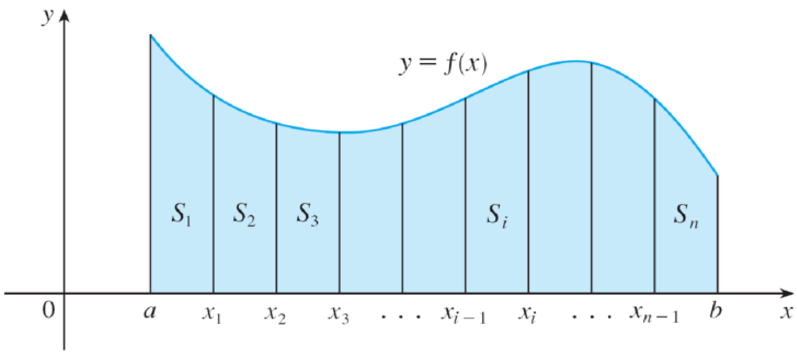


Figura 5.

Região S dividida em n *subintervalos. (Stewart, 2013, p. 329).*

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa. Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $y = f(x)$ nas extremidades direitas dos subintervalos.

A largura do intervalo $[a, b]$ é $a - b$, assim, a largura de cada uma das n faixas é $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Assim, essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, onde $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Vamos aproximar a i -ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f na extremidade direita (Figura 6).

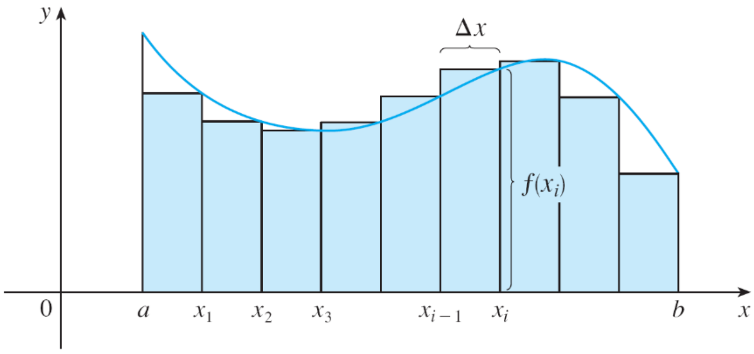


Figura 6.

Aproximação da área da região por retângulos. (Stewart, 2013, p. 330)

Então, a área do i-ésimo retângulo é $f(x_i)\Delta x$. O que consideramos intuitivamente como a área de S é aproximada pela soma das áreas desses retângulos, que é

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Em sequência, vamos definir a área A da região S.

A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua é o limite da soma de áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Pode ser demonstrado que esse limite sempre existe, uma vez que estamos supondo que a função seja contínua. Pode, também, ser demonstrado que obteremos o mesmo valor se usarmos as extremidades esquerdas dos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

Assim, ao invés de usarmos as extremidades esquerda ou direita, podemos tomar a altura do i-ésimo retângulo como o valor de f em *qualquer* número x_i^*no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1},\ x_i]$. Chamamos os números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ de pontos amostrais, como mostrado na Figura 7.

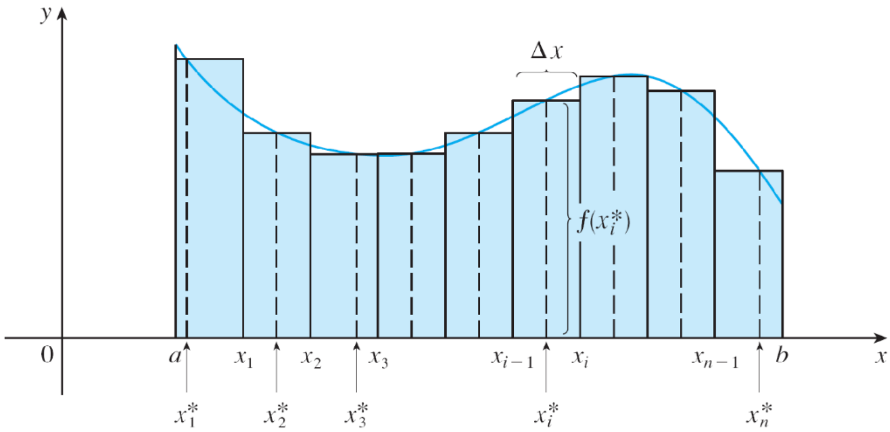


Figura 7.

Marcação dos pontos amostrais. (Stewart, 2013, p. 331)

A Figura mostra que os retângulos se aproximam quando os pontos amostrais não foram escolhidos como as extremidades. Logo, uma expressão mais geral para a área S é

$$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\Delta x \ + f(x_2^*)\Delta x + \ldots + f(x_n^*)\Delta x]$$

Portanto,

$$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\Delta x \ + f(x_2^*)\Delta x + \ldots + f(x_n^*)\Delta x] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Vimos que essa estrutura aparece tanto ao tentarmos encontrar a massa de uma haste unidimensional não homogênea, quanto ao realizarmos o cálculo da área de uma região delimitada por uma curva e retas verticais. Esse mesmo tipo de limite ocorre em uma grande variedade de situações como, por exemplo, no cálculo do trabalho realizado por uma força, do centro de massa de um objeto ou, ainda, da distância percorrida por um objeto.

Assim, podemos conceituar a integral definida.

Se f é uma função contínua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $x_0(= a)x_1, x_2, \ldots, x_n(= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então, a integral definida de f de a a b é

$$\int_R f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Densidade e massa de uma lâmina não homogênea

Consideremos, agora, um objeto achatado idealizado de forma suficientemente fina para ser imaginado como plano e bidimensional. Dizemos que tal objeto é uma lâmina. Uma lâmina é dita homogênea se sua composição for inteiramente uniforme, caso contrário é dita não homogênea. A densidade ρ de uma lâmina homogênea de massa m e área A é dada por $\rho = \frac{m}{A}$. Já em uma lâmina não homogênea, a composição pode variar de ponto para ponto. Uma definição apropriada de "densidade" deve refletir essa condição. Para estabelecer tal definição, considera-se que a lâmina seja colocada em um plano bidimensional. A densidade no ponto (x, y) pode ser especificada por uma função $\rho(x, y)$, chamada de função densidade.

Suponha que a densidade da lâmina no ponto (x, y) pode ser especificada por uma função densidade $\rho(x, y)$. Considere essa lâmina não-homogênea limitada pelos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, no eixo das abscissas e das ordenadas, respectivamente, e dividida em n retângulos e, em cada retângulo, a densidade é aproximadamente constante, isto é, uma densidade representativa (Figura 8). Assim, a massa total aproximada pode ser calculada a partir do somatório das massas em cada retângulo.

