ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p399-421

Construcción de un modelo epistemológico de referencia como fundamento de un nuevo paradigma didáctico para el estudio del cálculo diferencial

Construction of a reference epistemological model as the foundation of a new didactic paradigm for the study of differential calculus

Construção de um modelo epistemológico de referência como fundamento de um novo paradigma didático para o estudo do cálculo diferencial

Construction d'un modèle épistémologique de référence comme fondement d'un nouveau paradigme didactique pour l'étude du calcul différentiel

Catarina Oliveira Lucas[1]
Instituto Superior Politécnico Gaya (ISPGAYA); CEOS.PP, ISCAP, Politécnico do Porto, Portugal
Doctor en Matemática
https://orcid.org/0000-0002-0645-2169

Josep Gascón Perez[2]
Universitat Autònoma de Barcelona
Doctor en Matemáticas
https://orcid.org/0000-0001-5570-1144

Resumen

Este trabajo está sustentado por la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD). El objetivo consiste en formular, de manera coordinada, un esquema de un *modelo epistemológico de referencia* en torno a la *modelización funcional*, MER(MF), que asigna al *cálculo diferencial elemental* (CDE) una nueva razón de ser. Después de describir los criterios generales que deberá cumplir el MER, se propone una redefinición de lo que se entiende por modelización funcional mediante un *diagrama de actividad* que integra el papel que se asigna en dicha actividad matemática al CDE. En coherencia con esta forma de interpretar el papel que desempeña el CDE en la actividad matemática, se propugnan unos nuevos fines educativos asociados a su estudio, así como unos medios didácticos que consideramos adecuados para alcanzar dichos fines. En definitiva, se propone una nueva *modalidad de estudio* del CDE en el paso de Secundaria a la Universidad, esto es, un nuevo *paradigma didáctico de referencia* (PDR) para el estudio del CDE. Tomando dicho PD como referencia, se analiza de manera somera la modalidad de estudio vigente en torno al CDE poniendo de manifiesto los fenómenos didácticos

[1] clucas@ispgaya.pt
[2] josepgasconperez@gmail.com

que emergen cuando el estudio del CDE en el paso de Secundaria a la Universidad está regido por este PD.

Palabras clave: Teoría antropológica de lo didáctico, Modelo epistemológico de referencia, Cálculo diferencial elemental, Modelización funcional, Paradigma didáctico.

Abstract

This work is underpinned by the *anthropological theory of the didactic* (ATD). The aim is to formulate, in a coordinated way, an outline of a *reference epistemological model* for *functional modelling*, REM(FM), which gives to the *elementary differential calculus* (EDC) a new raison d'être. After describing the general criteria to be met by the REM, a redefinition of what is meant by functional modelling is proposed by means of an *activity diagram* that integrates the role assigned to EDC in this mathematical activity. In coherence with this way of interpreting the role played by the EDC in mathematical activity, new educational ends associated with its study are proposed, as well as didactic means that we consider appropriate to achieve these ends. In short, we propose a new *modality for the study* of EDC in the transition from Secondary education to University, that is, a new *reference didactical paradigm* (RDP) for the study of EDC. Taking this DP as a reference, a brief analysis is made of the current mode of study of EDC, highlighting the didactic phenomena that emerge when the study of EDC in the transition from Secondary education to University is governed by this DP.

Keywords: Anthropological theory of the didactic, Reference epistemological model (REM), Elementary differential calculus, Functional modelling, Didactic paradigm.

Resumo

Este trabalho é sustentado pela *teoria antropológica do didático* (TAD). O objetivo é formular, de forma coordenada, um esboço de um *modelo epistemológico de referência* para a *modelação funcional*, MER(MF), que dá ao *cálculo diferencial elementar* (CDE) uma nova razão de ser. Depois de descrever os critérios gerais a que o MER deve obedecer, propõe-se uma redefinição do que se entende por modelação funcional através de um *diagrama de atividade* que integra o papel atribuído ao CDE nesta atividade matemática. Em coerência com esta forma de interpretar o papel desempenhado pelo CDE na atividade matemática, são propostos novos fins educativos associados ao seu estudo, bem como os meios didáticos que consideramos adequados para os alcançar. Em suma, propomos uma nova *modalidade para o estudo* do CDE na transição do Ensino Secundário para a Universidade, ou seja, um novo *paradigma didático de referência* (PDR) para o estudo do CDE. Tomando este PD como referência, faz-se uma breve análise do atual modo de estudo do CDE, destacando os fenómenos didáticos que emergem quando o estudo do CDE na transição do Ensino Secundário para a Universidade se rege por este PD.

Palavras-chave: Teoria antropológica do didático, Modelo epistemológico de referência, Cálculo diferencial elementar, Modelação funcional, Paradigma didático.

Résumé

Ce travail s'appuie sur la *théorie anthropologique du didactique* (TAD). L'objectif est de formuler, de manière coordonnée, les grandes lignes d'un *modèle épistémologique de référence* pour la *modélisation fonctionnelle*, MER(MF), qui donne au *calcul différentiel élémentaire* (CDE) une nouvelle raison d'être. Après avoir décrit les critères généraux auxquels doit répondre le MER, une redéfinition de ce que l'on entend par modélisation fonctionnelle est proposée au moyen d'un *diagramme d'activité* qui intègre le rôle assigné au CDE dans cette activité mathématique. En cohérence avec cette façon d'interpréter le rôle joué par le CDE dans l'activité mathématique, de nouvelles finalités de l'éducation associés à son étude sont proposés, ainsi que les moyens didactiques que nous considérons appropriés pour atteindre ces finalités. En résumé, nous proposons une nouvelle *modalité d'étude* du CDE dans la transition de l'école secondaire à l'université, c'est-à-dire un nouveau *paradigme didactique de référence* (PDR) pour l'étude du CDE. En prenant ce PD comme référence, nous analysons brièvement la modalité d'étude actuel du CDE, en mettant en évidence les phénomènes didactiques qui émergent lorsque l'étude du CDE dans la transition de l'école secondaire à l'université est régie par ce PD.

Mots-clés : Théorie anthropologique du didactique, Modèle épistémologique de référence, Calcul différentiel élémentaire, Modélisation fonctionnelle, Paradigme didactique.

Construcción de un modelo epistemológico de referencia como fundamento de un nuevo paradigma didáctico para el estudio del cálculo diferencial

Todo problema didáctico (en el sentido de problema de investigación en didáctica de las matemáticas) involucra un ámbito de la actividad matemática que, en algunos casos extremos, puede ser el conjunto de la actividad matemática que se lleva a cabo en una institución determinada. En nuestro caso la actividad matemática involucrada es la *modelización funcional* (MF), caracterizada inicialmente en Ruiz-Munzón (2010) y reformulada mediante un *diagrama de actividad* que figura más adelante en este trabajo. Dentro de este ámbito nos interesamos particularmente por el papel que desempeña y el que podría desempeñar el *cálculo diferencial elemental* (CDE), interpretado en sentido en que se le caracteriza más adelante.

