

Um estudo da gênese documental de professores para introduzir o ensino de função na educação básica considerando função de uma variável real com várias sentenças matemáticas.

A study of the documentational geneses of teachers for the teaching of piecewise defined function in basic education.

Un estudio de la génesis documental de docentes para introducir la enseñanza de la función en educación básica considerando la función definida por tramos.

Une étude des genèses documentaires des enseignants pour l'enseignement de fonctions par morceaux dans l'éducation de base.

Armênio Lannes Xavier Neto¹
PEAMAT – PUC / SP
Doutorado em Educação Matemática
<https://orcid.org/0000-0003-2183-5528>

Maria José Ferreira da Silva²
PUC / SP
Doutorado em Educação Matemática
<https://orcid.org/0000-0002-1249-8091>

Luc Trouche³
Institut Français de l'Éducation, École normale supérieure de Lyon, France
Doutorado em Educação Matemática
<https://orcid.org/0000-0001-5601-2930>

Resumo

O presente estudo é um recorte de uma sequência de situações elaboradas com o objetivo de investigar a gênese documental de professores para introduzir o conceito de função utilizando situações que envolvem função de uma variável real com várias sentenças matemáticas. O referencial teórico utilizado foi a Abordagem Documental do Didático e a metodologia foi embasada nos princípios da metodologia de investigação reflexiva. A gênese documental pôde ser observada por meio da mobilização e/ou criação de recursos e esquemas documentais durante a apropriação e aplicação de um dos recursos que integrou a sequência de situações profissionais.

¹ eltche@gmail.com

² zeze@pucsp.br

³ luc.trouche@ens-lyon.fr

Palavras-chave: Gênese documental, Função de uma variável real com várias sentenças matemáticas, Orquestração instrumental.

Abstract

The present study is a part of a sequence of situations elaborated with the objective of investigating the documentational geneses of teachers for the teaching piecewise defined function in basic education. The theoretical framework used was the Documentational Approach to Didactics and the methodology was based on the principles of reflective investigation methodology. The documentational geneses can be observed through the mobilization and/or creation of resources and documentational schemes during the appropriation and application of one of the resources that integrated the sequence of professional situations.

Keywords: Documentational genesis, Piecewise defined function, Instrumental orchestration.

Resumen

El presente estudio es un extracto de una secuencia de situaciones elaboradas con el objetivo de estudiar la génesis documental de docentes de la función en educación básica a partir de la función definida por tramos. El marco teórico utilizado fue el Enfoque Documental de la Didáctica y la metodología se basó en los principios de la metodología de investigación reflexiva. La génesis documental se puede observar a través de la movilización y/o creación de recursos y esquemas documentales durante la apropiación y aplicación de uno de los recursos que integraron la secuencia de situaciones profesionales.

Palabras clave: Documental génesis, Función definida por tramos, Orquestración instrumental.

Résumé

La présente étude est un extrait d'une séquence de situations créées dans le but d'enquêter sur la genèse documentaire des enseignants pour introduire le concept de fonction à partir de situations mettant en jeu la fonction par morceaux. Le cadre théorique utilisé était l'approche documentaire du didactique et la méthodologie était basée sur les principes de la méthodologie de recherche réflexive. La genèse documentaire pourrait être observée à travers la mobilisation

et/ou la création de ressources et de dispositifs documentaires lors de l'appropriation et de l'application d'une des ressources qui intégraient l'enchaînement des situations professionnelles.

Mots-clés : Genèse documentaire, Fonction par morceaux, Orchestration instrumentale.

Um estudo da gênese documental de professores para introduzir o ensino de função na educação básica considerando função de uma variável real com várias sentenças matemáticas.

O presente artigo apresenta um recorte da tese de doutorado do primeiro autor defendida no Programa de Educação Matemática da PUC/SP em 2021, que estudou, em um ambiente de formação continuada, o fenômeno da gênese documental de professores para função de uma variável real com várias sentenças matemáticas – FVSM como um recurso para introduzir a noção de função para estudantes do 1º ano do Ensino Médio - EM.

A escolha de FVSM foi amparada por estudos didáticos e por uma narrativa histórico-epistemológica que esclareceu o desenvolvimento da definição formal de função, o entendimento da FVSM e o imbricamento existente entre elas. Esclareceu ainda que a compreensão de FVSM foi dificultada epistemologicamente pela ideia de se apresentar função por meio de uma única expressão, de comportamento contínuo e regular.

Segundo Xavier Neto (2021), tais ingredientes fazem com que o professor reproduza para os estudantes a ideia de que toda função deva possuir essa orientação, o que acarretaria a formação de obstáculo de ordem didática no processo de aprendizagem.

Depreendeu-se com isso que a razão de ser da noção de função estaria relacionada à FVSM e que pudesse ser introduzida, na educação básica, por um problema envolvendo esse tipo de função. Esses argumentos serviram de base para a estruturação de uma formação continuada de professores de matemática para apresentar a possibilidade de introduzir o ensino de função, recorrendo à FVSM por intermédio do estudo da evolução da gênese documental de seus participantes.

Neste artigo, nos deteremos no estudo do desenvolvimento da gênese documental de dois professores participantes da formação – Gabriel e Lucas –, mediante o acompanhamento da evolução de sua documentação ao longo de um processo de apropriação e aplicação de um dos recursos que integrou uma sequência didática - SD para iniciar o ensino de função baseado em FVSM.

Para tanto, desenvolveu-se um percurso metodológico inspirado nos princípios da Metodologia de Investigação Reflexiva – MIR, integrada ao quadro teórico da Abordagem Documental do Didático – ADD, que constituiu a base teórica do presente estudo, cujos detalhes são apresentados a seguir.

Posteriormente, abordaremos à metodologia, os princípios da metodologia reflexiva e o percurso metodológico. A análise dos resultados é apresentada na sequência e, por último, são elencadas as considerações finais.

Abordagem documental do didático - ADD

A ADD foi introduzida por Gueudet e Trouche (2008, 2009) e, tempos depois, recebeu contribuições de Gueudet, Pepin e Trouche (2012) e Gueudet (2019). Ela se propõe a analisar o trabalho de professores na perspectiva de sua interação com os recursos, considerando essa relação como eminentemente criativa, uma vez que, para engendrar seu trabalho diário, o docente se relaciona com um conjunto de recursos que, por sua vez, são adaptados, revisados ou mesmo reorganizados de modo a possibilitar o planejamento e a implementação de sua atividade profissional.

Para a ADD a noção de recurso é ampla e inclui “tudo que pode realimentar o trabalho dos professores” (Trouche, Gueudet e Pepin, 2020, p. 3). Os recursos são categorizados como curriculares quando concebidos para fins de ensino como, por exemplo, um livro didático, ainda que haja outros sem essa finalidade, como um artigo de periódico.

Outro elemento fundamental para compreender a relação do professor com recursos está relacionado ao conceito de esquema que é central para a compreensão dos processos que integram a ADD.

De acordo com os autores um esquema possui quatro componentes:

- Objetivo da atividade (o que caracteriza a classe de situações);
- Regras de ação, de tomada de informação e de controle;
- Invariantes operatórios, que constituem a parte epistêmica do esquema. Existem dois tipos de invariantes operatórios (associados): teoremas-em-ato, que são as proposições consideradas como verdadeiras; e os conceitos-em-ato, que são conceitos considerados relevantes e
- Possibilidades de inferências, de adaptação à variedade de situações. (Trouche, Gueudet e Pepin, 2020, p. 5).