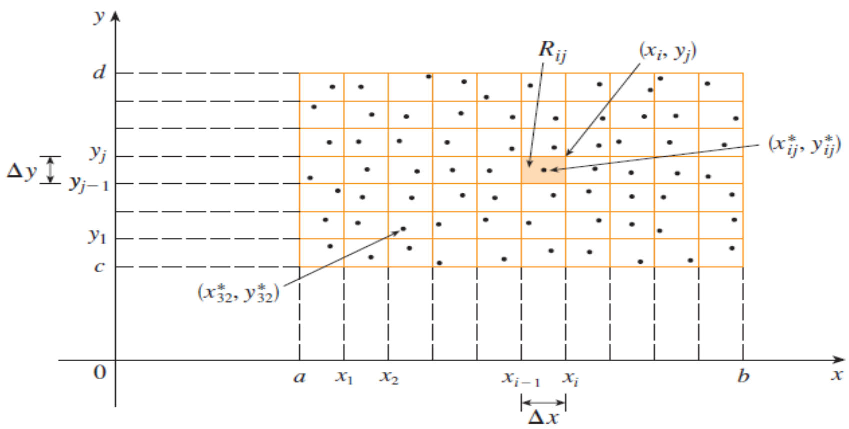


Figura 8.

Lâmina bidimensional não-homogênea. (Stewart, 2016, p. 875)

Se escolhermos uma densidade representativa em cada $\rho(x_{ij}, y_{ij})$, a massa dessa lâmina é dada pela sua densidade vezes a área do retângulo da base:

$$\rho(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$$

Caso seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos as massas, obteremos uma aproximação da massa total da lâmina:

$$m \simeq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \rho(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$$

Essa soma dupla significa que, para cada sub-retângulo, calculamos o valor de ρ no ponto escolhido, multiplicamos esse valor pela área do sub-retângulo e então adicionamos os resultados.

Agora, se aumentarmos n e m de tal modo que as dimensões dos retângulos tendam para zero, então é plausível que os erros de nossas aproximações tendam para zero, portanto,

$$m \simeq \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \rho(x_{ij}, y_{ij})\Delta A = \int_c^d \int_a^b \rho(x,y)\Delta A = \int_c^d \int_a^b \rho(x,y)\ dxdy$$

ou

$$m \simeq \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \rho(x_{ij}, y_{ij})\Delta A = \int_a^b \int_c^d \rho(x,y)\Delta A = \int_a^b \int_c^d \rho(x,y) dydx$$

Consideremos agora uma outra interpretação para esse resultado: uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado, $R = [a,b] \times [c,d]\ = \{(x,y) \in R^2 | \ a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ (Figura 9).

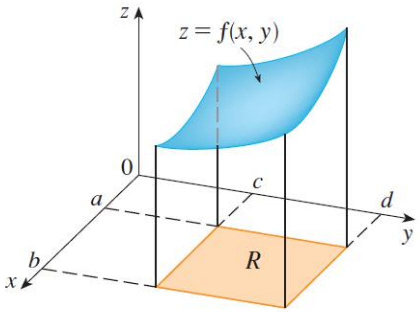


Figura 9

Sólido S que está acima da região R e abaixo do gráfico de f. (Stewart, 2016, p. 874)

Inicialmente, vamos supor que $f(x,y) \geq 0$ e que o gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x,y)$. Seja S o sólido que está acima da região R e abaixo do gráfico de f, isto é, $S = \{(x,y,z) \in R^3 | \ 0 \leq z \leq f(x,y), (x,y) \in R\}$. Nosso objetivo é determinar o volume de S.

O primeiro passo consiste em dividir o retângulo R em sub-retângulos. Faremos isso dividindo o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\Delta x = \frac{(b-a)}{m}$, e dividindo o intervalo em m subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de mesmo comprimento $\Delta y = \frac{(d-c)}{n}$. Ao traçarmos retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelas extremidades dos subintervalos, como na Figura 10, formamos os sub-retângulos.

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) |\ x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

cada um dos quais com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

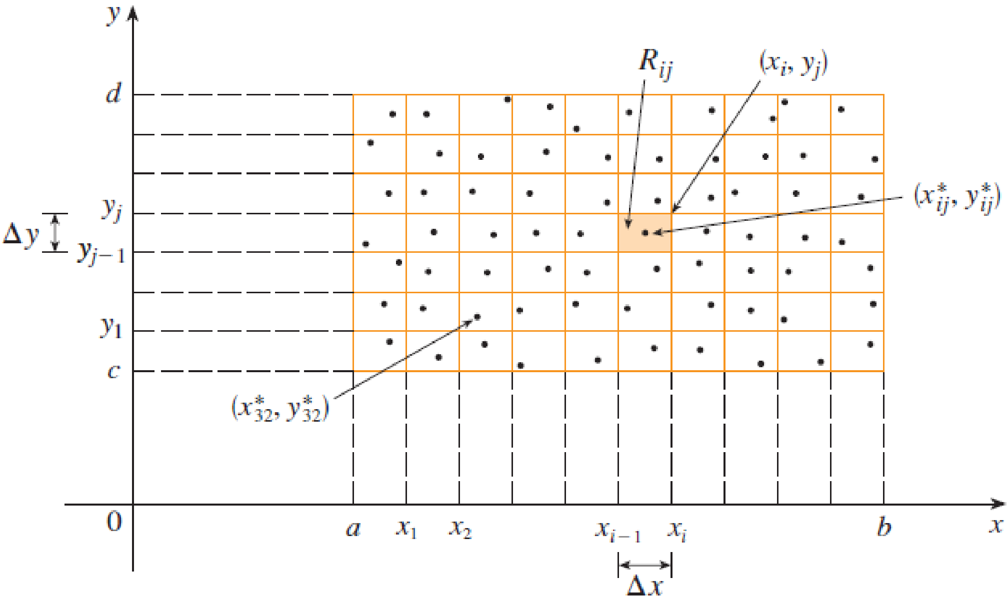


Figura 10.

Região R particionada. (Stewart, 2016, p. 875)

Se escolhermos um ponto arbitrário, que chamaremos ponto de amostragem, (x_{ij}^*, y_{ij}^*), poderemos aproximar a parte de S que está acima de cada R_{ij} por uma caixa retangular fina (ou "coluna") com base R_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como mostrado na Figura 11. O volume dessa caixa é dado pela sua altura vezes a área do retângulo da base, ou seja, $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$.

