ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i2p359-391

# Conhecimento matemático para o ensino no contexto da educação inclusiva: uma análise de bifurcações descendentes no ensino de média aritmética

# Mathematical knowledge for teaching in the context of inclusive education: an analysis of descending bifurcations in the teaching of the arithmetic mean

# Conocimiento matemático para la enseñanza en el contexto de la educación inclusiva: un análisis de las bifurcaciones descendentes en la enseñanza de la media aritmética

# Connaissance mathématique pour l'enseignement dans le contexte de l'éducation inclusive : une analyse des bifurcations descendantes dans l'enseignement de la moyenne arithmétique

Wuallison Firmino dos Santos[1]
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)/Instituto Federal de Educação da Paraíba (IFPB)
Mestre em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0002-2354-6896

Marcus Bessa de Menezes[2]
Universidade Federal do Pernambuco
Doutor em Educação
https://orcid.org/0000-0003-0850-1793

## Resumo

O presente estudo analisa um episódio específico de ensino de média aritmética em uma turma do 9º ano, composta por alunos videntes e um aluno cego, em uma escola pública estadual da Paraíba. Utilizando uma abordagem analítica inspirada na estruturação do meio da Teoria das Situações Didáticas, especialmente o conceito de bifurcações didáticas, examina-se como os conhecimentos didáticos do professor se adaptam para atender às necessidades do aluno com deficiência visual. Observa-se que o professor introduz estratégias diferenciadas de acesso ao saber para os alunos, demonstrando sensibilidade ao contexto da sala de aula em que há um aluno com deficiência visual. No entanto, identifica-se que essas adaptações podem resultar em uma desconexão temporária do aluno no objetivo traçado para a classe. As conclusões destacam a importância de uma abordagem analítica centrada na didática no ensino da matemática em contextos inclusivos, que explore os impactos das práticas didáticas nos conhecimentos dos professores.

[1] E-mail: wuallison13@hotmail.com
[2] E-mail: marcus.bmenezes@ufpe.com

***Palavras-chave:*** Conhecimentos docentes, Educação matemática inclusiva, Média aritmética, Didática da matemática.

**Abstract**

This study analyzes a specific episode in the teaching arithmetic mean in a 9th grade class, composed of sighted students and a blind student, in a state public school in Paraíba. Using an analytical approach inspired by the middle structure of the Theory of Didactic Situations, especially the concept of didactic bifurcations, it examines how the professor's didactic knowledge adapted to meet the needs of the visually impaired student. It is observed that the professor introduces different strategies for students access to knowledge, showing sensitivity to the classroom context in which there is a visually impaired student. However, these adaptations can result in a temporary disconnection between the student and the objective set for the class. The conclusions highlight the importance of an analytical approach focused on didactics in the teaching of mathematics in inclusive contexts, which explores the impacts of didactic practices on professors' knowledge.

***Keywords:*** Teacher knowledge, Inclusive mathematics education, Arithmetic mean, Mathematics didactics.

**Resumen**

El presente estudio analiza un episodio específico de enseñanza de la media aritmética en una clase de 9º grado, compuesta por alumnos videntes y un alumno ciego, en una escuela pública estatal de Paraíba. Utilizando un enfoque analítico inspirado en la estructuración del ambiente de la Teoría de la Situación Didáctica, especialmente el concepto de bifurcaciones didácticas, se examina cómo los conocimientos didácticos del profesor se adaptan para atender a las necesidades del alumno con discapacidad visual. Se observa que el profesor introduce diferentes estrategias para que los alumnos accedan al conocimiento, mostrando sensibilidad al contexto del aula en que hay un alumno con discapacidad visual. Sin embargo, se identifica que estas adaptaciones pueden resultar en una desconexión temporal del alumno del objetivo trazado para la clase. Las conclusiones destacan la importancia de un enfoque analítico centrado en la didáctica en la enseñanza de las matemáticas en contextos inclusivos, explorando los impactos de las prácticas didácticas en los conocimientos de los profesores.

***Palabras clave***: Conocimientos docentes, Educación matemática inclusiva, Media aritmética, Didáctica de las matemáticas.