Durante sua atividade profissional, os professores enriquecem seus esquemas, incluindo neles novas regras de ações ou desenvolvendo novos esquemas. Proposto por Vergnaud (1998) o conceito de esquema “está fortemente ligado a outro, o de classe de situações, que designa, nesse contexto teórico, um conjunto de situações profissionais correspondentes a um mesmo objetivo da atividade” (Trouche, Gueudet e Pepin, 2020, p. 5). Já Messaoui (2020) considera como esquemas documentais todos aqueles que se referem diretamente ao trabalho documental.

O resultado da interação entre recursos e esquemas é denominado pela ADD como um documento que, entretanto, não é um processo tão simples e requer um longo período para seu desenvolvimento. Segundo Hammoud (2012, p. 46, tradução nossa), “são as regularidades observáveis da atividade do professor, ou seus usos, que condicionam a construção de um documento”, assim, nem sempre um determinado recurso utilizado para uma ação resultará em

um documento, pois o desenvolvimento de um documento continua ao longo de seu ciclo de existência sendo, portanto, difícil precisar em que estágio ele será efetivamente formado.

Para descrever os estágios de formação de um documento na esfera da ADD, três noções foram propostas: recurso mãe, recurso-filho e recurso-intermediário.

De acordo com Hammoud (2012, p. 50, tradução nossa), “recurso mãe é um conjunto de recursos iniciais que o professor mobiliza para preparar um determinado curso”, recurso-filho são aqueles recursos que o docente preparou e implementará em sua classe e que são produto dos recursos mãe, enquanto recurso-intermediário é aquele considerado uma versão não acabada do recurso-filho, isto é, um recurso ainda não totalmente finalizado.

Os documentos elaborados pelos professores estão organizados em um “sistema estruturado no qual os documentos estão correlacionados”, (Bastürk-Şahin, Tapan-Broutin e Trouche, 2021, p. 106, tradução nossa), enquanto os recursos estão organizados em um outro sistema, criado a partir daqueles que esses professores utilizam.

Uma faceta que acompanha a atividade profissional dos professores e que também se relaciona com os recursos é o trabalho coletivo. Segundo Trouche, Gueudet e Pepin (2020, p. 6), “quando os professores estão engajados em um trabalho documental coletivo, por exemplo em que o grupo prepara coletivamente suas aulas”, é possível que desenvolvam também um sistema de recursos compartilhado, mesmo que integrantes desse coletivo se relacionem com determinado recurso e desenvolvam esquemas diferentes.

O processo de formação de um documento, de acordo com Trouche, Gueudet e Pepin (2020, p.4), “desenvolvido por um determinado professor para um determinado objetivo” conhecido como gênese documental, é composto por duas dimensões: instrumentação e instrumentalização”. A primeira se dá quando os recursos instrumentam a ação didática do professor, enquanto a instrumentalização é caracterizada pelo processo de apropriação e modificação de recursos.

Todavia, as gêneses documentais não são processos que acontecem naturalmente. Para guiá-las e potencializar o desenvolvimento do sistema de recursos dos professores, encontramos amparo na teoria da orquestração instrumental – OI, que, de certa forma, foi integrada ao quadro teórico da ADD. Uma OI é caracterizada por ser “o arranjo sistemático e intencional de um ambiente, realizado por um agente, para efetivar uma determinada situação” (Trouche, 2005, p. 126, tradução nossa), que, na conjuntura docente, relaciona-se a um conjunto de situações profissionais correspondente a um objetivo da atividade. De acordo com Trouche (2005), planejar uma OI significa, nessa perspectiva, criar um ambiente fértil e munido de estrutura adequada de suporte às ações que nele serão desenvolvidas em um cenário de execução didática.

Segundo Drijvers (2012), em uma OI, é possível distinguir três elementos: uma configuração didática, um modo de execução e uma performance didática. A configuração didática é responsável pela gestão dos artefatos, sujeitos, tempo e tecnologias, em que ocorre a situação planejada; um modo de execução colocará em prática o arranjo projetado na configuração didática, incluindo detalhes de como a situação poderá ser trabalhada de maneira a favorecer a mobilização de esquemas e classes de situações, enquanto a performance didática se refere à verificação do desempenho atingido pelo planejamento da situação, ocasião em que será possível refletir acerca do sucesso da realização da OI.

A seguir serão apresentados conjuntamente os princípios da MIR e o percurso metodológico empregado no estudo.

Metodologia

As pesquisas desenvolvidas na esfera da ADD utilizam uma metodologia própria, Metodologia de Investigação Reflexiva – MIR – que foi elaborada com o fim específico de proporcionar o estudo da documentação dos professores. Como a utilizamos no estudo aqui apresentado passamos, no que segue, a detalhar seus princípios.

Os princípios da MIR

A MIR integra o quadro teórico da ADD e foi proposta em um primeiro momento por Gueudet e Trouche (2008). Posteriormente, recebeu novas contribuições de Trouche, Gueudet e Pepin (2012; 2020) até chegar a seu estágio atual com seus cinco princípios fundamentais:

- 1º) O princípio de uma ampla coleção de recursos materiais usados e produzidos durante o trabalho documental;
- 2º) O princípio do acompanhamento de longa duração; as gêneses são processos em desenvolvimento e os esquemas se desenvolvem em longos períodos;
- 3º) O princípio de acompanhamento em todos os lugares (dentro e fora da sala de aula). A sala de aula é um local importante onde o ensino planejado é implementado, uma implementação que requer adaptações, revisões e improvisações. No entanto, uma parte significativa do trabalho dos professores ocorre fora da sala de aula: (na escola, por exemplo, na sala dos professores, em casa ou em cursos de formação continuada);
- 4º) O princípio do acompanhamento reflexivo do trabalho documental, em que a visão do professor sobre seu trabalho é amplamente requisitada e
- 5º) O princípio da confrontação, do ponto de vista do professor com seu trabalho documental e a materialidade desse trabalho (materialidade proveniente, por exemplo,

da coleção de recursos materiais ou mesmo das práticas do professor em suas aulas). (Trouche, Gueudet e Pepin, 2020, p.8).

Considerando que a elaboração de documentos está imbricada ao desenvolvimento de gêneses e que sua evolução exige tempo para ser observada tivemos que fazer escolhas metodológicas para acompanhar o desenvolvimento das gêneses de Gabriel e Lucas, que serão detalhadas na próxima seção dedicada ao percurso metodológico da investigação.

O percurso metodológico

A fim de acompanhar a evolução da documentação de Gabriel e Lucas decidimos, inicialmente, descobrir a maneira como estava organizado seu sistema de recursos. Para isso, conforme sugerido em Gueudet e Trouche (s/n), decidimos organizar uma visita guiada a seus recursos, acompanhada de uma entrevista semiestruturada e do preenchimento de um diário de bordo.

Planejamos propor aos professores, durante a visita, a elaboração do esboço de sua Representação Esquemática do Sistema de Recursos – RESR, também empregada por Gueudet e Trouche (2010), com o intuito de compreender a estrutura e a hierarquia dos recursos existentes e fazê-los refletir sobre como eram usados para introduzir o ensino de função.