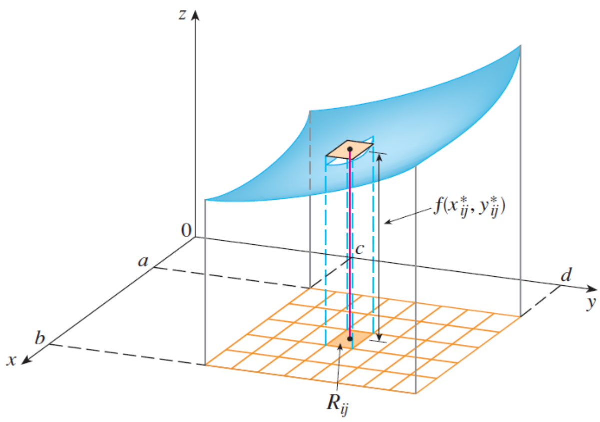


Figura 11.

Caixa retangular fina. (Stewart, 2016, p. 875)

Se seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}) \Delta A$$

Essa soma dupla significa que, para cada sub-retângulo, calculamos o valor de f no ponto escolhido, multiplicamos esse valor pela área do sub-retângulo e então adicionamos os resultados (Figura 12).

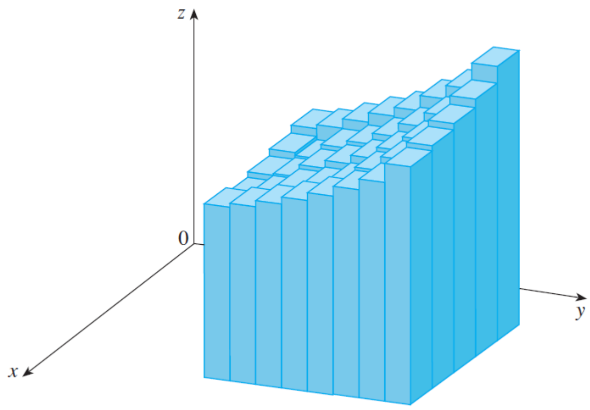


Figura 12.

Caixotes (Stewart, 2016, p. 875)

Nossa intuição diz que a aproximação dada na equação anterior melhora quando aumentamos os valores de n e m e, portanto, devemos esperar que

$$V = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f({x_{ij}}^{*}, y_{ij}^{*}) \Delta A$$

Usamos a expressão acima para definir o volume do sólido S que corresponde à região que está abaixo do gráfico de f e acima do retângulo R. Limites desse tipo ocorrem frequentemente, não somente quando estamos determinando volumes, mas também em diversas outras situações. Portanto, pode-se definir integral dupla, ou integral de duas variáveis, de uma função f sobre uma região retangular R, caso o limite exista, como:

$$\int \int_{R} f(x, y)\, dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f(x_{ij}, y_{ij})\, \Delta A$$

Densidade e massa de um sólido não homogêneo

Considere um sólido tridimensional G. Se G for homogêneo, então, sua densidade é definida como sendo sua massa por unidade de volume. Dessa forma, se G for um sólido homogêneo de massa m e volume V, sua densidade é dada por $\rho = \frac{m}{V}$. Se G for não homogêneo e estiver em um sistema de coordenadas tridimensional xyz, sua densidade no ponto genérico (x, y, z) é especificada pela função densidade $\rho(x, y, z)$.

Considere G um sólido não-homogêneo com um formato de uma caixa retangular com densidade variável $\rho(x, y, z)$ (Figura 13).

$$G = \{(x, y, z) |\ a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

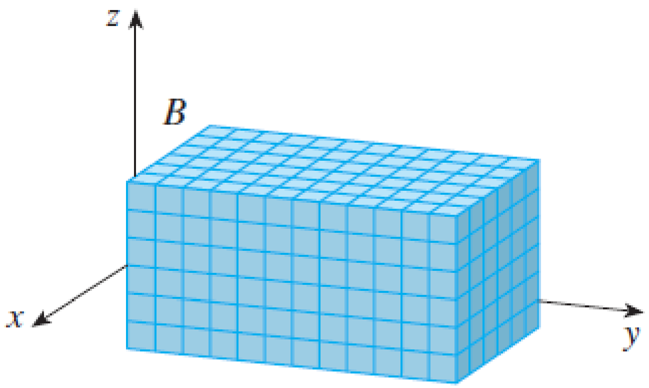


Figura 13.

Sólido G. (Stewart, 2016, p. 913)

O primeiro passo é dividir G em subcaixas. Fazemos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais Δx, dividindo $[c, d]$ em m subintervalos de comprimentos Δy e dividindo $[r, s]$ em n subintervalos de comprimento Δz. Os planos que passam pelas extremidades desses subintervalos, paralelos aos planos coordenados, subdividem a caixa G em lmn subcaixas, como mostrado na Figura 14.

$$G_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

Cada subcaixa tem volume, $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

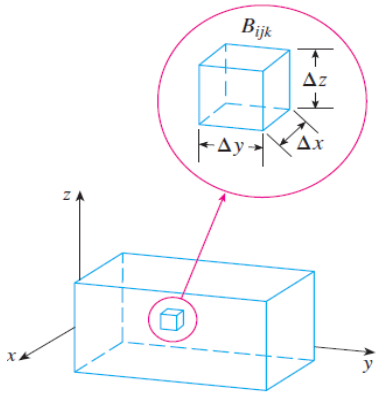


Figura 14.

Subcaixa (Stewart, 2016, p. 913)

Assim, para calcular um valor aproximado da massa do sólido G com densidade variável $\rho(x\,, y, z)$, formamos a soma tripla de Riemann, em que a densidade representativa $\rho(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$ está em G_{ijk}:

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\rho\left(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}\right)\Delta V$$

Por analogia com a definição da integral dupla, definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann em

$$m = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\rho\left(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}\right)\Delta V = \int_a^b\int_c^d\int_r^s \rho(x, y, z)\,\Delta V$$
$$= \int_a^b\int_c^d\int_r^s \rho(x, y, z)\,dzdydx$$

Portanto, pode-se definir integral tripla ou integral de três variáveis de uma função f sobre o uma região G do espaço, caso o limite existir, como:

$$\int\int_G\int f(x, y, z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}\right)\,\Delta V$$

Pressupostos e planejamento da intervenção

Esta pesquisa faz parte de uma série de estudos sobre o ensino de CDI, com foco na abordagem de trabalho com episódios de resolução de tarefas exploratórias. O trabalho com esse tipo de tarefa é "mais eficaz, em termos de aprendizagem, que eles [os estudantes] descubram um método próprio para resolver uma questão do que esperar que eles aprendam o método do professor e sejam capazes de reconhecer, perante uma dada situação, como o aplicar"

(Ponte, 2005, p.9).