**Résumé**

Cette étude analyse un épisode spécifique d’enseignement de la moyenne arithmétique dans une classe de 9ème année, composée d'élèves voyants et d'un élève aveugle, dans une école publique de l'Etat de Paraíba. En utilisant une approche analytique inspirée par la structuration du milieu de la Théorie de la Situation Didactique, en particulier le concept de bifurcations didactiques, il est examiné comment les connaissances didactiques de l'enseignant s’adaptent pour répondre aux besoins de l'élève malvoyant. Il est observé que l'enseignant introduit différentes stratégies d'accès au savoir pour les élèves, faisant preuve de sensibilité au contexte de la classe, qui comprend un élève aveugle. Cependant, il est identifié que ces adaptations peuvent entraîner une déconnexion temporaire de l'élève par rapport à l'objectif fixé pour la classe. Les conclusions soulignent l'importance d'une approche analytique centrée sur la didactique dans l'enseignement des mathématiques dans des contextes inclusifs, en explorent les l'impacts des pratiques didactiques sur les connaissances des enseignants.

***Mots-clés*** : Connaissances de l’enseignant, Éducation mathématique inclusive, Moyenne arithmétique, Didactique des mathématiques.

**Conhecimento matemático para o ensino no contexto da educação inclusiva: uma análise de bifurcações descendentes no ensino de média aritmética**

A ação didática na educação matemática inclusiva frequentemente conduz a situações desafiadoras que demandam uma reflexão aprofundada sobre o conhecimento matemático para o ensino e suas interações com a inclusão escolar. Nesse contexto, o presente estudo analisa um episódio específico em que um professor ($\mathbf{P}$) ensina média aritmética a uma turma do 9º ano, composta por alunos videntes ($\boldsymbol{A_v}$) e um aluno cego ($\boldsymbol{A_c}$), em uma escola pública estadual da Paraíba.

Este episódio foi analisado com base num recorte do protocolo da transcrição das aulas descritas na dissertação de mestrado de Santos (2020). Essa análise detalha os conhecimentos do professor em relação à prática do ensino da matemática, permitindo examinar como ele aplica os conhecimentos didáticos em sala de aula e como esses interagem com as resposta dos alunos.

Nossa abordagem se inspira no conceito de bifurcações didáticas, proposto por Margolinas (2004), que designa os momentos em que a situação didática, planejada pelo professor para atingir certos objetivos de aprendizagem, diverge devido à forma como os alunos investem na tarefa proposta.

Margolinas (2004) utiliza esse termo para elucidar a divergência que pode ocorrer entre as intenções do professor e a realização da atividade pelos alunos. Para essa autora, os alunos podem se envolver em problemas que, embora pareçam semelhantes aos previstos pelo professor, os conduzem a caminhos imprevistos, dificultando a construção dos conhecimentos planejados.

Apropriando-se dessa ideia, este estudo foca nas bifurcações como um conceito que revela diferentes possibilidades, agora sob a perspectiva do professor, analisando como esse profissional lida com essas divergências no contexto da inclusão de um aluno com deficiência visual. Observamos que essas bifurcações refletem não apenas a resposta do professor às dificuldades que surgem da interação entre alunos e o saber, mas também as tentativas dele de adaptar a situação didática planejada às demandas inclusivas, mesmo que, muitas vezes, essas adaptações não resultem na aprendizagem desejada.

Essas bifurcações podem ser explicadas pela compreensão limitada do professor sobre a inclusão escolar, especialmente no que se refere às especificidades do aluno e ao saber em jogo. Embora o professor busque explorar o conteúdo de média aritmética, que deve ser ensinado a todos os alunos, observamos a falta de reflexão sobre como as adaptações para auxiliar o aluno com deficiência exigem conhecimentos no contexto inclusivo que também considerem o saber envolvido.

Nossa análise explorou as complexidades dessa interação entre o conhecimento matemático para o ensino, a inclusão escolar e as ações didáticas, contribuindo para uma compreensão mais profunda do ensino da matemática em contextos inclusivos.

