ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p047-080

Un modèle épistémologique de référence pour la limite

An epistemological reference model for the limit

Un modelo epistemológico de referencia para el límite

Um modelo epistemológico de referência para o conceito de limite

Cheick Oumar Doumbia[1]
École Normale Supérieure de Bamako
Thèse de Doctorat sur l´enseignement, la philosophie et l´histoire des Sciences
https://orcid.org/0000-0001-8332-4622

Saddo Ag Almouloud[2]
Université Fédérale de Pará
Docteur en Mathématiques et Applications
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Luiz Marcio Santos Farias[3]
Université Fédérale de Bahia
Docteur em Didactique des Sciences et Mathématiques
https://orcid.org/0000-0002-2374-3873

Résumé

Dans ce travail, nous présentons de façon détaillée un modèle épistémologique de référence (MER) sur la notion de limite, en s'appuyant sur la théorie anthropologique du didactique et la théorie des champs conceptuels. La construction d´un MER (en s´appuyant sur la dimension épistémologique de la notion de limite), nous a permis de mettre cet objet mathématique en relation avec les notions qui permettent de lui donner du sens et de diriger nos analyses économico-institutionnelle et écologique. Ces analyses nous ont permis de mettre en évidence le modèle épistémologique de référence dominant (MED) dans les différentes institutions (les programmes et les manuels scolaires, etc.) analysées. Celui-ci a permis de montrer quelle est la signification donnée à la notion de limite dans ces différentes institutions. Pour la phase expérimentale (que nous ne décrivons pas ici), um modèle épistémologique alternatif de référence (MEAR) a été construit à partir de la confrontation entre le MED et le MER, pour réduire l'écart entre le savoir savant et le savoir enseigné. Ce travail nous a permis d'actualiser les connaissances connexes à la définition formelle de la limite telles que les activités

[1] cheickodoum@gmail.com
[2] saddoag@gmail.com
[3] lmsfarias@ufba.br

graphiques, la résolution des inéquations avec valeur absolue, les intervalles (notion de voisinage), les quantificateurs universel et existentiel, l'introduction à la logique des prédicats.

Mots-clés : Concept de limite, Modèle épistémologique de référence, Organisation mathématique.

Abstract

In this work, we present in detail an epistemological reference model on the notion of limit, based on the anthropological theory of didactics and the theory of conceptual fields. The construction of a ERM (based on the epistemological dimension of the notion of limit, allowed us to put this mathematical object in relation to the notions which make it possible to give it meaning and to direct our economic-institutional and ecological analyzes. These analyzes allowed us to highlight the dominant epistemological reference model (DERM) in the different institutions (curricula and textbooks, etc.) analyzed. This made it possible to show what meaning is given to the notion of limit in these different institutions. For the experimental phase (which we do not describe here), an Alternative Epistemological Reference Model (AERM) was built from the confrontation between the (DERM and the ERM, to reduce the gap between scholarly knowledge and taught knowledge. This work allowed us to update knowledge related to the formal definition of the limit such as graphic activities, the resolution of inequalities with absolute value, intervals (notion of neighborhood), universal and existential quantifiers, introduction to predicate logic.

Keywords: Concept of limit, Epistemological reference model, Mathematical organization.

Resumen

En este trabajo presentamos en detalle un modelo epistemológico de referencia sobre la noción de límite, basado en la teoría antropológica de lo didáctico y la teoría de los campos conceptuales. La construcción de un MER (basado en la dimensión epistemológica de la noción de límite), nos permitió poner este objeto matemático en relación con las nociones que permiten darle significado y orientar nuestros análisis económico-institucionales y ecológicos. Estos análisis permitieron nos permitió resaltar el modelo de referencia epistemológico dominante (MED) en las diferentes instituciones (currículos y libros de texto, etc.) analizados, lo que permitió mostrar qué significado se le da a la noción de límite en estas diferentes instituciones para la fase experimental. (que no describimos aquí), se construyó un modelo de referencia epistemológico alternativo (MEAR) a partir de la confrontación entre el MED y el MER, para reducir la brecha entre el conocimiento académico y el conocimiento enseñado. Este trabajo permitió actualizar conocimientos relacionados con el conocimiento formal. definición del límite como actividades gráficas, resolución de desigualdades con valor absoluto, intervalos (noción de vecindad), cuantificadores universales y existenciales, introducción a la lógica de predicados.

Palabras clave: Concepto de límite, Modelo epistemológico de referencia, Organización matemática.

Resumo

Neste trabalho apresentamos detalhadamente um modelo de referência epistemológico sobre a noção de limite, baseado na teoria antropológica do didático e na teoria dos campos conceituais. A construção de um MER (baseado na dimensão epistemológica da noção de limite, permitiu-nos colocar este objeto matemático em relação com as noções que permitem dar-lhe sentido e orientar as nossas análises económico-institucionais e ecológicas. Essas análises nos permitiram destacar o modelo epistemológico de referência dominante (MED) nas diferentes instituições (currículos e livros didáticos etc.) analisadas. Isso permitiu mostrar qual o significado que é dado à noção de limite nessas diferentes instituições. Para a fase experimental (que não descrevemos aqui), um modelo epistemológico alternativo de referência (MEAR) foi construído a partir do confronto entre o MED e o MER, para reduzir a lacuna entre o conhecimento acadêmico e o conhecimento ensinado. Esse trabalho nos permitiu atualizar o conhecimento relacionado à definição formal do limite, tais como as atividades gráficas, resolução de desigualdades com valor absoluto, intervalos (noção de vizinhança), quantificadores universais e existenciais, introdução à lógica de predicados.

Palavras-chaves: Conceito de limite, Modelo epistemológico de referência, Organização matemática.

Un modèle épistémologique de référence pour la limite

La notion de limite a fait l'objet de nombreux travaux de didactique des mathématiques, notamment ceux de : Cornu (1983), de Sierpinska (1985), Artigue (1996a, 1996b, 1989), Bkouche (1996, 1997), de Job (2011), Hitt (2006) et Lecorre (2016) etc. Ces travaux ont permis de mettre en exergue des obstacles épistémologiques et la nécessité de la définition formelle dans l'enseignement de la notion de limite.

Le caractère polysémique de la notion de fonction n'aide pas à la compréhension de la notion de limite par les élèves et les étudiants. L'une de ces significations est que la limite est la fin, il n'y a rien de l'autre côté. C'est une notion statique pour les élèves, c´est ce que renforce Cornu quand il affirme que :

> La notion de limite est avant tout une notion statique, il s'agit d'une interdiction ou d'une impossibilité de franchir quelque chose. Cette limite peut se trouver dans le temps ou dans l'espace (on s'arrête …). Éventuellement, il peut s'y ajouter l'idée qu'il est difficile de s'approcher de la limite, et à fortiori de l'atteindre. L'expression tend vers a en général un sens plus dynamique. (Cornu 1983, p. 122).

Pour cet auteur, la limite apparaît comme : une borne infranchissable que l'on ne peut atteindre ; une borne infranchissable que l'on peut atteindre pour d'autres ; point dont on se rapproche, sans l'atteindre, point dont on se rapproche jusqu'à l'atteindre ; borne supérieure, borne inférieure ; minimum, maximum, extrémités, frontière (Cornu 1983).

En ce qui nous concerne, nous nous intéressons à la dimension épistémologique de la notion de limite. Pour mener cette étude, nous nous appuyons sur les travaux de Boch et Gascón (2005) qui précisent qu'une organisation mathématique (OM) est une méthode praxéologique pratique de programme d'études en mathématiques, qui est obtenue à partir de manuels et de programmes. L'identification de ces OM dont l'usage passe par la caractérisation des types de tâches institutionnelles est une «re» construction du chercheur à partir de l'analyse des manuels et des programmes d'études. Du point de vue de la transposition didactique, ils proposent deux postulats :

1. on ne peut pas comprendre ou expliquer une OM apprise sans comprendre et expliquer l'OM des étapes précédentes ;
2. L'unité d'analyse des processus didactiques doit contenir une organisation didactique qui permet l'application (établissement) d'au moins une OM locale.

Il faut ajouter un modèle épistémologique de "référence praxéologique", que Chaachoua et Bittar (2019) appellent Modèle Praxéologique de Référence (MPR), permettant de caractériser et d'analyser les praxéologies à utiliser (Figure 1).

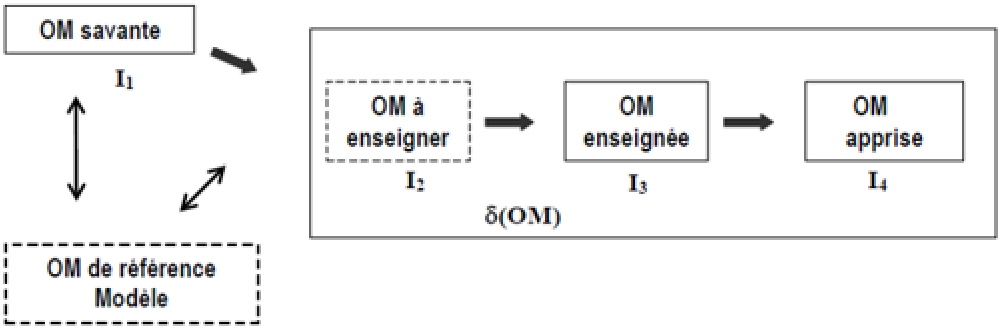

Figure 1.

Unité d'analyse des processus didactique (Boch et Gascón 2005, p. 11)

L'OM à enseigner constitue un modèle praxéologique du programme de mathématiques. La base empirique pour l'élaboration de ce modèle se trouve dans les documents curriculaires (programmes officiels) et les manuels. Son influence sur l'organisation didactique associée à l'organisation mathématique notée δ (OM) est centrale, même si ni l'enseignant ni l'institution n'ont explicitement ce modèle, mais seulement des matériaux praxéologiques plus ou moins bien articulés entre eux. Boch et Gascón affirment que :

> Mais cette influence ne peut pas être interprétée correctement si nous n'avons pas un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une OM de référence dont la description est généralement faite à partir de δ (OM) légitimant le processus d'enseignement. La référence OM est celle prise en compte par le chercheur dans son analyse. Il ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes dont il dérive (car il les inclut dans l'analyse), mais il est formulé en termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit un remaniement constant pour cela. (Boch et Gascón 2005, P. 11)

L'élaboration d'un modèle praxéologique de référence est devenue une étape essentielle dans la plupart des travaux développés dans le cadre de la TAD. Le MPR est lui-même un résultat didactique et également un outil pour effectuer des analyses didactiques.

Chevallard (2007) qui affirme que :

> Ce que dit la théorie de la transposition didactique, en d'autres termes, c'est qu'il n'y a pas de « repère privilégié » à partir duquel observer, analyser, juger le monde des savoirs et, plus largement, des praxéologies. Le « savoir savant » lui-même est une fonction, non une substance, et par rapport à quoi le didacticien doit expressément s'excentrer. De là découle que le travail du didacticien consiste, chaque fois, en la construction d'un repère jamais définitif depuis lequel analyser les praxéologies dont il étudie la diffusion. (Chevallard 2007, p. 12)

Enfin, comme les concepts scientifiques ne sont jamais seuls et ne peuvent être totalement isolés, il est nécessaire de prendre en compte les relations entre les différents concepts mis en jeu dans toute situation liée au champ conceptuel du concept en jeu. Vergnaud (1990) définit un ***champ conceptuel*** comme un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion. Cette notion de champ conceptuel permet de :

- replacer un concept dans un ensemble de concepts qui lui sont voisins ;
- préciser les classes de problèmes où ces concepts sont outils de résolution (donc préciser leurs significations).