Essa abordagem de trabalho é respaldada pelas Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (Brasil, 2019), que enfatizam a necessidade de desenvolver, ao longo da formação, a habilidade dos estudantes de analisar e compreender fenômenos físicos e químicos por meio de modelos simbólicos. Essa análise deve envolver a utilização de ferramentas matemáticas, estatísticas, computacionais, entre outras, para prever resultados e conceber experimentos capazes de gerar resultados concretos.

Assim, reforça-se a importância de planejar uma intervenção que possibilite que os alunos, de fato, compreendam os conceitos do CDI, estabelecendo as relações e conjecturas necessárias para resolverem problemas dentro do seu contexto de estudo e, futuramente, no exercício da profissão.

A aprendizagem, neste contexto de trabalho, assume um caráter colaborativa, uma vez que "[...] encoraja a participação do estudante no processo de aprendizagem e que faz da aprendizagem um processo ativo e efetivo" (Torres; Alcântara & Irala, 2004, p. 131). O trabalho colaborativo permite que o aluno questione suas hipóteses e reflita sobre elas, proporcionando a possibilidade de validá-las usando proposições válidas ou refutá-las, caso suas hipóteses sejam inconsistentes ou falsas. Ou seja, os colegas do grupo o guiam e dão assistência para a construção do conhecimento.

Assim, o papel do professor, em aulas estruturadas em resolução de tarefas exploratórias e trabalho colaborativo, é o de direcionar os alunos em suas discussões de modo que consigam alcançar os objetivos de aprendizagem. Então, é indispensável que o professor conheça seus alunos e elabore tarefas exploratórias que promovam a discussão entre os pares e a aprendizagem.

Para que fosse organizada a intervenção, inicialmente, foi organizada uma avaliação diagnóstica, para que pudéssemos ter um parâmetro de conhecimentos prévios dos alunos que cursariam a disciplina de Cálculo de mais de uma variável real (contexto a ser detalhado na próxima seção), já que estes conhecimentos nos ajudariam a formular tarefas que atendessem nossos objetivos. A partir disso, buscamos primeiramente tarefas que nos auxiliassem na retomada do conceito de integral definida de uma variável, tanto no contexto puramente matemático quanto em contextos físicos, e que pudéssemos explorar as camadas da estrutura da Soma de Riemann de forma intuitiva.

Depois, foi feito um levantamento de conceitos físicos que possibilitariam, por meio de um mesmo contexto, a extensão do conceito de integral definida de uma variável para integrais definidas de duas e três variáveis. Realizamos, então, estudos sobre quais os contextos da Física envolviam integrais definidas e em qual deles seria possível abordar a integral definida de uma, duas e três variáveis. Foi então que chegamos ao contexto de cálculo de densidade e massa de um objeto, sendo esse conceito aplicável no contexto, uni, bi e tridimensional.

A partir desse contexto e das percepções que tivemos em relação aos conhecimentos prévios dos alunos, construímos uma sequência de tarefas exploratórias na qual fosse possível atingir o objetivo do nosso trabalho. A intervenção foi planejada para turmas de Engenharia em que o segundo autor e orientador da pesquisa atuava como professor de CDI 2 no ano de 2022.

Elaboramos três tarefas exploratórias (Araujo, 2023), cada uma delas proposta para ser resolvida em pequenos grupos, em uma aula de 50 minutos cada. Depois, foram utilizadas duas aulas de 50 minutos para realizar a discussão das resoluções dos alunos sobre as tarefas e a sistematização dos conceitos.

Feita a sistematização do conceito de integral definida, mais duas aulas de 50 minutos foram dedicadas à revisão das técnicas de integração de uma variável, mais especificamente, a regra da substituição e a integração por partes. Após essa primeira parte de "revisão" de integrais definidas de uma variável, houve um outro encontro com duas aulas de 50 minutos dedicadas à tarefa exploratória 3 (foco deste artigo) – Tabela 1, que teve, por objetivo, dentro do contexto de massa de um objeto, uni, bi e tridimensional, definir o conceito de integral de duas e três variáveis.

Tabela 1.

Tarefa exploratória 3 (Os autores)

<u>Tarefa exploratória 3</u>

1. **DENSIDADE E MASSA DE UMA HASTE UNIDIMENSIONAL**

A densidade linear é a medida de uma quantidade de qualquer valor característico por unidade de comprimento. Considere uma haste longa e fina de massa m e comprimento Δx, a densidade deste objeto unidimensional, é expressa por $\rho = \frac{m}{\Delta x}$. Logo a massa desse objeto é dada pela fórmula $m = \rho \cdot \Delta x$.

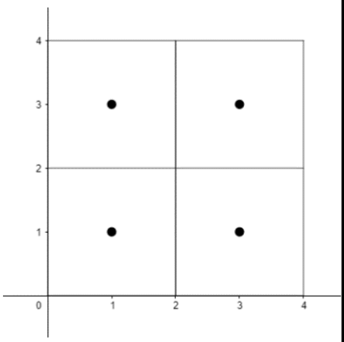
i. Qual é a massa de uma haste homogênea com comprimento 1,5m e densidade igual 2,5kg/m?

ii. A equação anterior define a massa desde que a densidade seja constante. Mas o que acontece se a densidade for variável? Ou seja, $m = \rho \cdot \Delta x$. Suponha que este objeto unidimensional esteja posicionado, ao longo de um eixo coordenado, entre $x = a$ e $x = b$, com densidade variável $\rho(x)$. Explique como encontrar a massa total do objeto, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

2. **DENSIDADE E MASSA DE UMA LÂMINA NÃO HOMOGÊNEA**

Consideremos um objeto achatado idealizado suficientemente fino para ser imaginado como sendo uma região plana bidimensional. Dizemos que tal objeto é uma lâmina. Uma lâmina é dita homogênea se sua composição for inteiramente uniforme, caso contrário é dita não-homogênea. A densidade ρ de uma lâmina homogênea de massa m e área A é dada por $\rho = \frac{m}{A}$. Já em uma lâmina não-homogênea, a composição pode variar de ponto para ponto, uma definição apropriada de "densidade" deve refletir essa condição. Para estabelecer tal definição, suponha que a lâmina seja colocada em um plano xy. A densidade no ponto (x, y) pode ser especificada por uma função $\rho(x, y)$, chamada de função densidade.