En la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD), se postula que la formulación de un problema didáctico siempre asume y toma en consideración, de manera más o menos explícita, una interpretación del ámbito de la actividad matemática involucrado. Así, por ejemplo, cuando se habla de la enseñanza, el aprendizaje o la construcción del *concepto de derivada*, se está sustentando inevitablemente una interpretación (un modelo, aunque sea muy impreciso) de la actividad matemática que acompaña a dicha noción en la institución en cuestión. La amplitud y el tipo de recorte del ámbito de la actividad matemática que se toma en consideración pueden ser muy variados, pero siempre condicionan en gran medida la naturaleza de dicho modelo. En el caso particular de la actividad matemática en torno a la derivada, es evidente que el tipo de problemas didácticos que se podrán formular dependerá de si se considera un ámbito restringido a la noción de derivada, si se amplía a lo que habitualmente se considera como cálculo diferencial elemental (o a una parte de él) o si se toma, el ámbito de la modelización funcional y el papel del cálculo diferencial en dicho ámbito. En resumen, los tipos de problemas didácticos que es posible formular y abordar están fuertemente condicionados por la *unidad de análisis* de los procesos didácticos que se toma en consideración. En Bosch y Gascón (2005) se describe con detalle que la unidad *mínima* de análisis en la TAD debe incluir una *praxeología local relativamente completa* (Fonseca, 2004).

En las investigaciones que se realizan en la TAD, consideramos que la explicitación del modelo epistemológico que se asume inevitablemente y que se utiliza como *modelo epistemológico de referencia* (MER), es imprescindible. La citada explicitación constituye, por otra parte, la base en la que se sustenta la *modalidad de estudio* que se propone para dicho ámbito en la institución en cuestión. Dicha modalidad de estudio, o *paradigma didáctico de referencia* (PDR), constituye una hipótesis científica que puede formularse en nuestro caso como sigue: si una comunidad de estudio (que cumpla determinadas condiciones) lleva a cabo un proceso de estudio del CDE regido por el PDR, entonces evitará los fenómenos didácticos que emergen cuando dicho estudio está regido por la modalidad de estudio vigente (en el paso de Secundaria a la Universidad) y que son considerados “indeseables” desde la perspectiva de la TAD.

El PDR debe interpretarse, por tanto, como una *hipótesis* o *conjetura provisional* que, como tal, es susceptible de ser revisada y, en su caso, modificada. Un PDR es una hipótesis científica creativa que debemos someter a la prueba de la contingencia. Esta prueba se lleva a cabo mediante el diseño y experimentación de *recorridos de estudio e investigación* (REI) sustentados en el MER que constituye la base del PDR.

En síntesis, la metodología de la TAD requiere la explicitación de un PDR, esto es, de una modalidad de estudio del ámbito de la actividad matemática involucrada para poder formular los problemas didácticos con precisión (y para dar sentido a las posibles respuestas). Es importante insistir en el hecho de que un PDR está asociado, como veremos en lo que sigue, a un *fenómeno didáctico* que constituye el punto de partida, el iniciador, de la construcción del PDR por parte de la comunidad científica.

Esbozo de un MER alternativo al modelo epistemológico vigente: redefinición de la modelización funcional mediante un diagrama de actividad

Empezaremos describiendo los *rasgos fundamentales* o *criterios generales* que deberá cumplir la estructura de un MER que completaremos mediante la construcción explícita de *recorridos matemáticos a priori*, sustentados en dicha estructura. Estos recorridos tomarán la forma de procesos de modelización funcional diseñados para responder a determinadas cuestiones. Aquí delinearemos únicamente sus principales características estructuradas en un *diagrama de actividad* a modo de mapa esquemático susceptible de sustentar diferentes recorridos matemáticos. Posteriormente utilizaremos este MER para fundamentar la construcción de un PDR para el estudio del CDE en el paso de la Secundaria a la Universidad. Por último, y desde la perspectiva de dicho PDR, llevaremos a cabo un somero análisis didáctico de la modalidad de estudio vigente en el paso de Secundaria a la Universidad en torno al estudio del CDE.

Enunciamos a continuación los criterios citados que también pueden considerarse como condiciones que imponemos al MER alternativo.

- *En el MER que proponemos se deben explicitar detalladamente diferentes procesos de construcción, utilización y comparación de los modelos funcionales, la relación entre ellos y el papel que juega el CDE en los mismos.*

- *Dicho MER deberá tomar en consideración las relaciones entre los modelos funcionales discretos y los continuos y, por tanto, completar relativamente el presentado en Ruiz-Munzón (2010).*
- *Como paso previo a la construcción de los modelos funcionales continuos, se partirá de datos discretos y, por tanto, se trabajará inicialmente con modelos discretos expresados en términos de sucesiones y de ecuaciones en diferencias finitas.*
- *Si se parte de datos discretos, se utilizarán diferentes tipos de regresión para pasar de los modelos discretos a los modelos continuos ya sea partiendo, en función de la naturaleza del sistema a modelizar, de los datos brutos, de la tasa de variación media (TVM) o la tasa de variación media relativa (TVMR), para construir modelos funcionales que ajusten un conjunto de datos discretos.*
- *Se justificará y evaluará el proceso de aproximación de los modelos discretos, (formulados en términos de ecuaciones en diferencias finitas), mediante modelos continuos (dados mediante ecuaciones diferenciales).*
- *Se mostrará que, dependiendo de la naturaleza del sistema a modelizar, la aproximación por regresión sobre la TVM o la TVMR (sucesiones que se obtienen a partir de los datos brutos) proporciona modelos funcionales relativamente más ajustados y, sobre todo, con mejor capacidad predictiva que los que se obtienen aproximando directamente los datos discretos brutos.*
- *Se pondrá de manifiesto la economía técnica que supone el paso de lo discreto a lo continuo mostrando, mediante cálculos explícitos, en qué sentido y para responder a qué tipo de cuestiones las técnicas del CDE son más económicas que las técnicas algebraicas de la matemática discreta. Se comprobará, por ejemplo, que cuando se trata de «controlar un modelo», esto es, prever su comportamiento a largo plazo o construir un modelo que cumpla ciertas condiciones dadas de antemano, las técnicas del CDE son mucho más potentes y económicas que las técnicas algebraicas.*
- *Se construirán y articularán diferentes tipos de variación (tanto entre magnitudes discretas como entre magnitudes continuas) definiendo el universo de tipos de variación que se tomarán en consideración. Cada uno de estos tipos se caracterizará imponiendo condiciones (hipótesis) sobre la TVM o sobre la TVMR, aunque estas últimas también se pueden expresar como condiciones sobre la TVM. Se delimitará de esta forma un cierto universo de tipos elementales de variación.*
- *Se interpretará, utilizando las técnicas del CDE, el significado de los parámetros de un modelo funcional en términos del sistema y, más concretamente, en términos de la variación de una variable del sistema respecto de otra.*
- *Se utilizará el CDE para estudiar todas las propiedades locales de los modelos funcionales construidos (que posteriormente se interpretarán en términos de las variables que definen el sistema modelizado).*
- *Si se parte de datos continuos, se construirá con técnicas algebraicas la propia función modelo o bien su derivada. En este último caso, el modelo funcional «exacto» (que puede ser una familia de funciones) se construye integrando una ecuación diferencial.*
- *En todos los casos, los procesos de modelización funcional se desarrollarán con el objetivo de dar respuesta a una cuestión generatriz suficientemente general y*

relativamente ambigua en el sentido que debe ser una cuestión formulada con "parámetros" abiertos que sólo progresivamente deben convertirse en datos concretos.