A confrontação dos dados obtidos na entrevista semiestruturada com aqueles provenientes do esboço da RESR nos trouxeram informações a respeito da maneira como o ensino de função era proposto por esses professores, enquanto o diário de bordo trouxe dados da natureza das atividades que foram desenvolvidas por eles, tanto dentro como fora da sala de aula.

Inspirados no modelo de formação de professores proposto por Lucena (2019), posteriormente fizemos um estudo das ações de Gabriel e Lucas, durante uma formação de oito professores da educação básica que ocorreu durante 30 horas em 2019. Observamos os dois professores, sujeitos deste estudo, ao longo de um processo de apropriação e aplicação para estudantes do 1º ano do EM de um dos recursos que integrou uma SD para introduzir o ensino de função a partir de FVSM em que analisamos a evolução de suas documentações ao longo da vivência de uma situação profissional intitulada de ‘apropriação’ viabilizada por uma OI. Finalmente, fizemos uma visita final aos dois professores a fim de avaliar o processo de gênese por meio da elaboração do Mapeamento Inferido do Sistema de Recursos (MISR) que foi baseado em contribuições propostas por Wang (2019).

Análise dos resultados

Na sequência apresentamos informações profissionais a respeito dos professores Gabriel e Lucas, seguidas da análise da visita guiada aos recursos e entrevista semiestruturada. Em seguida, analisamos a vivência da situação para apropriação e aplicação do recurso para introduzir o ensino de função a partir de FVSM e, por fim, discutimos as informações obtidas ao longo da visita final.

Os professores Gabriel e Lucas

Gabriel é formado em engenharia mecânica e possui dois anos de experiência como docente de matemática no EM. Em 2019, trabalhava em duas escolas privadas, em uma delas com Lucas, tendo uma carga horária total de 30 horas semanais. Lucas, por sua vez, é licenciado em matemática e possui um ano e meio de experiência como professor de matemática no EM em uma única escola privada e, em 2019, cumpria uma jornada de 25 horas semanais.

As visitas guiadas aos recursos de Gabriel e Lucas

Inicialmente, pensamos em realizar as visitas guiadas e as entrevistas semiestruturadas nas residências dos professores, por supor que nelas estariam os recursos utilizados para elaboração do trabalho documental. Entretanto, constatamos a existência de certa relutância por parte deles em realizá-la em sua residência, razão pela qual decidimos que fossem feitas nas escolas em que atuavam. Por conveniência, nomeamos como Escola A a instituição em que Gabriel e Lucas trabalhavam juntos e, como Escola B, o local em que apenas Gabriel exercia a docência.

Visita guiada aos recursos e entrevista com Gabriel

A visita, seguida de entrevista com Gabriel, ocorreu na biblioteca da escola A, no mês de agosto de 2019 e foi agendada antecipadamente por meio de troca de e-mails. Foi solicitado ao professor que trouxesse para o encontro informações detalhadas sobre os recursos que utilizava na preparação e execução de suas aulas a respeito de função. Solicitamos ainda acesso às notas do diário de bordo, mas o professor alegou não ter tido tempo para realizá-las. Em seguida, como planejado, o professor foi convidado a refletir acerca de seu trabalho documental e esboçar a RESR (Figura 1) com os recursos que costumava empregar para iniciar o ensino de função no 1º ano do EM.



Figura 1.

RESR elaborada por Gabriel (Xavier Neto, 2021, p.168)

Ele explicou que os números no esboço ordenavam suas ações e evidenciou uma hierarquia entre os recursos que utilizava para ensinar função. Segundo o professor, era a partir das dúvidas elaboradas pelos estudantes em sala de aula (número 2) que, normalmente, buscava exercícios (em videoaulas e em um caderno com exercícios resolvidos dos principais vestibulares - número 3) para elaborar suas aulas e para isso, na maioria das vezes utilizava lousa e giz (número 3).

Em face disso, elaboramos então, como hipótese, que ‘dúvidas elaboradas pelos estudantes em sala de aula’, ‘videoaulas’ e ‘caderno com exercícios resolvidos dos principais vestibulares’ representavam um grupamento de recursos-mãe para iniciar o ensino de função. Para comprová-la, solicitamos ao professor que narrasse como os empregava na preparação de suas aulas e ele nos informou que tinha por hábito introduzir o ensino de função enfatizando a necessidade do uso de uma notação, pelo fato de ter percebido, em anos anteriores, que uma ausência nessa abordagem acarretava lacunas na aprendizagem do tema. Daí deduziu-se que Gabriel desenvolveu um esquema documental ao longo de sua atividade docente para introduzir o ensino do conteúdo, e que o invariante operatório ‘é importante para os estudantes compreender notação de função’ era uma de suas características.

O professor também nos franqueou acesso a uma ficha, recentemente elaborada por ele, que continha um roteiro com orientações para os estudantes preencherem uma tabela com valores para “y” na expressão $y = x + 1$, solicitando que efetuassem seu preenchimento de forma a explorar a notação e a construção de um gráfico com auxílio do *Geogebra*. Nos relatou que sua experiência no trabalho coletivo na escola A envolvia a participação no planejamento do ano letivo e na preparação de materiais para estudantes que apresentavam dificuldades de aprendizagem e, na escola C, apenas reuniões burocráticas. Tendo em vista as observações feitas ao longo da entrevista especulou-se que os recursos-mãe empregados por Gabriel para iniciar o ensino de função eram compostos a partir de dúvidas produzidas pelos

estudantes a respeito de notação, de videoaulas e exercícios provenientes de vestibulares e o roteiro mencionado pelo professor provavelmente representava um recurso-filho, devido a seu emprego recente.

Visita guiada aos recursos e entrevista com Lucas

A exemplo de Gabriel, a entrevista com o professor Lucas foi agendada antecipadamente por meio de troca de e-mails e ocorreu na biblioteca da escola A. No princípio da entrevista, constatou-se que o professor sequer havia iniciado o preenchimento do diário de bordo. Após solicitação específica, Lucas esboçou a RESR para iniciar o ensino de função (Figura 2), com suporte de um editor de textos instalado em seu *notebook* particular.

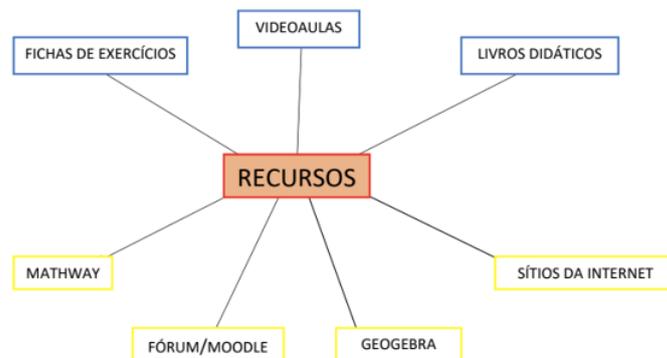


Figura 2.