Considere uma lâmina de vértices $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$ e $(4, 0)$, com densidade variável, ou seja, uma lâmina não-homogênea, com densidade $\rho(x, y) = x + y$ kg/m.



i. Considere essa lâmina subdividida em 4 retângulos, conforme figura abaixo. Admitindo que em cada retângulo a densidade é constante e igual ao valor no ponto representativo indicado, determine a massa total aproximada da lâmina.

ii. Considere agora a subdivisão dessa lâmina, em 8 retângulos, a sua escolha.

Admitindo que em cada retângulo a densidade é constante e igual ao valor em um ponto representativo também da sua escolha, determine a massa total aproximada da lâmina.

Suponha agora um caso mais geral, em que a densidade da lâmina no ponto (x, y) pode ser especificada por uma função densidade $\rho(x, y)$. Explique como encontrar a massa total dessa lâmina não-homogênea, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

3. DENSIDADE E MASSA DE UM SÓLIDO

Considere um sólido tridimensional G. Se G for homogêneo de massa m e volume V , então sua densidade é dada por $\rho = \frac{m}{V}$. Se G for não-homogêneo e estiver em um sistema de coordenadas xyz, então sua densidade no ponto genérico (x, y, z) é especificada por uma função $\rho(x, y, z)$.

Explique como encontrar a massa total desse sólido não-homogênea, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

Por fim, mais duas aulas de 50 minutos foram dedicadas à discussão das soluções com os alunos e, posteriormente, à sistematização do conceito de integral definida de duas e três variáveis.

Metodologia da pesquisa

Reconhecemos que a pesquisa teve, por objetivo, investigar uma realidade específica e, possivelmente, com essa investigação, ter subsídios suficientes para que fosse feita uma intervenção nessa realidade, o que permite caracterizá-la como qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994).

De acordo com Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa qualitativa não está preocupada com representações numéricas do contexto pesquisado, mas com a compreensão profunda a respeito de um grupo social ou de uma organização. Para esses autores, os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos "buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos" (Gerhardt & Silveira, 2009, p.32).

A pesquisa foi desenvolvida em turmas de Engenharia Mecânica, com 35 alunos, e Engenharia de Materiais, com 15 alunos, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina, na disciplina de CDI 2. A realização das tarefas exploratórias se deu em pequenos grupos de forma a proporcionar a interação entre todos os integrantes do grupo. Todos os estudantes foram esclarecidos quanto à pesquisa que estava sendo realizada e puderam optar por disponibilizar ou não o material que foi coletado durante as aulas para fins de pesquisa. Vale destacar que a coleta de protocolos escritos dos grupos, entregues ao final de cada tarefa, fazia parte da rotina de trabalho da disciplina, sendo prevista em plano de ensino e subsidiando a avaliação realizada ao longo do semestre.

Assim, coube aos estudantes realizar a gravação dos áudios das discussões das tarefas em grupos e enviá-los via Whatsapp, autorizando, assim, o seu uso para fins de pesquisa. Além desse material, foram, também, coletados áudios do momento da discussão e sistematização dos conceitos matemáticos, conduzidos pela pesquisadora (primeira autora) com algumas intervenções do orientador (segundo autor).

A primeira etapa do trabalho consistiu na organização do material em áudio no Google Drive e a seleção de quais desses materiais poderiam, efetivamente, ser analisados, descartando os áudios que não estavam audíveis e os que os grupos fizeram apenas uma sistematização da sua resolução após a finalização da tarefa ao invés de todo o processo de discussão - como havia sido solicitado pela pesquisadora.

Para a tarefa exploratória 3, obtivemos 6 áudios, dos quais 3 foram considerados audíveis, permitindo a transcrição. Selecionamos um grupo que consideramos representativo para análise, permitindo compreender o raciocínio matemático utilizado pelos alunos para conceituar uma integral definida de duas e três variáveis a partir da integral definida de uma variável no intuito de identificar movimentos de generalização associados (Harel & Tall, 1991; Jones, 2015). A apresentação e análise desses dados é apresentada na próxima seção.

Análise dos dados

No primeiro item da tarefa, foi explorado brevemente o conceito de massa de um objeto unidimensional e sugerido que os alunos calculassem a massa de uma haste unidimensional e, posteriormente, que explicassem como encontraram a massa total da haste unidimensional não homogênea, ou seja, com densidade variável. Em geral, a primeira questão foi resolvida sem dificuldade: primeiramente, calculou-se a massa da haste homogênea e, depois, configurou-se uma integral para calcular a massa da haste não homogênea, reconhecendo o uso da integração da função de densidade (Figura 15).

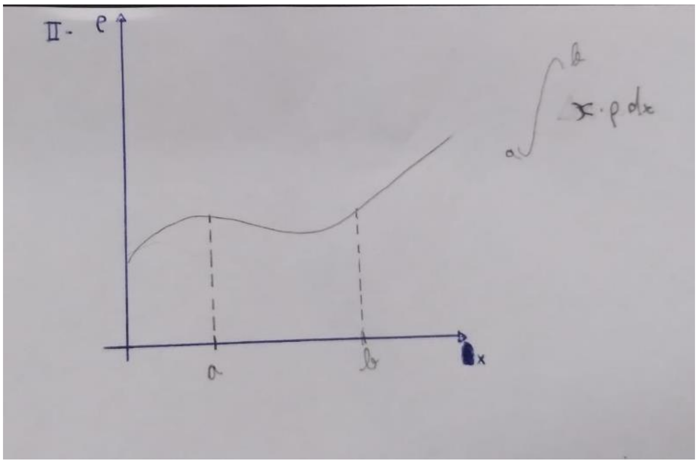


Figura 15.

Resolução da questão 1, item (ii), da Tarefa exploratória 3. (Os autores)

Já na questão 2, foi apresentado um texto explicativo sobre o conceito de uma lâmina bidimensional não homogênea. Nos primeiros itens da tarefa, para calcular a massa total, foi sugerido, aos alunos, que fizessem algumas partições particulares na lâmina e, em cada partição, assumissem uma densidade representativa e, posteriormente, determinassem a massa da lâmina a partir dessas partições. Por fim, em um terceiro item, foi pedido aos alunos que explicassem como encontrar a massa total dessa lâmina não-homogênea assumindo um caso geral, no qual a densidade da lâmina no ponto (x, y) é uma função $\rho(x, y)$.