## Conhecimentos do professor

A prática do ensino da matemática requer não apenas um domínio do conteúdo matemático, mas também uma compreensão profunda das nuances do ensino desse conteúdo específico. Isso inclui a capacidade de analisar erros dos alunos, explicar conceitos de forma acessível e tomar decisões didáticas. Em uma análise sobre o conhecimento essencial para o exercício da profissão do professor de matemática, fica evidente a complexidade intrínseca dessa tarefa.

A formação de professores tem sido há muito tempo objeto de pesquisa na Educação Matemática. Shulman (1986) destacou a importância do conhecimento dos professores sobre o conteúdo que ensinam, bem como as razões que levam os professores a transformarem suas representações desse conhecimento ao longo de suas carreiras.

Mizukami (2004), seguindo esse mesmo princípio, apresenta dois modelos sobre o pensamento e conhecimento dos professores: um relacionado ao conhecimento da docência e outro relacionado ao processo de aprendizagem desse conhecimento durante a formação em modalidades formais e na prática profissional. Tais estudos indicam a existência de uma matemática para o ensino.

Shulman (1986) delineou os elementos fundamentais desse conhecimento profissional, destacando a necessidade de compreensão não apenas do conteúdo, mas também da forma como ele é ensinado pelo professor e internalizado pelos alunos. A distinção entre *Content Knowledge* (CK) e *Pedagogical Content Knowledge*[3] (PCK), é essencial para compreender a complexidade do ensino de matemática e suas implicações para a pesquisa no campo da Educação Matemática e para a prática docente.

Adotamos a denominação "conhecimento didático" para o conceito previamente conhecido como conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) de Shulman (1986). Essa alteração reflete uma ênfase na especificidade e aplicação dos estudos alinhados com a abordagem da Didática da Matemática de influência francesa. Enquanto o termo "conhecimento

[3] Respectivamente, a tradução correspondente é “conhecimento do conteúdo” e “conhecimento pedagógico do conteúdo”.

pedagógico do conteúdo" destaca a interseção entre conteúdo e pedagogia, optamos por "conhecimento didático" para ressaltar sua associação com o ensino de conteúdos específicos, como a matemática, semelhante à distinção entre “contrato pedagógico” e “contrato didático”. Dessa forma, o conhecimento didático refere-se àquele aspecto do PCK que está relacionada ao saber matemático a ser ensinado.

Ball, Thames e Phelps (2008) expandiram essa distinção, propondo uma classificação mais detalhada do conhecimento matemático para o ensino (Mathematical Knowledge for Teaching – MKT). Isso inclui não apenas o conhecimento do conteúdo matemático comum (*Common Content Knowledge* – CCK), mas também o conhecimento do horizonte matemático (*Horizon Content Knowledge* – HCK) e conhecimentos matemáticos específicos para o ensino (*Specialized Content Knowledge* – SCK).

Esses SCK são crucialmente distintos do conhecimento matemático comum (CCK), exigindo uma profundidade e detalhe que ultrapassam simplesmente a execução de algoritmos de forma confiável. Esse conhecimento matemático não está disponível para outros profissionais que utilizam a matemática e é específico para o contexto do ensino. Ele representa uma interseção entre o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico, exigindo uma compreensão profunda não apenas dos conceitos matemáticos, mas também de como ensiná-los.

Ball *et al.* (2008) enfatizam a necessidade de um tipo de profundidade e detalhe no conhecimento matemático que vai além do que é necessário apenas para a execução de algoritmos. Uma situação particular que exemplifica a necessidade de conhecimento matemático específico para o ensino é o cálculo de média aritmética, que é habitualmente compreendido como um conhecimento no domínio do algoritmo (Cazorla, Santana & Utsumi, 2019): soma os valores e divide pelo número de dados envolvidos na soma.

Conforme apontado por Ball, Hill *and* Bass (2005), o conhecimento matemático para o ensino abrange tanto o raciocínio matemático quanto o didático, estabelecendo uma interseção crítica entre esses dois domínios. Esse tipo de conhecimento requer uma profundidade e um nível de detalhamento que ultrapassam a simples execução confiável de algoritmos, sendo específico para o contexto educacional e fundamental para a prática docente.