Mostraremos en lo que sigue que este conjunto de condiciones contribuirá a precisar la noción de MF tal como la conceptualizamos en Lucas (2015). En lo que sigue proponemos una reformulación más detallada y precisa de dicha noción, esto es, una caracterización de lo que entendemos por MF. Esta caracterización permitirá clarificar el significado de la conjetura de Ruiz-Munzón (2010) según la cual la razón de ser (o una posible razón de ser) del CDE se sitúa en el ámbito de la MF.

Diagrama de actividad de modelización funcional como esquema del MER

Para reformular la noción de MF, empezaremos por hacer un esquema detallado de los tipos de tareas que proponemos como componentes de los *cuatro estadios* del proceso de modelización matemática y, en particular, de los procesos de MF (Chevallard, 1989; Gascón, 2001). Materializaremos este esquema del MER mediante un diagrama de actividad (Figura 1) que denominaremos *diagrama de actividad de modelización funcional*. A fin de clarificar el contenido de dicho diagrama, describiremos a continuación cada uno de sus componentes, así como las posibles relaciones entre ellos. Puede suceder que al concluir un proceso de modelización funcional aparezcan nuevas cuestiones problemáticas que hagan referencia al propio modelo. En este caso diremos que «el modelo se ha independizado del sistema inicial» y que ha pasado a jugar el papel de un nuevo sistema, poniendo así de manifiesto el *carácter recursivo del proceso de modelización matemática*.

El diagrama contiene los cuatro estadios de todo proceso de modelización matemática, sin prejuzgar una sucesión temporal lineal entre ellos.

- *Primer estadio*: Delimitación o construcción del sistema a modelizar en el que se formulan cuestiones problemáticas y conjeturas.
- *Segundo estadio:* Construcción del modelo matemático y reformulación de las cuestiones iniciales.
- *Tercer estadio:* Trabajo técnico dentro del modelo e interpretación de este trabajo y de los resultados en términos del sistema.
- *Cuarto estadio:* Necesidad de un nuevo proceso de modelización para responder a nuevas cuestiones.

Además, el diagrama está dividido en dos grandes campos: el *discreto* y el *continuo*. Así, cuando una determinada actividad (o tipo de tareas) está situada sobre la línea ecuatorial significa que esta podrá ayudar a transitar de uno al otro campo o que dicha actividad podrá desarrollarse tanto en el campo discreto como en el campo continuo.

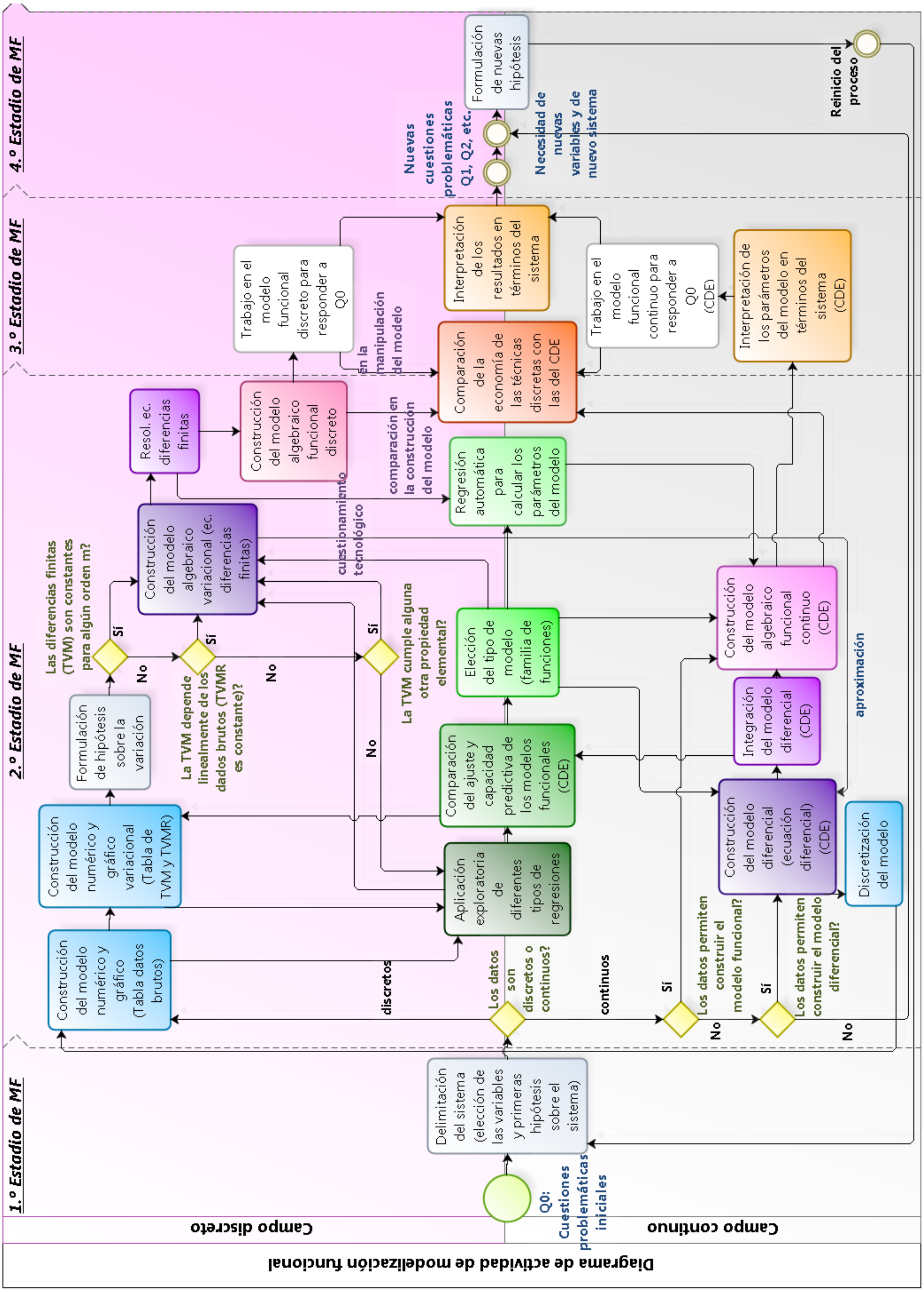

Figura 1.

Diagrama de actividad de la modelización funcional

Descripción de los componentes del diagrama de actividad de modelización funcional

En esta sección describiremos brevemente los componentes que figuran en el diagrama de actividad, especificando con más detalle las tareas y las cuestiones que forman parte del segundo estadio del proceso de MF, esto es, del estadio que denominamos de *construcción del modelo.* Hemos detallado mucho menos el tercer estadio del proceso, el que se refiere al *trabajo dentro del modelo*, porque las tareas que forman parte de este están mucho más presentes en la matemática escolar.