O trecho a seguir é parte da discussão do grupo, a partir da leitura inicial do enunciado da tarefa, antes mesmo de iniciarem a resolução.

Aluno 3: Vocês viram a sacada agora?
Aluno 2: O quê?
Aluno 3: A integral pode ser uma função de x e y, não só de x.
Aluno 2: É, vai ter que integrar por parte é tipo a derivada por parte, igual a derivada que integra por parte, vai ter que integrar por parte.

Logo após a leitura do enunciado, o Aluno 3 chama a atenção dos demais a respeito da função de densidade de uma lâmina bidimensional, que varia em termos de duas variáveis. Ou seja, para determinar a massa da lâmina não-homogênea, a integral configurada teria duas variáveis, e não apenas uma variável como no item anterior. O Aluno 2, então, conjectura que essa integral será resolvida de modo similar a uma derivada parcial (a qual ele se refere com a expressão "por partes"). Conclui, então, que será necessário, também, um processo de integração "por partes" (referindo-se, de forma intuitiva, ao processo de integração dupla).

Reconhecemos que essa afirmação caracteriza uma generalização expansiva das técnicas procedimentais para determinar uma integral dupla a partir de uma integral definida de uma variável apoiadas na semelhança com o processo de derivação parcial. Trata-se de uma generalização expansiva, uma vez que não se modificou nenhum modelo já existente para definir o atual, pois, para definir como se resolve uma integral definida de duas variáveis, os alunos relacionaram-na ao modo pelo qual se resolve uma derivada parcial: uma das variáveis é considerada uma constante que deriva a outra, e se repete de modo análogo com a outra variável. Sendo assim, não foi necessária uma modificação do modelo de resolução de uma derivada parcial para se adequar ao modelo de resolução de uma integral definida de duas variáveis.

> Aluno 3: Então, mas será que é isso mesmo?
> Pesquisadora: Na verdade não chamamos por partes, e sim interada, mas é basicamente o mesmo pensamento. Na primeira questão, estávamos mexendo com quantas variáveis?
> Aluno 2: A primeira a gente tava mexendo com duas.
> Pesquisadora: Não, a primeira [referindo-se à questão 1].
> Aluno 3: Uma.
> Pesquisadora: Quando a gente calcula a integral, a gente está calculando o quê?
> Aluno 1: A área abaixo da curva.
> Aluno 2: Não é só isso.
> Aluno 1: Não, mas no exemplo é.
> Aluno 2: É, nesse exemplo aqui é.
> Aluno 2: Mas a área abaixo da curva seria o somatório das integrais.
> Pesquisadora: Não das integrais. Se é a área abaixo da curva, seria o somatório do quê?
> Aluno 1: Dos retângulos.
> Pesquisadora: O que dos retângulos?
> Aluno 2: Soma de Riemann.
> Pesquisadora: Isso.
> Aluno 2: Da área das subdivisões do intervalo.
> Pesquisadora: Então, estava calculando a soma de todos os produtos. Porque estava calculando a área abaixo da curva. E quando a gente fala de área abaixo da curva estou falando de quando calcula, todas as areazinhas, e a áreas que a gente tem através do produto.
> Aluno 2: É.
> Pesquisadora: Na primeira casa, qual a estrutura para calcular a massa?
> Aluno 2: No primeiro caso? Um produto.
> **Pesquisadora: Então a gente está somando as massas em todos os intervalos bem pequenos. e qual a estrutura dessa soma? É produto. Que é uma soma de Riemann, uma soma de base multiplicativa. Por isso que usa integral. E no segundo caso?**
> **Aluno 2: No segundo caso vai ser duas variáveis.**
> **Pesquisadora: Uma integral para uma variável. Quer dizer que estou calculando a soma para aquela variável. Quando tenho duas variáveis? Um sinal de integral é suficiente?**
> **Aluno 2: Eu acho que não teria que integrar em duas variáveis, é como se fosse derivar em x quanto em y. Daí íntegra em x e em y.**

Nesse trecho do diálogo, as intervenções da pesquisadora, a partir da interação com os integrantes do grupo, contribuíram para explorar o conceito de integral definida para além da ideia de área que se encontra abaixo de uma curva, em direção a uma ideia mais geral de soma de base multiplicativa. Assim, há um movimento de extensão do conceito de integral de uma variável para mais variáveis.

Os alunos discutem, então, um símbolo que representasse a ideia de "integrar em duas variáveis" como um processo necessário para determinar a massa de uma lâmina bidimensional. Concluem que, para calcular a integral definida de duas variáveis, seria mais apropriado a utilização de dois símbolos de integral. Reconhecemos aqui a natureza expansiva nessa sistematização, uma vez que, com a discussão promovida, os alunos concluíram que se para uma variável utilizamos um símbolo de integral, para duas variáveis será necessário um símbolo que represente cada uma delas.

O diálogo continua, agora sem a intervenção da pesquisadora:

> Aluno 3: Olha aqui e se a gente calcular a integral de x, a área vai ser integral de y, a área vai ser pra cá.
> Aluno 2: É.
> Aluno 3: Deve ser essa sacada.
> Aluno 2: Sim.
> Aluno 3: x vai ficar pra cima e $\rho(y)$ para direita né.
> Aluno 2: A gente tem que chegar em uma função de x e depois em uma função de y.
> Aluno 1: Então, ai que ta. Se você pegar a integral em x ela não vai dar essa área aqui? Porque essa área é exatamente a área do quadrado.
> Aluno 3: Peraí, por que ao contrário?
> **Aluno 2: Por que você integrar em y, o x vai ser uma constante, o x não vai mudar, vai ser a mesma coisa. Ai eu não sei se y vai trocar mesmo as direções. A gente tá supondo que vai.**
> Aluno 1: A vamos tentar pôr no papel então.
> Aluno 2: Vamos.
> Aluno 3: Mas então vamos fazer a 1 primeira, ela é de boa.
> Aluno 2: Tá. Considere uma lâmina subdividida em 4 retângulos, conforme a figura, admitindo em cada retângulo a densidade é considerada igual. Tá, nas quatro, cada densidade aqui é igual né? Determine a massa…
> Aluno 3: A massa é densidade vezes a área.
> Aluno 2: é. Área por quê?
> Aluno 3: Porque quando é homogênea é só fazer isso. Densidade vezes a área.
> Aluno 2: Tá!?
> Aluno 1: Mano dá uma raiva quando você sabe a resposta mas tem que fazer pelo método que tem que fazer.
> Aluno 2: É.
> Aluno 3: Olha a quarta linha do texto [o aluno faz a leitura do enunciado].
> Aluno 2: Mas a gente sabe a densidade? Mas para calcular ρ a gente vai ter que calcular essa aqui de trás, $x + y$ para dar densidade por quilograma por metro quadrado.
> Aluno 1: O ρ é a densidade?
> Aluno 2: É, e o ρ é $x + y$.
> Aluno 3: Tá mas peraí. Na hora que vocês estavam falando com a Pesquisadora. Primeira tem que fazer a massa ou o produto?
> Aluno 2: A integral é tipo um negócio de um produto. É a área de um produto.