A formação profissional do professor é essencial para lidar com as novas demandas do contexto educacional, como a inclusão de alunos com deficiência nas escolas comuns. Isso acrescenta desafios na trajetória dele, exigindo que adquiram novas respostas que não foram abordadas na formação inicial ou até questionem se o conhecimento que adquiriram ao longo da trajetória se adequa a esse novo contexto.

## Estruturação do meio

Utilizamos o modelo de estruturação do meio para examinar o conhecimento didático do professor e suas repercussões, tanto no planejamento quanto nas interações em sala de aula. Margolinas (1995, 2002, 2004), adaptou o modelo proposto por Brousseau (1986, 1998) considerando captar a complexidade das práticas docentes.

Baseado na Teoria das Situações Didáticas (TSD), o modelo conecta o plano teórico ao empírico. Por questão de espaço e objetivo desse trabalho não exploraremos em detalhes essa modificação, que pode ser encontrada em Margolinas (2004).

Embora possa parecer linear, esse modelo reflete a complexidade das atividades dos professores, assemelhando-se mais ao planejamento de experimentos em sala de aula do que ao próprio trabalho docente.

Para analisar as ações didáticas cotidianas dos professores e alunos de forma conectadas, Brousseau (1986) desenvolveu um modelo de estruturação do meio, no qual as situações se aninham umas nas outras, criando uma estrutura semelhante a uma cebola. Esse modelo foi aprimorado por Margolinas (1995, 2004), levando em conta o papel do professor. Abaixo, apresentamos uma versão simplificada desse modelo.

Tabela 1.

*Níveis de atividade do professor (Margolinas, 2004, adaptação própria)*

| |
|---|
| **Nível +3** - Valores e concepções sobre o ensino (e) aprendizagem – Projeto educativo: valores educativos, concepções de aprendizagem e de ensino (de forma geral e/ou especialmente na matemática). |
| **Nível +2** – Projeto didático global – Planificação e idealização da sequência das aulas, a qual é constituída pelas noções a estudar e os conhecimentos a construir. |
| **Nível +1** - Projeto de aula – Projeto didático específico para a aula: objetivos e planificação do trabalho. |
| **Nível 0** - Situação didática – Realização da aula, interação com os alunos, tomada de decisões na ação. |
| **Nível -1** - Observação da atividade dos alunos – Percepção da atividade dos alunos, regulação do trabalho delegado aos alunos. |

Essa apresentação permite a caracterização dos conhecimentos do professor em diferentes situações de sua atividade, em níveis distintos. Esses níveis correspondem às diversas posições que o professor adquire ao longo de sua ação didática no ensino de matemática e podem ser empregados na análise das decisões docentes para descrevê-las de forma reflexiva.

Podemos descrever e interpretar os níveis supracitados da seguinte forma: no **nível + 3**, encontramos um professor a nível noosférico, refletindo sobre o ensino e a aprendizagem da matemática de maneira abrangente. No **nível + 2**, refere-se à organização do ensino de um saber matemático, que é dividido em noções a serem estudadas, propriedades e aplicações. Neste nível, o professor mobiliza conhecimentos relativos à organização de situações de ensino e aos objetivos de aprendizagem.

No **nível + 1**: o planejamento é crucial, pois é nele que o professor mobiliza conhecimentos mais específicos, incluindo o conhecimento dos alunos e suas dificuldades em relação à noção matemática abordada. No **nível 0**, encontramos a implementação da aula pelo professor, na qual seus conhecimentos se manifestam por meio de interpretações e/ou representações dos alunos, levando a decisões imediatas.

Por fim, no **nível -1**, o professor observa a interação dos alunos com o meio preparado por ele, identificando possíveis erros e dificuldades em relação ao saber em jogo. Os diferentes níveis interagem entre si, isto é, não estão isolados, mas se entrelaçam dinamicamente, refletindo a complexidade do trabalho do professor.