Ainsi nous allons mettre la notion de limite en relation avec son champ conceptuel et ensuite préciser les types de tâches. Nous construisons à cet effet la carte conceptuelle qui met en évidence certains des objets mathématiques qui nourrissent le concept de limite, et les notions mathématiques construites à l'aide de la limite.

Pour construite cette carte conceptuelle, nous nous appuyons sur les résultats de l´étude de la dimension historico-épistémologique réalisée par Doumbia (2020).

Étude historique de la notion de limite

En s´appuyant sur les travaux de Cornu (1983), Sierpinska (1985), Artigue (1996a, 1996b), Bkouche (1997), Job (2011) et principalement sur les travaux de Doumbia (2020), on mettra en exergue les obstacles relatifs à la notion de limite, les problèmes qui ont permis l'émergence de la notion de limite et quelques débats contradictoires à propos de la définition de la notion de limite. Nous présenterons aussi une analyse de la définition formelle de ℓ est la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point fini a.

Du point de vue historique on peut citer : les paradoxes de Zénon d'Elée ; la notion d'infini (infini potentiel et l'infini actuel, infiniment grand et infiniment petit), la méthode de la double réduction par l'absurde (méthode d'exhaustion), les suites et les séries, les problèmes de géométrie : calcul de mesure d'aire, de volume, les indivisibles, la méthode dite des fluxions de Newton (le calcul des dérivées).

Dès l'antiquité, avec les paradoxes de Zénon d'Elée, on se pose la question de savoir si une somme infinie peut être finie. Un des paradoxes est le suivant : « on ne peut pas traverser un nombre infini de point en un temps fini ». On voit apparaître aussi le lien avec le temps. On ne sut pas à cette époque, expliquer ces paradoxes. Aristote les situait dans la façon dont une ligne est partagée en points, c'est-à-dire dans la nature des objets géométriques (on ne peut considérer une ligne comme juxtaposition de points).

La notion d'infini est également présente, mais de façon potentielle. Selon Aristote, on peut partager indéfiniment en deux une quantité : l'illimité existe potentiellement, mais n'est jamais atteint. Vers 400 av. J.-C., les problèmes essentiels que l'on se posait en mathématiques étaient des problèmes de géométrie : calculs de longueurs, calculs de mesures d'aires. Par exemple, Hippocrate de Chios (430 av. J.-C.) veut prouver que le rapport des mesures des aires de deux cercles est égal au rapport des carrés des mesures de leurs diamètres.

Pour cela, il inscrit dans les deux cercles des polygones réguliers semblables, et, en augmentant indéfiniment le nombre de côtés, il recouvre les deux cercles. À chaque étape, le rapport des aires des polygones inscrits est égal au rapport des carrés des rayons des cercles : il en résulte que, "à la limite'', il en est de même des aires des cercles. Ce passage à la limite, très peu explicité, sera précisé un siècle plus tard, sous la forme de la méthode d'exhaustion, due à Eudoxe De Cnide (408-355 av. J.-C.) dont le principe est décrit comme suit : "Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées''. Autrement dit, par des divisions par 2 successives, on peut rendre une grandeur aussi petite que l'on veut. De là, on obtient le principe d'exhaustion, qui permet d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polygone régulier inscrit dans le cercle, dont l'aire approche celle du cercle à moins de ε près.

Bien que la méthode d'exhaustion soit assez proche de la notion de limite par certains aspects, on ne peut pas dire que les Grecs possédaient le concept de limite, elle est avant tout une méthode géométrique, qui permet de démontrer des résultats sans avoir recours à l'infini. Il faut voir aussi que la méthode d'exhaustion s'applique à des grandeurs géométriques, et pas à des nombres.

> Le concept unificateur de limite sur des nombres n'est pas présent, on ne dispose pas de résultats généraux, et on remet la méthode en œuvre sur chaque exemple, sans avoir dégagé véritablement l'outil qui permettrait de résoudre les problèmes de façon plus générale (J.L Ovaert cité par Cornu1983, p.42)

Le problème du découpage des figures géométriques en figures élémentaires ("indivisibles"), le calcul des sommes de séries, la notion de fonction était très mal assurée : Fermat résout des problèmes de minimum et de maximum, la méthode des fluxions de Newton : notion de "rapport premier'', et celle de ''rapport ultime»· Les notions de "rapport premier'', et de "rapport ultime'', sont d'une grande importance dans l'histoire de la notion de limite. Elles mettent en exergue la signification de epsilon et delta, et marquent la différence entre la limite et la continuité, la limite et l'image. Elles donneront lieu par suite à des débats houleux.

Définition de la notion de limite

Euler (1707-1783) a aidé beaucoup à débarrasser le calcul de son support géométrique. Il a travaillé non pas sur des grandeurs, mais sur des fonctions. L'étude des fonctions a été l'un des facteurs de développement de la notion de limite. À l'époque d'Euler, la notion de fonction n'était pas encore très claire ; il s'agit essentiellement d'expressions algébriques. En introduisant plusieurs ordres d'infiniment petits : dx, $(dx)^2$. Euler développe des fonctions en série. Cela lui a permis d'obtenir de nombreux résultats sur les séries numériques. Il est important de signaler qu'Euler ne s'est pas seulement intéressé au point de vue qualitatif (convergence ou divergence) ; mais surtout au point de vue quantitatif (rapidité de convergence, ou même de divergence).

D'Alembert (1717-1783) est très sensible au problème des infiniment petits et des infiniment grands. Pour lui, les infiniment petits, relèvent de la "métaphysique'', et n'ont rien à faire dans le raisonnement mathématique : Il résulte des raisonnements faisant intervenir des quantités "qui s'évanouissent'' :

> une quantité est quelque chose ou rien ; si elle est quelque chose, elle n'est pas encore évanouie ; si elle n'est rien, elle est évanouie tout à fait. C'est une chimère que la supposition d'un état moyen entre ces deux-là (Œuvre philosophique de D'Alembert volume 2, Ed Jean-François Bastien, 1805, p. 353).

D'Alembert va donc s'attacher à dégager la notion de limite de cette "métaphysique'' des infiniment petits, et à en donner une définition précise, il la définit ainsi :

> On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable. (La Chapelle, D'Alembert. L'Encyclopédie, 1ère éd. 1751, Tome 9, p.542)

Il insiste sur le fait qu'une quantité ne devient jamais égale à sa limite : Il prend pour exemples le cercle, limite des polygones inscrits, ou encore la somme d'une progression géométrique. Il définit la "somme d'une suite" (i.e. d'une série) comme "la limite de ses différents termes, c'est-à-dire une quantité dont on approche aussi près qu'on veut, en prenant toujours dans la suite d'un nombre de termes de plus en plus grand". Il est très réticent à l'égard des séries divergentes.

La notion de limite mise en place par D'Alembert oppose la notion de limite à celle d'infiniment petit, par souci de rigueur mathématique. Sierpinska (1985) précise que la notion de fonction n'apparaît pas dans cette définition, il n'est pas question de nombres mais de grandeurs, et enfin les expressions *s'approcher, différence entre les grandeurs, et inassignable* ne sont pas définies non plus.

Lagrange (1736-1813) lui est réticent à la fois à l'égard de la notion de limite et à l'égard des infiniment petits. À propos de la limite, Il écrit :

> L'espèce de métaphysique que l'on est obligé d'y employer est, sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'analyse, qui ne doit avoir d'autre métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les premières opérations fondamentales du calcul'. (Cornu, 1982, p. 52)

Il veut ramener toute l'analyse au calcul algébrique, et pour cela, il travaille avec le développement en série des fonctions. Lagrange qui refuse la notion de limite, est l'un des principaux artisans du passage au domaine numérique, passage qui permettra l'unification du concept de limite. Ce passage a permis aussi l'établissement d'une définition statique de la limite. Pour Lagrange, la limite ne met pas en jeu l'infini ; il développe la pratique des majorations et des minorations, en particulier pour contrôler le reste d'une série. Les séries sont avant tout pour lui des objets algébriques formels. Lorsqu'on substitue des nombres aux indéterminées, se pose le problème de la convergence, et donc la nécessité d'une majoration du reste : après avoir établi la formule :$f(x) = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + \frac{x^2z^2}{2}f''(x - xz) + etc.$, il prend soins de calculer le reste pour le cas où "on veuille s'arrêter à son premier, second, troisième, etc. terme'', et il obtient par exemple : "$fx = f + xf' + \frac{x^2}{2}f'' + x^3R, R$ étant une fonction de z qui s'évanouisse lorsque z=0''. Ayant ainsi travaillé dans le domaine numérique, il applique ensuite ses résultats à la géométrie et à la mécanique.

C'est Cauchy (1789-1857) qui donne sa place définitive à la notion de limite, en réorganisant l'analyse à partir de cette notion. Il considère le concept de limite comme la base de l´analyse, et, dès le début de son cours à l'École Rurale Polytechnique, il définit la limite et introduit les opérations sur les limites :

> Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchaient indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle

convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus. (Cornu, 1983, p. 53)

Il va fonder toute l'analyse sur la limite : continuité, dérivée, intégrale. Toutefois, Cauchy reste encore marqué par les infiniment petits, et il s'en sert. La notion de limite n'est pas encore définitivement affinée : elle se confond encore avec la notion de point d'accumulation : lim(sin($\frac{1}{x}$) a, pour Cauchy, une infinité de valeurs comprises entre -1 et +1. Il y a aussi la confusion entre l'étude de la continuité et l'étude de la limite en un point et confusion entre limite et image.

La relation fonctionnelle apparaît déjà avec une attribution de valeurs numériques. Mais on parle de valeurs consécutives ce qui fait dire à Sierpinska (1985) que cette définition concernait seulement les suites numériques. Elle précise que les quantificateurs sont implicites dans cette définition et des expressions indéfinies comme par exemple, *s'approcher indéfiniment*. De plus elle précise que Cauchy ne marquait pas distinctement la dépendance entre le voisinage du point auquel on calcule la limite et le voisinage du point qui est la limite. Elle attire notre attention qu'en langue naturelle on ne fait pas bien attention à l'ordre des mots et aux différences subtiles qui s'ensuivent.

Alors qu'en France les idées de Cauchy ne sont pas reprises immédiatement, la notion de limite se développe rapidement en Allemagne, et Weierstrass (1816-1897) en donne une formulation "statique", sous la forme que nous connaissons aujourd'hui : Si étant donné un nombre réel positif quelconque ε, il existe un nombre η_0 tel que pour $0<\eta<\eta_0$, la différence $f(x_0 \pm \eta) - \mathcal{L}$ est plus petite en valeur absolue que ε alors $\mathcal{L}$ est la limite de *f(x)* pour $x=x_0$. D´après Weierstrass, il n'y a rien à ajouter, rien à supprimer ou encore ($\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in Df\ (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.

Étude épistémologique de la notion de limite

Nous présenterons dans cette étude, les obstacles épistémologiques de la notion de limite, une analyse de la définition formelle de ℓ est la limite d'une fonction numérique d'une variable en un point fini *a*, les difficultés de l'enseignement et l'apprentissage de la notion de limite.