Primer estadio: Construcción del sistema a modelizar

Cuestiones problemáticas iniciales: Todo proceso de estudio parte necesariamente de un conjunto de cuestiones problemáticas normalmente no muy precisas, pero suficientemente ricas como para generar cuestiones derivadas capaces de guiar el proceso de estudio por diferentes recorridos. Por ejemplo: *¿Cómo podremos predecir el desarrollo de una epidemia? ¿Cómo estudiar el comportamiento de la masa de un hilo*[3] *a partir de la función densidad de masa de este? ¿Con cuántos amigos deberé compartir un "spot" publicitario para que, al final de un determinado período de tiempo, haya sido visualizado por un cierto número "objetivo" de usuarios de una red social dada? ¿Cómo varía la longitud de un arco de curva?*

Delimitación o construcción del sistema: El sistema inicial es un ámbito de la «realidad» (matemática o extramatemática) en el que aparecen las cuestiones problemáticas iniciales, que constituyen la que denominamos «cuestión generatriz», que queremos responder. La delimitación o «construcción del sistema» consiste en la elección de ciertos aspectos de este, que se simbolizan mediante *variables* y que, postulamos, son las pertinentes para construir un modelo funcional útil para responder a las cuestiones planteadas. En el caso de la MF suele considerarse *una variable dependiente* y *una o más variables independientes*, entre las que se puede encontrar la variable «tiempo». En este momento se formulan las primeras hipótesis sobre el sistema (muchas veces implícitas) en términos de relaciones entre las variables elegidas para construir el modelo funcional. Es verdad que, en algunos casos, puede parecer que no se hace ninguna hipótesis inicial (por ejemplo, cuando se dan unos cuantos datos discretos del número de infectados en cierta epidemia) pero, en realidad, el conocimiento de que se trata de una epidemia de cierto tipo (como, por ejemplo, de gripe) ya determina algunas hipótesis (aunque sean cualitativas) sobre las posibles relaciones entre la variable *tiempo* y la variable *número de infectados*.

Segundo estadio: Construcción del modelo

[3] La densidad lineal de masa del hilo puede ser medida pesando una cantidad conocida de longitud del hilo. La densidad es la masa del hilo por unidad de longitud.

Datos continuos: Son relaciones entre variables que pueden ser del tipo funcional o no, y cuya información se representa mediante una condición sobre los datos o mediante una descripción verbal de esa misma relación.

Datos discretos: Vienen dados mediante ciertas condiciones sobre la variación de los datos (sabiendo, por ejemplo, de antemano que la TVM de determinados datos empíricos es constante) o bien mediante un número finito de valores de la variable dependiente correspondientes a valores prefijados de la(s) variable(s) independiente(s).

***Construcción del modelo algebraico-funcional continuo «exacto»*:** Si los datos son continuos, esto es, si vienen dados en términos de funciones o de relaciones entre variables, puede suceder que estos permitan construir directamente el modelo funcional exacto. Este sería el caso más sencillo. Sin embargo, también es posible construir este modelo en el caso en que sólo se conoce la variación de los datos continuos en términos de una ecuación diferencial (modelo algebraico-diferencial).

Construcción del modelo algebraico-diferencial «exacto»: Si los datos son continuos, es muy usual que, aunque no sea posible construir directamente el modelo funcional exacto, se pueda construir un modelo algebraico diferencial exacto, o sea, una ecuación diferencial exacta.

Integración del modelo diferencial «exacto»: Mediante la integración de una ecuación diferencial elemental que, en la institución en la que nos situamos, se reducirá al cálculo de una primitiva casi inmediata, se construye el modelo algebraico-funcional continuo «exacto».

Discretización del modelo diferencial continuo: En el caso en que sea posible construir el modelo diferencial, pero se obtenga una ecuación diferencial no resoluble mediante técnicas elementales, se puede *discretizar el modelo* transformando los datos continuos en datos discretos, pasando a trabajar con modelos numéricos (tabulares) y gráficos.

Construcción de modelos numéricos y gráficos: Si se parte de *datos discretos* (provenientes, por ejemplo, de un sistema empírico), esto es, si los datos son unos cuantos valores de la variable dependiente (correspondientes a un conjunto prefijado de valores de la variable o variables independientes) se empezarán construyendo diferentes tipos de modelos tabulares y gráficos, tanto de datos «brutos» como de la tasa de variación media (TVM) y de la tasa de variación media relativa (TVMR) construidas a partir de los datos brutos. Llamaremos a estos últimos *modelos numéricos tabulares variacionales.*

Formulación de hipótesis sobre la TVM y la TVMR: A partir de los modelos tabulares será posible comprobar (o conjeturar) que la TVM o la TVMR cumple cierta propiedad elemental. En el paso de Secundaria a la Universidad, nos restringiremos a un conjunto de propiedades que caracterizan *cierto universo de los modelos discretos elementales.*

Construcción del modelo algebraico-variacional: A partir de los diferentes modelos tabulares variacionales, y según las hipótesis que formulemos respecto a las propiedades que cumple la TVM o la TVMR, se pueden construir diferentes modelos algebraico-variacionales en términos de *ecuaciones en diferencias finitas*.

Resolución de la ecuación en diferencias finitas: utilizando, por ejemplo, las *técnicas de recurrencia* o la técnica de determinación de los *coeficientes indeterminados* para calcular los *parámetros* y construir una solución *particular* (un modelo funcional) a partir de la solución *general* (una familia de modelos funcionales) de la ecuación en diferencias finitas, se puede construir el *modelo algebraico-funcional discreto* a partir del modelo algebraico-variacional. En particular, se puede construir algebraicamente un modelo polinómico interpolador (que pasa por todos los puntos correspondientes a los datos discretos). Para calcular los parámetros del citado modelo se podrá usar la técnica de determinación de los coeficientes indeterminados con la resolución de un sistema de ecuaciones compatible y determinado. Para construir el modelo polinómico interpolador se pueden utilizar otras técnicas algebraicas, tales como: la *fórmula de Lagrange* o la técnica de las *diferencias divididas de Newton.*

Regresión automática para calcular los parámetros del modelo: Como habitualmente las técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones en diferencias finitas pueden resultar muy trabajosas y con elevado coste, puede surgir la necesidad de un *cuestionamiento tecnológico* de dichas técnicas y, consecuentemente, la búsqueda de una técnica más económica que produzca resultados igualmente fiables. Así, partiendo de la solución *general* de la ecuación en diferencias finitas, se podrán calcular los *parámetros* del modelo por la técnica de aplicación directa de una *regresión automática* específica (del tipo de la solución general) sobre los datos discretos y construir el *modelo algebraico-funcional continuo «aproximado»*. Por ejemplo, en el caso de la construcción del polinomio interpolador, la técnica algebraica de determinación de sus coeficientes "con lápiz y papel" puede ser muy costosa, principalmente en los casos en que el grado del polinomio es muy elevado, o sea, cuando tenemos una gran cantidad de datos discretos. En esos casos, se podrá utilizar la técnica de *regresión automática para calcular los parámetros del modelo* con la calculadora gráfica, con Excel, con GeoGebra o con otro software adecuado. Esta técnica de regresión automática sobre los datos discretos para calcular los parámetros del modelo podrá ser utilizada también después de la elección de la familia de modelos funcionales que mejor describen el sistema. Por ejemplo, cuando se integra un modelo diferencial que describe una determinada variación de datos discretos surge un parámetro que podrá ser ajustado automáticamente al aproximar la integral de la regresión a los datos brutos.

Construcción del modelo algebraico-funcional discreto: este modelo corresponde a una solución *particular* de la ecuación en diferencias finitas obtenida a partir de los datos que describen el sistema.

Construcción de modelos algebraico-diferenciales por aproximación a una ecuación en diferencias finitas: Cada modelo discreto expresado en términos de una ecuación en diferencias finitas puede aproximarse mediante una *ecuación diferencial* que denominaremos *modelo algebraico-diferencial «aproximado»*.

Integración de los modelos algebraico-diferenciales «aproximados»: Mediante la integración de una ecuación diferencial elemental, que aquí se reduce al cálculo de una primitiva casi inmediata, se construyen modelos algebraico-funcionales «aproximados».

Construcción del modelo algebraico-funcional continuo «aproximado»: este modelo corresponde a la solución *particular* del modelo algebraico-diferencial «aproximado» (la ecuación diferencial).

Discretización del modelo diferencial continuo: En el caso en que la ecuación diferencial no pueda resolverse con las técnicas disponibles en la institución se podrá aproximar el *modelo algebraico-diferencial continuo* (ecuación diferencial) mediante un *modelo numérico-variacional discreto* (ecuación en diferencias). No vamos a estudiar estos casos porque no forman parte del ámbito institucional en el que nos situamos.

Aplicación «exploratoria» de diferentes tipos de regresiones: A partir de los modelos numéricos tabulares (tanto de la tabla de datos brutos como de las tablas de las TVM o las TVMR) pueden aplicarse regresiones para: (i) Pasar de un modelo *numérico/gráfico discreto* a un modelo *algebraico-funcional continuo;* (ii) Conocer una posible *ley algebraica* que pueda describir una relación funcional entre variables discretas, cuyo dominio sean los números naturales (modelo *algebraico-funcional discreto*). Se podrá usar GeoGebra para hacer algunos tipos de regresiones automáticas tales como: regresiones polinómicas de diferentes grados, exponenciales, logarítmicas, logísticas, potenciales, sinusoidales y regresiones resultantes de la composición de algunas de estas. Este trabajo se llevará a cabo de un modo exploratorio y sin utilizar criterios específicos para decidir qué tipo de regresión se deberá seleccionar para aproximar un determinado conjunto de datos discretos. De las diversas funciones resultantes, por una cuestión de economía del análisis subsiguiente, interesa elegir las mejores según algunos criterios predeterminados:

1. *Técnica de observación directa* de los resultados de la aproximación y ajuste de la curva a los puntos;
2. *Técnica automática de cálculo del valor del* R^2 (coeficiente de determinación);
3. *Técnica de cálculo del* "*menor error absoluto*" para determinar el ajuste de la curva, o sea, cálculo de la distancia entre la imagen aproximada y la imagen real: $|y_{aprox} - y_{real}|$;

En Lucas (2015) optamos por seleccionar para cada conjunto de datos discretos las *mejores regresiones* según estos criterios para, posteriormente, elegir la "mejor regresión" de acuerdo con su *capacidad de ajuste* a los puntos, pero sin olvidar su *capacidad de predicción* de la tendencia de los datos «futuros», esto es, la coherencia del modelo con la evolución del sistema modelizado y, también, con los datos no utilizados para construirlo.

Comparación del ajuste y de la capacidad predictiva de los modelos funcionales

A partir de los modelos que *mejor se ajustan a los datos*, testaremos y evaluaremos diferentes técnicas en términos de su eficacia para elegir *el modelo que mejor predice* los datos futuros a *corto*, *medio* y *largo plazo*:

$\boldsymbol{\tau_1}$: Comparación de los errores de predicción de los valores brutos «aproximados» obtenidos mediante las diferentes regresiones con relación a los correspondientes datos brutos «reales»;

$\boldsymbol{\tau_2}$: Comparación de los errores de predicción de las TVMs (o de las TVMRs) de los modelos «aproximados», o sea, de los valores variacionales «aproximados» obtenidos por las diferentes regresiones con relación a los correspondientes datos variacionales «reales»;

Elección del tipo de modelo (familia de funciones): La elección del "tipo de modelo" que mejor se adecua a un determinado conjunto de datos surge como resultado de la *comparación del ajuste y de la capacidad predictiva* de varios «candidatos» a modelos funcionales para describir el sistema.

Construcción de modelos algebraicos diferenciales «aproximados» mediante regresión: Dependiendo de la naturaleza del sistema a modelizar, la regresión se aplicará sobre las TVM o la TVMR (y, muy raramente, sobre los datos brutos). Dependiendo del tipo de regresión que se utilice y del tipo de datos discretos de los que se parta para hacer la regresión, obtendremos una función que, o bien aproxima el modelo funcional buscado (si hemos partido de los datos brutos), o bien aproxima la derivada del modelo buscado (si la regresión se ha aplicado sobre las TVM) o bien, por último, aproxima el cociente entre la derivada y dicho modelo (si la regresión se ha aplicado sobre las TVMR). En estos dos últimos casos que, como veremos son los más utilizados, obtendremos diferentes modelos algebraicos diferenciales aproximados (en términos de ecuaciones diferenciales) que, por integración, nos proporcionará el modelo funcional aproximado.

Comparación de las técnicas discretas y las técnicas del CDE en términos de economía: El trabajo con los modelos discretos (que hemos denominado *algebraicos variacionales* y que se materializan en ecuaciones en diferencias finitas) y con los modelos funcionales continuos, permite comparar la *economía de las técnicas* que se utilizan en cada caso para responder a las cuestiones problemáticas iniciales y otras cuestiones derivadas. Por un lado, se podrá comparar la economía de las técnicas discretas con las del CDE *en la construcción del modelo* algebraico-funcional, o sea, comparar el coste de las técnicas de resolución de ecuaciones en diferencias finitas con el coste de las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales. Por otro lado, se podrá comparar la economía de los dos tipos de técnicas *en la manipulación del modelo* previamente construido, o sea, comparar el coste de las técnicas de cálculo de la tasa de variación media en un intervalo con el coste de las técnicas de derivación. Por ejemplo, si el modelo es sencillo (lineal o cuadrático), la economía de las técnicas discretas y las del CDE para construir y manipular el modelo serán muy semejantes. Sin embargo, si se pretende construir y trabajar dentro de un modelo un poco más complejo, por ejemplo, el modelo logístico o el racional, las técnicas del CDE se muestran mucho más económicas que las técnicas discretas.

Tercer estadio: Trabajo dentro del modelo e interpretación en términos del sistema

Trabajo en el modelo funcional (continuo o discreto) para responder a las cuestiones problemáticas iniciales**:** el desarrollo de este trabajo dentro del modelo previamente construido para responder a las cuestiones problemáticas iniciales (Q_0) presenta diferentes aspectos como, por ejemplo, el *estudio de la evolución del modelo*, en particular, el estudio e interpretación de la monotonía y posibles extremos, intervalos de concavidad/convexidad y puntos de inflexión, ceros y signos, asíntotas, límites, periodicidad, paridad, etc. Mientras que en el caso del trabajo dentro de los modelos funcionales *continuos* se podrá recurrir a las herramientas del CDE, para responder a Q_0, en el caso del trabajo dentro de modelos funcionales *discretos* solo se podrá utilizar las técnicas de diferencias finitas. Después de llevar a cabo el trabajo y la manipulación del modelo funcional, será posible *extraer información* acerca del *comportamiento del sistema* y *predecir* la evolución de este a corto, medio y largo plazo. Además, el propio modelo funcional (continuo) es un buen instrumento para descubrir, mediante técnicas de *extrapolación*, *datos intermedios* desconocidos o cuya información se ha "perdido" y cuya recuperación sería de gran utilidad.