Uma técnica que integra tanto o ponto de vista do professor, representado pela intenção de ensino, quanto o dos alunos, representado pela fase em que aluno aceita a situação como sua responsabilidade (Brousseau, 1998), permite uma análise ampla da interação entre ambos.

Ao adotar o ponto de vista do professor, é possível compreender melhor a estrutura da situação de ensino, as intenções do professor ao organizar o meio de aprendizagem e como o conhecimento está sendo apresentado e organizado. Por outro lado, ao considerar o ponto de vista dos alunos, é possível entender como estão recebendo e interpretando as informações, identificando suas dificuldades, conhecimentos prévios e nível de engajamento na aprendizagem.

Margolinas (2004) propõe uma abordagem que analisa tanto o ponto de vista do professor (análise descendente) quanto o aluno (análise ascendente), proporcionando uma visão holística da dinâmica da sala de aula. Isso permite identificar não apenas o que está sendo ensinado, mas também como está sendo recebido, compreendido e assimilado pelos alunos.

A análise ascendente parte do ponto de vista dos alunos, explorando as possibilidades de investimento deles nos problemas matemáticos. Isso evidencia que alguns alunos podem se envolver em situações imprevistas pelo professor, criando bifurcações na situação didática e dificultando a realização dos objetivos de aprendizagem planejados.

Essa reflexão destaca a necessidade de considerar a diversidade de reações dos alunos em sala de aula, já que não podemos mais adotar uma abordagem genérica. A representação esquemática de *bifurcações didáticas*, com um ramo principal e ramos periféricos, ilustra como a tensão entre a perspectiva do professor e de alguns alunos pode surgir quando estes seguem caminhos não previstos, dificultando a construção dos conhecimentos esperados.

## Desafios e estratégias: o professor na educação matemática para alunos com deficiência visual

No contexto da educação inclusiva, o papel do professor é crucial na organização de situações de aprendizagem que sejam acessíveis a todos os alunos, incluindo aqueles com deficiência visual. Ao reconhecer os desafios específicos enfrentados por esses alunos, o professor desempenha um papel fundamental na adaptação do ensino para atender às suas necessidades, garantindo assim que todos tenham acesso ao saber.

Para isso, é essencial compreender os diferentes tipos de acesso ao saber (Castillan, 2020) que podem ser oferecidos aos alunos com deficiência visual. Um desses tipos é o acesso direto, no qual o aluno ouve o professor explicar o conteúdo para a turma. Outra forma é o acesso por meio de ferramentas de assistência, como aplicativos ou dispositivos que permitem que o aluno ouça ou leia o conteúdo de uma forma alternativa, como texto falado ou em braile. Além disso, o acesso adaptado envolve fornecer ao aluno uma versão adaptada do material, como um texto em braile, enquanto o acesso adaptado via tecnologia implica na adaptação digital do material para ser acessado em um computador. Por fim, o acesso com a ajuda de terceiros ocorre quando o aluno recebe a informação verbalmente de um assistente ou colega.

É importante destacar que, além de oferecer diferentes formas de acesso ao saber, o professor deve também criar um ambiente inclusivo na sala de aula, no qual todos os alunos se sintam valorizados e capazes de aprender. Isso pode envolver ajustes na apresentação dos enunciados e na escolha de variáveis que legitimem a diferença do aluno com deficiência visual (Morás, 2023), bem como fornecer suporte adicional quando necessário e incentivar a colaboração entre os alunos.

No entanto, organizar situações de ensino inclusivas não é apenas uma questão de adaptação individualizada, mas sim de adaptá-las para torná-las acessíveis a todos os alunos, promovendo assim o progresso da classe como um todo (Nogueira, 2020). Isso requer uma compreensão cuidadosa das necessidades dos alunos com deficiência visual, bem como dos obstáculos que todos os alunos podem enfrentar para aprender um determinado conteúdo.

Portanto, a organização de situações de aprendizagem no contexto da educação inclusiva exige um equilíbrio entre o reconhecimento das necessidades individuais dos alunos e o desenvolvimento de estratégias que promovam o progresso de toda a turma. Ao adotar uma abordagem cuidadosa e sensível às necessidades dos alunos com deficiência visual, o professor pode desempenhar um papel fundamental na promoção de uma educação verdadeiramente inclusiva.