Aluno 3: Então ó, eu já entendi já. A densidade vai ser nos pontinhos ali.
Aluno 2: É. Será?
Aluno 3: É, ele fala: admitindo que em cada retângulo a densidade é constante igual ao valor no ponto representativo.
Aluno 2: Então a gente vai fazer em cada parte né, então a gente vai ter que fazer a densidade em cada um deles. Vai dar um trabalho do saci.
Aluno 3: Não.
Aluno 2: Não, o trabalho que tô falando é pegar, é tipo pegar a densidade de cada um deles.
Aluno 3: É.
Aluno 2: Então a massa vai ser ρ vezes A, e ρ sendo, $x + y$ né?
Aluno 3: Coloca, $\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3$.
Aluno 2: Somatório de ρ, mais fácil.
Aluno 3: De 1 a 4.
Aluno 2: Vezes A né?
[...]
Aluno 3: $4.4 + 4.4 + 6.4$.
Aluno 2: É 8, é 16, e é 16, e 24. Dá 64.
Aluno 3: Ó sacada, a gente dividiu em 4 quadrados, daí se integrar a gente vai dividir em infinitos quadrados.
Aluno 2: Verdade
Aluno 4: Então por isso não deveria ter utilizado a somatória?
Aluno 3: Daí, integral seria quando o somatório tendesse ao infinito.
Aluno 2: É isso, mas aí é por parte né.
Aluno 2: A ta entendi. Saquei, sabe o que vai acontecer na integral, a gente vai integrar em dx e dy. Aí a hora que ficar dy, o x vai virar uma constante, e o x sai pra fora da integral, e aí vai ficar só o dy lá dentro.

Reconhecemos a natureza reconstrutiva do conceito de integral de uma para duas variáveis a partir desse trecho de discussão dos alunos. **O conceito não** é meramente uma extensão das interpretações geométricas de integrais simples para duplas, mas incorpora algo fundamentalmente novo, ou seja, na generalização reconstrutiva, o aluno modifica um esquema já existente para que sua aplicabilidade seja ampliada. No contexto da análise, podemos notar que o aluno utiliza da interpretação geométrica de uma integral definida para estender o entendimento de integral definida para o contexto de massa de um objeto (Harel & Tall, 1991).

Nessa tarefa, eles foram instigados a pensar sobre como se configura uma integral apropriada para o cálculo da massa de uma lâmina não homogênea e o fizeram a partir da interpretação de integral definida de uma variável, para além do conceito de área sob a curva, evidenciando compreensão da ideia de soma de base multiplicativa, esquematizada no registro sugerido pelo Aluno 3, de que a massa seria o resultado obtido por $\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \rho_3 a_3 + \rho_4 a_4$.

Na continuidade, o Aluno 3 reconhece que, em um caso mais geral (que leva a uma integral), a lâmina seria dividida em infinitos retângulos. Assumindo infinitas densidades representativas para calcular a massa m da lâmina não homogênea, bastaria multiplicar a área dos infinitos retângulos pela densidade representativa em cada um deles.

Reconhecemos que esse movimento é caracterizado como uma generalização reconstrutiva, já que o "esquema antigo é modificado e enriquecido antes de ser englobado no esquema mais geral" (Harel & Tall, 1991, p.2)

Sintetizando a análise dessa tarefa, podemos destacar alguns momentos de generalização mobilizados pelos alunos no processo de extensão do conceito de integral definida de uma variável para mais de uma variável, destacados no Tabela 2:

Tabela 2.

Movimentos de generalização oportunizados pela Tarefa investigativa 3. (Os autores)

Generalização Expansiva	Relacionar geralmente questões procedimentais de cálculo de uma integral definida de duas e três variáveis, já que para configurar a integral e definir como se resolve os alunos recorreram aos procedimentos da integral definida de uma variável e derivadas parciais.
Generalização Reconstrutiva	● Determinar aspectos conceituais da integral definida. ● Incorporação de conceito de massa na interpretação geométrica da integral definida, para calcular a massa de objeto. ● Relacionar a divisão de intervalos infinitesimalmente pequenos a regiões infinitesimalmente pequenas.

Considerações finais

Com o intuito de analisar uma situação didática, integrando conceitos epistemológicos e didáticos (Schneider & Job, 2016) atrelados ao objeto matemático *integral*, propomos a criação e implementação de uma intervenção baseada no trabalho com episódios de resolução de tarefas (Trevisan & Mendes, 2018; Trevisan, Alves & Negrini, 2021; Trevisan, 2022), de forma a proporcionar aos estudantes de CDI oportunidades para explorar esse conceito. Nossa intervenção envolveu a organização de uma sequência de tarefas (Mateus-Nieves & Moll, 2021), de natureza exploratória (Ponte, 2005), que visa compreender quais os processos de generalização mobilizados pelos alunos no movimento de extensão do conceito de integral definida de uma variável para integrais múltiplas.

Para fundamentar a organização da sequência de tarefas e a posterior análise dos dados, apoiamo-nos no trabalho de Jones e Dorko (2015), no qual é feita uma discussão sobre processos de generalização utilizados pelos alunos para expandir o conceito da integral definida para duas e três variáveis, a partir da integral definida de uma variável. Em nossa análise, procuramos reconhecer o potencial da tarefa e das discussões dos alunos para promover esses diferentes processos de generalização.

Um primeiro elemento epistemológico envolveu o reconhecimento de contextos aplicados promissores, que possibilitassem aos estudantes realizar movimentos de generalização do conceito de integrais definidas de uma para mais variáveis. Após a identificação desse contexto, um segundo elemento epistemológico considerado foi uma tarefa capaz de abordar a integral definida uni, bi e tridimensional, a partir do conceito de massa de uma unidimensional não homogênea, de uma lâmina bidimensional não homogênea e de um sólido tridimensional não homogêneo.