Interpretación de los parámetros del modelo en términos del sistema: En el estudio del comportamiento del modelo «a largo plazo» se puede interpretar la influencia de los parámetros sobre la forma de la gráfica del modelo y, en particular, sobre los valores extremos y comportamiento del sistema a largo plazo (estudio del comportamiento asintótico). En particular, cuando se trabaja con modelos algebraico-funcionales *continuos* se podrán utilizar las herramientas del CDE para interpretar los parámetros del referido modelo en términos del sistema. Así, de acuerdo con el tipo de modelo construido se pueden identificar los parámetros con, por ejemplo: la *velocidad* o *aceleración inicial,* con la *elasticidad,* con la *variación porcentual* de la variable dependiente cuando la independiente aumenta en 1 unidad, etc.

Interpretación de los resultados en términos del sistema: En algunas ocasiones los resultados del trabajo dentro del modelo funcional (tanto si éste es continuo como si es discreto) necesarios para responder a las cuestiones problemáticas iniciales Q_0 no corresponden a valores *válidos* en el sistema. Por ejemplo, los resultados pueden no formar parte del *dominio* o no poderse interpretar en el contexto del problema planteado. Otro aspecto de esta interpretación consiste en percibir la *relevancia que tienen los resultados obtenidos* para avanzar en el conocimiento del sistema. Es de reseñar que los mismos resultados del trabajo del modelo pueden presentar diferentes interpretaciones de acuerdo con el *ámbito de estudio*, por ejemplo: la *interpretación geométrica* de los resultados en términos del sistema puede ser distinta de la *interpretación algebraica* de los mismos; la *interpretación física* de los resultados también podrá diferir de su *interpretación matemática*, etc.

Cuarto estadio: Necesidad de un nuevo proceso de modelización funcional

Aparición de nuevas cuestiones problemáticas: La interpretación en el sistema del trabajo dentro del modelo funcional construido generará nuevas cuestiones problemáticas (Q_1, Q_2, Q_{21}, Q_{211}, etc.) diferentes de las iniciales (Q_0) que pueden requerir el uso de nuevas técnicas matemáticas (y hasta un nuevo discurso tecnológico-teórico) y, consecuentemente, la ampliación del ámbito de la actividad matemática desarrollada. Por ejemplo, la necesidad de trabajar con familias de funciones con uno o más parámetros, lo que comportará la necesidad de estudiar nuevos modelos funcionales (Fonseca, Gascón & Lucas, 2014).

***Necesidad de nuevas variables y de un nuevo sistema*:** Las nuevas cuestiones problemáticas pueden requerir la toma en consideración de nuevas variables para delimitar (construir) el sistema, lo que provocará la emergencia de un nuevo sistema. Por ejemplo, si en el sistema inicial habíamos supuesto que el efecto de un medicamento era independiente del peso, de la edad y del sexo del paciente y resulta que el análisis de los resultados nos sugiere que esta hipótesis es cuestionable, entonces deberemos introducir estas nuevas variables y tendremos un sistema más complejo en el que se pueden plantear cuestiones más finas. También puede darse el caso en que el modelo construido *se independice del sistema modelizado* por él, de manera que emerjan cuestiones problemáticas relativas al propio modelo. En este caso es el modelo el que toma el papel de *nuevo sistema* y el proceso de modelización que se inicia será un proceso de modelización intramatemática, poniendo así de manifiesto la reflexividad de la actividad de modelización matemática y la imposibilidad de separar la modelización de sistemas extramatemáticos de la de sistemas intramatemáticos.

Formulación de nuevas hipótesis: En el caso citado en que se requiere tomar en consideración nuevas variables para delimitar el nuevo sistema (como, por ejemplo, las variables peso, edad y sexo del paciente), también será necesario formular hipótesis sobre posibles relaciones entre dichas variables y el efecto del medicamento. Estas hipótesis serán necesariamente "nuevas" puesto que involucran variables que en el primer modelo no se tomaban en consideración. La formulación y contrastación de estas nuevas hipótesis constituye uno de los principales objetivos del proceso de MF.

Un paradigma didáctico de referencia para el estudio del cálculo diferencial en el paso de Secundaria a la Universidad

Necesidad de fijar un paradigma didáctico de referencia: Como hemos dicho en la introducción, para llevar a cabo una investigación didáctica relativa al estudio de cierto ámbito de conocimientos en una institución escolar no sólo se necesita explicitar un MER de dicho ámbito, sino que se requiere explicitar un *paradigma didáctico* (PD), esto es, una *modalidad de estudio* del ámbito en cuestión que, de forma más o menos explícita, se toma como referencia desde la investigación y, por consiguiente, se denomina *paradigma didáctico de referencia* (PDR).

Cada paradigma didáctico en torno a cierto ámbito de conocimientos especifica una manera posible de organizar el estudio de dicho ámbito en una institución determinada. Se caracteriza mediante un sistema complejo formado por cuatro subsistemas: un *modelo epistemológico* (ME) de los conocimientos en juego; los *fines educativos* o, más en general, los *fines didácticos* (FD) que se persiguen con dicho estudio; los *medios didácticos* (MD) que utiliza la comunidad de estudio para alcanzar dichos fines; y los *fenómenos didácticos* (φD), sorprendentes y habitualmente «indeseables» desde la perspectiva de la institución responsable de constituir el

PD. La toma en consideración de dichos fenómenos es el punto de partida (el *iniciador*) del *proceso de construcción* del PD (Gascón & Nicolás, 2021a, 2021b; Gascón, 2023, 2024). Esquemáticamente pondremos:

$$PD = [ME, FD, MD, \varphi D]$$

Para precisar un poco más las cosas, digamos que cada PD está sustentado en un ME que constituye una *representación* particular, entre otras posibles, de los conocimientos en juego. El ME proporciona las nociones y los términos necesarios para formular los FD que se persiguen, al tiempo que condiciona el tipo de MD que podrían ser útiles para alcanzar dichos fines entre los que figura el de evitar los fenómenos didácticos φD (Gascón, 2001). Se pone así de manifiesto la *unidad funcional* de los PD que, por tanto, deben considerarse como *sistemas complejos* cuya característica determinante es la *interdefinibilidad* y mutua dependencia de las *funciones* que cumplen sus componentes o subsistemas dentro del sistema total (Rolando García, 2006).

Distinguimos entre el paradigma didáctico *vigente* (PDV) en una institución docente en torno a cierto ámbito como, por ejemplo, el paradigma didáctico vigente en el paso de la Secundaria a la Universidad, en torno al estudio de la modelización funcional:

$$PDV_{SU}(MF) = [MEV, FDV, MDV, \varphi DV]$$

y los paradigmas didácticos de *referencia* (PDR), que son artefactos teóricos construidos por la investigación para analizar y representar el PDV en una institución y, en su caso, para analizar las condiciones requeridas para promover un cambio de este en una dirección determinada.

$$PDR_{SU}(MF) = [MER, FDR, MDR, \varphi DR]$$

Los mismos argumentos que servían para justificar la conveniencia y hasta la necesidad de explicitar el *modelo epistemológico de referencia* (MER) que se utiliza desde la investigación para llevar a cabo un *análisis praxeológico* de cierto ámbito de conocimientos (Gascón, 2014) sirven ahora, con más razón, para justificar la necesidad de explicitar el PD que se toma como referencia. La explicitación de un PDR permitirá clarificar y precisar, por contraste, el *análisis didáctico* de la modalidad de estudio vigente, y de las modalidades de estudio posibles, en una institución. Así como los principales rasgos del MEV y, sobre todo, sus «carencias» y «limitaciones», se describen en contraste y comparación con un MER, para analizar el PDV se utilizará (como contraste) un PDR.

Dada la importancia del PDR elegido, hay que subrayar que esta elección (esto es, la construcción por parte de la comunidad científica de un PDR en lugar de otros posibles) nunca es arbitraria, está guiada por convicciones, preferencias o asunciones del investigador o de la comunidad científica en cuestión (aunque, en algunos casos, esté motivada únicamente por cuestiones metodológicas) y, en última instancia, está sustentada en un sistema de valores. Como hemos dicho, un PDR encarna una *hipótesis científica* según la cual los procesos de estudio regidos por dicho PD permitirían eludir, en determinadas condiciones, los fenómenos didácticos "indeseables" emergentes en los procesos de estudio regidos por el PDV.

Paradigma didáctico basado en el modelo epistemológico de referencia construido: En base y en coherencia con el $\mathrm{MER_{SU}}$(MF) construido, el $\mathrm{PDR_{SU}}$(MF) sustentado en dicho MER propugna unos *fines didácticos* concretos asociados al estudio del CDE en el paso de Secundaria a la Universidad, al tiempo que propone unos *medios didácticos* para alcanzar dichos fines.

Los *fines didácticos* constituyen la respuesta a la siguiente cuestión: *¿para qué estudiar CDE en el paso de la Secundaria a la Universidad*?

Antes de explicitar la respuesta que proporciona el $\mathrm{PDR_{SU}}$(MF) a esta cuestión es necesario hacer un pequeño circunloquio. En la TAD asumimos que todo conocimiento se refiere, en última instancia, a un sistema o a un tipo de sistemas. Los conocimientos se obtienen mediante un proceso de modelización de dicho sistema y se materializan en las respuestas a ciertas cuestiones planteadas con los elementos y las nociones del sistema. Por tanto, lo que se modeliza es, en realidad, un sistema provisto de cuestiones y las citadas respuestas se construyen gracias al trabajo en el modelo que tiene estructura praxeológica.

Volviendo a la cuestión anterior, diremos en primer lugar que, en general, los fines didácticos del estudio de un ámbito de conocimientos, esto es, la respuesta al *para qué estudiar* cierto ámbito en una institución determinada, puede formularse simplemente como sigue: para aumentar los conocimientos (tanto en *extensión* como en *precisión* y *rigor*) sobre un sistema o un tipo de sistemas. Este aumento (cuantitativo y cualitativo) de conocimientos se materializa, como hemos dicho, en las respuestas a cuestiones sobre el sistema y en las relaciones que se establecen entre dichas respuestas.

En el caso particular que nos ocupa, ante la cuestión: *¿para qué estudiar CDE en el paso de la Secundaria a la Universidad*?, el $\mathrm{PDR_{SU}}$(MF) responde: para construir modelos funcionales (a partir de datos discretos o continuos) de todo tipo de sistemas (matemáticos o extramatemáticos); para llevar a cabo un trabajo matemático en dichos modelos; para interpretar los resultados de este trabajo; y, en definitiva, para responder a las cuestiones problemáticas formuladas inicialmente en los diferentes tipos de sistemas (físicos, biológicos, económicos, geológicos, sociales, numéricos, geométricos, etc.) y ampliar así el conocimiento sobre dichos sistemas. Esta respuesta sintética puede precisarse y detallarse especificando el papel que desempeña el CDE en la construcción y el estudio de los diferentes tipos de modelos funcionales, tal como ha sido detallado en la construcción del MER_{SU}(MF).

Los *medios didácticos* que propone el PDR_{SU}(MF) para alcanzar dichos fines constituyen la respuesta a la siguiente cuestión: *¿cómo estudiar el CDE en el paso de la Secundaria a la Universidad para alcanzar los fines didácticos citados?*

La respuesta que propone el PDR_{SU}(MF) empieza por situar el estudio del CDE en el ámbito de la MF redefinida en los términos que propone el MER_{SU}(MF). En consecuencia, el PDR_{SU}(MF) propone estudiar el CDE como un *instrumento clave de la modelización funcional de todo tipo de sistemas*. Más concretamente, propone estudiar el papel que desempeña el CDE: en la comparación del ajuste y la capacidad predictiva de los modelos funcionales; en la comparación entre de la economía de las técnicas discretas y las del CDE; en la construcción de los modelos diferenciales y de los modelos algebraico-funcionales continuos; en el análisis de las propiedades de los modelos funcionales continuos y en la interpretación de los parámetros del modelo en términos del sistema. Y, para ello, el PDR_{SU}(MF) propone llevar a cabo diferentes procesos de modelización funcional en el campo continuo y en el tránsito entre los campos discreto y continuo, tal como se sugiere el diagrama de actividad (Figura 1). Los medios didácticos para gestionar los citados procesos de modelización funcional se materializan en diferentes r*ecorridos de estudio e investigación* cuya puesta en marcha ayuda a conectar diferentes praxeologías matemáticas que suelen surgir de forma atomizada (por ejemplo, la resolución de ecuaciones diferenciales, el cálculo de primitivas y la representación gráfica de funciones) integrándolas en procesos de modelización funcional.

Análisis didáctico de la modalidad de estudio vigente en el paso de Secundaria a la Universidad en torno al cálculo diferencial: Desde la perspectiva del PDR_{SU}(MF) el análisis empírico de documentos curriculares en diversos países pone de manifiesto el *fenómeno didáctico* de la *falta de visibilidad escolar de la actividad de modelización funcional* y la consiguiente ausencia escolar de las actividades de *construcción*, *comparación* e *interpretación* de modelos funcionales. Se trata de una importante manifestación, a nivel subdisciplinar, del fenómeno disciplinar de *rigidez y desarticulación de las organizaciones matemáticas escolares* (Fonseca, 2004) en el caso particular del CDE y la MF en el paso de Secundaria a la Universidad (Lucas, 2015). Esta desarticulación provoca dificultades en el sistema escolar (y, por tanto, a los profesores y a los alumnos) para dar sentido al estudio escolar del CDE.

En la actividad matemática escolar no se explora el papel que podría desempeñar el CDE en la construcción de modelos a partir de datos discretos, en la comparación del ajuste de los modelos funcionales a los datos empíricos, ni en la interpretación de los parámetros del modelo en términos de la variación de una variable del sistema respecto a otra. En consecuencia, ¿cuáles son los *fines didácticos vigentes* asociados al estudio del CDE en el paso de la Secundaria a la Universidad?, esto es, cuál es la respuesta del PDV a la cuestión: ¿*Para qué se estudia CDE en el paso de la Secundaria a la Universidad*?

La respuesta de los documentos curriculares muestra que la razón de ser oficial del CDE en el paso de Secundaria a la Universidad, es decir, el tipo de tareas que se le asignan en los documentos curriculares se centra en el análisis de las propiedades de cierto tipo de funciones y en la resolución de algunos problemas de optimización. En consecuencia, los *fines didácticos* que se persiguen oficialmente con el estudio escolar del CDE se limitan al aumento de los conocimientos sobre las propiedades de ciertos tipos de funciones, y se materializan en las respuestas a cuestiones relativas al dominio, la monotonía, la continuidad, la derivabilidad y las demás características de dichas funciones.

En coherencia con la desarticulación escolar entre el CDE y la MF (cuya presencia es, además, muy frágil), los *medios didácticos vigentes* en el paso de la Secundaria a la Universidad para el estudio del CDE, esto es, los medios didácticos que el sistema educativo utiliza para alcanzar los fines que propugna, se reducen a la propuesta docente del uso de técnicas bastante estereotipadas para determinar las propiedades de ciertos tipos de funciones y a utilizar algunas de estas propiedades para resolver problemas de optimización.

Hasta aquí hemos llevado a cabo un somero análisis de la *economía de la modalidad de estudio vigente* en el paso de Secundaria a la Universidad en torno al CDE, desde la perspectiva del $\mathrm{PDR}_{\mathrm{SU}}$(MF). El análisis didáctico debería completarse con un *análisis ecológico* lo que requeriría, en particular, responder cuestiones tales como: *¿qué condiciones se requieren y, en particular, qué restricciones dificultan la evolución de la modalidad de estudio vigente en la dirección que marca el* $\mathrm{PDR}_{\mathrm{SU}}$(MF)*?, ¿qué papel podría jugar el CDE en el establecimiento de las citadas condiciones?, y ¿qué restricciones, provenientes de qué niveles de codeterminación didáctica, dificultan la puesta en marcha de una tal modalidad de estudio?*

Los paradigmas didácticos completan las funciones de los modelos epistemológicos

La razón por la cual construimos modelos epistemológicos de referencia (MER) está ligada, en primer lugar, a la necesidad de sustentar el *análisis praxeológico* de cierto ámbito de las matemáticas. Se obtiene así una representación de algunos rasgos de la forma como se conceptualizan las matemáticas que viven en una institución que, en última instancia, está ligada a los f*enómenos didácticos*, habitualmente «indeseables» (desde cierta perspectiva) que dichos rasgos sacan a la luz. Se pone así de manifiesto la incipiente *función fenomenotécnica*[4] de los MER (Gascón, 2014; Lucas et al., 2019).

El análisis praxeológico de las matemáticas involucradas en cierto ámbito trae consigo el cuestionamiento de la conceptualización escolar de las mismas y, en consecuencia, posibilita el distanciamiento de los condicionantes que conlleva dicha conceptualización. Por consiguiente, el MER en el que se sustenta el análisis praxeológico puede considerarse como un *instrumento de emancipación epistemológica* del didacta y de la ciencia didáctica. Sólo de esta forma la didáctica puede emanciparse del modelo epistemológico vigente en las instituciones concernidas y construir de manera autónoma su propio objeto de estudio (Gascón, 2014).

La utilidad de los MER no se agota en sus funciones fenomenotécnica y emancipatoria. Se supone que un MER, además de clarificar y precisar ciertos rasgos praxeológicos de las matemáticas institucionalizadas, puede *guiar el diseño y la gestión* de procesos de estudio que cumplirán (presuntamente) determinadas condiciones y permitirán alcanzar ciertos *fines educativos* «deseables» (desde cierta perspectiva). De hecho, *contrastar empíricamente* un MER significa, en esencia, comprobar si efectivamente cumple todas estas funciones.

Para completar el análisis praxeológico sustentado en un MER, la didáctica construye *paradigmas didácticos de referencia* (PDR) como instrumentos para sustentar el análisis didáctico de los procesos de estudio institucionalizados. Un PDR es una *hipótesis científica* que desarrolla y precisa la hipótesis que encarna el MER. Puede formularse como sigue: si una comunidad de estudio (que cumpliese ciertas condiciones) llevara a cabo un proceso de estudio *regido* por el PDR, esto es, sustentado en el MER y utilizando los medios MDR, entonces dicha comunidad eludiría ciertos fenómenos que acaecen cuando el estudio de dicho ámbito está *regido* por el PDV, y alcanzaría los fines didácticos que el PDR propugna. Como toda hipótesis científica, debe ser contrastada empíricamente.

Además de precisar la hipótesis que encarna el MER, un PDR extiende y completa la *función emancipadora* del MER puesto que, al proporcionar una representación del PDV, además de posibilitar la emancipación epistemológica, permite distanciarse de las influencias provenientes de los MDV y de los FV, haciendo visibles fenómenos didácticos que habían

[4] Los MER son herramientas heurísticas para *hacer visibles ciertos fenómenos didácticos*. En esto consiste su función fenomenotécnica.

permanecido invisibles. En consecuencia, la asunción explícita de un PDR constituye un primer paso de la *emancipación institucional* que podría definirse, en general, como la liberación de la ciencia didáctica respecto de la sujeción a la ideología dominante en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio. Así, en base a un PDR, la didáctica puede, de manera *relativamente autónoma*, construir los fenómenos y formular los problemas didácticos que constituyen su objeto de estudio.

En resumen, los paradigmas didácticos, además de completar y precisar la hipótesis que encarna el MER en el que se sustentan, completan las funciones fenomenotécnica y emancipatoria de este. Se pone así de manifiesto que para abordar un problema didáctico en el que esté involucrado un ámbito de las matemáticas, no sólo es necesario explicitar un MER de dicho ámbito, sino que también se debe fijar (aunque solo sea provisionalmente) un paradigma didáctico sustentado en dicho MER.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por los proyectos PID2021-126717NB-C33 y UIDB/05422/2020 (Fondos portugueses: FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia).

Referencias

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A. et Margolinas, C. (Coord.) *Balises en Didactique des Mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989): *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'IREM Aix-Marseille.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad* [Tesis doctoral, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo].

Fonseca Bon, C., Gascón Pérez, J. & Oliveira Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3), 289-318. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33532494003.

Gascón, J. & Nicolás, P. (2021a). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. *Educación Matemática*, *33*(1), 7-40. https://doi.org/10.24844/EM3301.01

Gascón, J. & Nicolás, P. (2021b). Relaciones entre la investigación y la acción en didáctica de las matemáticas, *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, *20*, 23-39. https://aiem.es/article/view/v20-aascon-nicolas/4033-pdf-es

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4* (2), 129-159.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, número especial, XXV aniversario, marzo de 2014, p. 143-167.

Gascón, J. (2023). La formación del profesorado en tiempos de crisis paradigmática, *Educação Matemática Pesquisa*, *25*(2), 211-237, (25 años de la revista EMP). https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/62075

Gascón, J. (2024). Problematic issues regarding didactic paradigms, Extended Abstracts 2022 *-7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (*CITAD 7). Springer. (in press)

Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* [Tesis doctoral, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo]. http://www.investigo.biblioteca.uvigo.es/xmlui/handle/11093/542

Lucas, C., Fonseca, C., Gascón, J. & Schneider, M. (2019). The potential phenomenotechnical of reference epistemological models. The case of elementary differential calculus, In M. Bosch et al. (Eds.) *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A comprehensive Casebook*, 77-97. Routledge. DOI: 10.4324/9780429198168-6

García, R. (2006). *Sistemas complejos. Conceptos, método y fundamentación epistemológica de la investigación interdisciplinaria.* Barcelona: Gedisa Editorial.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* [Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona]. https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=22189