Nous avons la limite comme « notion métaphysique », comme la notion d'infiniment petit et d'infiniment grand. Ces notions mystérieuses ont constitué l'un des principaux obstacles. Existe-t-il un état intermédiaire entre ce qui est nul et ce qui n'est pas nul ? Y-a-t-il un nombre plus grand que les autres ? Les débats autour des quantités évanescentes ont montré toute la difficulté qu'il y a à faire tendre une quantité vers zéro, a limite peut-elle être atteinte ? et la transposition numérique : (Il s'agit ici d'un obstacle lié à la « difficulté de se détacher du contexte géométrique et cinématique, pour travailler non plus sur les grandeurs, mais sur les nombres », en bref difficulté avec l'arithmétisation de la notion de limite).

La recherche menée par Sierpinska (1985) avait pour but la mise en évidence d'obstacles[4] épistémologiques relatifs à la notion de limite, elle retient deux aspects de la notion d'obstacle épistémologique : L'apparition des obstacles a un caractère inévitable et la répétition de leur apparition dans la phylogenèse et l'ontogenèse des concepts.

Sierpinska (1985) présente les obstacles épistémologiques suivants liés à la notion de limite : horror infiniti[5] , obstacles liés à la notion de fonction, obstacles « géométriques », obstacles « logiques », et l'obstacle du symbole.

Michèle Artigue (1996a) a aussi identifié un certain nombre de d'obstacles épistémologiques que nous présentons comme suit :

> - le sens commun véhiculé par le terme limite qui favorise une conception de la limite comme barrière infranchissable et même non-atteignable, comme borne ou encore comme ultime terme d'un processus, qui tend aussi à renforcer des conceptions monotones strictes de la convergence,
> - le principe de « continuité » (ainsi nommé par référence à Leibniz) qui consiste, traitant le processus de limite comme un processus algébrique « fini », à faire passer à la limite les propriétés communes aux éléments du processus, et plus globalement à ne pas être attentif à ce qui différencie cette opération particulière des opérations algébriques usuelles,
> - des conceptions trop dépendantes d'une « géométrie de la forme » qui n'obligent pas à identifier clairement sur quels objets porte exactement le processus de limite et la topologie sous-jacente. Ceci rend difficile la perception du jeu subtil entre cadre numérique et cadre géométrique sous-jacent au processus de limite, et induit ou renforce des convictions erronées comme celle constant à croire qui si ''géométriquement'' un objet tend vers un objet, toutes les grandeurs qui lui sont associées auront pour limite les valeurs correspondantes des grandeurs pour l'objet limite. (Doumbia, 2020, p.74)

Artigue (1996a) met l´accent aussi sur les difficultés liées au double statut opérationnel et structural de la limite qui se traduit par la difficulté à se détacher d'une vision de la limite

---

[4] L´auteure définit l'obstacle épistémologique relatif à un concept comme l'ensemble des causes de lenteurs de troubles dans l'acquisition de concept qui sont spécifiques de ce concept et de lui seul et sont telles que leur prise en conscience est indispensable pour le développement de ce concept.

[5] Cette expression renvoie à Georg Cantor :« l'horreur de l'infini est une forme de myopie qui empêche de voir l'infini actuel, bien que, dans sa forme supérieure cet infini nous ait crées et nous maintient, et dans toute ses formes secondaires transformées il se manifeste tout autour de nous et va jusqu'à nos esprits » (Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen 1932).

comme étant um processus composé de termes qui empêche de dissocier clairement l'objet limite du processus qui a permis de le construire, pour le doter d'une identité propre.

Enfin, l´auteur souligne les difficultés de la formalisation standard de la notion de limite, qui fonctionne comme un tout indivisible,

> alors que spontanément, l'élève a plus tendance à considérer deux processus distincts : un portant sur la variable, l'autre sur les valeurs de la fonction ; l'imbrication s'opère de plus dans un sens qui n'est en rien naturel : pour écrire que la limite de la fonction est ℓ à l'infini, par exemple, on n'écrit pas que pour *x* grand, *f(x)* est proche de ℓ, on se donne au contraire un voisinage de ℓ et on cherche à garantir que, si *x* est suffisamment grand, *f(x)* sera dans ce voisinage ! Et cette imbrication p, induit, dans toutes les définitions standard, une alternance de quantificateurs dont on sait qu'elle est logiquement mal maîtrisée à ce niveau d'enseignement. Fort de ce constat on peut affirmer que la maîtrise des quantificateurs est capitale dans la compréhension et la mise en marche de la définition formelle de la limite. (Doumbia, 2020, p.75)

Michèle Artigue pointe le saut qualitatif majeur entre la définition intuitive et la définition formelle de la limite

> En fait il y a entre un maniement relativement intuitif de la notion de limite et la notion formalisée standard un saut qualitatif majeur, attesté d'ailleurs par l'histoire même du concept. Le concept formalisé apparaît, au sens de Imre Lakatos (Lakatos, 1976), comme un concept fait pour ''prouver'', en rupture partielle avec les formes de connaissance qui le précède. Et sa fonction de concept unificateur du champ de l'analyse est, à ce moment-là, aussi fondamentale que sa fonction de production mathématique. (Artigue1996b, p. 10)

Un des problèmes identifiés par Artigue(1996b) est la rupture algèbre/analyse, problème très peu travaillé dans les recherches sur l'apprentissage de l'analyse

Les obstacles de nature épistémologique se situent aussi au niveau de la définition formelle. Les pratiques sur la notion de limite sont diverses et cette diversité va jusqu'à la définition de la limite d'une fonction en un point a de $\mathbb{R}$. Pour certains, la formulation de " ℓ est limite de *f* lorsque *x* tend vers a" est :

Définition 1 : On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si pour toute suite x_n tendant vers a, la suite $f(x_n)$ tend vers ℓ *;*

Définition 2 : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \quad \forall x \in Df \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$ tandis que pour d'autres c'est :

Définition 3 : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$ de plus dans chaque cas on utilise la même notation $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

Doumbia (2020) observe que la définition 1 met en jeu l'aspect covariant de la limite, qui respecte l'ordre « naturel » entre les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction considérée. Elle prend en compte les connotations dynamiques de l'expression « tend vers » :

> [...] la Définition 1 aborde les éléments de l'ensemble de départ et ceux de l'ensemble d'arrivée dans l'ordre naturel : on y considère d'abord les *x*, et puis seulement les *f(x)*. On est proche de la formulation familière de l'idée de limite d'une fonction *f* en un point a : « Quand les *x* se rapprochent de *a*, les *f(x)* se rapprochent de *b* », dont on retrouve d'ailleurs la trace dans l'expression canonique « quand *x* tend vers *a, f(x)* tend vers *b* (Hauchart & Rouche, 1987, p. 330 cité par Job. 2011).

Doumbia (2020), s'appuyant sur ces auteurs, affirme que dans cette définition apparaît explicitement un seul quantificateur (pour toute suite), tandis que les Définitions 2 et 3 en font chacune apparaître deux. Mais il s'agit bien de quantificateurs apparents, car il y a des quantificateurs cachés dans l'expression « x_n tendant vers a ». Par conséquent :

> [...] la difficulté principale de la Définition 1 est qu'elle oblige à imaginer toutes les séries de limite *a*. C'est particulièrement difficile à cause de la double infinité d'objets qu'elle mobilise : envisager seulement une suite infinie n'est déjà pas banal ; qu'en est-il alors lorsqu'il s'agit d'envisager toutes celles qui tendent vers a ? L'imagination est brusquement encombrée. ((Hauchart & Rouche, 1987, cité par Job 2011, p.520)

Job (2011) précise que la définition 1 tend à masquer l'aspect approximation sous-jacent à la notion de limite. Elle rend mieux compte des intuitions dynamiques sous-jacentes à des expressions comme « tendre vers » que la définition en epsilon et delta, néanmoins, « tendre vers » renvoie à un mouvement continu alors que la définition 1 traite du discret en tablant sur des suites.

Pour Job (2011, citant Hauchart & Rouche, 1987), la définition 2 rend compte de l'aspect approximation sous-jacent au concept de limite. Le type de quantification universelle qui intervient dans la définition 2 est d'une certaine manière plus aisée que la quantification universelle qui apparaît dans la définition 1 car elle n'oblige pas à considérer une double infinité d'objets, ses objets (des réels) sont plus « simples » que des suites et en plus on ne doit pas tous les considérer, uniquement les plus petits.

En revanche la définition 2 ne rend pas compte des aspects dynamiques du concept de limite. Elle ne respecte pas l'ordre « naturel » entre les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction considérée. La quantification universelle « pour tout ε » masque l'idée qu'on ne s'intéresse qu'aux « petites » valeurs de ε. Elle établit parfois une dialectique entre la covariance et la contravariance.

Le champ conceptuel de la notion de limite

Doumbia (2020) met l´accent sur la nécessité faire appel à des notions de la topologie, quand on veut étudier le comportement local d’une fonction numérique d’une variable réelle au voisinage d’un point. Il s´agit des notions :

> de voisinage, d’intervalle, de point adhérent, de point d’accumulation, distance, successeur et prédécesseur d’un nombre réel (ordre dans ℝ), inéquations avec ou sans valeur absolue, de notions de la logique telles que : les quantificateurs universel et existentiel, la condition suffisante, l’implication de la logique des prédicats, la notion de fonction, composition et décomposition de fonctions, l’image directe et réciproque d’un intervalle, infiniment petit et infiniment grand. (Doumbia, 2020, p. 85)

Pour notre cas on se limitera aux fonctions numériques d’une variable réelle affines ou affines par intervalles.

La notion de limite est fondamentale pour la dérivée, l’intégrale, la convergence d’une suite, le théorème des valeurs intermédiaires.

La conception intuitive de l’expression « *x* tend vers *a* » est une conception dynamique. Les notions de limite à gauche ou à droite font explicitement appel à la relation d’ordre. L’expression « *x* tend vers *a* » n’a aucun sens mathématique lorsqu’elle est considérée toute seule. Les intervalles jouent un rôle important dans l´étude de la notion de limite d’une fonction numérique d’une variable réelle. Décrire la topologie de ℝ revient à caractériser l’ensemble des voisinages d’un point *a*[6] de ℝ que nous noterons V*a*.

Selon R. Bkouche (1997) la notion de limite relève de deux problématiques qui, si elles sont liées, présentent des aspects contradictoires. La première problématique est d'ordre cinématique au sens où elle s'appuie sur la notion de mouvement ; la formulation canonique (en termes de fonction par exemple): "*f(x)* tend vers *b* lorsque *x* tend vers *a*" doit alors être entendue de la façon suivante: lorsque la variable indépendante *x* s'approche indéfiniment de la valeur *a*, alors *f(x)* s'approche indéfiniment de la valeur *b*. L'assertion citée : "*f(x)* tend vers *b* lorsque *x* tend vers *a*" est ici constituée de deux propositions, une proposition principale "*f(x)* tend vers *b*" et une proposition subordonnée "lorsque *x* tend vers *a*", indiquant ainsi que la variable *x* entraîne, dans son mouvement vers *a*, la variable *f(x)* vers la valeur b; autrement dit c'est la variable qui commande la fonction.

[6] C’est une partie V de ℝ contenant un intervalle ouvert qui contient *a*

La seconde problématique est celle de l'approximation, elle peut être formulée de la façon suivante :

> soit une suite numérique x_n, dire que la suite x_n tend vers une limite ℓ c'est dire que "plus n est grand, plus le nombre x_n s'approche de ℓ ", ce qui participe encore du mouvement, mais s'y ajoute le problème suivant: jusqu'où faut-il aller dans la suite pour que la différence entre x_n et ℓ soit plus petite qu'un nombre donné à l'avance, ou, si l'on préfère, pour que l'erreur que l'on fait en remplaçant ℓ par x_n soit plus petite qu'une valeur donnée à l'avance. (Bkouche, 1997, cité par Doumbia, 2020, p. 90)

Pour Doumbia (2020), un exemple élémentaire d'approximation est le calcul décimal approché d'un nombre : combien de chiffre après la virgule pour que le nombre calculé diffère du nombre cherché de moins d'une valeur donnée à l'avance ? L´avantage de cet exemple est de mettre en valeur le lien entre la notion d'approximation et le calcul lui-même, comme dans le cas de la pratique de la division euclidienne lorsque "ça ne tombe pas juste".

Dans la problématique de l´approximation, l'aspect cinématique devient second, car ce qui importe n'est plus le mouvement de la variable indépendante, mais le numéro d'ordre permettant l'approximation voulue.

> Autrement dit, c'est la variable dépendante qui s'impose et la structure grammaticale de l'assertion rituelle "$f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a" est différente ; il n'y a plus qu'une seule proposition qui indique à la fois ce qu'est la limite et le principe d'un calcul approché. On reconnaît dans cette seconde formulation la définition weïerstrassienne de la limite. (Bkouche, 1997, cité par Doumbia, 2020, p. 91)

Cet auteur fait remarquer que lorsque la différence $x - a$ devient infiniment petite, alors la différence $f(x) - b$ devient infiniment petite, formulation que l'on peut rapprocher de celle de Cauchy dans son Résumé des leçons données à l'École Polytechnique (1823).

On voit ainsi apparaître une contradiction entre les deux problématiques ; la première met l'accent sur le mouvement de la variable indépendante et l'effet d'entraînement sur la variable dépendante, la seconde met l'accent sur la variable dépendante et la façon dont elle force les valeurs de la première variable. C´est ce qu´indique Bkouche (1997) quand il affirme que c’est cette contradiction qui constitue l'une des difficultés de la notion de limite, difficulté qui relève de l'ordre mathématique et c'est en cela qu'elle est une difficulté pédagogique.

> Une conception utilitariste de l'enseignement (assurer la réussite, ce qui implique d'éviter ce type de difficulté aux élèves) conduirait à choisir une seule problématique et à choisir les exercices en fonction de cette problématique, ou bien à inventer l'artefact pédagogique convenable qui permettra aux élèves de réussir les exercices ad hoc qu'on leur proposera. Mais qu'auront-ils compris et qu'auront-ils appris ? (Bkouche 1997, p. 16)

Selon Bkouche (1997), en revenant sur la notion de limite et les deux problématiques dites ci-dessus ; on remarque que plusieurs éléments entrent en jeu parmi lesquels on peut citer l'aspect intuitif et l'aspect opératoire. Il faut alors préciser que l'aspect intuitif participe de chacune des deux problématiques, celle du mouvement et celle de l'approximation dans la mesure où c'est autour de cet aspect intuitif que sont définies les deux problématiques considérées. Cependant l'aspect opératoire a conduit à mettre en avant la problématique de l'approximation dans la mesure où c'est la formulation weïerstrassienne qui, s'est imposée pour donner une définition rigoureuse de la notion de limite et en déduire les conditions de calcul des limites. R. Bkouche (1997) affirme qu'ignorer, dans l'enseignement, les deux problématiques constitutives de la notion de limite et les deux aspects, l'intuitif et l'opératoire, qui permettent d'appréhender cette notion, ne peut que contribuer à mutiler la notion, et par cela même à mutiler la pensée mathématique des élèves.

Bkouche (1997) affirme c'est l'activité mathématique elle-même qui est en question, la façon de penser la limite, de la calculer quand cela est possible ou d'inventer de nouvelles méthodes de détermination quand cela est nécessaire. Il note que la réduction de l'aspect opératoire à la problématique de l'approximation via la définition de Weïerstrass relève moins d'une nécessité logique que d'un choix historique en réponse aux difficultés posées par la notion d'infiniment petit encore utilisée par Cauchy.

Par rapport au caractère covariant et contra-variant de la notion de limite, Lecorre (2016) inspiré par Lutz, Makhlouf et Meyer (1996) écrit :

> Notons d'abord le caractère contra-variant de cette définition qui appelle à déterminer pour un voisinage de *f(x)*, le voisinage de *x* correspondant. Un caractère covariant au contraire appelle à déterminer pour un voisinage de *x*, le voisinage de *f(x)* correspondant. (Lecorre 2016, pp. 30-31)

Et il poursuit

> En examinant ensuite cette définition, on s'aperçoit du rôle déterminant de certains éléments de formalisme : la quantification universelle et existentielle (il y a aussi trois quantifications universelles implicites sur *f*, *m* et k), la notion de variable, celle d'intervalle, de voisinage d'un réel, de nombre réel, celle de fonction et celle d'implication. On peut, sur cette simple analyse des éléments constitutifs de la définition, s'apercevoir que celle-ci concentre un nombre important de notions nécessaires pour lui donner sens. (Lecorre, 2016, p. 30-31)

On peut conclure à partir de ces analyses que pour le succès de l'enseignent de la notion de limite, il faut rentrer par les conceptions intuitives des élèves, les mettre à jour, élaborer des situations qui mettent à défaut les conceptions erronées et en fin procéder à la formalisation de la notion de limite et la rendre opérationnelle. En d’autres termes, trouver un équilibre entre l’intuition et la rigueur dans l’enseignement des mathématiques. Cela met en évidence l’importance de la dialectique entre l’intuition et la rigueur dans l’enseignement des mathématiques comme le dit Berrou (2011, p. 1) « Entre rigueur et intuition, il n’y a pas à choisir. Les deux sont un précieux atout pour l’étude des mathématiques et l’idéal pour se faire de la mathématique une alliée plutôt qu’un obstacle est de cultiver les deux attitudes, surtout si l’on se connaît une dominante. ».

Cette étude nous a permis aussi de construire une carte conceptuelle (Figure 2) contenant des objets mathématiques qui alimentent la notion de limite d´une fonction, et ceux dont la vie dépend de cette notion.

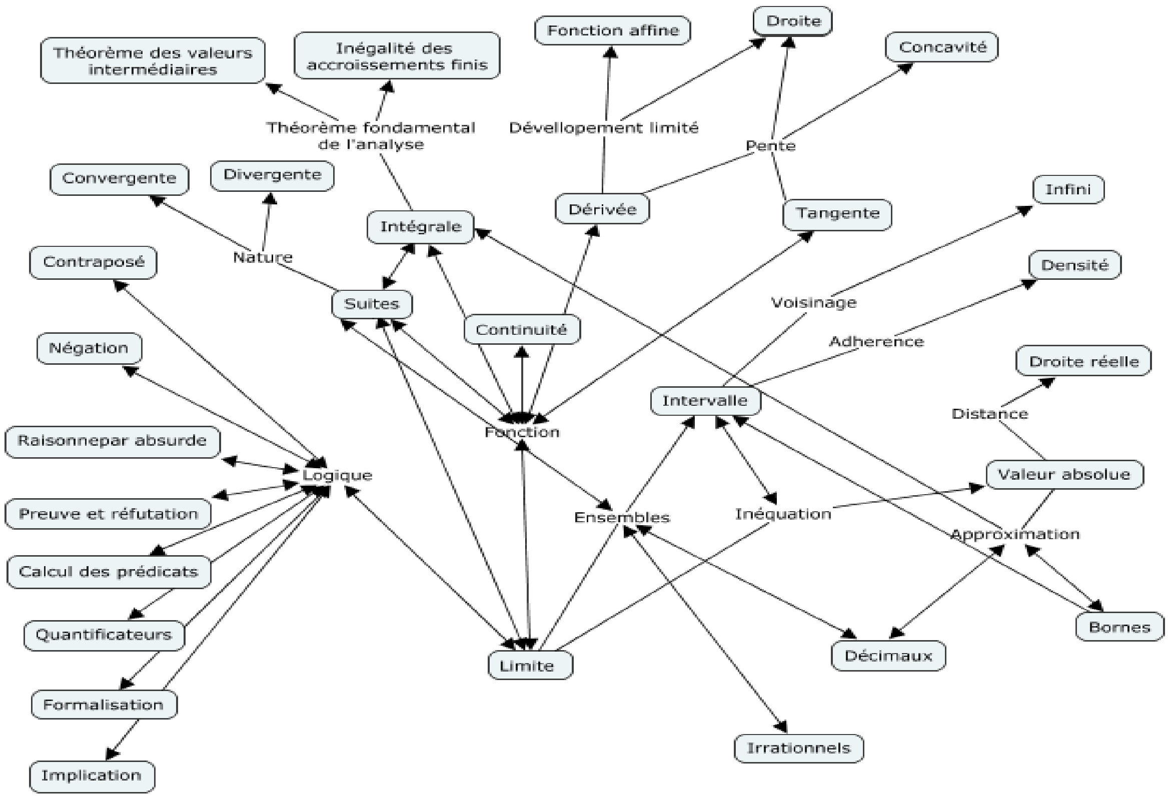

Figure 2.

Carte conceptuelle sur le concept de limite (Doumbia, 2020. p. 115

L´analyse de cette carte conceptuelle montre que la notion de limite est intimement liée aux concepts de fonction, de variable, d’intégrale, de dérivée, de continuité, d’ensemble, d’inéquations avec valeur absolue, de logique et de topologie, de la notion d’infini, etc.

L’enseignement actuel de la notion de limite au Mali n’aborde pas ces aspects épistémologiques importants. Acquérir des connaissances sur la notion de limite c’est prendre conscience de ces aspects épistémologiques, les affrontés et les surmontés. L’enseignement de la notion de limite doit s'organiser autour des obstacles épistémologiques (que nous avions identifié) pour que les élèves et étudiants les rencontrent pour faire leur crise de limite et enfin mettre à leur disposition des moyens permettant de les surmonter. C'est dans ces conditions que l'on dira que les élèves ont appris la notion de limite. Cela n'est possible qu'à travers la construction et la mise en application de la définition formelle de la limite. Pour que les aspects épistémologiques soient abordés il est nécessaire que les enseignants aient une conception claire de ceux-ci.

A partir de cette carte conceptuelle, nous étudions dans ce qui suit les différentes tâches liées à la notion de limite.

Étude des différents types de tâches liées à la notion de limite

Nous présentons les différents types de tâches liées à la logique, à la dérivée et aux ensembles. Du point vu de la logique, nous identifions 22 types de tâches indiquées dans le Tableau 1.

Tableau 1.

Les types de tâches qui mettent en jeu la logique (Doumbia, 2020, p. 115-116)

1. Donner la définition formelle de la limite d'une fonction f en un point a donné à l'aide des quantificateurs. 2. Démontrer qu'un nombre réel est la limite de f en un point a. 3. Prouver qu'un réel n'est pas la limite d'une fonction f en un point a. 4. Montrer que si f admet une limite en a alors cette limite est toujours atteinte. 5. Montrer que la limite en un point a de la somme, produit et quotient de deux fonctions est la somme, produit et le quotient des limites finies non nulles en ce point. 6. Montrer que si f est dérivable en a alors elle est continue en a 7. Étudier la continuité de f en a 8. Étudier la dérivabilité de f en a 9. Montrer l'existence d'une intégrale sur un intervalle donné 10. Montrer que, si f est continue en a alors f est bornée au voisinage de $f(a)$ 11. Démontrer le théorème des fonctions continues monotones sur un intervalle $[a, b]$ (existence de la limite	12. Démontrer le théorème de la borne supérieure et inférieure. 13. Démontrer qu'une suite est convergente 14. Démontrer qu'une suite est divergente 15. Déterminer l'écriture sous forme de fraction d'un nombre admettant une écriture décimale illimitée périodique 16. Démontrer qu'un nombre rationnel est la limite d'un nombre décimal illimité périodique. 17. Démontrer qu'un nombre irrationnel est la limite d'un nombre décimal illimité non périodique. 18. Démontrer que toute suite croissante et majorée converge vers une limite finie ; 19. Démontrer que toute suite croissante et non majorée converge vers 20. Démontrer que toute suite décroissante et non minorée converge vers une limite finie ; 21. Démontrer que deux suites adjacentes sont toujours convergentes et de plus leurs limites sont fines et égales ; 22. Démontrer que toute suite décroissante et minorée converge vers

Par rapport à la dérivée, nous mettons en évidence 5 types de tâches que nous présentons dans le Tableau 2.

Tableau 2.

Les types de tâches qui mettent en jeu la dérivée (Doumbia, 2020, p. 116)

1.	Déterminer le nombre dérivé d'une fonction en un point ;
2.	Déterminer le développement limité d'ordre n d'une fonction au voisinage d'un point ;
3.	Montrer que le développement limité d'ordre n d'une fonction est unique ;
4.	Démontrer qu'une fonction admet un extremum en un point ;
5.	Étudier la concavité d'une courbe en un point ;

En ce qui concerne les ensembles, ce sont 16 types de tâches qui sont mises en évidence (Tableau 3) :

Tableau 3.

Les types de tâches qui mettent en jeu les ensembles (Doumbia, 2020, p. 116-117)

1. Démontrer que si une fonction admet une limite en un point, alors cette limite est unique ; 2. Démontrer que « être aussi proche que l'on veut » signifie l'égalité dans » 3. Démontrer qu'est complet ; 4. Démontrer que l'on peut approcher toute fonction numérique d'une variable réelle par une droite affine dans un intervalle de rayon réduit (c'est-à-dire au voisinage d'un point adhérent à son ensemble de définition) 5. Calculer la limite d'une fonction en un point *a ;* 6. Étudier la limite d'une fonction en un point ; 7. Démontrer que la courbe de la fonction *f* admet une asymptote verticale en *a*, une asymptote horizontale en infini ou une asymptote oblique en infini ;	8. Déterminer graphiquement la limite d'une fonction en *a* ; 9. Démontrer que la limite de *gof* est égale à *g(limf)* ; 10. Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires ; 11. Démontrer le théorème fondamental de l'analyse ; 12. Démontrer le théorème des accroissements-finis ; 13. Calculer si elle existe, la limite d'une suite à l'infini ; 14. Calculer si elle existe, la limite d'une fonction en un point de **;** 15. Déterminer la valeur exacte de la solution d'une équation ; 16. Montrer qu'une fonction admet un point d'inflexion en un point *a* .

À partir des types de tâches relatifs à la notion de limite, on s'aperçoit que sa raison d'être est de prouver avec rigueur des propriétés et d´énoncer des axiomes sur les fonctions, c'est-à-dire fonder l'analyse sur des bases solides au sens de Cauchy.

Le Thai Bao (2007) dans sa thèse, inspiré par Bosch et al. (2003), identifie et décrit trois organisations mathématiques locales relatives à la notion de limite. La première OM concerne l'algèbre des limites (Bosch et al. 2003). En s'appuyant sur la problématique du calcul de la limite existante, l'algèbre des limites est le fruit d'une modélisation en règles algébriques du passage à la limite dans les opérations sur les fonctions. L'algèbre des limites permet d'éviter la problématique de l'infini de la notion de limite comme les problématiques d'approximation de cette notion. Elle permet aussi d'associer. L'écriture à un nombre réel ou à l'infini.

La deuxième OM se caractérise par la topologie des limites. Elle s'appuie sur la problématique de l'existence de la limite. Bosch et al. (2003, p.99) abordent les techniques mathématiques associées aux types de tâches dans cette OM en présentant un exemple :

> A ces types de tâches sont associées des techniques mathématiques utiles pour réaliser les preuves demandées. Voyons, par exemple, comment aborder une tâche du premier type : Prouver que la fonction *f(x) = senus(x)* n'a pas de limite à l'infini. Considérons la suite de termes généraux $x_n = (\pi/2 + 2\pi n)$. Nous savons que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$: Étudions le comportement de la suite d'images : $f(x_n)$ = sen $(\pi/2 + 2\pi n) = 1$ pour tout n. Donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$. Considérons maintenant la suite de terme général $x_{n'} = (-\pi/2+ 2\pi n)$. Nous savons que $\lim_{n\to+\infty} x'_n = +\infty$. Étudions le comportement de la suite d'images : $f(x'_n) = \sin(-\pi/2 + 2\pi n) = -1$ pour tout n. Donc $\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = -1$. Nous avons deux suites qui tendent vers l'infini et dont les images par f convergent vers des points différents. Il n'y a donc pas de limite de f(x) = sin(x) à l'infini. (Le Thai Bao 2007, p. 65, traduction libre)

Pour ces types de tâches, nous avons les techniques mathématiques associées utiles pour réaliser les démonstrations requises. Regardons, par exemple, comment s'aborde une tâche du premier type : Démontrons que la fonction *f(x) = sin(x)* n'a pas de limite à l'infini.

Considérons la suite de terme général $x_n = (\pi/2 + 2\pi n)$. Nous savons que $\lim_{x\to+\infty} x_n = +\infty$.

Étudions le comportement à l'infini de la suite des images :
$f(xn) = \sin(-\pi/2 + 2\pi n) = -1$ pour tout *n*. Nous avons deux suites qui tendent vers l'infini et dont les images par *f* convergent en un point différent. Par conséquent la limite de *f(x) = sin(x)* n'existe pas. (Traduction en français par Bessot cf. Le Thai Bao, 2007).

Dans l'exemple précédent, la non-existence de la limite de la fonction *f(x) = sin(x)* à l'infini s'appuie sur la production de suites numériques et le calcul des limites de ces suites. Ces calculs appartiennent à OM_1 et abordent de façon indirecte la relation entre nombre et limite.

À partir des résultats de son enquête épistémologique, il modélise une restriction de OM 2, de Bosch et al. (2003), dans une organisation mathématique $OM_{2'}$ locale qui relève plus explicitement de la relation dialectique entre la notion de limite et la notion de nombre réel, qui met l´accent sur « l´existence de la limite d'une suite numérique ». Certains des types des tâches constitutives de $OM_{2'}$ sont les suivantes :

- $T_{2'1}$: Démontrer la convergence d'une suite numérique ;
- $T_{2'2}$: Démontrer l'existence de la solution d'une équation.

Pour réaliser ces démonstrations, la technique mathématique ci-après porte explicitement sur la relation dialectique entre nombre et limite, c´est-á-dire, produire et vérifier que la suite numérique satisfait l'un des critères de convergence suivants : le critère de Cauchy, le critère « monotone bornée », le critère des intervalles emboîtés (ou des suites adjacentes), la définition en terme (e, N).

Dans certains cas, on peut utiliser aussi des techniques portant sur des théorèmes démontrés précédemment comme les théorèmes de l'algèbre des limites ou le théorème des valeurs intermédiaires. Dans ce cas, la relation dialectique entre nombre et limite se pose de façon indirecte. Le Thai renforce cette idée en affirmant que

> Le bloc théorique (technologie et théorie) est celui décrit par Bosch et al. (2002) par OM2. Le discours technologique de l'OM2 est centré sur l'utilisation des propriétés des limites de séquences et sur la définition classique de " limite " en termes de e et de d. Cette technologie est basée, à son tour, sur la théorie des nombres réels qui considère sa structure en tant qu'espace métrique et ses multiples propriétés : densité, complétude, caractérisation de la topologie de R induite par la métrique euclidienne, existence du supremum (et de l'infimum) de tout sous-ensemble non vide et borné de R, séquences de Cauchy, etc. (Le Thai Bao, 2007, p. 66, traduction libre)

Le discours technologique de OM_2 est centré sur l'usage des propriétés des limites des suites et sur la définition classique de la « limite » en termes d'epsilon et delta. Cette technologie s'appuie, à son tour, sur la théorie de nombres réels qui considère sa structure comme espace métrique et ses multiples propriétés : densité, complétude, caractérisation de la topologie induite par la métrique euclidienne, existence d'un maximum (et d'un minimum) dans n'importe quel intervalle non vide et fermé de, suites de Cauchy, etc. (Traduction en français par Bessot, cf. Le Thai Bao, 2007)

Autrement dit, le bloc théorique s'appuie sur la topologie de ℝ pour la notion de limite. Pour illustrer l'OM2', il prend comme exemple une activité du manuel Mathématiques 1re S. E de la collection Dimathème (1982) qui prépare l'introduction des notions de limite et de continuité de fonction : On appelle D_n ($n \in \mathbb{N}$) l'ensemble des décimaux d tels que le nombre $10^n \times d$ soit un entier relatif (ex. : $2,427 \in D3$).

> a) Combien l'ensemble $[0 ; 1] \subset Dn$ a-t-il d'éléments ?
> b) Soit $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe 2 réels a_n et b_n :
> $a_n = \text{Max } \{x \in Dn, f(x) < 0\}$
> $b_n = \text{Min } \{x \in Dn, f(x) > 0\}$
> Quelle relation existe-t-il entre a_n et b_n ?
> c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et que $\lim(a_n) = \lim(b_n)$. Soit x_0 cette limite.
> d) Montrer que : $\exists k > 0$ tel que : " $\forall x \in [0 ; 1]$ et " $\forall x' \in [0 ; 1]$.
> $|f(x) - f(x')| < k|x - x'|$.
> e) En déduire que : " $\forall n \in \mathbb{N}, |f(b_n) - f(a_n)| < k\times 10^{-n}$ puis que
> $-k\times 10^{-n} < f(x_0) < k\times 10^{-n}$.
> Conclure que $f(x_0) \neq 0$ conduit à une contradiction. (Le Thai Bao 2007, p.67)

L'activité supra relève d'une technique pour démontrer l'existence d'une racine de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle [0 ; 1] en produisant deux suites décimales adjacentes (a_n) et (b_n) telles que les suites de leurs images $f(a_n)$ et $f(b_n)$ soient aussi adjacentes et vérifient $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ pour tout n. Cela permet de conclure à l'existence d'un nombre réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$ et tel que a_n et b_n soient successivement les valeurs décimales approchées à 10^{-n} près de x_0 à travers la relation $b_n - a_n = 10^{-n}$.

L´OM_3 locale « développement décimal d'un nombre réel » est la restriction d'une OM plus générale – « développement usuels des nombres réels » présente, par exemple, chez Bourbaki (1960) ; elle répond à la question de la représentation des nombres réels selon une suite de base qui forme une partie dense de $\mathbb{R}$, par exemple : développement en fraction continue, développements dyadiques.

Nous identifions deux types des tâches constitutives de OM3 :

- T_{31} : Approximation décimale à 10^{-n} près d'un nombre réel

- T_{32} : Résolution approchée décimale à 10^{-n} près d'une équation (l'existence de la racine étant connue). La technique générale associée à ces types de tâches est d'encadrer le nombre réel (ou la racine d'une équation) x par un couple décimal (dn, dn') où $dn, dn' \in Dn$ ($n \in \mathbb{N}$) tels que $dn' - dn$ $= 10^{-n}$. Cette technique se justifie par la technologie minimale assurant l'existence d'un tel couple décimal (dn, dn'). En effet :

- D est une partie dense de $\mathbb{R}$: on peut toujours choisir un décimal d proche de x tel que $0 < x - d < 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si pn est la projection de d dans Dn (Margolinas, 1985), alors $0 < d - pn < 10^{-n}$. On a donc $0 < x - pn < 2.10^{-n}$. Autrement dit, $-10^{-n} < x - (pn + 10^{-n}) < 10^{-n}$. Soit $dn = pn + 10^{-n}$ $n \in Dn$. On a $x - dn < 10^{-n}$.
  - On a alors $dn - 10^{-n} < x < dn + 10^{-n}$. Si $dn < x$, il suffit de choisir $dn' = dn + 10^{-n}$. Sinon, on choisit $dn' = dn - 10^{-n}$.

Cette technologie s'appuie, comme dans OM_1 et OM_2, sur la théorie des nombres réels, en particulier comme espace métrique et ses multiples propriétés (cf. OM_2 de Bosch et al. 2003) en ajoutant les propriétés minimales de D : sous-groupe additif dense de $\mathbb{R}$ (cf. Bourbaki).

Nous pouvons citer les problèmes de calcul de la valeur approchée à 10^{-n} près du quotient ou de la racine carré de a (où a est un entier positif et b est un entier non nul) comme des exemples de tâches du type T_{31}. L'activité de Dimathème (1982) citée plus haut donne un exemple d'une technique de résolution approchée décimale à 10^{-n} près d'une équation comme une tâche du type T_{32}.

Les deux dernières OM – $OM_{2'}$ et OM_3 - relèvent d'une problématique de l'approximation des nombres par des suites numériques, tout particulièrement des suites décimales (approximation décimale d'un réel).

Les trois OM locales – OM_1, $OM_{2'}$ et OM_3- tournent autour de la construction des nombres réels. Elles peuvent donc être intégrées dans une OM régionale. (Le Thai Bao 2007, p. 65-68).

Maggy Schneider (2015), inspirée par Hardy (2009) et Boch et al. (2003) évoque une bicéphalie entre les deux premières OM : une première OM_1 organisée autour de l'algèbre des limites et dont les tâches sont des calculs de limites, tous cas confondus, basés sur une technologie minimale qui est l'axiomatique de cette algèbre et une deuxième axée sur la topologie des limites et dont les tâches consistent à démontrer les propriétés de cette algèbre, ainsi que l'existence de limites particulières. Dans la première le bloc théorique manque et, dans la seconde, c'est le bloc pratique qui fait défaut. Elle affirme qu'au niveau de l'enseignement secondaire en Belgique, cette transposition se traduit par une étude assez systématique de tous les cas de limites des fonctions de ℝ dans ℝ, dans un ordre ou dans un autre suivant le réseau d'enseignement. Mais que tous ces cas sont « confondus » dans le sens où il manque des tâches qui permettraient de les hiérarchiser a priori en fonction d'un objectif ou d'un niveau d'étude. L´auteures rapporte le cas d'un cours qu'elle a assisté sur les limites dont le premier cas étudié est la limite d'une fonction en un point de son domaine de continuité. Pour elle cela pourrait se justifier dans une approche plus formelle, le concept de fonction continue jouant un rôle majeur dans l'analyse formalisée. Mais, elle constate dans les classes concernées, que l'ambiance devient assez vite surréaliste et électrique, les élèves s'étonnent que l'on considère les valeurs de x sans cesse plus proches de ce réel tout en s'interdisant de prendre directement l'image de celui-ci. Ces cours se poursuivent en général par des limites de fonctions rationnelles dont les numérateur et dénominateur ont un facteur commun. Les élèves ne sont guère plus convaincus se demandant pourquoi le professeur n'étudie pas directement la fonction « simplifiée » qu'il identifie à la précédente, sans penser qu'elle s'en différencie en tant qu'un prolongement continu. Elle dit que l'on peut supposer là que les enseignants situent effectivement ce cas de limite dans une intention didactique de les faire factoriser et simplifier une fraction rationnelle.

À partir de ce constat, on peut affirmer qu'il vaut mieux introduire la limite avant la continuité dans un premier temps et la continuité dans un second temps et enfin établir une liaison entre les deux notions. Il semble nécessaire d'articuler ces deux OM pour permettre aux apprenants d'acquérir un sens mathématique au concept de limite. Pour réserver une part importante à l'intuition et à la logique, nous pensons qu'il serait intéressant d'adjoindre une organisation mathématique locale dont les types de tâches tourneront autour des tâches suivantes :

T_{i1} : Conjecturer graphiquement la limite d'une fonction définie par sa représentation graphique ;

T_{i2} : Déterminer l'image réciproque d'un intervalle par une fonction définie par sa représentation graphique ;

T_{i3} : Compléter une table de valeurs d'une fonction définie par son expression algébrique explicite ;

T_{i4} : Interpréter géométriquement le tableau de valeurs.

Les techniques seront basées sur la projection orthogonale sur les axes du repère, substitution de *x* par sa valeur dans *f(x)*, comparaison des nombres réel. Le complexe théorie technologie est constitué de calculatrice graphique, les propriétés de la projection orthogonale, l'algèbre élémentaire et la géométrie plane.

Cette OM intuition va nous permettre de faire vivre les conceptions des élèves sur la notion de limite, l'OM algèbre des limites nous permet de manipuler la notion de limite et enfin l'OM topologie des limites nous permet en fin d'actualiser les conceptions et les faire évoluer. Avec ces trois OM locales nous mettons en place une organisation mathématique régionale (Figure 3) qui permettra aux élèves d'acquérir un sens mathématique de la notion de limite.

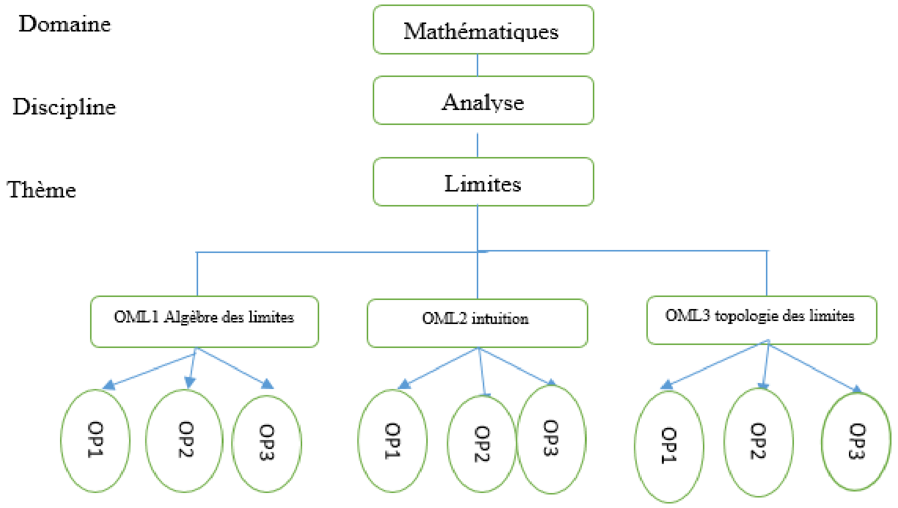

Figure 3.

Organisation mathématique régionale (Doumbia, 2020. P. 123)

Générateur de tâches GT : Calculer, Démontrer, trouver, déterminer, conjecturer etc.

(Calculer la limite de *f(x)* quand *x* tend vers *a*. V1, V2, V3, V4), V1, V2, V3, V4 sont des variables de types de tâches. Les verbes d'action constituent ici des variables épistémologiques parce qu'ils provoquent des changements de techniques de résolution. Ils montrent les limites des techniques mises en jeux pour répondre. Nous représentons dans les Tableau 4 les différentes variables.

Tableau 4.

Liste des différentes variables (Doumbia, p.123-124)

V1 nature de *a* : V1.1 *a* peut-être fini ou infini V1.2 position de *a* par rapport à l'ensemble de définition de *f* : *a* appartient ou n'appartient pas à D*f* avec des niveaux de granularités (*a* est un point isolé adhérent à D*f* ou non ; ou *a* est une des bornes de D*f* , *a* est un point intérieur de D*f*), V2 nature de *f*. V2.1 *f* est continue en *a ;* V2.2 *f* n'est pas continue en *a. (f* est prolongeable par continuité en a ou non) V3 registre de représentation de *f*. V3.1 *f* est définie par une expression algébrique explicite ; V3.2 *f* est définie par sa représentation graphique ; V3.3 *f* est définie par une table de valeur ; V3.4 *f* est définie par un programme	V4 Type de fonction de *f* V4.1 *f* est une fonction affine ; V4.2 *f* est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 ; V4.3 *f* est une fonction rationnelle V4.4 *f* est une fonction irrationnelle ; V4.5 *f* est une fonction circulaire ; V4.6 *f* est une fonction exponentielle ; V4.7 *f* est une fonction logarithmique ; V4.8 *f* est une combinaison de fonctions

Nous résumons les différents statuts de a et de la fonction *f* les schémas suivants (Figures 4, 5, 6 et 7)

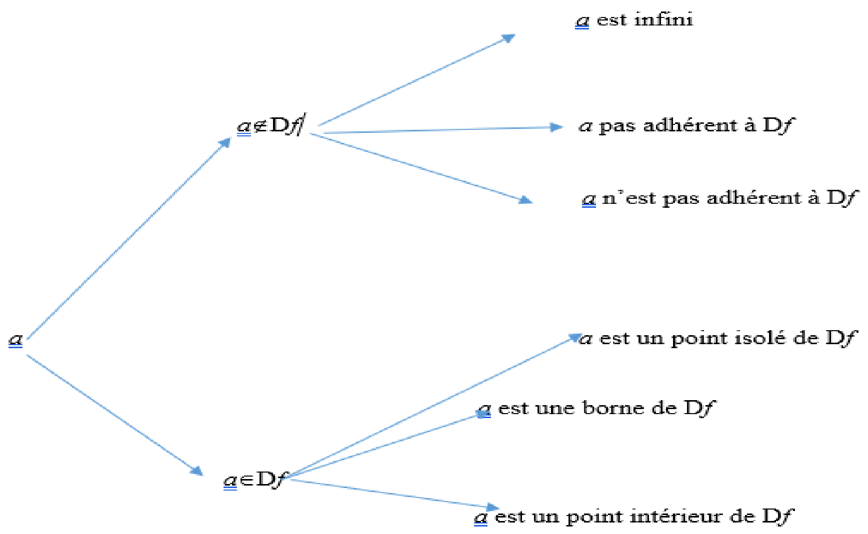

Figure 4.

Limite de f suivant la nature de a (DOUMBIA, 2020. p.124)

Le cas où a est un point isolé non adhérent à D_f doit-être évité.

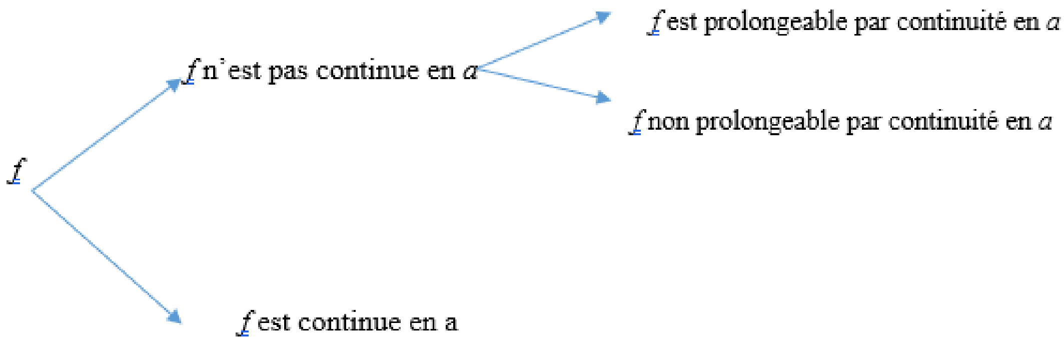

Figure 5.

Continuité ou non continuité de la fonction f (Doumbia, 2020, p. 125)

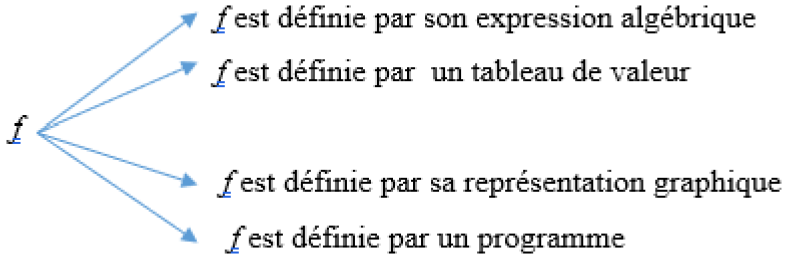

Figure 6.

La fonction représentée dans différents registres de représentation sémiotique (Doumbia, 2020, p. 125)

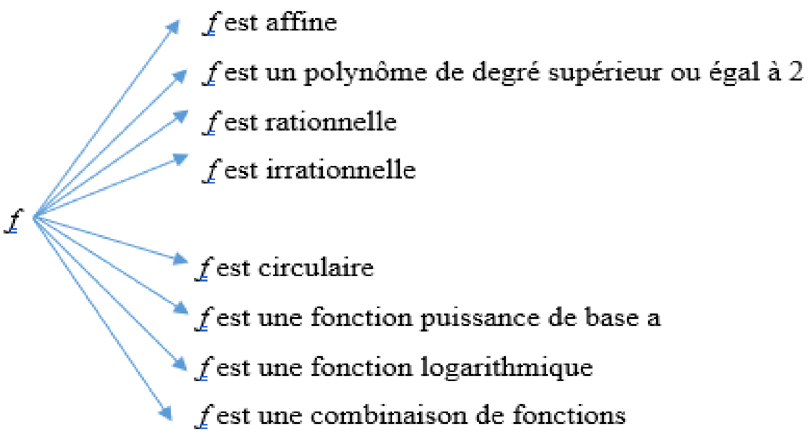

Figure 7.

Nature de la fonction f (Doumbia, 2020. p.125

Nous mettons en évidence des types de tâches liées à ces différentes caractérisations de la fonction *f* :

Tableau *5*.

Types de tâches, techniques et technologies/théories associées (Doumbia, 2020, P.127)

Types de tâches	**Technique**	**Technologie/Théorie**
T_1 : calculer la limite de f en a sachant que *f* est continue en a	Substitution	Propriété des fonctions continues, calcul littéral.
T_2' : montrer que ℓ est la limite de *f* en a.	Utilisation de la définition formelle de la limite, majoration et minoration	Définition formelle, comparaison des fonctions, ordre dans$\mathbb{R}$
T_3 : calculer la limite de f en a sachant que *f* n'est pas continue en a	$\tau 1$: substitution comparaison (si *f* est définie par morceaux) ; $\tau 2$: factorisation simplification substitution (si on a $\frac{0}{0}$ avec f est une fonction rationnelle) ; $\tau 3$: rationalisation factorisation simplification substitution ($\frac{0}{0}$ avec *f* est une fonction irrationnelle) ; $\tau 4$: changement de variable réduction substitution.	Définition de la limite, propriétés de fonctions continues et calcul littéral.
T_4' : montrer que ℓ n'est pas la limite de *f* en a	La négation de la définition formelle de la limite (on montre l'existence d'un epsilon tel que pour tout delta positif l'implication est fausse)	La logique formelle, ordre dans$\mathbb{R}$, la topologie faible de $\mathbb{R}$
T_5 : déterminer la condition suffisante pour que $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$.	Transformer l'inéquation d'inconnue *f(x)* : $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$ en une inéquation d'inconnue *x* $\|x - a\| < \delta$ telle que delta est une fonction d'epsilon	Propriétés de la valeur absolue, inéquation dans $\mathbb{R}$
T_6 : démontrer que *f* admet une limite infinie en a	Application de la définition formelle de la limite. On transforme l'inéquation $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$ en une inéquation d'inconnue x $\|x - a\| < \delta$ telle que delta est une fonction d'epsilon	Définition de la limite et l'ordre dans $\mathbb{R}$.
T_7 : démontrer que si ℓ est la limite de *f* en a et ℓ' celle de g en a alors $\ell + \ell'$ est la limite de $f+g$ en a	Définition formelle de la limite : on choisit epsilon tel que ……	Définition de la limite et l'ordre dans$\mathbb{R}$. Propriétés de la valeur absolue, le corps des réels et ses propriétés
T_8 : démontrer que si ℓ est la limite de *f* en a et ℓ' celle de g en a alors $\ell.\ell'$ est la limite de $f{\times}g$ en a	Application de la définition formelle de la limite	Définition de la limite et l'ordre dans $\mathbb{R}$
T_9: démontrer que si ℓ est la limite de *f* en a et $\ell'{\neq}0$ celle de g en a alors $\frac{\ell}{\ell'}$est la limite de $\frac{f}{g}$ en a.	Application de la définition formelle de la limite	Définition de la limite et l'ordre dans $\mathbb{R}$

Nous présentons dans le tableau 3, les types de tâches mettant en jeu les représentations graphiques et le cas où la valeur de a est l´infini.

Tableau 6.

Types de tâches mettant en jeu les représentations graphiques et le cas où la valeur de a est l´infini (Doumbia, 2020, p.127)

Types de tâches	**Technique**	**Technologie/Théorie**
Représentation graphique		
T_{10} : conjecturer la limite de *f* définie par sa représentation graphique quand *x* tend vers *a*	Lecture graphique, détermination graphique l'image réciproque d'un intervalle. Montrer que l'image réciproque de tout intervalle de centre et de rayon □ est un intervalle de centre a éventuellement privé de {a}	Projection orthogonale, géométrie plane. Si *a* est infini
Si *a* est infini		
T_{11} : montrer que est la limite de *f* en infini	Application de la définition formelle de la limite : Pour cela, considérer un réel e strictement positif. Écrire que $\|f(x) - l\| < e$ et travailler cette inéquation de façon à obtenir un encadrement de $x - a$; en déduire que l'on peut prendre pour valeur de delta le maximum des valeurs absolues des bornes de l'encadrement de $x - a$ obtenu. Puis considérer que delta est le maximum des valeurs absolues des bornes de l'encadrement de $x - a$ obtenu précédemment. Et montrer qu'alors $\|f(x) - l\| < e$.	Définition formelle et ordre dans ., corps des réels et ses propriétés
T_{12} : démontrer *f* admet une limite infinie en infini	Application de la définition formelle de la limite	Définition de la limite et l'ordre dans

On peut regrouper les types de tâches suivant la technique qui permet de les réaliser. Dans ce cas nous aurons les regroupements suivants :

Par rapport aux techniques qui mettent en jeu la substitution, la factorisation, la simplification substitution, la rationalisation et/ou le changement de variable, nous avons les types de tâches T_1, T_2.

En ce qui concerne la technique qui s´appuie sur la définition formelle, nous retenons les types de tâches suivantes : $T_{1'}$, $T_{2'}$, T_4, T_5, T_6, T_7, T_9, T_{10}.

Les types de tâches T_3 et T_8 font appel respectivement aux techniques « transformer » et « lecture graphique ».

Dans le cas de *f* non continue en *a*, nous pouvons choisir *f* de telle sorte que la limite soit sous l'une des formes indéterminées 0/0 ou 0×∞, comme dans les exemples suivants : $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ et a=2 ; $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ et a=1 ; $f(x) = \begin{cases} -x-2, x<0 \\ 3-x, x \geq 0 \end{cases}$ et a=0 ; $f(x)=\frac{x-2}{(2-x)^2}$ et a=2.

Analyse synthétique des dimensions économico-institutionnelle et écologique

En s´appuyant sur le MER construit, Doumbia (2020) a analysé les programmes, des savoir-faire et des manuels du Lycée (niveaux 11ème et 12ème) et du début de l'université par rapport à la notion de limite au Mali. Sans entrer dans les détails de cette analyse (compte de l´espace réservé à ce texte), nous présentons quelques résultats de cette analyse.

Cette analyse nous a permis en ce qui concerne l´organisations mathématiques autour de la notion de limite dans les manuels, d´identifier les types de tâches suivantes : « calculer lorsqu'elle existe la limite (finie ou non) en x_0 (x_0 fini ou non) d'une fonction qui est une combinaison de fonction de références » et « montrer que la limite lorsque x tend vers x_0 de $g(x)$ égale à ℓ en établissant une majoration de type : $|g(x_0+h)\text{-}\ell| \leq k^*|j(h)|$ avec k élément de $\mathbb{R}^+$ et j est l'une des fonctions de références et ℓ est un réel ».

Pour accomplir les tâches de ces types de tâches, les techniques sont basées pour la plupart sur les procédés suivants :

a) remplacer dans $f(x)$ x par x_0 ;
b) si $f(x_0)$ n'est pas une forme indéterminée « 0/0 ; $+\infty-\infty$; $0\times\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$ » alors $f(x_0)$ est la limite ;
c) si non alors il faut lever l'indétermination par des techniques de calcul sur des expressions algébriques (factorisation, recherche de l'expression conjuguée, simplification) ;
d) si malgré ces opérations l'indétermination n'est pas levée on dit alors que f n'a pas de limite en x_0.
e) c)établir une majoration du type $|g(x_0+h)\text{-}\ell| \leq k^*|j(h)|$ avec k élément de $\mathbb{R}^+$ et j est l'une des fonctions de références et ℓ est un réel.

Le complexe technologique-théorie suivant justifie ces techniques :

a) Opérations algébriques sur les fonctions numériques d'une variable réelle (structures algébriques sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) (addition, multiplication, passage à l'inverse, racine, élévation au carré) ;
b) Règles de calculs sur les infiniment petits et les infiniment grands.

Si $k \in \mathbb{R}$ $\quad alors \begin{cases} k+\infty=+\infty \\ k-\infty=-\infty \end{cases}$; $\begin{cases} k\times\infty=\infty \\ \frac{k}{\infty}=0 \end{cases}$ $(+\infty)(-\infty)=-\infty;\ \infty+\infty=+\infty;\ -\infty-\infty=-\infty$

Par rapport à l´organisation didactique, nous identifions les choix suivants :

a) Choisir des fonctions de références de limite nulle en 0.

b) Faire émerger l'idée intuitive de la limite en mettant en interaction les cadres numériques, graphique et algébrique.

c) Rappeler les propriétés de la valeur absolue, minoration, majorer (encadrement d'une fonction), donner sans démonstration les propriétés et les techniques de calcul des limites.

Le modèle épistémologique dominant dans les manuels est l'algèbre des limites.

En ce qui concerne la *dimension économique, les* praxéologies construites autour du concept de limite en un point permettent de calculer des limites en un point ; mais elles nous éloignent du sens mathématique de la notion et elles sont inefficaces face à des types de tâches telles que : « Montrer que ℓ est la limite de f au point a » *et* « Montrer que ℓ n'est pas la limite de f au point a ». De plus, nous faisons l´hypothèse que les connaissances mobilisables dans ces praxéologies ne font pas évoluer les conceptions des apprenants. Dans cette OM, il manque le bloc Technologie-théorie (la justification des propriétés sur les limites). Elle ne permet pas l'acquisition du sens mathématique de la limite, mais elle permet de manipuler des techniques liées au concept de limite.

Il y a nécessité de revoir ces praxéologies pour permettre aux apprenants de construire de nouvelles connaissances et aussi faire évoluer leurs conceptions sur la notion de limite.

Du point de vue de la d**imension écologique**, nous constatons à travers cette étude que l'enseignement de la notion de limite a connu des modifications dans les textes des programmes et aussi dans les manuels. Son habitat est le niveau de la onzième année (au Mali) dans l'étude des fonctions numériques d'une variable réelle et les suites numériques, ses niches sont la définition de la dérivée, la détermination de la valeur exacte de la solution d'une équation, étude du sens de variation d'une fonction, condition de convergence d'une suite, le théorème fondamental de l'analyse.

La rupture entre l'algèbre et l'analyse, la rigueur mathématique, la topologie des limites, la valorisation des acquis de la logique et une entrée dans la logique des prédicats, l´actualisation et le réinvestissement des notions telles que la valeur absolue, la distance, les inéquations avec valeur absolue, convergence d'une suite, preuve et réfutation(montrer que ℓ est ou non la limite de f en a), le traitement des obstacles épistémologiques, elle est formalisatrice, unificatrice, généralisatrice et simplificatrice etc. constituent la **raison d´être du concept de limite**.

Cette analyse montre que l'enseignement de la notion de limite au Mali a connu des changements. Au départ, on enseignait les définitions intuitives et formelles en 1$^{\text{ère}}$ et en terminale avec des exercices d'application, ensuite c'est la définition intuitive de la notion qui est enseignée avec une pseudo formalisation avec des applications, ensuite c'est la définition intuitive de la notion qui est enseignée puis sa formalisation sans aucun exemple d'application et enfin on enseigne tout simplement la définition intuitive sans formalisation. Au début, on enseignait la continuité avant la notion de limite et celle-ci était définie à l'aide de la continuité, actuellement c'est dans l'ordre inverse et les types de tâches se limitent au calcul de limites en appliquant les règles et des propriétés sur les limites qui sont énoncées dans le cours sans démonstration.

On constate un abandon progressif de la définition formelle et son application au secondaire, cela suppose qu'elle va resurgir à un autre niveau, c'est-à-dire au supérieur. Nous constatons qu'au supérieur la définition formelle ressurgie, elle n'est pas construite et on donne quelques cas simples d'application pour la faire fonctionner (cas des fonctions affines). Ces cas n'illustrent pas la définition formelle dans toutes ses dimensions (contravariance, covariance et la dialectique entre les deux). C'est l'aspect contra-variant qui est mis en avant dans les cours de l'Université. Les obstacles tels que "la limite peut être atteinte ou non ", les obstacles logiques ne sont pas traités, en d'autres termes on ne fait pas une étude minutieuse de la limite pour faire évoluer les conceptions des étudiants. La limite est enseignée comme une notion dynamique et d'approximation, alors que c'est une notion statique dans sa définition mathématique précise.

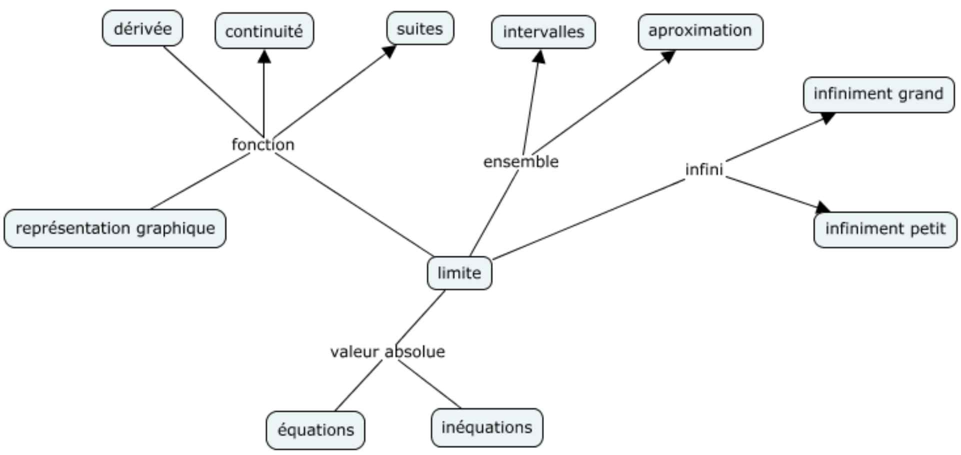

Figure 8.

Modèle Épistémologique de Référence extrait des manuels scolaires (Doumbia, 2020, p. 184)

Comme on peut le constater sur la Figure 8, la notion de limite n'est pas mise en relation avec tout son champ conceptuel, la logique et d´autres aspects importants manquent. Avec ce modèle épistémologique, les élèves apprennent à factoriser et simplifier les expressions des fonctions rationnelles, à décomposer en élément simples une fonction, rendre rationnelle le dénominateur et ou le numérateur d'une fonction irrationnelle, donner un sens à epsilon. Ils n'ont pas accès aux significations de delta, de l'implication, et les quantificateurs qui permettent de donner un sens à la définition formelle de la limite.

Conclusion

On peut construire un MER sur une notion en la mettant en relation avec son champ conceptuel, et à l'aide du quadruplet de Chevallard, on donne les types de tâches ce qui permet de savoir la raison d'être de la notion et d'accéder à sa signification. C'est un outil puissant pour l'analyse des manuels, le modèle didactique de référence est construit à partir du MER.

Dans notre cas, la construction d´un MER nous a permis de mettre la notion de limite en relation avec les notions qui permettent de lui donner du sens et de diriger nos analyses économico-institutionnelle et écologique. Ces analyses nous ont permis de mettre en évidence le Modèle Épistémologique de Référence Dominant (MED) dans les différentes institutions (les programmes et les manuels scolaires, etc.). Celui-ci a permis de montrer quelle est la signification donnée à la notion de limite dans ces différentes institutions (programmes, manuels scolaires etc.).

Pour la phase expérimentale (que nous ne décrivons pas ici), un Modèle Épistémologique Alternatif de Référence (MEAR) a été construit à partir de la confrontation entre le MED et le MER, pour réduire l'écart entre le savoir savant et le savoir enseigné. Ce travail nous a permis d'actualiser les connaissances connexes à la définition formelle de la limite telles que les activités graphiques, la résolution des inéquations avec valeur absolue, les intervalles (notion de voisinage), les quantificateurs universel et existentiel, l'introduction à la logique des prédicats. Lors de la phase expérimentale (cf. Doumbia, 2020) s´appuyant sur le MEAR, les élèves ont appris à appliquer la définition formelle, la construction d'une condition suffisante, mais aussi à résoudre une nouvelle tâche : montrer que ℓ est la limite de f en a.

Références

Artigue, M. Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994) », eds. Bruno Belhoste et al., Les sciences au lycée : un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger (Paris: Vuibert), 195-217, 1996a.

Artigue, M. « L'enseignement des débuts de l'analyse, problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques », J.A Dorta, Diaz et alii (eds), La Universidad de la Laguna, Tenerife, pp. 27-53, 1996b.

Artigue, M. Épistémologiques et didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage, vol. 10, nº 23, pp. 241-286, 1990.

Berrou, Jean Marc. Rigueur et intuition, les deux faces des mathématiques du 24 mai 2011. Site http://cours-mathématiques-nantes.com/rigueur-et-intuition-les-deux-faces-des-mathématiques/.

Bkouche, R. Des limites et de la continuité dans l'enseignement, *Repères-IREM* n°24, juillet 1996.

Bkouche, R. Épistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. For the learning of mathematics 17(1), 34-42, 1997.

Bosch, M. Gascón, J. La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier, C. Margolinas (Coord.) *Balises en Didactique des Mathématiques* Grenoble, France : La Pensée sauvage, pp. 107-122, 2005.

Bosch, M., Espinoza, L. & Gascon, J. (2003). El profesor como director de procesos de estu-dio: analisis de organ izaciones didacticas espontaneas. Recherches en Didactique des Ma-thématiques, 2003, 79-136, 2003.

Chaachoua, Hamid, Bittar, Marilena.   A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. Caminhos da Educação Matemática, Sergipe, 2019, v.9, n.1.

Chapelle DE D´Alembert 1ère édition, 1751

Chevallard, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique Premier congrès international de la TAD. L. Ruiz-Higueras, A. Estepa et F. Javier Garcia (Eds), Sociedad, Escuela y Mathematicas. Aportaciones de la Teoria Antropologica de la Didactico, Universidad de Jaen, 2007, pp. 705-746, 2007.

Cornu, Bernard. Apprentissage de la notion de limite – Conceptions et obstacles – Thèse de doctorat de Troisième Cycle de Mathématiques Pures – L'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1983.

Collection Dimathème de Lycée (1982) du programme de la Contre -Réforme des Mathématiques Modernes.

Doumbia, Cheick Oumar. Un modèle didactique de référence pour la construction des savoirs et l'actualisation des connaissances sur la notion de limite au Mali. Thèse de doctorat de l´Université Fédérale de Bahia, Brésil, 2020.

Hardy, N. Student 's Models of the Knowledge to be Learned about Limits in College Level Calculus Courses. The Influence of Routine Tasks and the Role Played By Institutional Norms (Thèse de doctorat non-publiée). Université Concordia, 2009.

Hitt, Fernando. Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: the concept of limit Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, , IREM de Strasbourg, Vol. 11 p. 251 – 267, 2006

JOB, P. Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques. Thèse. Université de Liège, Belgique, 2011.

Lecorre, T. Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite. Élaboration d'un cadre basé sur un modèle de rationalité pour l'accès aux objets mathématiques complexes. Thèse. Université Grenoble Alpes, 2016.

Legrand M. Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, Repère IREM, Vol. 10, pp. 123- 159, 1993.

Nicolas Grenier-Bolley http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/limite_ngb_annexe.pdf du 02/02/2019.

Le Thai Bao, Thien Trung. Etude didactique des relations entre enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement `calculatrice'. Une étude de cas au Viêt-nam. domain stic.educ. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français.

Œuvre philosophique de D'Alembert volume2, Éditeur Jean-François Bastien, 1805

Pointcarré, H. la logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. L'enseignement mathématique 1, pp. 157-162, 1899. Disponible sur le link :http//: doi.org/1051.69/seals-1226 consulté le 15/01/2019.

Schneider M. Un dosage délicat entre entre calculus et analyse mathématique au carrefour de plusieurs institutions 18è école d'été de didactique des mathématiques, Brest, 2015.

Sierpinska, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite- RDM vol. 6, 1, pp. 5-67, 1985.

Vergnaud G. La théorie des champs conceptuels. Recherche en Didactique des Mathématique vol. 10, n 23 pp. 133-170, 1990.