Da análise realizada em relação aos movimentos de generalização, a generalização expansiva foi utilizada para expandir questões procedimentais do cálculo de uma integral. Já a generalização reconstrutiva foi utilizada na compreensão de aspectos estruturais da integral de Riemann de mais variáveis, como a utilização da estrutura geométrica da integral definida para estruturar uma forma de calcular a massa de um objeto.

Destacamos o reconhecimento desses movimentos de generalização como essenciais para compreender a complexidade epistêmica do conceito de integral, um campo ainda pouco explorado no âmbito da pesquisa em Educação Matemática (Mateus-Nieves, 2021). Além disso, ressalta-se que se deve pensar na integral “não como um objeto complexo a ser ensinado ou aprendido, mas como um ente matemático composto por diferentes significados que devem ser decompostos para seu estudo” (Mateus-Nieves, 2021, p. 1611). Como desdobramento, os resultados apontam aspectos epistemológicos sobre a integral que permitem compreender alguns fenômenos do ensino, oferecendo, a professores de CDI, meios para repensar suas aulas, de modo a trabalhar os processos de generalização da integral de uma para mais variáveis a partir da complexidade epistêmica que a compõe.

Referências

Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Editora da Universidade Federal de Paraná.

Araujo, T. T. D. (2023). *Integrais definidas de uma e mais variáveis: uma proposta de intervenção com tarefas exploratórias*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Brasil (2019). Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES Nº 1, de 23 de janeiro de 2019. *Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação de Engenharia*. Diário Oficial da República Federativa do Brasil, Brasília, DF, Seção 1, p. 109.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Editora.

Carlsen, M. (2018). Upper secondary students' mathematical reasoning on a sinusoidal function. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(3), 277-291.

Couto, A. F., da Fonseca, M. O. D. S., & Trevisan, A. L. (2017). Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *8*(4), 50-61.

Dorko, A. e Weber, E. (2014). Generalizando ideias de cálculo de duas dimensões para três: como os alunos de cálculo multivariável pensam sobre domínio e contradomínio. *Pesquisa em Educação Matemática*, *16* (3), 269-287.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14(2), 203-231

Gerhardt, T. E. & Silveira, D. T. (2009). *Métodos de Pesquisa*. Editora da UFRGS.

Goos, M., & Kaya, S. (2020). Understanding and promoting students' mathematical thinking: a review of research published in ESM. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(1), 7-25.

Granberg, C. & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. *Journal of Mathematical Behavior*, *37*, 48-62.

Haddad, S. (2013). Que retiennent les nouveaux bacheliers de la notion d'intégrale enseignée au lycée. *Petit X*, *92*, 7-32.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the learning of mathematics*, *11*(1), 38-42.

Jeannotte, D. e Kieran, C. (2017). Um modelo conceitual de raciocínio matemático para matemática escolar. *Estudos Educacionais em Matemática*, *96*, 1-16.

Jones, S. R., Lim, Y. & Chandler, K. R. (2017). Teaching integration: How certain instructional moves may undermine the potential conceptual value of the Riemann sum and the Riemann integral. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*, 1075-1095.

Jones, S. R., & Dorko, A. (2015). Students' understandings of multivariate integrals and how they may be generalized from single integral conceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 154-170.

Jones, S. R. (2015). The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann sum-based conceptions in students' explanations of definite integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(5), 721-736.

Mata-Pereira, J., & da Ponte, JP (2017). Aprimorando o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula: ações do professor facilitando a generalização e a justificação. *Estudos Educacionais em Matemática*, *96* (2), 169-186.

Mateus-Nieves, E. (2021). Epistemología de la integral como fundamento del cálculo integral. *Bolema*, 35, 1593-1615.

Mateus-Nieves, E, & Moll, V. F. (2021). Epistemic Complexity of the Mathematical Object “Integral”. *Mathematics*, 9, 1-25.

Negrini, M. V.; Trevisan, A. L., & Araman, E. M. O. (2024). Movimentos envolvendo processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo em uma tarefa exploratória. Boletim de Educação Matemática. *Bolema*, no prelo.

Ponte, J. P. D. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. D. (2014). 1. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. *Práticas profissionais dos professores de matemática*, 13-27.

Ponte, J. P. D., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?. *Educação e Matemática*, (156), 7-11.

Schneider, M., & Job, P. (2016). Ingénieries entre recherche et formation: Élèves-professeurs en mathématiques aux prises avec des ingénieries didactiques issues de la recherche. Un dispositif de formation à portée phénoménotechnique. *Éducation et didactique, 2*, 91-112.

Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, No. 1991, pp. 46-53). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 230-245.

Silva, G. P. D. (2013). Análise de evasão no ensino superior: uma proposta de diagnóstico de seus determinantes. *Revista da Avaliação da Educação Superior*, *18*, 311-333.

Stewart, J. (2013). Cálculo: Volume 1 (7ª ed.). São Paulo, SP: Cengage Learning.

Stewart, J. (2016). Cálculo: Volume 2 (8ª ed.). São Paulo, SP: Cengage Learning.

Torres, P. L., Alcantara, P. R. & Irala, E. A. F. (2004). Grupos de consenso: uma proposta de aprendizagem colaborativa para o processo de ensino-aprendizagem. *Revista Diálogo Educacional*, *4*(13), 1-17.

Trevisan, A. L. (2022). Raciocínio matemático em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: uma análise a partir de tarefas exploratórias. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 15(3), 1-23.

Trevisan, A. L., Alves, R. M. A. & Negrini, M. V. (2021). Ambiente de ensino e de aprendizagem de Cálculo pautado em episódios de resolução de tarefas: resultados e perspectivas futuras. In: Marcele Tavares Mendes; Andresa Maria Justulin. (Org.). *Produtos educacionais e resultados de pesquisas em Educação Matemática* (pp.155-174). São Paulo: Livraria da Física.

Trevisan, A. L., & Araman, E. M. O. (2021). Argumentos Apresentados por Estudantes de Cálculo em uma Tarefa de Natureza Exploratória. *Educação Matemática Pesquisa*, 23, 591-612.

Trevisan, A. L.; Araman, E. M. O., & Serrazina, M. L. (2023). The development of students? mathematical reasoning in Calculus courses. *Avances de Investigacion en Educacion Matematica*, 24, 39-56.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2018). Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 11(1), 209-227.

Zarpelon, E. (2022). *Análise de indicadores do perfil discente e docente para estimativas de desempenho acadêmico*: um estudo com alunos de Cálculo Diferencial e Integral I em escolas de engenharia no Brasil e na França. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Tecnologia) -Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa.