EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p462-492

Rumo a um modelo epistemológico de referência compartilhado?

Towards a shared reference epistemological model?

¿Hacia un modelo epistemológico de referencia compartido?

Vers un modèle épistémologique de référence partagé ?

Ana Maria Veloso Nobre[1]
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Mestre em Educação Matemática
https://orcid.org/0000_0002_8151_2643

Vera Helena Giusti de Souza[2]
Universidade de São Paulo
Doutora em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0003-0705-0839

Resumo

Este texto foi elaborado para divulgar a proposta do Grupo de Estudo do Cálculo no Ensino Médio e no Ensino Superior, liderado pelos pesquisadores Dr. Pierre Job (ICHEBrussels Management School-Bélgica) e Dr. Luiz Márcio Santos Farias (UFBA-Brasil), cujo objetivo é criar um trabalho conjunto Brasil-Bélgica, em busca de um modelo epistemológico de referência para o ensino de cálculo e análise. Em 2023, no Seminário Estudos Integrados – Cálculo no Ensino Médio e no Superior, na PUC/SP, o Professor Job apresentou aspectos da pesquisa realizada na Bélgica, baseada em um modelo epistemológico de referência, na teoria das situações didáticas e na teoria antropológica do didático, com relação ao conceito de limite. Para motivar professores de cálculo a se engajarem nessa pesquisa, resumem-se os acontecimentos de dois dos três dias do seminário. Na primeira parte do texto, relatam-se as questões propostas no primeiro dia, seguidas por uma reflexão sobre algumas delas, questões essas que servem de modelo para o levantamento inicial de dificuldades que poderão dar resposta a três questões abertas: As premissas usadas na Bélgica são válidas no contexto brasileiro? É possível construir uma estrutura teórica comum que permita questionar o status de obstáculo epistemológico e a principal dificuldade encontrada no ensino dos conceitos de limite, derivada e integral? Que tipo de experimento é possível planejar em conjunto para testar

[1] anobre@pucsp.br
[2] vhgiusti@usp.br

esse modelo? Na segunda parte do texto, apresenta-se um resumo da exposição feita pelo Prof. Job, no segundo dia, sobre a pesquisa desenvolvida na Bélgica.

Palavras-chave: Epistemologia, Ensino, Limite, Modelo.

Abstract

This text was written to disseminate a proposal of the Study Group on Calculus in Secondary and Higher Education, headed by researchers Dr. Pierre Job (ICHEBrussels Management School-Belgium) and Dr. Luiz Márcio Santos Farias (UFBA-Brazil), whose objective is to create a joint work Brazil-Belgium in search of a reference epistemological model for calculus and analysis teaching. In 2023, at the Integrated Studies Seminar-Calculus in Secondary and Higher Education at PUC/SP, Professor Job presented aspects of the research carried out in Belgium based on a reference epistemological model, the theory of didactical situations and the anthropological theory of the didactic regarding the limit concept. To motivate calculus teachers to engage in this research, it summarizes the events of two of the three-day seminars. The first part reports the questions proposed on the first day, followed by a reflection on some. Those questions served as a model for the initial survey of difficulties that could provide answers to three open questions: Are the premises used in Belgium valid in the Brazilian context? Is it possible to build a shared theoretical framework that allows us to question the status of epistemological obstacles and the main difficulty encountered in teaching the concepts of limits, derivatives, and integrals? What kind of experiment can we plan to test this model? The second part summarizes Prof. Job's presentation on the second day about the research carried out in Belgium.

Keywords: Epistemology, Teaching, Limit, Model.

Resumen

Este texto fue escrito para divulgar la propuesta del Grupo de Estudios sobre Cálculo en la Enseñanza Media y Superior, liderado por los investigadores Dr. Pierre Job (ICHEBrussels Management School-Bélgica) y Dr. Luiz Márcio Santos Farias (UFBA-Brasil), cuyo objetivo es crear un trabajo conjunto Brasil-Bélgica en busca de un modelo epistemológico de referencia para la enseñanza del cálculo y del análisis. En 2023, en el Seminario de Estudios Integrados - Cálculo en la Enseñanza Media y Superior, en la PUC/SP, el profesor Job presentó aspectos del trabajo realizado en Bélgica, basado en un modelo epistemológico de referencia, en la teoría de las situaciones didácticas y en la teoría antropológica de lo didáctico, en relación al concepto de límite. Con el fin de motivar a los profesores de cálculo a comprometerse en esta investigación, se resumen los acontecimientos de dos de los tres días del seminario. En la primera parte del texto, se relatan las preguntas propuestas en el primer día, seguidas de una reflexión sobre algunas de ellas, que sirven de modelo para el relevamiento inicial de las dificultades que podrían dar respuesta a tres preguntas abiertas: ¿Las premisas utilizadas en Bélgica son válidas en el contexto brasileño?, ¿Es posible construir un marco teórico común que nos permita cuestionar el estatuto de los obstáculos epistemológicos y la principal dificultad encontrada en la enseñanza de los conceptos de límite, derivada e integral?, ¿Qué tipo de experimento podemos planear juntos para probar este modelo? La segunda parte del texto resume la presentación del Prof. Job en el segundo día sobre la investigación realizada en Bélgica.

Palabras clave: Epistemología, Enseñanza, Límite, Modelo.

Résumé

Ce texte a été préparé pour faire connaître la proposition du Groupe d'étude sur le Calcul dans l'enseignement secondaire et supérieur, dirigé par les chercheurs Dr. Pierre Job (ICHEBrussels Management School-Belgique) et Dr. Luiz Márcio Santos Farias (UFBA-Brésil), dont l'objectif est créer un travail commun entre Brésil et Belgique, à la recherche d'un modèle épistémologique de référence pour l'enseignement du calcul et de l'analyse. En 2023, lors du Séminaire d'études intégrées – Calcul dans l'enseignement secondaire et supérieur, à la PUC/SP, le professeur Job a présenté des aspects des travaux menés en Belgique, basés sur un Modèle Épistémologique de Référence, la Théorie des Situations Didactiques et la Théorie Anthropologique de Didactique, concernant la notion de limite. Pour motiver les enseignants de Calcul à s'engager dans cette recherche, les événements de deux des trois jours du séminaire sont résumés. Dans la première partie du texte sont rapportées les questions proposées le premier jour, suivies d'une réflexion sur certaines d'entre elles, questions qui servent de modèle à un premier état des lieux des difficultés pouvant apporter des réponses à trois questions ouvertes : ?Le les prémisses utilisées en Belgique sont-elles valables dans le contexte brésilien?, « Est-il possible de construire une structure théorique commune qui permette de s'interroger sur le statut d'un obstacle épistémologique et la principale difficulté rencontrée dans l'enseignement des concepts de limite, de dérivée et d'intégrale?, ?Quel type d'expérience peut-on prévoir pour tester ce modèle? Dans la deuxième partie du texte, est rapporté un résumé de la présentation faite par Prof. Job, dans le deuxième jour, sur la recherche menée en Belgique.

Mots-clés : Épistémologie, Enseignement, Limite, Modèle.

Rumo a um modelo epistemológico de referência compartilhado?

O Grupo de Estudos de Cálculo no Ensino Médio e Superior (GECEMS) foi criado em 2019 por iniciativa dos professores doutores Pierre Job[3] e Luiz Marcio Santos Farias[4], com o objetivo de criar um trabalho conjunto entre Brasil e Bélgica, em busca de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para o ensino de Cálculo e Análise. No Brasil, é formado por seis polos, quais sejam:

- Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Região Centro-Oeste, coordenado pela Prof. ª Dra. SôniaMaria Monteiro da Silva Burigato.
- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), Região Sudeste), coordenado pela Prof. ª Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori.
- Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Região Sul, coordenado pelo Prof. Dr. André Luis Trevisan.
- Universidade Federal do Pará (UFPA), Região Norte, coordenado pelo Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes.
- Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Região Nordeste 1, coordenado pela Prof. ª Drª. Jany Santos Souza Goulart.
- Universidade Federal da Bahia (UFBA), Região Nordeste 2, coordenado pelo Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey.

O *Seminário Estudos Integrados: Cálculo no Ensino Médio e no Superior*, realizado na PUC-SP em setembro de 2023, liderado pelo Prof. Dr. Pierre Job, teve por objetivo apresentar a pesquisa proposta pelo GECEMS. Esta busca um possível modelo (M) epistemológico (E) de referência (R) para o ensino de Cálculo e Análise, que seja comum ao Brasil e à Bélgica (MER), conforme Schneider (2019).

Este Seminário durou três dias, sendo um *Atelier* no primeiro (manhã e tarde), um seminário *on-line* no segundo (manhã) e duas oficinas no terceiro (manhã e tarde). Nos dois primeiros dias, o Prof. Job se restringiu a apresentar as ideias do GECEMS no caso do conceito de limite e, no terceiro, discorreu sobre a Engenharia Didática (Chevallard, 2011, p. 23), metodologia utilizada pelo grupo na busca de um modelo (M) comum, que sirva de referência (R) para o ensino de Cálculo e que se baseia na epistemologia (E) dos conceitos. As duas oficinas do último dia, sobre Engenharia Didática, bem como os pressupostos desta, não serão abordados neste texto.

[3] Prof. Pierre Job, do Institut catholique des Hautes Études commerciales (ICHEBrussels Management School)
[4] Prof. Luiz Marcio Santos Farias, da Universidade Federal da Bahia (UFBA)

O *Atelier*

Com o objetivo de incentivar a participação de professores de Cálculo nessa busca pelo MER, procuramos, neste texto, divulgar, sem procurar esgotar, as principais ideias discutidas nos dois primeiros dias do Seminário. Em relação *Atelier*, apresentamos um resumo das atividades desenvolvidas, acompanhadas de reflexões feitas por nós. No que se refere ao segundo dia, realizamos um resumo da exposição feita pelo Prof. Job.

As atividades propostas no *Atelier* (primeiro dia) tiveram por objetivo encaminhar o tema do seminário do segundo dia, “Rumo a um modelo epistemológico de referência (MER) compartilhado?”. Os participantes foram divididos em quatro grupos: G1, G2, G3 e G4. G1 e G2 formados por alunos de graduação da PUC-SP, G3, por professores de Cálculo e G4, por pesquisadores em Educação Matemática. É importante observar que, no caso da pesquisa proposta pelo GECEMS, o G1 e o G2 devem ser formados, no Brasil, por, respectivamente: professores de Matemática da Educação Básica e alunos de licenciatura em Matemática.

No caso da pesquisa, cada grupo tem por tarefa responder a um conjunto de questões relativas ao conceito de limite. Essas questões foram propostas por Job e servem como modelo para parte das análises preliminares de uma Engenharia Didática que se propõe a responder à pergunta título do Seminário (segundo dia).

Mais especificamente, o G1 é responsável por quatro questões (G11, G12, G13 e G14) e G2, por cinco (G21, G22, G23, G24 e G25). As respostas dadas a essas dúvidas deverão ser entregues ao G3 e ao G4, que irão posteriormente analisá-las. Por essa razão, todas essas indagações também são respondidas, com análise *a priori*, ou por G3 ou por G4.

O G3 é responsável por seis questões (G31, G32, G33, G34, G35 e G36), as duas primeiras são comuns a todos os grupos. A terceira é proposta também para G2; a quarta também para G1; a quinta só para G3 (uma demonstração para sequências); a sexta também para G1. As respostas dadas por G3 servirão de devolutiva para o G1 e/ou o G2.

O G4 responde a sete questões (G41, G42, G43, G44, G45, G46 e G47), as duas primeiras são comuns a todos os grupos; a terceira e a quarta são propostas também para G2; a quinta, a sexta e a sétima somente para G4 (demonstração do limite para função composta). As respostas dadas por G4 servirão de devolutiva para o G2.

No que segue, colocamos os enunciados das questões propostas a cada um dos grupos, G1, G2, G3 e G4, seguidas por uma reflexão, baseada em nosso entendimento e sem querer esgotar o assunto, sobre as duas questões comuns a todos os grupos e as demais do G4.

Questões do grupo G1 (quatro)

G11. Dê uma definição de limite de sequência

G12. Suponhamos que um colega tenha introduzido o conceito de limite real de uma função real adotando as seguintes linhas principais.

- Ele faz com que os estudantes calculem os valores de uma função f para valores cada vez mais próximos de 5.
- Ele mostra que as imagens $f(x)$ ficam cada vez mais próximas de 12 à medida que x se aproxima de 5.
- Ele então anuncia que em tais circunstâncias dizemos que 12 é o limite de $f(x)$ quando x tende a 5.
- Ele, com isso, generaliza introduzindo a seguinte definição:

"b é o limite de $f(x)$ quando x tende para a quando $f(x)$ pode ser tão próximo quanto se deseja de b quando x está suficientemente próximo de a".

Um estudante que seguiu este ensinamento desafia você e pede que você explique a citação seguinte, já que ele não compreendeu a noção de limite.

"Olá, professor, desculpe incomodá-lo, mas não entendo como você passa da expressão "quanto mais próximo x está de a, mais próximo $f(x)$ está de b" para "$f(x)$ está tão próximo de b quanto desejamos quando x está suficientemente próximo de a". Sinto que há uma conexão, mas está muito vaga na minha cabeça no momento. Você poderia me dar alguma explicação, por favor?"

G13. Aqui está um trecho de uma entrevista com um professor em que ele explica os motivos que o levaram a adotar a seguinte definição de limite de uma função.

- Acho que a definição de limite de uma função real em $\varepsilon - \delta$ é complicada para os estudantes entenderem.
- Para melhor transmitir isso, divido-a em duas partes.
- Eu defino "x tende a a", que noto: $x \to a$, por $\forall\varepsilon > 0$: $|x - a| < \varepsilon$
- Da mesma forma, defino "$f(x)$ tende a b", o que observo: $f(x) \to b$ e por $\forall\varepsilon > 0$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.
- Isso me permite dizer que o limite de $f(x)$ em a é b se e somente se $f(x) \to b$ quando $x \to a$.
- Dessa forma, os estudantes compreendem melhor do que com a definição clássica em $\varepsilon - \delta$.

Dada a questão, pede-se: escreva um texto explicando detalhadamente como você se posiciona em relação à prática de seu colega. Você concorda com a forma de proceder dele?

G14. Suponhamos que um colega introduziu a noção de limite finito de uma sequência de reais aos estudantes, dando a seguinte definição:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n \geq 1\ \forall \boldsymbol{m} > \boldsymbol{n} : |a_m - a| < \varepsilon\ (*^{\mathbf{1}})$$

Um estudante que seguiu esse ensinamento questiona você e não entende por que precisamos da parte $\forall m > n$ na definição. Parece-lhe que tomar

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon\ (*^{\mathbf{2}})$$

seria suficiente, porque essa expressão $(*^2)$ indica claramente que se pode "a aproximar-se o quanto quiser" que é, segundo ele, a ideia básica do limite de uma sequência.

Dada a questão, pede-se: o que $(*^1)$ significa em português? E $(*^2)$? O que distingue os dois? Escreva um texto que explique detalhadamente ao estudante sua posição. Você concorda com o argumento dele? Não podemos nos contentar com $(*^2)$ em vez de $(*^1)$?

Questões do grupo G2 (cinco)

G21. dar uma definição de limite de função;

G22. questão **G12**;

G23. Um colega usa a seguinte definição de limite:

"b é o limite de f em a quando podemos tornar $f(x)$ tão próximo quanto quisermos de b, tomando x suficientemente próximo de a" $(*^2)$

Os estudantes estão divididos e entendem essa definição de maneiras diferentes. Você encontrará abaixo as distintas interpretações debatidas. Por uma questão de clareza, eles são formulados em lógica de predicados.

- « $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in Dom(f)\ : |x-a| < \eta\ \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$ » (A)
- « $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in Dom(f)\ : 0 < |x-a| < \eta\ \Rightarrow\ |f(x)-b| < \varepsilon$ » (B)
- « $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in Dom(f)\ : |f(x)-b| < \varepsilon$ » (C)

Dada a questão, pede-se:

1. Complete a tabela a seguir indicando com uma cruz qual interpretação é equivalente a qual outra.

É equivalente a ↷	A	B	C	$(*^2)$
A				
B				
C				
$(*^2)$				

2. Escreva um texto para os estudantes que explique sua tabela e justifique quais interpretações são ou não equivalentes a quais outras e por quais motivos?

3. Que interpretações podem ser adotadas para esclarecer o significado de $(*^2)$?

G24. Tome uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Em que ordem você apresentará os diferentes casos de limites aos estudantes? Por quê?

a. $\lim_{x \to a} f(x) = b$

b. $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

c. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

d. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

G25. Aqui está um trecho de uma entrevista com um professor em que ele explica os motivos que o levaram a adotar a seguinte definição de limite de uma função.

Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Digo que b é o limite de f em a quando

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom(f) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - b| < \varepsilon$$

Meu raciocínio é o seguinte.

Parto da definição que é frequentemente adotada como limite:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom(f) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Noto que a condição $0 < |x - a|$ significa que x tende para a sem nunca o alcançar.

Mas, se x tende para a sem nunca o alcançar, $f(x)$ tenderá para b sem nunca o alcançar.

Esse é o próprio princípio de um limite.

Seria, portanto, mais coerente adicionar a condição $0 < |f(x) - b|$ para a definição de limite.

É esse raciocínio que me leva a adotar

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom(f) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - b| < \varepsilon$$

Dada a questão, pede-se: escreva um texto explicando detalhadamente como você se posiciona em relação à prática de seu colega. Você concorda com a definição dele?

Questões do grupo G3 (seis)

G31. a questão dada é a **G12** ou **G22**

G32. a questão dada é a **G11**

G33. a questão dada é a **G25**

G34. a questão dada é a **G14**

G35. Esta pergunta é continuação da questão anterior (**G14**) e é um convite à reflexão.

Aqui está uma afirmação precisa e uma tentativa de provar a propriedade.

¨Tomemos duas sequências de números reais (a_n) e (b_n) e dois números reais a e b tais que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Então,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b.$$

Tentativa de prova.

Considere $\varepsilon > 0$.

Existem i e j tais que, para todo $n \geq i$, $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e para todo $n \geq j$, $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. (E_1)

Tomando $n \geq \max\{i, j\}$, obtemos $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. (E_2)

Podemos, portanto, concluir que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$. (E_3)

1. Essa tentativa de prova está correta se adotarmos

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \geq 1\ \forall m > n : |a_m - a| < \varepsilon\ (*^1)$$

como definição de limite? Se sim, justifique as etapas (E_1), (E_2), (E_3). Caso contrário, explique com muita precisão qual(is) etapa(s) dessa demonstração é(são) falsa(s) e dê contraexemplo(s).

2. Essa tentativa de prova está correta se adotarmos

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon\ (*^2)$$

como definição de limite? Se sim, justifique as etapas (E_1), (E_2), (E_3). Caso contrário, explique com muita precisão qual(is) etapa(s) desta demonstração é(são) falsa(s) e dê contraexemplo(s).

3. Com base nas respostas dos pontos anteriores, você revisará a resposta dada à questão anterior e sua explicação dada ao estudante que queria adotar $(*^2)$ como definição do limite de uma sequência em vez de $(*^1)$? Detalhe sua resposta.

G36. a questão dada é a **G13**.

Questões do grupo G4 (sete)

G41. a questão dada é a **G12** ou **G22** ou **G31**

G42. a questão dada é a **G21**

G43. a questão dada é a **G24**

G44. a questão dada é a **G23**

G45. Considere a seguinte propriedade dos chamados limites de transitividade e uma tentativa de prova.

Propriedade.

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções e a, b, c três números reais tais que

- $Im(f) \subseteq Dom(g)$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$
- $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$

Então,

$$\lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c$$

Tentativa de prova.

Considere $\varepsilon > 0$.

Existe $\delta > 0\ \forall y \in Dom(g) : 0 < |y - b| < \delta \Rightarrow |g(y) - c| < \varepsilon.$ (E_1)

Existe $\gamma > 0\ \forall x \in Dom(f) : 0 < |x - a| < \gamma \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$ (E_2)

Então $\forall x \in Dom(f) : 0 < |x - a| < \gamma \Rightarrow |g(f(x)) - c| < \varepsilon$ (E_3)

Então $\lim\limits_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c.$ (E_4)

Dada a questão, pede-se: essa tentativa de prova está correta se adotarmos a seguinte definição de b como o limite da função f em a?

- $a \in adh(dom(f) \setminus \{a\})$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom(f) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\ (*^1)$

Se sim, justifique os passos (E_1), (E_2), (E_3), (E_4). Caso contrário, explique com muita precisão quais etapas dessa demonstração são falsas e dê um contraexemplo.

G46. a questão dada é igual à questão **G45**

Dada a questão, pede-se: com base na análise da tentativa de prova, explique qual hipótese adicionar em f para salvar a tentativa de prova e garantir sua legitimidade ao usar a seguinte definição de limite.

- $a \in adh(dom(f) \setminus \{a\})$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom(f) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\ (*^1)$

As tarefas são: fazer uma análise *a priori* da questão dada; escrever uma resposta que sirva de modelo/correção para os estudantes.

G47. a questão dada é igual às questões **G45** e **G46**

Dada a questão, pede-se:

1. Mostre que, adicionando a hipótese "g é contínua em $f(a)$" à propriedade da transitividade, esta se torna verdadeira e que é possível adaptar a prova para que fique correta.

2. Explique com muita precisão as diferenças entre a prova que usa a hipótese de continuidade e a da questão anterior que usou a hipótese "Existe um intervalo aberto I tal que $a \in I$ e $\forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) \neq b$".

3. Explique qual você acha que é o propósito das perguntas do grupo G4. Você aprendeu algo novo? Sim, não? Se sim, o quê?

Seguem nossas reflexões sobre as duas questões comuns e as demais do G4. Escolhemos focar nesse grupo, pois os participantes são, em tese, os mais habilitados a realizarem a análise *a priori* das questões e é suposto que analisarão as respostas dos participantes dos grupos G1 e G2 e dar a devolutiva para o grupo G2, todas tarefas imprescindíveis para aqueles que se interessarem pela pesquisa do GECEMS.

Reflexões sobre as questões comuns

Uma das questões comuns aos grupos pede a definição de limite de sequência (G1 e G3) ou de limite de função (G2 e G4). As respostas a essa questão permitem observar se os participantes dos grupos optam por uma abordagem formal ou pragmática e como a justificam. Por exemplo, se um participante opta pela definição em palavras "b é o limite de f(x) quando x tende para a quando f(x) pode ser tão próximo quanto se deseja de b quando x está suficientemente próximo de a", precisa estar atento à interpretação de "suficientemente próximo" ou "pode ser tão próximo quanto se deseja", frases que dependem de um acordo prévio (só conhecido pelo professor) e vão se refletir na falta de autonomia do estudante. Pode-se dizer que a+5, a+4, a+3... ou a-5, a-3, a-1...satisfazem qualquer uma das frases citadas, mas não são valores que o professor quer. Outro cuidado com o texto em palavras é com a interpretação de "quando x tende para a", que tem uma conotação dinâmica, que nem sempre acontece, e pode justificar dificuldades para entender que o limite de uma função constante é a própria constante e que o valor do limite não precisa ser assumido pela sequência ou pela função.

> No caso do conceito de limite, observamos que as palavras "tende a" e "limite" têm um significado para os estudantes antes de qualquer aula sobre o assunto, e que os estudantes continuam a se basear nestes significados depois que tiveram a definição formal. Investigações revelaram muitos significados diferentes para a expressão "tende para":
>
> - Aproximar (eventualmente ficando longe de)
> - Aproximar ... sem atingir
> - Aproximar ... atingindo
> - Parecer (sem qualquer variação, tal como "este azul tende para violeta") (Schwarzenberger & Tall, 1978 citado por Cornu, 1991, p. 154, tradução livre).[5]

Essas ideias justificam nossa reflexão sobre a outra questão comum aos quatro grupos, em que se propõe analisar a abordagem dada por um professor e a consequente dúvida de um aluno.

> Suponhamos que um colega (<u>professor</u>) tenha introduzido o conceito de limite real de uma função em um real adotando as seguintes linhas principais [ênfase acrescentada].
> - Ele faz com que os estudantes calculem os valores de uma função f para valores cada vez mais próximos de 5.
> - Ele mostra que as imagens $f(x)$ ficam cada vez mais próximas de 12 à medida que x se aproxima de 5.
> - Ele então anuncia que em tais circunstâncias dizemos que 12 é o limite de $f(x)$ quando x tende a 5.
> - Ele então generaliza introduzindo a seguinte definição:
>
> "b é o limite de $f(x)$ quando x tende para a quando $f(x)$ pode ser tão próximo quanto se deseja de b quando x está suficientemente próximo de a".

---

[5] "In the case of the limit concept, we observe that the words 'tends to' and 'limit' have a significance for the students before any lessons begin and that students continue to rely on these meanings after they have been given a formal definition. Investigations have revealed many different meanings for the expression 'tends towards': • to approach (eventually staying away from it) • to approach ... without reaching it • to approach ... just reaching it • to resemble (without any variation, such as this blue tends towards violet)" (Schwarzenberger; Tall, 1978 citado por Cornu, 1991, p. 154).

Um estudante que seguiu este ensinamento desafia você e pede que você explique a citação seguinte, já que ele não compreendeu a noção de limite.

"Olá, professor, desculpe incomodá-lo, mas não entendo como você passa da expressão 'quanto mais próximo x está de a, mais próximo $f(x)$ está de b' para '$f(x)$ está tão próximo de b quanto desejamos quando x está suficientemente próximo de a'. Sinto que há uma conexão, mas está muito vaga na minha cabeça no momento. Você poderia me dar alguma explicação, por favor?"

A dúvida pode ser induzida pela forma como é preenchida uma única tabela, para um único a, com valores convenientemente "escolhidos" pelo professor, imediatamente seguida pela definição de limite de função adotada. As respostas dos quatro grupos a essa questão permitem observar se os participantes percebem e justificam por que aparece a dúvida, quão difícil pode ser a generalização tanto para valores de a como para diferentes aproximações de a e como propõem respondê-la. Tal abordagem pode ser considerada perniciosa, pois, ao focar primeiro na variação do x e depois na variação de f(x), um aluno, se conseguir generalizar, estará apto a ser um resolvedor de exercícios do tipo "calcule o limite de", mas não a demonstrar frases do tipo "mostre que o limite de tal é tal". Estas últimas dependem da definição formal, que inicia com a variação de f(x) para encontrar a variação de x, ideias que poderão ser importantes em algumas situações tanto da vida escolar como de fora dela.

Reflexões sobre as questões de G4

As reflexões sobre as questões G41 e G42, comuns a todos os grupos, já foram apresentadas na seção 1.5. G41 corresponde ao preenchimento de tabela, e G42 à definição de limite de função.

G43: (ou G24**).** Tome uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Em que ordem você apresentará os diferentes casos de limites aos estudantes? Por quê?

a. $\lim_{x\to a} f(x) = b$

b. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

c. $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = b$

d. $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

As respostas dadas pelo G2 serão comparadas por G4 com as próprias soluções; com isso, refletir-se-á sobre as possíveis dificuldades dos estudantes nas questões que envolvem o infinito. Como parte de nossas reflexões, colocamos como hipótese que a abordagem pragmática, por exemplo com o preenchimento de tabelas, pode provocar dificuldades não facilmente superáveis. Para o professor de Cálculo, se os estudantes já têm conhecimento do comportamento de sequências (por exemplo, PA, PG ou Fibonacci), a ordem pode ser c, a, b, d, ou a, c, b, d, para aproveitar a ideia de *n* tendendo a infinito, sem o uso de tabelas. Se o professor quiser partir do preenchimento de tabelas, vemos isso como possível nos casos a e b, pois as aproximações de x são valores finitos, para a finito, e pode-se perceber o que acontece com os valores de f(x). Os casos c e d consideramos mais problemáticos, pois os valores de x vão para mais infinito ou menos infinito, com a potência do contínuo.

G44. (ou G23) Um colega usa a seguinte definição de limite:
"b é o limite de f em a quando podemos tornar $f(x)$ tão próximo quanto quisermos de b, tomando x suficientemente próximo de a" $(*^2)$
Os estudantes estão divididos e entendem essa definição de maneiras diferentes. Você encontrará abaixo as distintas interpretações debatidas. Por uma questão de clareza, eles são formulados em lógica de predicados.

- « $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in Dom(f)\ : |x - a| < \eta\ \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ » (A)
- « $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in Dom(f) : 0 < |x - a| < \eta\ \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ » (B)
- « $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in Dom(f)\ : |f(x) - b| < \varepsilon$ » (C)

Complete a tabela a seguir indicando com uma cruz qual interpretação é equivalente a qual outra.

É equivalente a ↷	A	B	C	$(*^2)$
A				
B				
C				
$(*^2)$				

As respostas dadas pelo G2 serão comparadas pelo grupo G4 com as próprias resoluções, o que evidenciará possíveis dificuldades dos estudantes com a frase $(*^2)$. Em nossas reflexões, o estudante não tem o porquê de interpretar de forma diferente "tão próximo quanto" de "suficientemente próximo", o que quer dizer que ele aceitará A como equivalente a $(*^2)$, pois, nessa linguagem, *x* pode ser igual a *a*. Pode ocorrer também que não perceba a diferença entre A e B e as considere equivalentes entre si e a $(*^2)$. Ainda consideramos possível que um estudante interprete a frase *C* como equivalente a $(*^2)$, pois acha que basta um único valor de *a* e que não é necessária uma vizinhança de *a*, o que pode ser induzido pelo preenchimento de uma única tabela. A questão é relevante, pois sua análise vai evidenciar as dificuldades que podem surgir em uma abordagem não formal, com o uso da língua materna e, dependendo do número de respostas não corretas, que o conceito de limite não foi apreendido e deveria ser retomado com os participantes do G2. Essa é mais uma razão para defendermos a discussão dessa questão e de suas respostas com o G3.

As questões 5, 6 e 7 têm uma parte do enunciado em comum, só foram propostas ao G4 e trazem à discussão a demonstração formal do limite da função composta, um dos mais importantes, pois a maioria das funções é composta. Essa discussão é importante, pois mostra que a escolha pelo pragmatismo não pode ser fechada. Existem resultados importantes e fundamentais que precisarão de uma abordagem formal, este é um deles.

Enunciado comum às questões 5, 6 e 7

Considere a seguinte propriedade dos chamados limites de transitividade e uma tentativa de prova.

Propriedade.

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções e a, b, c três números reais tais que

- $Im(f) \subseteq Dom(g)$
- $\lim_{x \to a} f(x) = b$
- $\lim_{x \to b} g(x) = c$

Então,

$$\lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c$$

Tentativa de prova.

Considere $\varepsilon > 0$.

Existe $\delta > 0\ \forall y \in Dom(g) : 0 < |y - b| < \delta \Rightarrow |g(y) - c| < \varepsilon.$ (E_1)

Existe $\gamma > 0\ \forall x \in Dom(f) : 0 < |x - a| < \gamma \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$ (E_2)

Então $\forall x \in Dom(f) : 0 < |x - a| < \gamma \Rightarrow |g(f(x)) - c| < \varepsilon$ (E_3)

Então $\lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c.$ (E_4)

As perguntas associadas a este enunciado são:

G45. Esta tentativa de prova está correta se adotarmos a seguinte definição de b é o limite da função f em a ?

- $a \in adh(dom(f) \setminus \{a\})$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom(f) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\ (*^1)$

Se sim, justifique os passos (E_1), (E_2), (E_3), (E_4). Caso contrário, explique com muita precisão quais etapas dessa demonstração são falsas e dê um contraexemplo.

G46. Com base na análise da tentativa de prova, explique qual hipótese adicionar em f para salvar a tentativa de prova e garantir sua legitimidade ao usar a seguinte definição de limite.

- $a \in adh(dom(f) \setminus \{a\})$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in dom(f) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\ (*^1)$

G47. 1. Mostre que, adicionando a hipótese "g é contínua em $f(a)$" à propriedade da transitividade, esta se torna verdadeira e que é possível adaptar a prova para que fique uma prova correta.

2. Explique com muita precisão onde estão as diferenças entre a prova que usa a hipótese de continuidade e a da questão anterior que usou a hipótese "Existe um intervalo aberto I tal que $a \in I$ e $\forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) \neq b$ "

Ao organizar a devolutiva que precisa dar aos participantes de G2, o pesquisador pode usar as questões G45, G46 e G47 para dar um exemplo da importância de colocar e usar $0 < |x - a| < \delta$ na definição de limite e na resolução da G23. A escolha pelo pragmatismo pode e precisa ser alternada com o formalismo.

Embora não tenhamos apresentado nossas reflexões sobre a questão G35, consideramos que revela ideias semelhantes a serem discutidas na devolutiva de G3 para G1 ou de G3 para G2. Por essa razão, defendemos que, embora não faça parte da proposta do MER, são resultados que também poderiam ser discutidos no G3.

Encerramos, sem esgotar, nossas reflexões sobre as questões propostas ao G4 e as concluímos destacando que a dinâmica proposta pelo GECEMS, com as análises *a priori* das questões e as devolutivas, vai permitir que o pesquisador e/ou o professor de Cálculo elaborem instrumentos de pesquisa a serem testados e analisados e caminhem no sentido de responder às questões colocadas pelo grupo: as premissas usadas na Bélgica são válidas no contexto brasileiro? É possível construir uma estrutura teórica comum que permita questionar o *status* de obstáculo epistemológico e a principal dificuldade encontrada no ensino dos conceitos de limite, derivada e integral? Que tipo de experimento é possível planejar em conjunto para testar esse Modelo? As respostas obtidas poderão sugerir que é afirmativa a questão-foco colocada pelo Prof. Job para o Seminário do segundo dia.

Rumo a um modelo epistemológico de referência) compartilhado?

Dada a diversidade da audiência, Job começa com uma rápida introdução à Didática, destacando que ela faz parte das Ciências Exatas e que, na Bélgica, há uma grande diferença entre Didática e Pedagogia. Na Didática, considera-se que um fator importante para explicar as dificuldades de aprendizagem encontra-se no próprio conhecimento e que a especificidade do conteúdo é um fator determinante na apropriação do conhecimento. Na Pedagogia, como Ciência da Educação, consideram-se as relações entre professores e alunos e entre os próprios alunos.

Como didatas, os componentes do GECEMS estão interessados no questionamento do conhecimento, o que leva à noção de obstáculo epistemológico ou, em outras palavras, àqueles obstáculos intrinsecamente ligados à natureza do conhecimento. Para a Matemática, essa ideia foi desenvolvida especialmente por Guy Brousseau (1998), o fundador da Teoria das Situações Didáticas.

Mas o que é epistemologia? É uma análise sistemática de como o conhecimento é criado, por que o é e como evolui ao longo do tempo nas instituições nas quais existe e eventualmente progride.

O trabalho do didata consiste na construção de modelos didáticos de conhecimento, que será o caso do MER visado. Para incentivar a criação deste, Job propõe, em primeiro lugar, apresentar o que ele e sua equipe, na Bélgica, têm até o momento como modelo epistemológico para o ensino de Cálculo e Análise. Depois da apresentação desse modelo, Job propõe analisar suposições e razões para a escolha de questões que sejam relevantes no contexto brasileiro, tendo como exemplo as usadas no *workshop* do dia anterior, uma vez que as culturas belga e brasileira são muito diferentes e a diversidade da cultura brasileira é impressionante, o que torna difícil, *a priori*, fazer suposições válidas para todo o país sem ter investigado no local. É preciso conversar com as pessoas e obter dados experimentais para confirmar ou refutar a escolha das questões a serem utilizadas para a criação do MER brasileiro.

Como em qualquer disciplina científica, caso da Didática, é possível utilizar uma diversidade de abordagens de pesquisa, por exemplo uma *abordagem didática* ou uma *abordagem baseada em evidências*. Sem a pretensão de trazer a verdade absoluta, seja sobre a Didática, seja sobre as questões para o ensino de Cálculo, Job apresenta como é a *abordagem didática* que realiza na Bélgica para convencer o grupo de pesquisadores brasileiros de que é uma ótima opção para desenvolver o MER.

Para isso, pretende criar um efeito de contraste com uma exposição de motivos pelos quais as *abordagens baseadas em evidências* são altamente questionáveis. Embora aceite que esse tipo de viés representa um grande avanço na pesquisa científica, há toda uma série de áreas cinzentas no uso dessa metodologia, no mundo biomédico ou na pesquisa educacional.

Com base na metodologia das *abordagens baseadas em evidências*, decisões políticas foram tomadas e a repetição de ano foi abolida na Bélgica e em outros países, pois repetir um ano significa que o aluno precisa repetir uma aula em que foi muito mal. Um grande problema com essas decisões é que elas não levam em conta a causalidade, é preciso analisar a variedade de motivos que podem explicar a reprovação. Se a repetição de ano é abolida, os alunos não percebem mais o significado do aprendizado, porque não são mais recompensados pelo sucesso, trabalham mais para obter notas do que para se apropriarem do conhecimento e pode-se chegar à conclusão completamente oposta: remover a repetição leva ao fracasso. Todas as políticas para promover o sucesso por decreto e o uso de testes padronizados, como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), são passíveis de discussão e questionamento.

Tudo isso leva de volta à questão do conhecimento, aspecto central da Didática. É preciso questionar o conhecimento. Como o questionamos? Como devemos proceder?

Para responder a essas questões, Job propõe duas principais teorias: a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1998) e a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard. (2011, p. 23). Com base nessas duas teorias e com o apoio da ferramenta Transposição Didática (Brousseau, 1998), um pesquisador pode construir um MER para o conhecimento envolvido, no caso deste texto o limite de funções de uma variável real. A Transposição Didática (Brousseau, 1998) é entendida em um sentido amplo, incluindo noções de Contrato Didático, um conjunto de regras tácitas que regulam a interação entre professor e alunos em relação ao conhecimento, o que difere o Contrato Didático do Contrato Pedagógico (Brousseau, 1998).

Quando se combina a Transposição Didática com a construção de um MER, induz-se uma metodologia fundamental para a Didática, a Engenharia Didática (Schneider, 2009). Esse modelo, então, será construído com base em análises históricas e epistemológicas e pesquisas existentes bem como será usado para estudar a transposição do conhecimento em diferentes instituições. Isso permitirá construir o que chamamos de Situação Fundamental, um conjunto de perguntas para as quais o conhecimento fornecerá uma resposta ideal. Essa é uma maneira específica de caracterizar o conhecimento.

Esse tipo de metodologia é de natureza qualitativa, portanto, considerado fenomenotécnico e faz parte da estrutura de refutabilidade (Popper, 2014), o que significa que os dados produzidos e todas as hipóteses e interpretações são testados experimentalmente, o que permite refutar os modelos e os resultados de pesquisas obtidos com *abordagens baseadas em evidências.* Essa é uma característica importante, porque, se não houver experimentos suficientes, não se é científico. Em outras palavras, a natureza fenomenotécnica da metodologia usada na Didática, garante que o resultado assim obtido por uma pesquisa é a demonstração do vínculo entre uma abordagem de engenharia e os dados observados.

Para defender essa posição, Job diz que, nas *abordagens baseadas em evidências*, são formados grupos os mais homogêneos possíveis; mas, quando se fala de homogeneidade e se trabalha com seres humanos, do que exatamente se trata? Brousseau expressa esse questionamento no centro da Teoria das Situações, com a seguinte pergunta: os métodos de ensino construtivistas são superiores a outros métodos de ensino ou não? Ele concluiu que não, com base em uma abordagem experimental, de natureza científica, que acabou por introduzir um ponto de vista diferente, que contrasta, em várias condições, com os resultados obtidos em *abordagens baseadas em evidências*.

Brousseau (1998) relata que seu objeto de estudo é a interação do conhecimento com o coletivo. O que importa não é a psicologia individual das pessoas, mas sim a noção de obstáculo epistemológico, que caracteriza as dificuldades que serão inevitavelmente encontradas nesse coletivo e as vincula à natureza específica do conhecimento.

Então, na constituição de grupos homogêneos em *abordagens baseadas em evidências*, qual é o problema? Quando alunos respondem a perguntas relativas a um conhecimento, pode-se questionar: por que eles as respondem corretamente? Será que é porque olham para o comportamento do professor para ver se estão no caminho certo ou não? E reciprocamente, o professor concorda em entrar nesse tipo de abordagem quando anuncia: “Sim, você entendeu do que se trata”, mas, na verdade, é apenas um jogo de conivência entre professor e aluno.

Isso nos leva à noção de Contrato Didático (Brousseau, 1998), que é uma série de codificações do comportamento recíproco de professores e alunos em relação ao conhecimento em jogo. Essas codificações podem estar implícitas, mas regerão a forma como o conhecimento é assumido por cada uma das partes.

Esse contrato (Brousseau, 1998), na Didática da Matemática, é uma teorização, uma modelagem do comportamento do ser humano diante do conhecimento. Modela interações entre pessoas e saberes, dentro da sala de aula, o que possibilita entender porque há dificuldades de aprendizagem e classes típicas dessas dificuldades. Com isso, é possível evidenciar obstáculos epistemológicos relacionados ao conhecimento em Matemática.

Brousseau (1998) também destaca a necessidade de levar em conta, nessa busca, o funcionamento das instituições, cujo estudo do desenvolvimento e da sistematização é um dos aspectos propostos por Chevallard (2011, p. 23) na Teoria Antropológica do Didático (TAD). Esta é assim chamada pois postula que as instituições tomam os conhecimentos produzidos pelos cientistas, transformam-nos em saberes a serem ensinados e então naqueles que serão realmente ensinados. Essa distorção é o que se chama Transposição Didática (Chevallard, 1999); Schneider, 2008) e faz pensar na relatividade institucional do conhecimento.

No caso do conceito de limite, por exemplo, não há nada em comum nas transposições didáticas praticadas em algumas instituições, reforçando a relatividade institucional do conhecimento. Uma abordagem proposta pela TAD é estudar quais as práticas relativas a um dado conhecimento em diferentes instituições, a fim de identificar distorções e pontos de sobreposição ou contradição, com o objetivo de explicar fenômenos de ensino e dificuldades de aprendizagem.

Na TAD, a ideia de instituição é em sentido amplo, podendo até ser uma escola de pensamento, como o chamado movimento de competências. Com base na tríade saber sábio, saber a ensinar e saber ensinado, é possível estudar como correntes de pensamento, visíveis ou invisíveis, estruturam o modo pelo qual o conhecimento deve ser incorporado em diferentes instituições, o que, em TAD, é chamado de escala de níveis de codeterminação.

Quando se estuda a história e a epistemologia da noção de limite, percebe-se que houve diferentes períodos e que não foi desde o início a noção com épsilon/delta. Da distinção entre como o limite foi usado em uma época e como ele é usado hoje, podem-se extrair as principais características epistemológicas dessa noção; para isso, usa-se uma nova noção, a de *praxeologia*, que é uma terna constituída de uma tarefa (o quê?), uma tecnologia (como?) e uma justificação (para quê?). A tarefa é o que queremos realizar; a tecnologia é a forma pela qual essa tarefa deve ser realizada; e a justificação é a maneira pela qual uma instituição legitimará a técnica.

Em práticas humanas, se você faz algo, realizá-lo de certa maneira, para a qual ter-se-á certo nível de justificação, que depende do contexto. Esses diferentes níveis de justificação são chamados níveis de racionalidade. Por exemplo, em Matemática, são usados níveis de racionalidade de forma dedutiva, estritamente dedutiva, entre outros.

No caso da noção de limite, o modelo de referência será composto por duas praxeologias, uma *pragmática*, e a outra, *pragmática dedutiva*. Historicamente, a noção de limite era dada como uma técnica, entre outras, para determinar medidas geométricas ou físicas (especialmente em cinemática). A forma de justificar essa técnica era do tipo justificação pragmática, pois a noção era aplicada a casos que haviam sido resolvidos por outros métodos e havia um acordo entre os dois.

Quando isso é feito em muitos exemplos, a confiança na técnica aumenta e chega a um limiar em que se aceita a técnica como legítima, pois foi verificada experimentalmente. Esse nível de racionalidade foi comum à boa parte da Matemática, até o século XX, durante o qual os métodos formais tiveram precedência sobre qualquer outro nível de racionalidade. Uma característica da praxeologia pragmática é que os objetos não são construídos dedutiva ou axiomaticamente, como é o caso na Matemática atual. Eles têm o ¨*status*¨ de pré-construído, segundo Chevallard (1999), que diz: “Um pré-construído é algo que não é construído, mas é apresentado por um ‘deixis’”, é algo que se mostra num apelo à cumplicidade, no reconhecimento ontológico. A existência do objeto parece ser óbvia, não suscetível à dúvida, escapa ao questionamento, que o pressupõe, e é o ponto de apoio inatacável da reflexão.

Na segunda praxeologia do modelo de referência, estão as praxeologias dedutivas. O nível de racionalidade é o estritamente dedutivo, ou seja, somente as justificativas de ordem dedutiva são aceitáveis. A principal tarefa consiste em dar ao cálculo uma arquitetura dedutiva tão impecável quanto a dos elementos de Euclides. Em particular, todos os objetos pré-construídos terão que ser explicitamente construídos de forma dedutiva e axiomática. Uma técnica para essa arquitetura dedutiva, segundo o epistemólogo Lakatos (1984), é uma dialética de evidência e refutação. As definições (de noções e objetos matemáticos), os enunciados de teoremas e as demonstrações são trabalhados em conjunto.

Enuncia-se um teorema e tenta-se demonstrá-lo. Para isso, escolhe-se uma série de definições e verifica-se se estas permitem a demonstração. Se não, mudam-se as definições ou o enunciado, em busca de uma concordância entre esses elementos. No caso da constituição de uma definição de limite, na praxeologia dedutiva (dialética de prova e refutação), tomam-se as definições e estabelece-se uma que sirva como ferramenta não intuitiva em uma arquitetura dedutiva.

Em uma análise histórica sobre a noção de limite, pode-se tomar o exemplo de Cauchy, em seus cursos de 1820 a 1823 na École Polytechnique, para atestar que utilizava a dialética de prova e refutação baseado nos trabalhos de seus antecessores Ampère e Lagrange. Essa noção de limite, até recentemente, foi considerada a resposta ótima para dar uma estrutura dedutiva ao cálculo, no sentido da teoria de Brousseau (1998). Acabou-se de descrever uma situação fundamental do que é a noção de limite.

É possível estruturar o cálculo de forma dedutiva de maneira diferente, com uma análise não padronizada (não *standard*). Isso comprova a ideia da relatividade institucional do conhecimento e explica o porquê de ser complicado fazer da noção de limite objeto de ensino.

As duas praxeologias, pragmática e dedutiva, formam um ciclo completo e constituem o modelo de referência belga. Elas são disjuntas, mas trabalhadas de forma dialética.

Por exemplo, para a determinação de medidas em questões geométricas ou físicas, inicialmente desenvolve-se uma técnica cujas justificativas são pragmáticas, empíricas. À medida que a disciplina evolui, quer-se colocar esses elementos empíricos em uma base cada vez mais sólida e transformá-los em algo de natureza dedutiva. Isso constitui um primeiro ciclo de modelagem pragmática de coisas externas ou internas à Matemática; ao fim do qual, tenta-se fazer uma inversão para constituir uma teoria puramente dedutiva, com uma validação necessariamente interna à Matemática.

Uma vez constituída essa teoria puramente dedutiva, subordina-se a ela a Física, a Geometria ou outras disciplinas. Tem-se uma reversão que só assume sentido pleno em relação ao trabalho preliminar de determinação de medidas, pois, sem isso, é extremamente difícil entender em profundidade como e por que se chega a essa estruturação dedutiva.

Esse é um aspecto extremamente importante, porque os professores estão envolvidos. Presos entre dois extremos, um deles o puramente dedutivo, o outro, o intuitivo. Mesmo que a definição intuitiva não signifique muito, é escolhida por aqueles que consideram que a dedutiva é muito difícil para os alunos e, talvez, por não acreditarem na possibilidade de fazer matemática pragmática e, portanto, experimental.

Job afirma que acabou de dar as linhas gerais do modelo de referência usado na Bélgica, em relação à noção de limite, e que há certos aspectos dessa noção deixados de lado. Esse modelo foi escolhido porque contempla uma perspectiva interessante e pode ser posto à prova de forma experimental, mas não é definitivo, é sujeito à evolução. Os intercâmbios com colegas brasileiros podem fazer esse modelo evoluir.

Job considera terminada a apresentação do MER belga e propõe colocar em discussão uma das questões do *Atelier*, para explicar a escolha de tal questão.

> Nesta questão, você tem a oportunidade de vivenciar uma situação realista na qual é levado a dar explicações a um estudante que tem dificuldade com a noção de limite. Esta situação é realista no sentido de que a incompreensão do estudante é encontrada no campo. Não é fruto apenas da nossa imaginação. Então, obrigado por levar isso a sério, porque faz parte do vosso trabalho como professor aprender a lidar com esse tipo de situação.
> Suponhamos que um colega tenha introduzido o conceito de limite real de uma função a valores reais adotando as seguintes linhas principais:
>
> - Ele faz com que os estudantes calculem os valores de uma função *f* para valores cada vez mais próximos de 5.
> - Ele mostra que as imagens $f(x)$ ficam cada vez mais próximas de 12 à medida que x se aproxima de 5.
> - Ele, então, anuncia que, em tais circunstâncias, dizemos que 12 é o limite de $f(x)$ quando x tende a 5.
> - Ele, então, generaliza introduzindo a seguinte definição:
>
> "b é o limite de $f(x)$ quando x tende para a quando $f(x)$ pode ser tão próximo quanto se deseja de b quando x está suficientemente próximo de a".
> Um estudante que seguiu esse ensinamento desafia você e pede que você explique a citação seguinte, já que ele não compreendeu a noção de limite.
> "Olá, professor, desculpe incomodá-lo, mas não entendo como você passa da expressão "quanto mais próximo x está de a, mais próximo $f(x)$ está de b" para "$f(x)$ está tão próximo de b quanto desejamos quando x está suficientemente próximo de a" [ênfase acrescentada]. Sinto que há uma conexão, mas está muito vaga na minha cabeça no momento. Você poderia me dar alguma explicação, por favor?"

Ao fazer a pergunta grifada na citação aos professores e estudantes na Bélgica, o que aconteceu? Por quê?

Para responder a essas perguntas, é importante expor um contexto preliminar para explicar por que foram feitas, o que é um procedimento previsto em didática chamado análise *a priori*. O primeiro elemento dessa análise a ser destacado é que, na Bélgica, há uma infinidade de variações de uso de tabelas de valores e de escolha dos tipos de funções.

É relevante mostrar como é a estrutura do sistema educativo no referido país, cuja escola secundária tem 6 anos (12-13 a 17-18 anos). No quinto ano (16 ou 17 anos), são dados limite de sequência, limite de função e derivada; no sexto ano (17 ou 18 anos), ensina-se integral e sempre as funções são reais, de uma variável real. O livro didático adotado há várias décadas na Bélgica é o *Espace Math 56* (Adam & Lousberg, 2000), do qual é possível tomar o seguinte exemplo:

« On donne la fonction f : R→R : $x \to (x^4 - x^3)/(4x-4)$.

a. Détermine le domaine de f.
b. Le réel 1 n'est pas dans le domaine de f. Cependant des réels de plus en plus proches de 1 ont une image par f puisqu'ils sont dans le domaine de f. À cet égard, complète le tableau suivant

x	*0,9*	*0,99*	*0,999*	*0,9999*		*1,0001*	*1,001*	*1,01*	*1,1*
f(x)									

c. Les valeurs de f(x) deviendraient-elles proches d'un réel particulier lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 1 ? Quel serait cet éventuel réel ?
d. [...] » (Espace Math 56, Livre de l´élève, 2000, apud Job, 2011, p. 204)

Inicialmente, os alunos são solicitados a identificar o domínio de *f* e completar a tabela de valores de *f*. Com base na tabela completada, pergunta-se: os valores de f(x) tornam-se próximos de um particular número real quando *x* toma valores mais e mais próximos de um? Qual é esse número real? O aluno é completamente teleguiado, não há nenhuma atividade de pesquisa. Vale a frase: "Você é privado de ver qualquer coisa; vou te dizer o que você precisa ver". Estamos no meio de um efeito contratual, no sentido da Teoria das Situações de Brousseau (1998) e dos efeitos do Contrato Didático. Não há um conhecimento real, há um controle por parte do professor do que o aluno deve ver por trás dessas tabelas. O livro didático coloca um quadro com o que o aluno precisa observar; este, na verdade, deve observar que os valores de *f* estão próximos de certo número real, quando *x* toma valores mais e mais próximos de um. Há outros exemplos em que a observação é um pouco mais livre. De qualquer forma, é um jogo de fingimento, pois o professor ainda diz que era isso que ele deveria ver.

Coloca-se a pergunta: em que base o aluno pode se apoiar para saber se sua observação é aceitável ou não? Não é possível. Tem-se um nível fantástico de indeterminação com esse tipo de tabela. Por exemplo, é possível observar que os valores de f são todos positivos, ou que estão aumentando em um momento e diminuindo em outro, ou que são valores inteiros ou que são valores com um número de casas decimais, no máximo três. Há um número infinito de possibilidades.

Job fez experimentos na Bélgica nos quais os alunos estavam completamente livres em relação a esse tipo de tabela e concluiu que isso não atrapalha em nada o que o professor quer. Sua sugestão é deixá-los observar, ir em todas as direções e isso é normal.

Se o único nível de racionalidade em que o aluno pode confiar, ao ser colocado em ação, é o professor responder sim ou não à pergunta "Está bom assim, professor?", essa ação não tem nada de interessante e não se tem racionalidade no sentido científico da palavra. Se se levar a sério o modelo epistemológico que se busca, na atividade descrita para a noção de limite, não há absolutamente nada do tipo *prova e refutação*. Os problemas de incompreensão observados podem ser relacionados ao tipo de atividade e não aos estudantes. Para validar o que é adequado ou não ao ensino, precisa-se ter um MER (Schneider, 2019) e ideias claras, sem os quais há uma porta aberta para todo tipo de derivações.

Voltando ao exemplo do livro *Espace Math 56*, depois de fazer observar que quanto mais próximo *x* está de 1, mais próximo f(x) está de 3, o professor ou o livro didático introduz uma definição da noção de limite, que considera intuitiva: "Se os valores de f(x) tornam-se tão próximos quanto se queira de *b*, quando *x* toma valores suficientemente próximos de *a*, dizemos que o limite de f(x) é *b*, quando *x* tende a *a*". Há um salto entre a atividade e a definição proposta. A definição de limite é percebida como a conversão entre observações visuais (gráficas e/ou numéricas) e um texto em palavras. Não é uma ferramenta de prova; é, no máximo, qualificada como intuitiva, o que a torna livre de questionamentos, pois, se algo é considerado intuitivo, alguém que não o entende, acha que é incompetente e não se manifesta.

Job coloca em discussão observações visuais. Duas pessoas veem a mesma coisa? Sim, como não poderiam? O problema é que, no caso de gráficos ou tabelas de valores, para entender a noção de limite, é preciso ver e aceitar o que o professor quer que se veja.

No caso do exemplo do *Espace Math 56*, há gráficos com flechas por todo o lado: como um aluno deve interpretá-las? Isso exige um condicionamento visual. Tudo o que é preciso fazer é colocar o dedo no gráfico e seguir as setas, especialmente as que estão sobre o próprio gráfico da função. Como não se poderia concluir que a noção de limite e sua definição são intuitivas? Nessa visão, a noção de limite é "cinematizada", o que é reforçado por expressões como "levar os valores de ... cada vez mais próximos de...". Os alunos terão uma relação empirista positivista com a noção de limite (no sentido da epistemologia das ciências), pois esta é a *cópia exata* do comportamento visual do aluno caminhando sobre um gráfico (O termo em itálico decorre do fato de que, no empirismo positivista, as leis, noções e conceitos da ciência são uma *cópia exata* dos objetos do mundo sensível).

Para o epistemólogo Fourez (1988), as leis científicas podem ser descobertas independentemente de qualquer contexto ou projeto. Modelos, noções e leis científicas existem por si mesmos e são uma cópia exata do mundo. As leis físicas existem por si só e não são de forma alguma modelos projetados pelos humanos para entender o mundo a seu redor. Isso mostra a lacuna entre a abordagem científica moderna e o empirismo positivista, fomentado por livros didáticos como o *Espace Math 56*. Na sequência, o autor descreve o que considera uma definição rigorosa por Epsilons e Deltas, seguida de um pequeno gráfico para explicar o que isso significa. Tem-se algo intuitivo passando para algo rigoroso, mas não há explicação de como e por que é feita essa transição. Tem-se somente gráficos com setas em todas as direções e eventuais intervalos para explicá-las.

Do ponto de vista epistemológico, não faz sentido proceder assim, mas essa forma de proceder foi trazida pela contrarreforma curricular da Matemática Moderna e livros didáticos e professores seguem as recomendações do currículo. Tudo o que é de natureza dedutiva foi substituído progressivamente por uma epistemologia que pode ser chamada epistemologia gráfica, que postula que, sempre que possível, noções matemáticas devem ser acompanhadas por um trabalho gráfico.

Isso mostra a incrível distorção entre um ponto de vista lakatosiano e a epistemologia defendida pelo currículo oficial. Com isso, é possível entender por que, no exemplo do livro didático, tem-se gráficos e tabelas numéricas em todos os cantos. Vê-se que a epistemologia gráfica é terrível, porque desenvolve uma relação empirista nos alunos desde muito cedo. Há uma contradição profunda na educação na Bélgica entre uma epistemologia gráfica, que não faz sentido, e um ensino baseado na estruturação dedutiva da Matemática.

Na história da Matemática, base do MER buscado, as noções pragmáticas de derivada e de integral existiam muito antes da noção de limite. Mas muitos professores ainda são guiados pela arquitetura dedutiva, herdada de Cauchy e aprendida durante a formação inicial, que não considera ensinar a noção de derivada até que se tenha ensinado a noção de limite, o que pode criar grandes contradições à medida que se tenta ao máximo esconder os aspectos dedutivos considerados muito difíceis.

Para colocar em discussão essas contradições, Job retoma a questão do *Atelier*, cujo objetivo foi fazer com que futuros professores de cálculo questionassem o tipo de prática encontrado nos livros didáticos, legitimado por professores e defendido por diretrizes oficiais e ainda testar se os participantes têm uma relação empirista com o mundo sensível. Essa hipótese surgiu de uma Engenharia Didática realizada na Bélgica para mostrar como esse obstáculo empirista se manifesta nos alunos.

E como foram os resultados obtidos por Job com 12 futuros professores na Bélgica, que trabalharão com a noção de limite, obrigatória – diferentemente do Brasil – no quinto ano (alunos de 16/17 anos)? Dos entrevistados, 8 acham que a expressão "quanto mais próximo x está de a, mais próximo $f(x)$ está de b" (1) implica em "$f(x)$ está tão próximo de b quanto desejamos quando x está suficientemente próximo de a" (2). Dois não se posicionam, e somente 2 dizem que a primeira expressão não implica a segunda (correta).

Qual o argumento adotado por aqueles que tentam provar que 1 implica 2? "Sei que mais *x* se aproxima de *a*, mais f(x) se aproxima de *b*. Então, se tomarmos *x* suficientemente próximo de *a*, eu acabarei sempre bem para obter uma imagem f(x) tão próxima que eu queira de *b*. Esse é o raciocínio. Então eu posso deduzir que f(x) está tão próxima quanto se queira de *b*, quando *x* está suficientemente próximo de *a*".

Job afirma que o argumento é falso e continua as entrevistas com uma tentativa de convencê-los. Para exemplificar, no Seminário, Job apresenta dois exemplos de como os participantes se manifestaram.

Primeiro exemplo

Quando se diz f (x) se aproxima de *b*, entende-se que f (x) tem um valor cada vez mais próximo de *b*. Assim, f (x) pode estar tão próximo de *b* quanto se queira, se se toma *x* adequado, ou seja, próximo de *a*, é porque é preciso que *x* se aproxime de *a*. Então, em algum momento, *x* está suficientemente próximo de *a* para fazer que f (x) esteja próximo de *b* como se queria.

Segundo exemplo

Na frase "f (x) está tão próximo de *b* quanto se queira", há uma noção de precisão. Pode-se escolher uma precisão de 0,1 ou 0,01 ou 10 ^ (-12), ou tudo que se queira. É ao final o erro admitido entre *b* e f(x). Assim, se mais *x* se aproxima de *a*, mais f(x) se aproxima de *b*, pode-se deduzir que, se ainda não se alcançou a precisão desejada, é suficiente aproximar a precisão, aproximar *x* de *a*. Há então um momento em que se chegará, quando estaremos suficientemente próximos de *a*.

A hipótese do motivo de os futuros professores se expressarem dessa forma é a "da relação otimista com o mundo sensível". Na engenharia experimentada com alunos do Ensino Médio, o contexto não era o mesmo, mas estes usaram argumentos semelhantes, que se originam de uma assimilação indevida entre as propriedades dos números reais e as percepções do mundo sensível. Para os alunos, a primeira expressão implica a segunda porque, no mundo sensível, se aproximar cada vez mais de um objeto significa que sempre se chega a esse objeto e sempre o mais perto que se queira.

Essa hipótese é válida para os alunos e para os futuros professores? Job propõe três argumentos para justificar a hipótese de empirismo.

Primeiro argumento

Futuros professores agora foram estudantes e, como tais, encontraram esse tipo de relação otimista, que permanece mesmo diante de outro tipo de abordagem. Essa duplicidade caracteriza uma dupla descontinuidade, que significa que a matemática secundária não será substituída pela do Ensino Superior, ou vice-versa. As duas podem viver em espaços separados e, dependendo do contexto, será um tipo de matemática ou o outro que será ativado. Qual é a moral disso? Não há razão para que um estudante mude a relação que desenvolveu com a noção de limite no Ensino Secundário durante o Ensino Superior.

Na verdade, o conhecimento acadêmico obtido no ensino superior não permite que os alunos se posicionem sobre a Matemática do Ensino Médio. Por exemplo, se tivessem compreendido a noção de densidade de diferentes formas, no caso dos números reais saberiam, imediatamente, que a expressão um não implica a dois.

Segundo argumento para justificar a hipótese de empirismo

Considere a produção de um dos futuros professores, que se apoia explicitamente no mundo sensível. Ele diz que se x se aproxima de a, então a distância que separa f (x) de b torna-se cada vez menor e faz uma analogia: se você se encontra a 5 metros de uma árvore e se aproxima 1 metro, você não está a mais de 4 metros de lá. A partir daí, a distância entre a árvore e você torna-se menor à medida que você se aproxima. E conclui: "Você está lá". Job alega que aí ele faz uma tabela de valores, acompanhada de flechas, que sugerem efetivamente que vamos poder aproximar f(x) de b quanto se queira. É suficiente, para isso, tomar o cursor x e o aproximar suficientemente de dois.

Terceiro argumento para justificar a hipótese de empirismo

Job afirma que, nas pesquisas que desenvolve na Bélgica, essa relação empirista também tem sido observada em futuros professores em formação inicial, em toda uma série de outros saberes matemáticos, não só à noção de limite, mas também em relação à derivada, à integral, aos números complexos, aos vetores. Esse tipo de observação o leva à hipótese de que se trata de um obstáculo epistemológico, pois é persistente ao longo do tempo e não é encontrado em apenas um conhecimento, mas em muitos deles. Há toda uma gama de dificuldades que devem ser pesquisadas para verificar se são obstáculos epistemológicos.

É interessante ressaltar a interação desses três argumentos e a globalidade que formam. Existem outros, alguns dos quais baseados em dados experimentais adquiridos ao longo de vários anos. Quando se junta tudo, fica difícil negar o óbvio. Job afirma que a Didática faz parte das Ciências Humanas e das Ciências.

É importante continuar, mesmo em assuntos conhecidos, a acumular dados experimentais, porque o trabalho é com seres humanos. É preciso atualizar e testar, em novas instituições, resultados de pesquisas, para ver como se comportam. Se não se faz isso, o risco é grande de ficar cego para os próprios preconceitos.

Pelo caráter fenomenotécnico das ferramentas, estas não são neutras e influenciam o que se observa, especialmente quando se trabalha com humanos. Daí a necessidade de revisar constantemente dados experimentais à luz da análise das ferramentas que possibilitaram a obtenção desses dados. Por essa razão, a motivação de Job para vir ao Brasil é que a reaplicação da pesquisa desenvolvida por ele na Bélgica pode apresentar resultados completamente diferentes.

Para concluir, Job acrescenta que não teve a intenção de dizer que não se pode usar percepções cinemáticas e que é proibido usar tabelas de valores e gráficos. A única intenção foi chamar a atenção para um uso que pode desviar dos resultados pretendidos. São ferramentas que podem ser preciosas, mas é preciso analisar com sutileza como podem ser utilizadas de forma pertinente e coerente. Especificamente em relação à noção de limite, Job afirma que o uso dessas ferramentas está completamente em desacordo com uma compreensão lakatosiana da noção de limite.

Job pensa que os professores, tanto do Ensino Médio como do Superior, precisam colocar em preto e branco em qual projeto epistemológico se inserem. Há vários que podem ser coerentes. Se não se faz isso, fica uma epistemologia implícita, gráfica, implícita em alguns aspectos e explícita em outros, que se infiltra em todos os níveis do sistema educacional e causa estragos pois tende a desenvolver esta posição empirista nos educandos.

Outra consequência de não estudar epistemologia o suficiente é que pode haver uma polarização extrema entre dois pontos de vista, o de pessoas que querem ser rigorosas e o das que querem ser intuitivas. Há problemas de ambos os lados, que precisariam ser discutidos pois, segundo Job, nenhum tem razão.

Por quê? Primeiramente tem a ver com o rigor, ou seja, com os níveis de racionalidade. Não há apenas o nível estritamente dedutivo da racionalidade, há pelo menos mais um, o nível pragmático, usado há vários séculos. Por que descartá-lo? Principalmente porque ambos correspondem a posturas epistemológicas diferentes e legítimas. Em Ciências da Engenharia, é a mentalidade pragmática que leva vantagem sobre os aspectos estritamente dedutivos, o que é normal. Mas é preciso assumir e viver isso de maneira consciente. A questão se coloca entre esses dois projetos e possivelmente outros. Qual vamos escolher? Para que tipo de alunos? É preciso detalhar, explicitar e desenvolver cursos que sejam coerentes com o projeto e a lógica escolhidos. Para os futuros professores, Job defende a aculturação pela integralidade dos dois modelos de referência, ou seja, às vezes no nível pragmático e às vezes no nível dedutivo, pois, no Ensino Médio e em algumas partes do Ensino Superior, essa integralidade ofereceria uma postura alternativa para os professores ensinarem Cálculo.

Em vez de ter implicitamente um condicionamento que tende a fazê-los caminhar para o estritamente dedutivo, eles teriam a possibilidade de fazer algo com seus alunos ou alunas, que não é de natureza puramente dedutiva, mas que ainda seria válido do ponto de vista epistemológico. Ou seja, pode-se sair da polarização entre ser puramente dedutivo e ser intuitivo, de que não se quer falar frequentemente, se na formação de professores houver cursos de história e epistemologia que não sejam superficiais. Job falou sobre o rigor na prática, mas lembra que a intuição pode tomar seu lugar e que, na verdade, promove o obstáculo empirista.

Dizer que se faz o ensino intuitivo é necessariamente melhor? Do que exatamente estamos falando? Essa questão coloca em perspectiva uma ideia ingênua, bastante difundida, de que qualquer intuição será necessariamente boa de se tomar, o que não é o caso. O objetivo não é condenar tudo o que é de natureza intuitiva, mas novamente estudar para cada tipo de intuição, cada intuição, qual sua relevância, qual sua validade? Isso, mais uma vez, pressupõe um trabalho didático experimental, um projeto que me parece muito pouco desenvolvido, provavelmente pela dificuldade de implementação. Trata-se de estudar em caráter experimental quais são as intuições de quais pessoas, em qual contexto, quais são interessantes de serem consideradas, quais não são. E, uma vez instaladas, quais são suscetíveis de evoluir ou não e em que condições? Se não se faz esse trabalho, em 10, em 20, em 30 anos, estar-se-á no mesmo debate estéril entre “sou uma pessoa intuitiva” e “sou uma pessoa rigorosa”, o que pode levar a absolutamente nada.

Conclusão

Entende-se a importância da preocupação com o ensino de Cálculo e Análise, pois várias pesquisas (Anjos et al., 2023, p. 1-26; de Guzman et al., 1998, p. 747-762; Fischbein et al., 1979, p. 3-40; Garcia & Gomes, 2022, p. 937-957; Godoy & Almeida, 2020, p. 50-74; Igliori & Silva, 2001, p. 39-67; Thomas et al., 2012, p. 90-136; Lachini, 2001, p. 146-190) evidenciam, por anos, dificuldades, no Brasil, com conceitos específicos da disciplina e/ou com a falta de conhecimento de conteúdos da Educação Básica, por exemplo, polinômios, fatoração, números reais, todos importantes para a compreensão das ideias presentes em Cálculo e Análise. Tais pesquisas destacam também o alto índice de repetência e de evasão nas disciplinas e nos cursos que têm o Cálculo no primeiro ano.

Encerra-se este texto destacando que a pesquisa e as questões propostas pelo GECEMS – as premissas usadas na Bélgica são válidas no contexto brasileiro? É possível construir uma estrutura teórica comum que permita questionar o status de obstáculo epistemológico e a principal dificuldade encontrada no ensino dos conceitos de limite, derivada e integral? Que tipo de experimento é possível planejar em conjunto para testar esse Modelo? – são válidas e relevantes e que os interessados em participar desta pesquisa encontram, nas atividades propostas no *Atelier* do primeiro dia, um rumo para a elaboração de um MER compartilhado para o ensino de Cálculo e Análise.

Referências

Adam, A. & Lousberg, F. (2000). *Espace Math 56, Livre de l'élève*. De Boeck-Wesmael.

Anjos, I. M. dos et al. (2023) O Quiz Interativo Digital na identificação de dificuldades de aprendizagem em conceitos nucleares do Cálculo I. *Revista de Ensino de Ciências e matemática, 14*(2), 1-26.

Artigue, M. (1990) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308.

Artigue, M. (2020). Didactic Engineering in Mathematics Education. In S. Lerman (Eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 202-206). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_44

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Cauchy, A.-L. (1821). *Analyse algébrique*. Cours de l’École Polytechnique.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19* (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2011). Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD? In Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 33-55). Centre de Recerca Matemàtica.

De Guzmán, M. et al. (1998). Difficulties in the Passage from Secundary to Tertiary Education. *Documenta Mathematica. ICM-Invited Lectures*, *III*, 747-762. http://eudml.org/doc/230779

Fishbein, E. et al. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *1*, 3-40.

Fourez, G. (1988). *La construction des Sciences*. De Boeck-Wesmael.

Garcia, L. M. L. da S., & Gomes, R. S. (2022). Causas da evasão em cursos de ciências exatas: uma revisão da produção acadêmica. *Revista Educar Mais*, *6*, 937-957. https://doi.org/10.15536/reducarmais.6.2022.2970

Godoy, E., & Almeida, E. (2020). Evasão nos cursos de engenharia: um olhar para os trabalhos do COBENGE de 2000 a 2014. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia, 13*(3), 50-74. https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/8583

Igliori, S. B. C., & Silva, B. A. da. (2001) Concepção dos alunos sobre os números reais. In J. Lachini & J. B. Laudares (Orgs.). *A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo, 1* (1ª Ed., pp. 39-67). Fumarc.

Job, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques*. [Doctorat d´État, Docteur en Sciences, Didactique des Sciences Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Liège]. https://hdl.handle.net/2268/98996

Lachini, J. (2001) Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo. In J. Lachini & J. B. Laudares. (Orgs.). *A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo*, *1*. (1ª ed., pp. 146-190). Fumarc.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et Réfutations*. Hermann.

Popper, K. (1973). *La logique de la découverte scientifique*. Payot.

Popper, K. (2014). *Conjectures and réfutations: the growth of scientific knowledge* (2nd ed.). Routledge.

Projet Euclide. (2007). L'interaction entre compétences disciplinaires et langagières dans l'apprentissage des mathématiques: détection des difficultés et pistes de remédiation au 3e degré. Comment sensibiliser les élèves du 3e degré aux exigences de l'enseignement supérieur? *Formation I.F.C.* Université de Liège. http://www.ulg.ac.be/sectmath/Euclide.htm

Schneider, M. (2009). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel Niveau praxéologique?. In Margolinas et al. (Org.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 172-202) - Clermont-Ferrand. Recherches em Didactique des Mathématiques. La Pensée Sauvage, v. 2.

Schneider, M. *Note de cours de didactique des mathématiques*. Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix.

Schneider, M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques*. Éditions de l' Université de Liège.

Schneider, M. (2019). Quels usages du concept de modèle epistémologique de référence pour la recherche? Et pour la formation? In I. J. Pilet (Ed.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM* (pp. 72-86).

Thomas, M. et al. (2012). Survey Team 4: key mathematical concepts in the transition from secondary to university. In Sung Je Cho (Ed.), *12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 90-136). COEX.