RESR elaborada por Lucas (Xavier Neto, 2021, p.173)

A partir do esboço da RESR, supôs-se que os recursos identificados pela cor azul representavam aqueles utilizados na preparação de suas aulas – recursos-mãe – e os de cor amarela, para a sua execução. Porém, identificamos que as sugestões feitas por colegas mais experientes da escola A eram importantes para o professor, que parte das fichas de exercícios eram elaboradas com auxílio do *Powerpoint* e que, em um ambiente *Moodle* existente na escola Lucas costumava disponibilizar diversos arquivos contendo gráficos construídos com auxílio do *Geogebra* para que o processo de aprendizagem fosse aprimorado.

A influência dos colegas fez com que Lucas desenvolvesse uma estratégia própria para ensinar função que, segundo ele, vinha se repetindo sem alterações significativas. Convencido de que deveria facilitar o processo de compreensão do conteúdo pelos estudantes, optou por iniciar o ensino de função com um exercício proveniente do cotidiano, relacionado a corrida de táxi. Tais afirmações nos permitiram supor que o invariante ‘facilitar o processo de compreensão por meio de um exercício simples’ era um vestígio da existência de um esquema documental desenvolvido pelo professor ao longo de sua atividade docente para a classe de situações ‘introduzir o ensino de função’.

Em razão da confrontação das informações obtidas durante a entrevista semiestruturada e do esboço da RESR, foi possível compreender que Lucas privilegiava a introdução ao ensino de função empregando, essencialmente, a função afim com uma única sentença, e o fato dessa estratégia se repetir na sua atividade docente poderia indicar a presença de um documento. Deduziu-se que o trabalho coletivo desenvolvido com os colegas de área, as fichas com problemas, os livros didáticos e as videoaulas constituíam seus recursos-mãe, enquanto arquivos do *Geogebra* disponibilizados no ambiente *Moodle* voltado ao aprimoramento da aprendizagem de função constituía um recurso-filho.

Consideramos que as visitas guiadas aos dois professores e as entrevistas semiestruturadas, realizadas nas escolas em que exerciam a docência, nos possibilitou compreender que as escolhas feitas por eles para introduzir o ensino de função recaíam no uso de funções afim com uma única sentença. Entendemos que a utilização do diário de bordo como ferramenta para acompanhar a documentação dentro e fora da sala de aula não se mostrou eficaz, possivelmente por razões de ordem cultural dos dois professores, desacostumados a produzir relatos minuciosos a respeito de sua prática profissional. A simples produção da RESR não foi suficiente para compreender a estrutura e a hierarquia dos sistemas de recursos dos professores, sendo necessário a confrontação de seu esboço com os dados obtidos ao longo da visita guiada e da entrevista. Finalmente, a respeito dos tipos de recursos curriculares utilizados pelos professores para introduzir o ensino de função, percebemos a existência de uma combinação de vários deles e não o predomínio de um determinado tipo em detrimento de outros.

No que se segue, analisaremos os dados obtidos pela vivência de uma situação profissional intitulada de apropriação.

A situação de apropriação

A situação de apropriação consistiu em propor, intencionalmente, a resolução de uma atividade para introduzir o ensino de função a partir de FVSM que integrou a classe de situações ‘resolver e avaliar se uma atividade é apropriada para introduzir o ensino de função’.

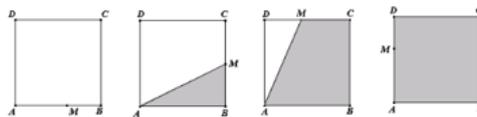
Para implementar a situação, elaboramos uma OI cuja configuração didática foi planejada considerando que dois encontros presenciais com duração de três horas cada um seriam suficientes para o processo de apropriação do recurso. No primeiro, pensamos que o tempo poderia ser utilizado para debater a atividade e, na segunda, planejar sua aplicação em classes de estudantes do 1º ano do EM onde Gabriel e Lucas exerciam a docência.

Outro elemento da configuração didática, o recurso (Figura 3) para introduzir o ensino de função recorrendo a FVSM, foi composto por atividades concebidas originalmente por Almouloud (2016), “inseridas em um quadro geométrico bem conhecido dos estudantes e composta por funções afim” (Xavier Neto, 2021, p. 200).

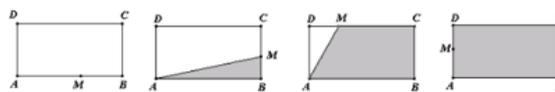
1. Um ponto M se desloca sobre o lado de um quadrado $ABCD$ cujos lados meçam 4 u.m. (fig. Abaixo). Chamaremos x a medida em cm do comprimento do trajeto de A a M .

a. Dê a área $a(x)$ da parte colorida, segundo a posição do ponto M .

b. Represente graficamente a aplicação correspondente.



2. Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão, sendo $ABCD$ um retângulo de comprimento 4 e largura 2 (fig. Abaixo).



3. Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão, $ABCD$ sendo, agora, um losango, cujos lados medem 4 u.m. e o ângulo \hat{C} mede 60° .

Figura 3.

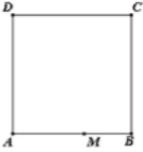
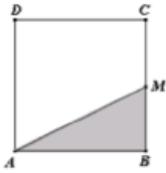
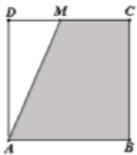
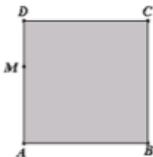
Recurso para introduzir o ensino de função a partir de FVSM, Almouloud (2016, p. 135)

Durante o processo de apropriação e planejamento de aplicação das atividades existentes no recurso, esperou-se que Lucas e Gabriel pudessem mobilizar esquemas documentais e conhecimentos matemáticos que permitissem o acompanhamento de sua documentação. Entendemos também que as atividades existentes no recurso poderiam provocar reflexões acerca do protagonismo dos estudantes no processo de aprendizagem e, por conseguinte, o acompanhamento do trabalho documental, uma vez que as atividades existentes suscitam “questões do tipo: o que os alunos vão fazer? o trabalho será desenvolvido em grupo? que instruções fornecer? que conhecimentos poderão ser socializados?” (Almouloud, 2016, p. 129).

Algumas soluções matemáticas das atividades poderiam ser propostas, mas esperou-se que os professores avaliassem possíveis dificuldades a serem encontradas pelos estudantes do 1º ano do EM no deslocamento do ponto M pela figura plana do quadrado como a apresentada na Tabela 1.

Tabela 1.

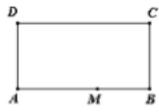
Solução esperada para a atividade 1 – questão a, adaptado de (Xavier Neto, 2016)

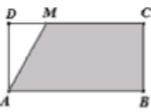
| Deslocamento do ponto M | Ação esperada |
|---|---|
|  | Identificar que não haverá área formada enquanto M deslocar-se pelo lado \overline{AB} . Isso ocorre quando $0 \leq x \leq 4$. Logo, a medida da área em relação a x será: $a(x) = 0$ se $0 \leq x \leq 4$. |
|  | Compreender que enquanto o ponto M pertencer ao lado \overline{BC} , $x = AB + BM$ e que a área procurada é a do triângulo retângulo ABM, ou seja $A_{\Delta ABM} = \frac{AB \times BM}{2}$. Portanto, a medida dessa área em relação a x será: $a(x) = 2x - 8$ se $4 \leq x \leq 8$. |
|  | Entender que quando o ponto M percorrer o lado \overline{CD} , observar que seja identificada a figura do trapézio ABCM, cuja área é determinada por $A_T = \left(\frac{AB+CM}{2}\right) \times BC$. Logo, como, $CM = x - 8$, a medida dessa área em relação a x será: $a(x) = 2x - 8$ se $8 \leq x \leq 12$. |
|  | Quando o ponto M percorrer o lado \overline{DA} , espera-se que percebam que a área do quadrado foi varrida. Assim, a última área em relação a x será: $a(x) = 16$ se $12 \leq x \leq 16$. |

Com relação à atividade 2, pensou-se que se aproximasse daquela apresentada na Tabela 2.

