EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p493-514

# Algumas considerações sobre as construções do conjunto dos números reais: uma necessidade para um modelo epistemológico de referência? [1]

# Some considerations about the constructions of the set of real numbers: is there a need for an epistemological reference model?[2]

# Algunas consideraciones sobre las construcciones del conjunto de los números reales: ¿necesidad de un modelo epistemológico de referencia?

# Quelques considérations sur les constructions de l'ensemble des nombres réels : est-ce une nécessité pour un modèle épistémologique de référence ?

Mustapha Rachidi[3]
Instituto de Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS – Brasil
Doutor em Matemática – Université Claude Bernard - Lyon 1 – França
https://orcid.org/0000-0002-8210-7383

José Luiz Magalhães de Freitas[4]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS – MS)
Universidade Anhanguera Uniderp (UNIDERP – MS)
Doutor em Didática da Matemática – USTL Montpellier II - França
https://orcid.org/0000-0001-5536-837X

**Resumo**

O objetivo deste artigo é apresentar alguns elementos sobre o conjunto dos números reais e uma visão sintética das construções rigorosas desse conjunto no século XIX, que se tornaram um requisito para a aritmetização da análise matemática com os trabalhos de Cauchy e Weierstrass. Analisaremos algumas considerações didáticas concernentes ao ensino do conjunto dos números reais no ensino médio e no início da universidade. Esperamos que este artigo possa fornecer subsídios para a elaboração de modelos epistemológicos de referência (MER) para estudos e pesquisas dos conteúdos de funções, limite e continuidade, entre outros.

***Palavras-chave**:* Números reais, Evolução histórica, Epistemologia, Didática, Modelo epistemológico de referência.

---

[1] O artigo faz parte do projeto vinculado ao edital universal financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).
[2] The article is part of the project linked to the universal call for proposals funded by the National Council for Scientific and Technological Development (CNPq).
[3] mu.rachidi@gmail.com, mustapha.rachidi@ufms.br
[4] joseluizufms2@gmail.com, jose.l.freitas@cogna.com.br

**Abstract**

The aim of this article is to provide some elements about the set of real numbers and a synthetic view on the motivation of its rigorous constructions in the 19th century. Since the seminal works of Cauchy and Weierstrass, such constructions became a requirement for the arithmetization of the mathematical analysis. We also analyze some didactic considerations regarding teaching the set of real numbers in high school and at the beginning of university. With this article, we hope to provide subsidies for the elaboration of epistemological models of reference (EMR) for studies and research on the contents of functions, limit and continuity, among others.

***Keywords*****:** Real numbers, Historical evolution, Mathematical analysis, Epistemology, Didactics, Epistemological reference model.

**Resumen**

El objetivo de este artículo es presentar algunos elementos sobre el conjunto de números reales y una visión sintética de las rigurosas construcciones de este conjunto en el siglo XIX, que se convirtieron en un requisito para la aritmética del análisis matemático con los trabajos de Cauchy y Weierstrass. Analizaremos algunas consideraciones didácticas relativas a la enseñanza del conjunto de números reales en el bachillerato y en los inicios de la universidad. Con este artículo, esperamos otorgar subsidios para la elaboración de modelos epistemológicos de referencia (MER) para estudios e investigaciones sobre los contenidos de funciones, límite, continuidad, entre otros.

***Palabras clave***: Números reales, Evolución histórica, Análisis matemático, Epistemología, Cosas didácticas, Modelo epistemológico de referencia.

**Résumé**

L'objet est de donner quelques éléments sur l'ensemble des nombres réels et un aperçu synthétique sur leurs constructions rigoureuses au 19ième siècle. A cette époque, de telles constructions sont devenues une exigence pour l'arithmétisation de l'analyse mathématique, avec les travaux de Cauchy et Weierstrass. Quelques considérations didactiques sur leurs rapports à l'enseignant de l'analyse mathématique au lycée et au début de l'université, sont présentées. Avec cet article, nous espérons fournir des subventions pour l'élaboration de modèles épistémologiques de référence (MER) pour des études et des recherches sur le contenu des fonctions, la limite, la continuité, entre autres.

***Mots-clés*** : Nombres réels, Évolution historique, Analyse mathématique, Épistémologie, Didactique, Modèle épistémologique de référence.

**Algumas considerações sobre as construções do conjunto dos números reais: uma necessidade para um modelo epistemológico de referência?**

O estudo da evolução do conceito de número real e das construções do conjunto desses números, podem contribuir de maneira importante e necessária para a elaboração de um modelo epistemológico de referência – MER, concernente a esse tópico. Assim, podemos dizer que o professor, ciente da evolução histórica dessas construções e dos obstáculos epistemológicos, pode encontrar formas de superar as dificuldades ligadas a abordagem desse conceito. Além disso, ele pode enriquecer sua cultura com conhecimentos que geralmente faltam nos livros didáticos, bem como em geral no ensino de graduação e de pós-graduação. De maneira geral, podemos colocar a seguinte pergunta: *“Como a evolução histórica e os obstáculos epistemológicos podem contribuir ao MER para um conceito matemático?”*

Em nosso artigo apresentamos uma abordagem teórica das construções dos números reais e suas necessidades para a aritmetização da análise, assim como obstáculos epistemológicos ocorridos na evolução da análise real e do seu ensino. Por outro lado, com base na análise dos livros didáticos utilizados e nos diálogos com nossos colegas, ficamos convencidos da necessidade de uma apresentação sintética das construções dos números reais $\mathbb{R}$ e de obstáculos epistemológicos ligados a elas. Observamos ainda que nas ementas das disciplinas de Cálculo, não aparece nenhuma proposta ou orientação para a abordagem dessas construções e suas necessidades para compreender os conceitos de limite e de continuidade. Houzel (1079) chama a atenção sobre a evolução histórica dos conceitos matemáticos: *«O trabalho dos matemáticos é frequentemente dedicado a retomar teorias antigas e as reformular num quadro novo [...]; as redescobertas sucessivas que levam a matemática produzir teorias, apagam a história.» (Houzel, 1979, p. 3)*

Acreditamos que esse processo de apagar ou negar a história de conceitos da matemática, traz um grande prejuízo para a elaboração de um MER, que vise superar obstáculos epistemológicos na abordagem desse conteúdo. Durante as últimas décadas, estudos e pesquisas tendem a mostrar que a história da matemática pode desempenhar um papel importante no seu ensino. Além disso, a evolução histórica de um conceito antes da sua chegada aos livros educativos exige um trabalho considerável, devido a possíveis obstáculos epistemológicos. Assim, neste contexto, o conhecimento deste desenvolvimento histórico e dos obstáculos que rodeiam este conceito permitirá ao professor ter uma abordagem didática adequada ao seu ensino. Além disso, tal abordagem pode ajudar a promover a aprendizagem do conceito e das suas propriedades pelos alunos, através da aquisição de conhecimentos baseados na evolução histórica deste conceito.

Este estudo focaliza algumas reflexões sobre números reais e o conceito de limites. Iniciamos com um breve panorama da evolução dos números reais e as motivações epistemológicas, suas construções, resultantes da aritmetização da análise matemática. Na verdade, as poucas considerações históricas dos números reais que nos interessam pretendem ilustrar a importância do impacto da estreita ligação entre a necessidade e as motivações profundas de uma construção rigorosa do conjunto dos números reais, de forma a estabelecer bases sólidas, bases para a digitalização da análise matemática moderna. A partir daí propomos algumas considerações didáticas acerca da importância das propriedades do conjunto dos números reais e do ensino da análise real. E assim, num segundo momento, faremos algumas considerações didáticas sobre sua relação com o professor de análise matemática no ensino médio e no início da universidade. Finalmente, uma conclusão é apresentada.

Inicialmente vale lembrar que no contexto da aritmetização da análise, o século XIX viu o surgimento de diferentes construções do conjunto dos números reais, uma vez que as propriedades desses números são a base para o estudo do limite e continuidade das funções reais com variáveis reais. Atualmente, a importância dos números reais para o ensino de análise matemática também se manifesta em livros didáticos, bem como em currículos do ensino médio ou universitário. Assim, busca-se estabelecer uma abordagem didática para o conjunto dos números reais, mais precisamente para o conceito de números reais. Em concordância com Artigue (1990), consideramos que o que interessa ao didático é:

> [...]a identificação de concepções locais que se manifestam em situações e a análise das condições de transição de uma concepção local para outra, seja de rejeitar uma concepção errônea, de estabelecer uma concepção que possibilite melhorar a eficiência na solução de uma determinada classe de problemas ou promover a mobilidade entre concepções já disponíveis (Artigue, 1990, p. 278).

Por outro lado, consideramos importante o trabalho com as propriedades dos números reais, para que favoreçam o aprofundamento do pensamento funcional. Pode ainda ajudar a promover a entrada do estudante nos conceitos de limite e continuidade das funções reais. Nesse sentido, encontramos em Burigato e Rachidi:

> Além disso, é também uma oportunidade de compreender e aprofundar em aspectos sobre o papel importante das propriedades do conjunto dos números reais. O conceito moderno de limite apareceu com Cauchy, com seu estudo sobre as quantidades infinitamente pequenas e infinitamente grandes, baseando seu raciocínio sobre as propriedades dos números reais. O que mostra a importância desse conjunto para entrada no pensamento funcional e no trabalho do professor, que terá de lidar com esse conjunto para fazer uma proposta interessante de ensino com a definição formal (Burigato e Rachidi, 2023, p. 42).

Diante do desafio de abordar conteúdos das disciplinas, de cursos de graduação, de Cálculo e de Análise Matemática, como funções, limite, continuidade, entre outros, consideramos que é fundamental um estudo mais aprofundado de alguns aspectos concernentes ao surgimento do conjunto dos números reais. Consideramos muito importante fornecer subsídios para professores e pesquisadores de conteúdos dessas disciplinas, para a elaboração de *modelos epistemológicos de referência* (MER) visando encontrar alternativas para *modelos epistemológicos dominantes* (MED) vigentes em instituições, conforme Gascón (2014). Para isso, apresentamos algumas considerações sobre a construção dos números reais, as quais consideramos fundamentais como subsídios para a abordagem de conteúdos de disciplinas, em que esse conjunto figura como base para os demais.

Assim, apresentamos aqui uma abordagem de diferentes procedimentos utilizados por Cauchy, Cantor e Dedekind na construção teórica dos reais, complementada com exemplos ilustrativos, que podem se constituir como ferramentas para ser utilizadas por professores e pesquisadores na elaboração de modelos epistemológicos de referência. Apresentamos tanto aspectos matemáticos, quanto didáticos e epistemológicos das construções do conjunto dos números reais, que podem ser úteis para a elaboração de organizações matemáticas e didáticas de conteúdos de Cálculo e Análise Matemática.

## Números Reais: Evolução e Construções

Desde a época de Euclides, a evolução do conceito de número real passou do uso intuitivo da noção de grandezas para uma construção matemática rigorosa no século 19. Como Bronner escreve:

> A construção dos reais, baseada na teoria das razões de grandezas e derivada da tradição euclidiana, já não satisfaz mais os matemáticos. A aritmetização de grandezas e razões por Descartes e Stevin é sempre "marcada" pela geometria. Além disso, a geometria não tem mais a legitimidade de épocas anteriores. Uma nova corrente, chamada formalista, está surgindo, onde se trata de construir ou criar objetos que consideraremos como números inteiros (Bronner, 1997, p.43).

Em primeiro lugar, o problema da continuidade das funções reais era uma preocupação dos matemáticos no século XVIII. De fato, isso se manifesta na obra de Euler, que, em sua definição de 1748 do conceito de função real com valores reais, escreve: «*Uma quantidade constante é uma quantidade determinada que sempre mantém o mesmo valor.*» (Euler, 1796-1797, Tradução nossa).

Na definição de Euler, há um elemento que pode nos ajudar a compreender suas ideias sobre o assunto: a ideia de **"tempo físico"**, que está pelo menos implícita na definição: "que sempre preserva". A presença do **tempo** na obra de Euler terá um papel importante. Nesta última noção, encontraremos a noção de continuidade. Na verdade, o contínuo permanecerá em um domínio físico, uma vez que a reta real não existe em forma numérica neste trabalho (a reta numérica completa é do século XIX).

Como Euler, Bolzano também estava interessado na continuidade, tentando provar o teorema do valor intermediário, e ele se deparou com uma visão clara do conjunto dos números reais. Na verdade, em 1817 Bolzano formulou o seguinte teorema:

> “Zwischen je zwei Werthen, die ein entgegensetztes Resultat gewähren, liege wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung":
> Entre dois valores que dão resultados de sinais opostos, existe pelo menos uma raiz da equação (Journal: Rein analytischer Beweis).

Em outras palavras, “*existe pelo menos uma raiz real da equação entre cada dois valores que dão um resultado oposto*”.

Na verdade, este teorema que levará seu nome é equivalente ao atual “teorema do valor intermediário”: “Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (onde a<b) uma função contínua tal que $f(a).f(b) < 0$. Então, a equação f(x) = 0, admite uma solução $x_0 \epsilon\ [a,b]$, isto é, existe $x_0\ \epsilon\ [a,b]$ tal que $f(x_0) = 0$.”

Para a demonstração do seu teorema, Bolzano propôs prová-lo sem a ajuda da intuição geométrica. Esta é uma prova analítica. O resultado utilizado por Bolzano em sua prova é atualmente conhecido como propriedade do limite superior: “*Qualquer parte não vazia e limitada superiormente por números reais admite um limite superior*.”

Lembremos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é *limitado superiormente* por um número M se: para todos $x \in A$ temos $x \leq M$. Por exemplo, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$ é *limitado superiormente*, por exemplo, pelo número 2 ou por outros valores maiores que 2. Assim, para um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, o limite superior é definido como segue: se existe um número real $m \in \mathbb{R}$ tal que:

1. Para todo $x \in A$ temos $x \leq m$;
2. Qualquer número estritamente menor que *m* não aumenta *A*, então *m* é único e é chamado de *limite superior* do conjunto *A*.

Geralmente, o limite superior de um conjunto A é denotado por *sup(A).* Para um conjunto *limitado superiormente*, o limite superior representa o menor limite superior. Por exemplo, o limite superior do conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$ é $\sup(A) = \sqrt{2}$.

Para Vergnac e Durand-Guerrier, Bonifácio considera que Bolzano já havia percebido os limites de basear os fundamentos da análise em argumentos geométricos:

> Bolzano (1781-1848) desempenhou um papel crucial nos fundamentos da análise, pois, ao contrário de muitos de seus contemporâneos cujo objetivo era o desenvolvimento da ciência, ele estava essencialmente preocupado em legitimar os métodos utilizados (Vergnac, Durand-Guerrier, 2014, p. 8).

A desconfiança de Bolzano é, na verdade, com relação à geometria, pois ele escreve:

> […] Mas é igualmente manifesto que esta é uma falha intolerável contra o método correto, que consiste em tentar deduzir as verdades da matemática pura ou universal (isto é, da aritmética, álgebra ou análise) a partir de considerações que pertencem apenas a uma parte aplicada (ou especial), a saber, a geometria (Bolzano, Memórias sobre o Teorema dos Valores Intermediários, 1817, p. 210). [Citado em Vergnac, Durand-Guerrier, 2014].

Parece que Bolzano não se convenceu pelo argumento geométrico para estudar os problemas da análise matemática. Por exemplo, Bolzano não aceitou a explicação "geométrica", segundo a qual, se os valores de uma função "contínua" mudam de sinal, então existe um valor para o qual ela se anula.

No início do século XIX surgiu a necessidade de rigor para a análise. Deu-se, assim, o início da aritmetização da análise matemática com Cauchy, sobre o qual, na introdução ao Curso de Análise, Cauchy escreve: “Quanto aos métodos, eu procurei lhes dar todo o rigor que se exige na geometria, de maneira a jamais recorrer a argumentos deduzidos da generalidade da álgebra” (Cauchy, 1821, p. ij).

Cauchy esclarece seu método e sua visão de rigor na primeira página de seu Resumo do Curso de Análise (1823, p. iv). Cauchy escreve:

> Os métodos que eu segui em muitos aspectos diferem daqueles que estão expostos em obras semelhantes. Mas o principal foi o de conciliar o rigor, que eu jamais tinha feito no meu curso de análise, a respeito da simplicidade que resultou da consideração direta das quantidades infinitamente pequenas (Cauchy, 1823, p. iv).

Podemos dizer que Cauchy iniciou a gênese do tratamento por épsilon e delta e, consequentemente, contribuiu com o nascimento da análise matemática.

A partir daí, a exigência de uma construção rigorosa independente do aspecto geométrico torna-se uma necessidade, em que o caráter dos números irracionais é bem explicado e mais bem explicitado. Como resultado, construções baseadas no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais foram desenvolvidas utilizando diferentes métodos, como o método dos agregados (com Weierstrass, 1872), o método das sequências de Cauchy (com Méray, 1869 e

Cantor, 1872) e o método dos cortes (com Dedekind, 1888). Para esses métodos, que são equivalentes (Dhombres, 1978), a construção matemática do conjunto de números reais é longa e requer propriedades e técnicas computacionais. No entanto, segundo Bronner (1997):

> O novo conjunto é dotado de operações e uma estrutura de ordem que deixa a estrutura do corpo ordenado "permanente". Além disso, Dedekind mostra o caráter "contínuo" e "completo" em termos de corte, que é equivalente à propriedade de intervalos encaixados, muitas vezes considerado como o axioma de Dedekind-Cantor (Bronner, 1997, p. 44).

Dada a complexidade da construção dos três métodos anteriores, isso os torna fora do alcance dos alunos. Assim, atualmente, a partir desses métodos de construção, apresenta-se a construção do conjunto de números reais $\mathbb{R}$, em livros didáticos do ensino superior, de forma axiomática.

A apresentação axiomática do conjunto de números reais $\mathbb{R}$ considerados nos livros didáticos permitirá, então: «*desenvolvimentos importantes revelando, assim, em axiomas ou como consequência, as várias propriedades algébricas, ordinais e topológicas*.» (Bronner, 1997, p. 121). Mais precisamente, o uso da abordagem axiomática, com o axioma da ordem e as propriedades dos intervalos de $\mathbb{R}$, possibilita o estudo das importantes propriedades algébricas e topológicas desse conjunto.

É importante destacar que as diferentes construções do conjunto dos números reais são motivadas pelo fato de que os números reais estão intimamente relacionados aos conceitos de limite e continuidade de funções reais, que constituem os fundamentos básicos da análise matemática.

Além disso, as ligações entre a geometria e o conjunto $\mathbb{R}$ são explicadas pela construção de uma bijeção entre e uma reta graduada graças ao *axioma de Dedekind-Cantor* (Bronner, 1997). A construção de uma graduação completa da reta real é dada por Monge e Ruff (1962), que apontam que há: *"a analogia entre certos axiomas ou propriedades dos números e as propriedades dos pontos de uma reta"* (Monge e Ruff, 1962). E Bronner acrescenta:

> *Assim, derivam as propriedades da infinitude e da ordem arquimediana da reta e dos sistemas numéricos ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$), e então a propriedade de densidade da ordem*: "entre dois pontos ou dois reais, existe um terceiro". [...] *todas essas propriedades são verificadas por $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, e elas não identificam diferença entre esses dois conjuntos* (Bronner, 1997, p. 112).

Atualmente, essas "propriedades" geométricas em geometria euclidiana são apresentadas como "axiomas" de incidência e de ordem. Para concluir este parágrafo, podemos dizer que o trabalho dos matemáticos do século XIX ajudou a esclarecer a construção dos números reais e a destacar os fundamentos da articulação dos números reais com os conceitos de limite e continuidade. Parece que essa articulação, já na obra de Bolzano e Dedekind, se baseia no famoso teorema dos valores intermediários, que retomaremos mais adiante.

## Evolução histórica das notações dos conjuntos numéricos

De acordo com Rousselet (2021):

> *Foram necessários 5 mil anos para termos uma visão clara do que são números*. Na Babilônia e no Egito, inteiros e frações foram usados. Para os gregos, apenas números inteiros eram números. Números negativos foram inventados na China e na Índia. Os decimais foram inventados por matemáticos árabes. Números como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$ permaneceram sem status por muito tempo. O número π só foi reconhecido como um número irracional no século XVIII (Rousselet, 2021, p. 317).

Segundo Rousselet (2021), só no final do século XIX é que ficaram definidos os conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, sendo organizados de acordo com as seguintes inclusões: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. A notação desses conjuntos se deve aos matemáticos Gauss, Dedekind, Cantor e Peano. Assim, temos:

- A notação $\mathbb{N}$ se refere ao conjunto dos números naturais. Mais precisamente, a notação $\mathbb{N}$ foi introduzida por Peano en 1894, e a construção matemática desse conjunto foi demonstrada, de forma independente, por Peano e Dedekind próximo do final do século XIX.
- Historicamente, a origem da noção de fração pode ser encontrada nos papiros egípcios, em particular no Papiro Rhind, que remonta a $-1650$ A.C. Em 1895 Peano faz uma construção matemática do conjunto de frações, e ele escolhe designar esse conjunto $\mathbb{Q}$, referindo-se à letra da palavra italiana "quoziente" que significa "quociente".
- Para Dedekind: A notação $\mathbb{Z}$ refere-se a inteiros relativos e é derivada da primeira letra da palavra alemã "Zahlen" (que significa "contar" ou "números").
- A notação $\mathbb{R}$ foi usada por Cantor para denotar o conjunto de números reais. Isso porque alguns números, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ ou π, não podem ser expressos como frações, de modo que o conjunto $\mathbb{R}$ contendo esses números foi desenvolvido no final do século XIX por Cantor e Dedekind.
- A notação $\mathbb{C}$ foi proposta por Gauss, no início do século XIX, para denotar o conjunto de números complexos.

## Considerações didáticas e epistemológicas

Em geral, como já foi mencionado, diante de suas dificuldades didático-pedagógicas, as três construções de Weierstrass, de Méray-Cantor e a de Dedekind do conjunto dos números reais não podem ser ensinadas no ensino médio, tampouco no início da universidade. Por esse motivo, os livros didáticos, bem como os programas universitários, não dão especial atenção à construção rigorosa dos números reais e de suas propriedades. Isso às vezes leva a abordagens intuitivas no ensino médio.

As concepções dos alunos sobre números reais baseiam-se no uso e escolha do conjunto de números proposto, na prática de atividades matemáticas no ensino fundamental e médio. Essa prática é reforçada pelo uso de calculadoras e softwares, o que tem como consequência levar os alunos a uma concepção do número real na forma inteira ou decimal. Como resultado, ao ingressar na universidade, o aluno se deparará com dificuldades na aquisição dos conceitos de análise matemática, como o conceito do limite de funções ou o limite de sequências numéricas.

Em um interessante estudo, Vergnac e Durand-Guerrier destacam a abordagem da representação geométrica do conjunto dos números reais, que consiste em destacar a correspondência um-para-um do conjunto dos números reais e a chamada reta "numérica":

> Embora se baseie na intuição geométrica da reta que está em parte na origem da construção de Dedekind, parece-nos, tendo em vista o estudo que realizamos, que essa abordagem, se nos permite abordar a noção de ordem e as primeiras noções de análise no trabalho no ensino médio, não é suficiente para construir os diferentes aspectos do conceito de número real. Parece-nos que, para desenvolver esse conceito, seria interessante estabelecer atividades sobre os registros de escrita de um número (Vergnac, Durand-Guerrier 2014, p. 9).

Nos livros didáticos, o conjunto de decimais e o conjunto de racionais são trabalhados com o auxílio de atividades ou tabelas de valores a fim de introduzir funções reais ou para a construção de curvas representativas de determinadas funções. Esse tipo de abordagem permite manipular os números reais e dar-lhes um significado concreto. Além disso, nas tabelas de valores para a introdução de funções através de atividades práticas, os valores são escolhidos a priori para alcançar os resultados desejados (Job, 2023).  Mais: a estreita ligação entre números reais e o conceito de limites de funções reais é manifestada por Schons (1965), que introduziu em seu livro uma "**noção** de **variável",** que é **definida** da seguinte forma:

> Considere uma variável **x** que passa sucessivamente por um número infinito de valores. Uma variável passa sucessivamente por vários valores quando, considerando dois desses valores, podemos dizer que um deles precede o outro; e novamente, qual deles precede o outro. Passa sucessivamente por uma infinidade de valores, sendo que nenhum desses valores é o último. Esses valores podem seguir uns aos outros de forma descontínua e

> ser, por exemplo, termos sucessivos de uma sequência ilimitada de números. Eles também podem seguir uns aos outros de maneira contínua, de modo que nenhum valor passe de um valor para outro sem passar por todos os valores intermediários. É o que acontece, por exemplo, quando representa o eixo x de um ponto que se move em uma reta orientada (Schons, 1965, p. 156).

Parece aqui que, por necessidade didática, Schons se sentiu obrigado a traçar um paralelo entre a noção matemática e o movimento físico de deslocamento contínuo de pontos em uma reta digital de números reais. É assim que Job utilizará a noção de variável "**dinâmica**": « *[...] no caso de Schons, estamos, portanto, diante de uma definição do limite de uma função que se baseia em uma noção de variável «**dinâmica**», [...]* » (Job, 2023, Slides p. 196).

De fato, o aspecto da variável "dinâmica" da variável ***x*** reflete tanto os valores reais tomados por essa variável quanto a representação geométrica do conjunto de números reais. Encontramos ao mesmo tempo o aspecto do "teorema do valor intermediário", o caráter "contínuo" de Dedekind, do conjunto de números reais e a reta numérica. De fato, segundo Bronner (1997):

> Dedekind mostra que a separação entre geometria e aritmética no nível da "criação teórica" é efetiva [...]. Dhombres cita uma resposta a Kant na qual Dedekind explicita seu ponto de vista sobre a questão: "O conceito de espaço é para mim completamente independente, completamente separável da representação da continuidade, e esta última propriedade serve apenas para especificar do conceito geral de espaço o conceito especial de espaço contínuo (Bronner, 1997, p. 44).

Segundo Bronner, parece que, do ponto de vista didático, essa separação entre geometria e aritmética seria muito difícil, até mesmo muito complicada.

**Considerações sobre as construções do conjunto dos números reais**

Como mencionamos antes, existem vários métodos para construir o conjunto dos números reais a partir do conjunto dos números racionais, dos números inteiros, ou por métodos puramente axiomáticos. Dentre eles o de Weierstrass (1872), o método das sequências de Cauchy (com Méray, 1869 e Cantor, 1872) e o método dos cortes de Dedekind (1888). Apresentamos aqui uma abordagem sucinta desses três métodos históricos notáveis de construção matemática do conjunto de números reais, a fim de uma melhor compreensão de diferenças matemáticas e didáticas.

**Método dos agregados de Weierstrass.** O método de Weierstrass não teve impacto significativo. Esse método foi derivado do trabalho dos alunos de Weierstrass que o avaliaram a partir das anotações coletadas.

O método envolve o uso de multiconjuntos finitos ou infinitos, que consistem em números naturais e inversos de números naturais. Por exemplo, E=$\{2, 5, 7, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\}$. Um multiconjunto F é dito **limitado** se para qualquer subconjunto **finito** E de F existe δ em ℚ tal que

$$\sum_{a \in E} a < \delta$$

Para o método de Weierstrass, considere o conjunto $\mathcal{F}$ de multiconjuntos limitados, nos quais ele define adição e multiplicação de forma natural. Weierstrass então equipa oconjunto $\mathcal{F}$ multiconjuntos limitados com uma relação de ordem definida da seguinte forma: para quaisquer multiconjuntos limitados E e F de $\mathcal{F}$, dizemos que X é menor ou igual a F, e escrevemos $E \leq F$, se para qualquer subconjunto **finito** C de E e todo subconjunto **finito** D de F, temos:

$$\sum_{a \in \mathrm{C}} a \leq \sum_{b \in D} b$$

Finalmente, Weierstrass introduz a seguinte relação:

$$E \sim F \Leftrightarrow E \leq F \; et \; F \leq E$$

Graças a essa relação $\sim$ , Weierstrass consegue identificar o conjunto de números reais estritamente positivos, como o conjunto quociente:

$$\mathbb{R}^{*+} = \mathcal{F}/\sim$$

**O Método das Sequências de Cauchy (com Méray, 1869 e Cantor, 1872).** Uma sequência de números $(u_n)_n$ un é dita convergente de limite L e denotamos $L = \lim_{n \to +\infty} u_n$ se

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ tem-se $|u_n - L| < \mathcal{E}$

A aplicação dessa definição requer o conhecimento do limite L, que representa um obstáculo. Então, para se ter um critério prático, a ideia da época consiste em estudar a diferença entre quaisquer dois termos a partir de um determinado número N: Uma sequência $(u_n)_n$ é dita de Cauchy se:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$ tem-se $|u_n - u_m| < \mathcal{E}$ .

Com esta definição podemos constatar que o limite não aparece e, além disso, uma sequência de Cauchy em ℚ não converge necessariamente em ℚ. De fato, por exemplo, a seguinte $(u_n)_n$ definida por:

$u_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$,

não converge em ℚ. Na verdade, seu limite é o número $e$ que está em $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Seja $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de sequências de números racionais. Este conjunto pode ser munido naturalmente com as operações de adição, multiplicação e ordem. Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ duas sequências quaisquer do conjunto $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ são definidas as seguintes operações:

- **Adição:** $(w_n)_n = (u_n)_n + (v_n)_n$ com $w_n = u_n + v_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ;
- **Multiplicação**: $(w_n)_n = (u_n)_n \times (v_n)_n$ com $w_n = u_n \times v_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ;
- **Ordem:** $(u_n)_n < (v_n)_n$ com $u_n < v_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

O conjunto $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ equipado com essas operações de adição e multiplicação é um anel comutativo, e é denotado da seguinte forma $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, +, \times)$. No entanto, a relação $<$ não é uma relação de ordem total em $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$**,** ou seja, para duas sequências $(u_n)$ e $(v_n)$ de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ não podemos concluir em geral que $(u_n) < (v_n)_n$ ou $(v_n)_n < (u_n)_n$.

Seja $\mathfrak{R}$ o conjunto de sequências de Cauchy. Podemos mostrar também que $\mathfrak{R} \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ e herda as operações de adição e multiplicação acima. Portanto, mostramos que $(\mathfrak{R}, +, \times)$ admite uma estrutura de subanel do anel $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, +, \times)$. Seja $\mathfrak{I}$ O subconjunto de $\mathfrak{R}$ formadas por sequências convergentes para 0. O conjunto $\mathfrak{I}$ é um ideal máximo do anel $(\mathfrak{R}, +, \times)$. O conjunto $(\mathfrak{R}/\mathfrak{I}, +, \times)$ é um corpo comutativo denotado por $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Notemos que sequências constantes iguais a um racional são sequências de Cauchy, além da aplicação de $\mathbb{Q}$ com valores em $\mathfrak{R}/\mathfrak{I}$ associando a um número racional inteiro a sequência constante igual a este racional, é injetiva. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é injetado naturalmente em todo $\mathbb{R}$. Enfim, sobre o plano topológico, o conjunto $(\mathfrak{R}/\mathfrak{I}, +, \times, <)$ é um corpo totalmente ordenado, em que qualquer sequência de Cauchy é convergente.

Em conclusão, o método de Cauchy permite construir o campo topológico dos números reais R, como sendo o conjunto de classes de equivalência do quociente do conjunto de sequências de Cauchy $\mathfrak{R}$ pelo ideal $\mathfrak{I}$ das sequências convergentes para 0.

**O método dos cortes (com Dedekind, 1888).** Um corte de Dedekind $\mathbb{Q}$ é o formado de um par $(C^-, C^+)$ de suas partes que formam uma partição de $\mathbb{Q}$ com $C^- \neq \emptyset$ e $C^+ \neq \emptyset$ tais que:

a) $\mathbb{Q} = C^- \cup C^+$ e $C^- \cap C^+ = \emptyset$: ($C^- \neq \emptyset$ e $C^+ \neq \emptyset$ é uma partição de $\mathbb{Q}$),

b) $C^- < C^+$: Para todo $x \in C^-$ e todo $y \in C^+$ temos $x < y$

Exemplo de um corte, os dois conjuntos: $C^- = \{x \in \mathbb{Q}; x < 0 \ ou \ x^2 < 2\}$ e $C^+ = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0 \ e \ x^2 > 2\}$ representa um corte de $\mathbb{Q}$. De fato, podemos ver que esse par $(C^-, C^+)$ é um corte porque:

a) Todo número racional pertence a $C^-$ ou a $C^+$ com $C^- \cap C^+ = \emptyset$

b) Todo número racional de $C^-$ é estritamente menor do que qualquer número racional de $C^+$; ou seja: para todo $a \in \mathrm{C}^-$ e tudo $b \in \mathrm{C}^+$ temos $a < b$.

Em seguida, Dedekind constrói as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão que darão aos cortes uma estrutura de corpo: este é o corpo dos números reais ℝ. Ou seja, o conjunto ℝ é o conjunto cortes de ℚ. Mais precisamente, pode-se demonstrar que o corpo dos reais ℝ é ele mesmo completo, ou seja, todos os cortes do mesmo tipo definem um real.

Diante do exposto, observa-se a complexidade da construção dos três métodos anteriores. Isso os torna fora do alcance dos estudantes. Assim, atualmente, a partir desses métodos de construção, apresenta-se a construção do conjunto de números reais ℝ em livros didáticos do ensino superior de forma axiomática.

## Algumas observações matemáticas adicionais

Para complementar a abordagem de aspectos epistemológicos e didáticos, apresentamos a seguir mais cinco observações envolvendo subconjuntos dos números reais.

**Observação 1:** Insuficiência do conjunto dos números racionais e do axioma do limite superior

Historicamente, principalmente desde os tempos gregos, a insuficiência dos números racionais tem sido constatada ao usá-los na prática quando aplicados a problemas conhecidos. Por exemplo: "*Aristóteles relata a primeira prova, devido aos pitagóricos, da necessidade de considerar números irracionais: nenhum racional é capaz de representar a razão entre os comprimentos da diagonal de um quadrado e o lado da diagonal desse quadrado"* (Thuizat *et al.,* 1980, p. 26).

Além disso, de acordo com Thuizat *et al*. (1980), as terminologias de: natural, racional e real podem ser interpretadas da seguinte forma:

- **Natural**: Criar pela natureza
- **Racional**: Criar pela razão
- **Real**: Que existe realmente

Quanto à palavra "irracional", etimologicamente significa "contrário à razão". Portanto, esse adjetivo reflete em si as dificuldades dos alunos com esses números reais. Além disso, essa dificuldade parece estar na origem da orientação da matemática grega mais para a geometria.

Em geral, a inadequação do conjunto de números racionais ℚ é justificada em alguns livros didáticos pelo fato de equações algébricas como:

$x^2 = 2$ ou $x^2 = 3$,

não admitem soluções que pertençam a $\mathbb{Q}$. No entanto, há outra necessidade fundamental, que está relacionada à relação de ordem $\leq$. Mais precisamente, é a existência do limite superior de um subconjunto majorado de $\mathbb{Q}$.

Lembremos que um subconjunto de $\mathbb{R}$ é majorado se existe um número $M$ tal que: $x \leq M$, para qualquer $x \in E$. O limite superior sup *(E)* é definido como o menor dos majorantes no conjunto majorado E. Podemos ver que para um subconjunto majorado E por $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$) temos: E admite um limite superior que pertence a $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$). Neste caso, o limite superior de E, denotado sup *(E)*, pertencente a E. Mas essa propriedade da existência do limite não é verificada por todos os subconjuntos majorantes de $\mathbb{Q}$. Em outras palavras, a propriedade da existência do limite superior dos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não é conservada pelo conjunto $\mathbb{Q}$. Considere por exemplo os seguintes subconjuntos do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais:

$E_1 = \{x \geq 0 \; com \; x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ ou $E_2 = \{x \geq 0 \; com \; x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 3\}$.

Podemos observar que:

- $E_1$ e $E_2$ não são vazios (0 pertence à $E_1$ e igualmente a $E_2$),
- O número $\mathrm{M} = 2$ é majorante de $E_1$ e $E_2$.

Entretanto, nenhum dos conjuntos admite um limite superior pertencente ao conjunto $\mathbb{Q}$. Mas cada um desses conjuntos $E_1$ e $E_2$ está incluído no conjunto de números reais $\mathbb{R}$ e admite um limite superior que pertence a $C$, a saber, $sup(E_1) = \sqrt{2}$ e $sup(E_2) = \sqrt{3}$, que são números reais.

Essa questão da existência do limite superior foi um dos pontos-chave nas diferentes construções do conjunto de números reais no século XIX. Isso leva ao axioma do limite superior na definição do conjunto de números reais, a saber:

**Axioma do limite superior: Qualquer subconjunto não vazio e majorado de $\mathbb{R}$ admite um limite superior**.

O axioma do limite superior tem sido usado para estabelecer muitas propriedades de números reais, tais como:

- **Propriedade de Arquimedes (ou princípio):** "Se a e b são números reais positivos, então há um inteiro positivo *n* tal que: $n \times a > b$".
- **A densidade do conjunto $\mathbb{Q}$ no conjunto dos números reais** $\mathbb{R}$: "Dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$; existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$".
- **A propriedade dos conjuntos encaixados (ou o teorema do conjunto encaixado)**: "Seja $\{I_n\}_{n\geq 1}$ um encaixado (ou descendente), denominado, $I_{n+1} \subset I_n$, coleção

contável de conjuntos fechados não vazios de números reais para os quais $I_1$ limitada. Então, temos $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n \neq \emptyset$".

Em geral, o limite superior de um subconjunto majorado de ℝ não é um elemento desse conjunto. Por exemplo, o subconjunto dos números reais estritamente negativos de ℝ:

$E = \{x \in \mathbb{R}\ com\ x \neq 0 \mid x \leq 0\}$,

é majorado e tem um limite superior de $sup\ (E) = 0$, mas $0 \notin E$.

**Observação 2:** Números irracionais e a estrutura do conjunto dos números reais

Toda construção do conjunto de números reais ℝ a partir do conjunto dos números racionais ℚ, é caracterizado por:

- O conjunto ℚ torna-se um subconjunto de ℝ ;
- A preservação das propriedades de adição $+$, a multiplicação $\times$ e a relação de ordem ≤ ;
- O complementar de ℚ em ℝ é chamado de conjunto dos números irracionais.

Em linguagem simbólica matemática $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$ é isomorfa a um subcorpo de $(R, +, \times, \leq)$.

Por outro lado, qualquer número racional de Q pode ser escrito na forma: $\frac{p}{q}$ em que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$. Não há, contudo, notação geral para os números irracionais. A única exceção é a de uma classe restrita de números usuais, como: $\pi$, $e$, $\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$ ou mais genericamente $\sqrt[p]{a}$. Talvez essa dificuldade de uma notação geral dos números irracionais represente um obstáculo epistemológico no ensino dos números reais.

**Observação 3.** A construção dos reais ocorre na interseção dos campos geométrico, numérico e analítico

Pode-se dizer que a introdução simultânea da axiomatização do conjunto ℝ dos números reais por Cantor, Dedekind e Weierstrass representa os fundamentos da análise real com base em um conjunto bem construído que é o conjunto ℝ, ou seja, reflete a importância e a necessidade de uma construção rigorosa de ℝ como ferramenta fundamental para as bases da análise matemática. Além disso, segundo Margolinas (1988):

> Dedekind fala disso muito claramente (Dedekind, 1872), insistindo na motivação para sua construção. Ele coloca ℝ na intersecção de três grandes campos matemáticos, o geométrico, o numérico e o analítico. Baseia-se na necessidade de libertar a noção de continuidade das evidências geométricas. Sua exposição começa com as propriedades dos racionais "consideradas como consequências necessárias da aritmética", para comparar as propriedades de ℚ com as de uma reta intuitivamente contínua e concluir que há uma falta de continuidade de ℚ (Margolinas, 1988, p. 52).

**Observação 4. Ensino de números reais e análise**

Várias questões surgem sobre o conhecimento dos números reais em matemática e nos programas de ensino no ensino fundamental, médio e superior.

1- No ensino, alguns números irracionais particulares como $\pi$, $\sqrt{2}$, $e$ são considerados. No entanto, o estudo dos fundamentos do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, como um conjunto estruturado com uma relação de ordem, é menos profundo.

2- O conjunto $\mathbb{R}$ está na intersecção de vários domínios matemáticos.

**Qual seria o modelo de ensino de números reais para o estudo, análise matemática e construção do pensamento funcional?**

Essa questão sempre foi levantada de forma aguda no Brasil e em outros lugares. Como mencionado por Margolinas (1988), percebe-se que, para o ensino, há uma tensão entre os dois modelos a seguir:

- Modelo axiomático, no qual **a construção** de $\mathbb{R}$ é a base da análise matemática,
- Modelo de ensino, em que **o estudo** de $\mathbb{R}$ é a base para o estudo da análise.

Novamente, segundo Margolinas (1988), considerando o modelo histórico para um modelo de ensino, deve-se ter:

- Modelo histórico, em que **a construção** de $\mathbb{R}$ é a etapa final na construção da análise matemática,
- Modelo de Ensino, em que **o estudo** de $\mathbb{R}$ é a etapa final para o estudo da análise matemática.
- Modelo de ensino, em que **o estudo de** R é a etapa final, para o estudo da análise matemática.

Parece-nos que o professor, ciente desse vai e vem entre os diferentes modelos de ensino de análise matemática, pode formar sua própria reflexão sobre o ensino de análise matemática no nível do ensino médio ou universitário por meio das abordagens proporcionadas pelos currículos oficiais e livros didáticos.

## Discussão

Neste estudo procuramos nos basear em alguns elementos relativos às origens e motivações do início da aritmetização da análise matemática a fim de mostrar a importância didática do domínio de propriedades do conjunto dos números reais por parte dos estudantes universitários. É uma condição que pode ajudar a superar algumas dificuldades inerentes ao conceito de limite de funções reais com valores reais. Na verdade, a definição formal de limite com ($\varepsilon$, $\delta$) é de difícil acesso para muitos alunos, especialmente porque, em geral, ela não é utilizada na resolução dos exercícios.

**Quais contribuições da história para o ensino de um conceito?** Em geral, com os conhecimentos históricos, o professor tem condições de fazer um recuo para entender e identificar de outro modo as dificuldades dos alunos. Isso também, pode contribuir para a compreensão da construção do saber matemático do aluno. Assim, por exemplo, o professor pode propor situações-problema susceptíveis visando facilitar a construção de conhecimentos matemáticos pelo aluno, o que pode contribuir para auxiliar na aprendizagem do conceito pelo aluno. Por outro lado, as justificativas históricas possibilitam uma maior atenção e motivação dos alunos.

**Quais precauções quanto ao uso da história no ensino de um conceito?** Apresentações ultra simplificadas e redutoras das noções nos livros didáticos podem mascarar os problemas reais do passado e interpretar a matemática de outra época com os conhecimentos atuais: **prática de anacronismo**. Além disso, o professor precisa ficar atento sobre a apresentação histórica errônea de uma noção por alguns livros didáticos. Além disso, determinados estudos nos convidam ao distanciamento, a fim de evitar a aproximação entre as dificuldades históricas e/ou epistemológicas e as dificuldades e concepções dos estudantes.

Uma abordagem de um estudo preliminar das propriedades dos números reais foi levada em consideração nos livros de Rachidi-Magalhães de Freitas-Junqueira Godinho Mongelli (2020) e Rachidi-Burigato-Junqueira Godinho Mongelli (2023). Nestes dois livros, os capítulos foram dedicados ao estudo das propriedades algébricas e topológicas de todos os números reais. Por outro lado, levando em consideração o elemento Cálculo 1 (da UFMS), Burigato e Rachidi (2023) apresentaram atividades em que a existência de limites de determinadas funções exige necessariamente a utilização da definição formal de limite. Mais precisamente, as demonstrações das atividades propostas no artigo de Burigato-Rachidi (2023) baseiam-se na definição formal de limite e nas quais sequências de números reais específicos desempenham um papel importante. A motivação para esta abordagem deve-se à sua relação com o pensamento funcional, que geralmente é descrito por determinados elementos que o caracterizam, isto é, de acordo com Blanton e Kaput:

> Conceituamos amplamente o pensamento funcional para incorporar a construção e a generalização de padrões e relações usando diversas ferramentas linguísticas e representacionais e tratando relações generalizadas de funções, que resultam como objetos matemáticos úteis por si mesmos (2004, p. 8, de acordo com a tradução de Burigato-Rachidi).

Diante disso, encontramos em Georges a seguinte reflexão:

> Tendo em conta a preeminência do pensamento funcional e a disponibilidade dos vários métodos matemáticos para a interpretação, representação, generalização e aplicação das relações funcionais para tornar possível a aquisição de hábitos corretos de pensamento funcional, somos levados a crer que este é o objetivo principal do ensino da matemática (1929, p. 608, de acordo com a tradução de Burigato-Rachidi*)*.

Assim, podemos concluir que:

> O pensamento funcional está ligado ao conceito de função, fazendo com que possamos encontrá-lo em vários ramos da matemática, em que o conceito de função está presente. Assim, o pensamento funcional vai para além da matemática, o que permite enriquecer a formação do aluno em diferentes áreas (2023, p. 29).

## Conclusão

Quanto ao conteúdo deste trabalho, gostaríamos de destacar alguns aspectos que consideramos importantes e que abordamos neste artigo. Destacamos e apresentamos elementos gerais sobre construções importantes do conjunto dos números reais e seu papel na aritmetização da análise. Por outro lado, a história dos números reais e suas construções constituem ferramentas importantes para o ensino e para a cultura científica do professor. Destacamos ainda diversas observações didáticas e epistemológicas ligadas à história dos números reais e suas construções. Além disso, sublinhamos também a importância da história dos números reais e das suas construções para o desenvolvimento de um MER.

Portanto, podemos dizer que, de modo geral, as rigorosas construções matemáticas do conjunto dos números reais durante a segunda metade do século XIX foram motivadas pela importância deste conjunto para o estudo dos limites e continuidade de funções reais com valores reais. Mais especificamente, os matemáticos desta época perceberam que a base da análise matemática moderna requer necessariamente uma construção matemática rigorosa de números reais. Além disso, com base nessa observação, apresentamos neste estudo alguns elementos de abordagem para ilustrar a importância didática de um estudo aprofundado do conjunto dos números reais e suas propriedades por parte dos alunos. De fato, isso pode permitir que eles realizem o estudo da continuidade e do limite com mais serenidade e, mais ainda, da abordagem a análise matemática com mais rigor.

Finalmente, acreditamos que este trabalho possa contribuir para aprimorar a abordagem de limite e de continuidade, no final do ensino médio e nas disciplinas de Cálculo e Análise Matemática dos cursos de graduação da área de Ciências Exatas. Esperamos ter conseguido fornecer subsídios para a elaboração de *Modelos Epistemológicos de Referência* (MER), visando o desenvolvimento de estudos e pesquisas sobre organizações matemáticas e didáticas concernentes aos conteúdos de funções, limite, continuidade, entre outros.

## Referências


Artigue M. (1990). Épistémologie et didactique, *Recherche en Didactique des Mathematiques*, vol 2.3, pp. 241-286.

Blanton, M. L.; Kaput, J. (2004). *Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking*. International Group for The Psychology of Mathematics Education, v. 2, 2004, pp. 135-142.

Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels : idécimalité et racine carrée*. Education. Joseph Fourier. Université Joseph Fourier (Grenoble 1) (UJF), Grenoble, FRA. Français. NNT: tel-03797170.

Burigato, S.M., Rachidi, M. (2023). O uso da definição formal de limite finito para funções reais: uma proposta para o ensino, *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 8 n. 3. https://doi.org/10.34179/revisem.v8i3.18348

Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure, et histoire*. Cedic - Nathan.

Euler, L. (1796). *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*. Tome 1 / Léonard Euler; trad. du latin en français avec des notes et des éclaircissements par J. B. Labey (1752-1825). https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3884z/f4.item#

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación**.** *EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 25 años, Marzo de 2014. https://www.redalyc.org/pdf/405/40540854006.pdf

Georges, J. S. (1929). Functional thinking as an objective of mathematical Education. *School Science and Mathematics*, v. 29, n. 5, p. 601-608, 1929.

Houzel, C. (1979). « Histoire des mathématiques et enseignement des Mathématiques », *Histoire des mathématiques et épistémologie,* Bulletin inter IREM, n° 18, p. 3-6, 1979.

Job, P. (2023). Didactique et notion de limite. Vers un modèle épistémologique de référence (MER) partagé ? *Conférence Didactique sur l'Analyse*. INMA – UFMS, Campo Grande. Journée 3, Septembre 2023.

Margolinas, C. (1988). Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x* n.16, p. 51-66.

Monge, M. et Ruff, P. (1962), *Ensembles et nombres*, Librairie Belin, 1962.

Oudot, X., Le *Théorème de Bolzano-Weierstrass*, Culture Math. https://culturemath.ens.fr/

Rachidi, M.; Freitas, J. L. M. & Mongelli, M. C. G. J. (2020). *Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações*.1ª edição. Campo Grande: Editora UFMS. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/3548.

Rachidi, M.; Burigato, S. M. M. S. & Mongelli, J. G. M. C. (2023). *Conceitos Básicos para a Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral*, Editora UFMS. Disponível em: https://editora.ufms.br/livros-digitais-edital-ufms/

Rousselet, M. (2021), *La belle histoire des Maths,* ADAPT-Snes. De Boeck-Supérieur.

Schons, N-J. (1965). *Éléments d'algèbre*. 8e éd.; *Procure.*

Vergnac, M. et Durand-Guerrier, V. (2014), Le concept de *nombre réel* au lycée et en début de l'université: un objet problématique. *Petit x,* n, 96. pp. 7-28.

Weierstraß, K. *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen*. Springer, 1988.