Tabela 2.

Solução esperada para a atividade 2 – questão a, adaptado de (Xavier Neto, 2016)

| Deslocamento do ponto M | Ação esperada |
|---|--|
|  | Identificar que não haverá área formada enquanto M deslocar-se pelo lado \overline{AB} . Logo, a medida da área em relação a x será: $a(x) = 0$ se $0 \leq x \leq 4$. |
|  | Compreender que enquanto o ponto M percorrer o lado \overline{BC} , a área considerada é a do triângulo retângulo ABM, cuja medida é dada por: $A_{\Delta ABM} = \frac{AB \times BM}{2}$. Logo, a medida dessa área em relação a x será: $a(x) = 2x - 8$ se $4 \leq x \leq 6$. |

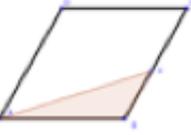
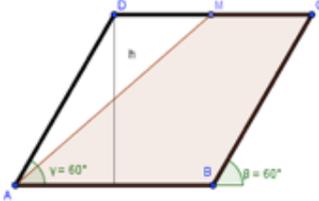
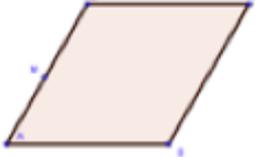
| | |
|---|--|
|  | <p>Espera-se que quando o ponto M percorrer o lado \overline{CD}, percebam o trapézio $ABCM$, cuja medida de área pode ser expressa por: $A_T = \left(\frac{AB+CM}{2}\right) \times BC$.</p> <p>Portanto, aguarda-se que observem a medida dessa área em relação a x será: $a(x) = x - 6$ se $6 \leq x \leq 10$.</p> |
|  | <p>Quando o ponto M percorre o lado \overline{DA}, espera-se que seja percebido que a área do quadrado já foi varrida. Assim sendo, a última medida de área será: $a(x) = 8$ se $10 \leq x \leq 12$.</p> |

Nas duas primeiras atividades, esperou-se que os professores identificassem a necessidade de os estudantes mobilizarem conhecimentos a respeito de segmento de reta; grandeza, proporcionalidade, perímetro e área de figuras planas; estruturas aditivas e multiplicativas de números reais e de expressões algébricas; e que debatessem estratégias para que superassem eventuais lacunas, de maneira a elaborar a lei de formação e o gráfico solicitados.

Em relação à questão da atividade 3, a solução matemática encontrada na Tabela 3 foi a que entendemos a mais provável.

Tabela 3.

Solução esperada para a atividade 3 – questão a, adaptado de (Xavier Neto, 2016)

| Deslocamento do ponto M | Ação esperada |
|---|---|
|  | <p>Enquanto M pertencer ao lado \overline{AB}, não haverá área, e isso ocorre quando: $a(x) = 0$, se $0 \leq x \leq 4$.</p> |
|  | <p>Quando M percorrer o lado \overline{BC}, a área total será representada por um triângulo com um dos ângulos iguais a 120°, cuja área será igual a $\frac{1}{2} \overline{AB} \overline{BM} \text{ sen } 120$. Nesse sentido, é possível encontrar a seguinte relação: $a(x) = \sqrt{3} (x - 4)$ se $4 < x \leq 8$.</p> |
|  | <p>Enquanto M estiver percorrendo o lado \overline{CD}, o segmento \overline{AM} varre uma área (que pode ser representada por um trapézio), que pode ser calculada pela diferença entre a medida da área do losango e a medida da área do triângulo ADM. Com isso, a expressão para a área neste trajeto é dada pela função: $a(x) = \sqrt{3} (x - 4)$ se $8 < x < 12$.</p> |
|  | <p>Na última etapa, no trecho \overline{AD}, percebe-se que o segmento \overline{AM} varre a área total do losango e assim é possível determiná-la pela expressão $2\left(\frac{\overline{AB} \overline{BC} \text{ sen } 120}{2}\right)$. Nela, dentro dos parênteses, é calculada a área da metade do losango; por esse motivo multiplica-se por dois, o que garante como resultado uma área igual a:</p> |

$$a(x) = 8\sqrt{3} \text{ se } 12 \leq x \leq 16.$$

Da mesma maneira, pensamos que durante a discussão das prováveis dificuldades a serem encontradas pelos estudantes, ao resolvê-la, os professores identificariam os mesmos conhecimentos das duas primeiras atividades, além de conhecimentos de relações trigonométricas, bem como mencionassem a utilização de recursos tecnológicos. Para a execução da situação, planejamos reservar, no primeiro encontro presencial, 120 minutos, e para a resolução matemática da atividade, destinamos 90 minutos. O restante do tempo programamos para a troca de impressões de eventuais dificuldades que os estudantes encontrassem. No segundo encontro, reservamos todo o tempo para a preparação da aplicação das atividades junto às classes de estudantes dos professores Gabriel e Lucas.

A coleta dos dados por meio de vídeo e áudio foi organizada por um profissional de comunicação e um observador que preencheu um protocolo de observação que tinha por objetivo ajudar a identificar esquemas documentais mobilizados pelos professores, bem como recursos mobilizados e/ou produzidos por eles. Entendemos que a confrontação dos resultados obtidos por esses instrumentos seria suficiente para identificar esquemas documentais ao longo do processo de apropriação do recurso para introduzir o ensino de função recorrendo à FVSM.

Com relação a performance didática alcançado pela OI-2, observamos que os professores não tiveram dificuldades com a resolução matemática da atividade, e que as questões principais ocorreram em virtude de eventuais dificuldades que os estudantes poderiam enfrentar ao resolvê-las. Em uma discussão Gabriel alegou que os estudantes apresentariam dúvidas quanto à sua compreensão, pois lhe pareceu que o enunciado era confuso. Entendemos que a provável inquietação causada pelo enunciado não tenha ocorrido devido ao texto original da atividade, mas pelo fato das atividades incitarem um protagonismo discente, até então não experimentado pelos professores.

A respeito da questão que envolvia a construção dos subdomínios das sentenças da função, observamos que a discussão proporcionou indicativos de apropriação da atividade como artifício para introduzir o ensino de função a partir da FVSM. Tal apropriação nos foi revelada pelas ações, falas e anotações no protocolo de observação de Lucas e Gabriel, quando se referiram ao deslocamento do ponto M no lado \overline{CD} da figura plana do quadrado e a

medida da área que deveria ser obtida por meio do cálculo da medida da área do trapézio. A transcrição da fala que segue nos pareceu evidenciar os argumentos apresentados por Gabriel:

No intervalo III, a área pedida é a de um trapézio, quando M está entre os pontos C e D, mas não está em C e nem em D. A base menor, que está variando, pode olhar aqui (*Gabriel mostra sua solução*)! Se M percorrer uma unidade de C, indo até D, teríamos $x = 9$, então a base menor seria 1. Ou seja, $9 - 8 = 1$. Se M percorrer três unidades até C, indo até D, teríamos $x = 11$, então a base menor seria 3. Ou seja, $11 - 8$. Portanto, a base menor é $x - 8$, com $8 < x < 12$. Nós precisamos ter isso em mente, porque claramente vai surgir essa dúvida... Pra explicar melhor, inclusive, acho bem legal usar o livro do 9º ano e até pegar um desses exercícios e resolver na lousa pra contextualizar, sabe ... (Xavier Neto, 2021, p. 223)

Percebe-se que, ao tentar antecipar o aparecimento de um erro na elaboração do intervalo do subdomínio por parte dos estudantes, Gabriel apresenta sinais de apropriação do recurso pertinente a essa parte da atividade. Entendemos que a transcrição evidencia a mobilização de um esquema documental, cujo invariante operatório contém a afirmação ‘claramente vai surgir essa dúvida’.

A capacidade do professor em externar seus argumentos nos mostrou que seus conhecimentos se encontravam em uma forma operativa, o que corrobora com observações elaboradas por Vergnaud (2013) de que um sujeito é capaz não apenas de resolver um determinado problema e, portanto, ser competente, mas de conseguir explicar seu processo de resolução aos colegas. A diferenciação entre as formas de conhecimento mencionadas por Vergnaud “também são adequadas para descrever práticas documentais” (Messaoui, 2020, p. 64, tradução nossa) o que reforça o fato de que quando os “professores estão engajados em um trabalho documental coletivo, eles também podem desenvolver um sistema de recursos compartilhado” (Trouche, Gueudet e Pepin, 2020, p.6).

Entendendo que os professores avançavam no sentido da apropriação do recurso para introduzir o ensino de função com base em FVSM e que poderiam mobilizá-lo juntamente com outros recursos de seus sistemas de recursos planejamos e organizamos sua aplicação junto a alunos das escolas em que Gabriel e Lucas eram docentes no ano de 2019. Durante esse processo os professores liderados por Lucas desenvolveram uma ferramenta no programa *Geogebra* (Figura 4) para simular o deslocamento do ponto M na figura plana de um quadrado.

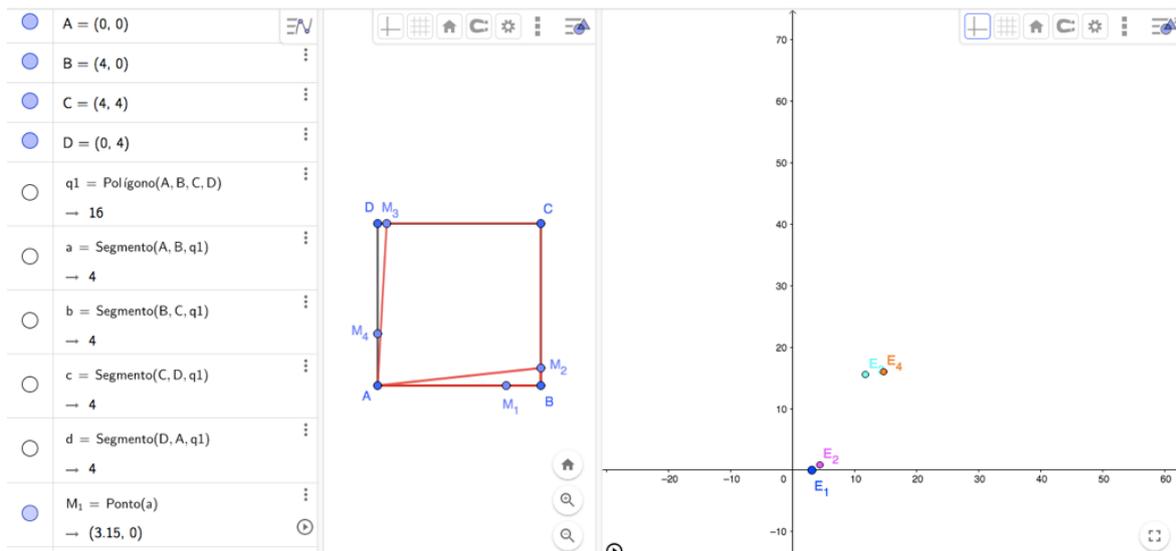


Figura 4.

Ferramenta desenvolvida com auxílio do controle deslizante, Xavier Neto (2021, p. 251)

Os professores entenderam, a princípio, que a ferramenta poderia ser útil para que os estudantes compreendessem a formação da área e sua relação com a FVSM, mas como não houve consenso quanto a seu uso ficou a cargo do professor que estivesse aplicando a atividade tal decisão. Por outro lado, suscitaram a importância da proposição aos estudantes de um treinamento básico a respeito da utilização do programa.

Entendemos que as ações tomadas por Lucas apontam para o desenvolvimento de um esquema documental, cujo invariante ‘poderia ser útil para que os estudantes compreendessem a formação da área e sua relação com a FVSM formada’ era um dos componentes promovidos pela articulação entre os recursos da aplicação do *Geogebra* e os exercícios existentes nas atividades. Quanto ao tempo e a forma com que as atividades poderiam ser aplicadas, decidiu-se fazê-lo em períodos do contraturno e na forma de oficinas, a fim de favorecer um ambiente de aprendizagem menos formal aos estudantes bem como mais tempo para realizar as atividades.

Aplicação das atividades

A aplicação das atividades ocorreu no final de outubro e início de novembro de 2019, e seu processo foi documentado por meio de áudio e vídeo e coube ao primeiro autor desempenhar essa tarefa. Buscou-se analisar os dados obtidos de maneira a continuar identificando, nas ações dos professores, sinais de apropriação do recurso para introduzir o ensino de função com base em FVSM, por intermédio da identificação de recursos e esquemas mobilizados e/ou desenvolvidos ao longo do processo de aplicação das atividades.

Lucas foi o primeiro a aplicar as atividades e contou com a participação de Gabriel exercendo a função de professor auxiliar. Doze estudantes, organizados em três grupos, participaram da aplicação e, segundo Lucas, tinham conhecimentos básicos de função, função afim e Teoria dos Conjuntos. A sala de aula, em que as oficinas ocorreram, dispunha de computador com acesso a internet, lousa convencional, *Datashow* e, caso entendesse necessário, Lucas poderia requisitar o uso de notebooks individuais. Durante a aplicação observamos, inicialmente, que Lucas mostrou incômodo em assumir o papel de mediador proposto pela atividade, o que nos pareceu evidente quando não compreendeu o momento de fornecer (ou não) orientações aos estudantes e quando um dos grupos (Figura 5) apresentou dificuldades em relação ao deslocamento do ponto M no lado \overline{BC} da figura plana do quadrado.

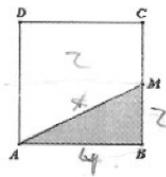


Figura 5.

Atividade 1, Solução do grupo 2 – Escola A (Lucas). Produção de Lucas, (Xavier Neto, 2021, p. 255)

Nesse momento, em vez de tentar elucidar as dúvidas dos estudantes, Lucas optou, por levá-los à resposta correta. Entendemos que possa não ter lembrado das discussões com os outros professores sobre o fato de o problema abordar as noções de grandeza e proporcionalidade. Especificamente em relação a esse grupo de estudantes, observamos que a atitude de Lucas potencializou a perda de sentido da aprendizagem o que corrobora com o fato de que se “os alunos não são convidados a pensar, mas simplesmente induzidos a executar o procedimento sugerido pelo professor” (Almouloud, 2016, p. 111), incrementa-se a descaracterização do saber a ser ensinado.

Dois outros fatos sobressaíram em nossa observação: o modo como Lucas procedeu quando um dos grupos de alunos resolveu a atividade 3 (ponto M deslocando-se pelos lados da representação de um losango) e em relação ao esboço dos gráficos da FVSM elaborados pelos estudantes. Sobre o deslocamento do ponto M ao longo da figura plana do losango, Lucas reparou que os estudantes apresentavam dificuldades em identificar a medida da área do triângulo ABM (Figura 6) e a medida do ângulo \hat{B} como sendo 120° .

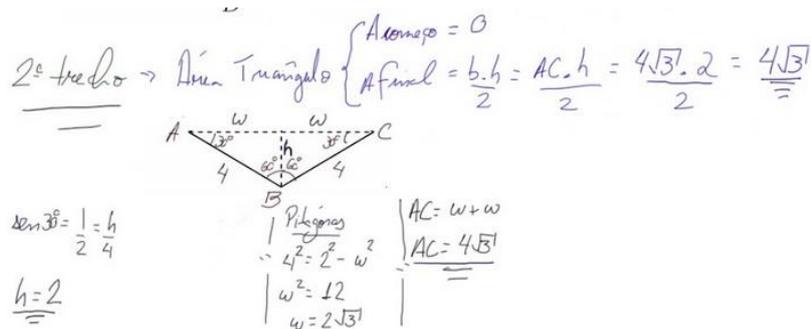


Figura 6.

Atividade 3a, Solução do grupo 2 – Escola A (Lucas). Produção de Lucas, (Xavier Neto, 2021, p. 257)

Em face dessa constatação, ele decidiu compartilhar com estudantes uma ficha que apresentava razões trigonométricas, abordadas no mesmo contexto do que estava sendo proposto naquele momento, elaborada por ele em anos anteriores, que contribuiu para que os integrantes desse grupo construíssem adequadamente a FVSM. Entendemos que a mobilização desse recurso possibilitou que os alunos recordassem a noção de seno de um ângulo e evidenciou um processo de instrumentalização, já que a mobilização de um recurso como aquele existente na atividade 3 acabou por influenciar seu ensino.

Quanto ao gráfico solicitado na atividade, ao observar que um dos grupos elaborava escalas pouco objetivas referentes ao descolamento do ponto M nos lados da representação de um quadrado, Lucas decidiu utilizar o programa *Geogebra* disponibilizado no computador da sala de aula, para evidenciar sua importância nos processos de construção e compreensão de um gráfico. Apesar da ação de Lucas ter despertado grande entusiasmo nos estudantes, ao perceber dificuldades técnicas para manuseio do programa, ele limitou-se a apontar diferenças entre a produção dos estudantes ao invés de oferecer um treinamento conforme havia sido planejado durante a organização da aplicação da atividade. Entendemos que a escolha de Lucas pode ter inibido a visualização de diferentes formas de representações das funções, cujo potencial no meio digital foi observado no estudo Geiger e Redmond (2013).

A aplicação da atividade feita por Gabriel aconteceu algumas semanas após a experiência com Lucas na Escola A e teve a participação de 8 estudantes do 1º ano do EM, que tiveram contato com a ideia de função, função linear e afim no 9º ano do EF2 e teoria dos conjuntos no transcorrer daquele ano letivo. No entanto, antes que a aplicação tivesse início Gabriel informou aos estudantes que seria necessária a realização de uma aula introdutória, para revisar a noção de função, trigonometria e geometria plana. Tal decisão foi motivada pelo fato de ele ter observado lacunas a respeito desses conteúdos ao longo da aplicação da atividade com o grupo de estudantes da Escola A. Entendemos que a ação do professor reforça

constatações feitas por Messaoui (2020) sobre a importância do trabalho documental coletivo para o desenvolvimento da atividade profissional do professor, além de trazer indicativos de um processo de instrumentalização.

Após desenvolver a revisão dos conteúdos, Gabriel aplicou as atividades junto aos estudantes conforme planejado e, em relação a evolução de sua documentação, dois acontecimentos nos pareceram relevantes. O primeiro relacionado a sua atitude frente ao desenrolar da aplicação da atividade ao propor reflexões matemáticas aos estudantes que apresentassem dúvidas identificado quando um estudante encontrou dificuldades na resolução do terceiro movimento (Figura 7) do ponto M (lado \overline{CD} da atividade 1a).

$$\begin{aligned} 1. \overline{AB} = 0 \leq x \leq 4 &\rightarrow A = 0 \\ \overline{BC} = 4 \leq x \leq 8 &\rightarrow A = b \cdot h = 4 \cdot (x - 4) = 2(x - 4) = 2x - 8 \\ \overline{CD} = 8 \leq x \leq 12 &\rightarrow A = (b + b) \cdot h = (4 + x - 6) \cdot 2 = x - 4 \\ \overline{DA} = 12 \leq x \leq 16 &\rightarrow A = 16 \end{aligned}$$

Figura 7.

Atividade 1a, Gabriel. Produção de Gabriel, (Xavier Neto, 2021, p. 265)

Gabriel solicitou ao aluno que refletisse a respeito da construção sugerindo uma consulta às notas tomadas durante a aula preparatória, em especial, sobre a figura do trapézio, pois os intervalos possivelmente poderiam não estar corretos. Após essa intervenção o estudante corrigiu a sentença correspondente ao movimento do ponto M na figura do trapézio, mas continuou a apresentar dúvidas quanto à formulação dos intervalos da sentença. A fim de dirimir a dúvida, o professor solicitou que outro grupo de estudantes, que havia feito a construção do exercício adequadamente, apresentasse sua resolução na lousa para os colegas que tinham dúvidas a respeito das sentenças, enquanto ele fazia o papel de mediador.

Corroborando com Trouche, Gueudet e Pepin (2020), entendemos que Gabriel elaborou uma nova classe de situações, tendo como objetivo aplicar as atividades e sua interatividade com os recursos mencionados na ação foram determinantes para seu desenvolvimento profissional, conduzindo-o a desenvolver capacidades de *design* frente os cenários didáticos que lhe foram apresentados.

O segundo acontecimento deu-se quando o professor formalizou a resolução de cada uma das atividades propostas no recurso, enfatizando a ideia de correspondência entre variáveis, sem reportar-se à ideia de conjunto. Depreendemos com isso que ocorreu uma alteração na

maneira de Gabriel introduzir o ensino de função, uma vez que não abordou a noção de notação, como fez durante a entrevista realizada na escola em que exercia a docência.

A visita final

A visita final foi realizada após algumas semanas da aplicação das atividades na PUC-SP e durou aproximadamente 60 minutos. Procuramos confrontar as opiniões dos professores sobre seu trabalho de documentação, a fim de compreender o impacto proporcionado pelos processos de apropriação e aplicação da atividade em seus sistemas de recursos, para que se tivesse clareza da evolução da documentação.

Quando foram questionados acerca da maneira como futuramente introduziriam o ensino de função no 1º ano do EM, Lucas disse que pretendia adaptar seus cursos a fim de evitar o ensino exclusivamente por funções afim com uma única sentença, mas não tinha claro ainda se o faria por meio das atividades que havia aplicado com seus estudantes na Escola A. Com isso, entendemos que seu MISR possivelmente poderia incluir alguns dos recursos mencionados durante a entrevista, não sendo possível afirmar se teriam *status* de recursos-mãe.

Gabriel, por sua vez, manifestou que a experiência vivenciada certamente o fez refletir sobre a maneira como vinha introduzindo o ensino de função, afirmando que não pretendia fazê-lo por meio da ênfase exclusiva de funções afim com uma única sentença e que procuraria integrar as atividades em suas estratégias didáticas para o ensino de função no 1º ano do EM, levando-nos a considerar que, futuramente, seu MISR poderia incluir as atividades como um novo recurso.

Considerações finais

Esta investigação constituiu do estudo de como ocorre a gênese documental em dois professores da educação básica durante o processo de apropriação e aplicação de um recurso para a iniciar o ensino de função a partir da FVSM.

A fim de alcançar esse propósito foi desenvolvido um dispositivo apoiado nos cinco princípios propostos pela metodologia de investigação reflexiva - MIR, de modo a acompanhar a evolução da documentação dos professores.

Os dados obtidos em visitas às escolas, em que os professores exerciam sua atividade profissional, permitiram compreender a constituição e a hierarquia de seus sistemas de recursos trazendo detalhes sobre recursos-mãe, recursos-filho e documentos que eles utilizavam para introduzir o ensino de função no 1º ano do EM.

O acompanhamento da evolução da documentação dos professores mostrou que Gabriel, aparentemente, mudou sua ênfase na noção de notação para introduzir o ensino de função desenvolvendo, ao longo da vivência das situações e aplicação das atividades, esquemas documentais que nos levaram a inferir que tenha se apropriado do recurso e alterado a maneira de ensinar o conteúdo. O fato de ter acompanhado a aplicação das atividades na escola de Lucas, antes de fazê-la em sua instituição, ofereceu elementos sobre a importância do trabalho coletivo, ainda que ele não tenha sido feito de maneira planejada.

Lucas, por seu turno, trouxe elementos que possibilitaram deduzir que estava se apropriando da maneira de introduzir o ensino de função recorrendo à FVSM. Isso pode ter ocorrido quando desenvolveu um esquema para articular ferramentas existentes no *Geogebra* para a construção de gráficos. O fato de a noção de documento estar atrelada ao seu uso, aliado à ideia de que a gênese documental é um fenômeno cujo acompanhamento se dá em longos períodos de observação, nos enseja não apenas a dar continuidade ao acompanhamento da documentação dos professores como estratégia para investigar com mais profundidade o fenômeno da gênese documental, como também elaborar mais evidências sobre o acerto (ou equívoco) da escolha de iniciar o ensino de função no 1º ano do EM recorrendo a FVSM.

Referências

- Almouloud, A. S. (2016). Modelos de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT. Florianópolis (SC)*. v. 11. n. 2. p. 109-141.
- Bastürk-Sahin, B.N., Tapan-Broutin, M.S. & Trouche, L. (2021) A Glance to Teachers' Work with Resources: Case of Olcay. *International Eletronic Journal of Education*. Volume 14, Issue 1, 105-118. <https://www.iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/1525> .
- Drijvers, P. (2012). Teacher Transforming Resources into Orchestrations. **In:** In L. Trouche, G. Gueudet, e B. Pepin (Eds.), *From text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*, pp. 265-281, Cham: Springer.
- Geiger, V. & Redmond, T. (2013). Designing mathematical modelling tasks in a technology rich secondary school context. In: C. Margolinas (Ed). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*. Oxford (pp. 447-489). https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/837488/filename/ICMI_STUDY_22_proceedings_2013-FINAL_V2.pdf .
- Gueudet, G. (2019). Studying Teachers' Documentation Work: Emergence of a Theoretical Approach. In L. Trouche, G. Gueudet, e B. Pepin (Eds.), *The 'resource' approach to Mathematics Education*. Springer series Advances in Mathematics Education (pp. 447-489). Cham : Springer – Vidéo de la conférence ayant donné naissance à ce chapitre, sous-titrée en français, à cette adresse http://video.ens-lyon.fr/ife/2018/2018-05-28_003_Ressources2018_Ghislaine_Gueudet_v1.fra.mp4.

- Gueudet, G., Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : Genèses, collectifs, communautés. *Éducation et didactique*. n. 2(3). p. 7-33. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342> .
- _____. Conceptions et usages de ressources pour et par les professeurs, développement associatif et développement professionnel. (2009). *Dossiers de l'ingénierie éducative*. n. 65. p. 76-80. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00459434>.
- _____. Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. (2010). In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.). *Ressources vives : Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. pp. 57-74. Lyon: PUR.
- _____. *Investigation réflexive des genèses documentaires des enseignants*. Questions méthodologiques. http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire/methodo_approchedoc_dec08.pdf .
- Gueudet, G., Pepin, B & Trouche, L. (Eds.). (2012). *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*. New York : Springer.
- Hammoud, R. (2012) *Le Travail collectif des professeurs en chimie comme levier pour la mise en œuvre de démarches d'investigation et le développement des connaissances professionnelles. Contribution au développement de l'approche documentaire du didactique*. Tese de doutorado. L'Université Claude Bernard Lyon 1 e L'Université Libanaise. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00762964>.
- Lucena, R. (2019). *Metaorquestração Instrumental: um modelo para repensar a formação de professoras de Matemática*. Tese de Doutorado. UFPE. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01988752>.
- Messaoui, A. (2020). *Développement de l'expertise documentaire des professeurs dans des situations de mutations de leur enseignement: le cas de professeurs de mathématiques et d'anglais*. Tese de Doutorado. L'École Normale Supérieure de Lyon. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02448482v1> .
- Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des mathématiques*. n. 25. p. 91-138.
- Trouche, L., Gueudet, G. & Pepin, B. (2020). Documentational Approach to Didactics. In S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of mathematics education*. (2nd edition, pp. 237-247). Cham: Springer.
- _____. A Abordagem Documental do Didático. (2020). *HAL*. Adaptação ao Português: Assis, C. E Rocha K. Revisor: Iglioni, S. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02664943v1/document> .
- Vergnaud, G. (1998). Toward a cognitive theory of practice. In A. Sierpiska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 227-241). Dordrecht : Kluwer.
- _____. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? (2013). *Infancia y Aprendizaje*, n. 36, p. 131-161.
- Wang, C. (2019). *An Investigation of mathematics teachers' documentation expertise and its development in collectives: two contrasting cases in China and France*. Tese de Doutorado. Université de Lyon.: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02275820> .

- Xavier Neto, A. L. (2016). *Um estudo da Gênese Instrumental para a função de uma variável real com várias sentenças*. Dissertação de Mestrado. PUC-SP.
- _____. (2021) *Um estudo da Gênese Documental de Professores para a função de uma variável real com várias sentenças*. Tese de Doutorado. PUC-SP.