## Aspectos metodológicos

Inspirados nos modelos de Ball *et al.* (2008) e na estruturação do meio proposta por Margolinas (2004), este estudo usufrui de dados da dissertação de Santos (2020), que foca o ensino de conceitos estatísticos para uma turma do 9º ano, na qual há um aluno cego que designamos de Jorge. Selecionamos um episódio específico em que o professor aborda o conceito de média aritmética, utilizando protocolos de transcrição de aulas observadas e uma pós-entrevista semiestruturada.

Para enriquecer nossa análise, adotaremos uma abordagem descendente. Examinaremos como essa perspectiva se manifestou durante a aula, considerando a organização das situações para os alunos.

A análise descendente é uma abordagem que se concentra em compreender a situação didática a partir do ponto de vista do professor, começando pelos níveis mais gerais e avançando para os mais específicos. Margolinas (2004) descreve essa abordagem como um processo de investigação que inicia pelo nível +3 e explora gradualmente os níveis inferiores até o nível 0.

Na seção da estruturação do meio, apresentamos um Tabela adaptado da estruturação do meio proposto por Margolinas (2004). Contudo, nas análises evocamos com mais detalhes elementos correspondentes a cada nível, como o meio (M), o professor (P) e/ou o aluno (E) e a situação (S).

Começamos no nível +3, o meio noosférico (M+3), no qual o professor mobiliza conhecimentos naturalizados sobre ensino e aprendizagem, configurando a situação noosférica (S+3). O professor noosférico (P+3) opera de forma intuitiva, sem a necessidade de questionar esses conhecimentos, pois eles estão profundamente enraizados em suas práticas.

No nível +2, temos o meio de construção (M+2), em que o professor faz escolhas sobre o ensino da disciplina em geral. Ele assume o papel de construtor (P+2), organizando e estruturando atividades pedagógicas que preparam o conteúdo. A situação de construção (S+2) reflete essas decisões, focadas na preparação dos temas a serem trabalhados.

No nível +1, o meio didático (M+1) se refere às condições específicas de planejamento das aulas. Aqui, o professor atua como planejador (P+1), organizando o plano detalhado das atividades. O aluno reflexivo (E+1) ainda não interage diretamente com o saber, mas será inserido nas atividades. A situação de projeto (S+1) envolve as decisões sobre como conduzir o ensino com base nesse planejamento.

Finalmente, no nível 0, o meio de aprendizagem (M0) é o espaço em que acontecem as interações diretas entre professor e aluno, visando à construção do conhecimento. O professor

(P0) ajusta suas ações em tempo real, enquanto o aluno (E0) tenta resolver as tarefas propostas na situação didática (S0).

Devido às restrições de espaço, a análise ascendente, partindo do ponto de vista do aluno, não será abordada nesse trabalho. No entanto, com base na análise a priori do ponto de vista do professor, determinamos a situação didática, destacando como o conhecimento do professor se manifesta em cada nível e influencia as ações didáticas dele.

## Descrição geral da aula

A aula ocorreu em 31 de julho de 2018, durante a qual o professor direcionou seu ensino para as medidas de tendência central. Destacamos o episódio em que a atenção estava voltada para a compreensão da média aritmética e oferecemos uma visão geral do desenvolvimento sequencial da aula.

O professor utilizou o livro didático como recurso principal no decorrer da aula. Para Jorge, ele recorreu a peças de xadrez para representar conceitos matemáticos, uma estratégia organizada com base nas quantidades e tipos de peças disponíveis.

Para abordar as medidas de tendência central com toda a turma, o professor organizou a aula sequencialmente, começando pela média, seguida pela mediana e, por fim, pela moda. No caso de Jorge, o professor adotou uma abordagem diferenciada, familiarizando-o com as peças de xadrez e explorando a ideia de variável e frequência absoluta. Somente após essa introdução, o professor abordou a moda, seguida pela mediana e, por último, a média.

Embora os dados coletados na pesquisa de Santos (2020) não forneçam uma explicação para essa diferença na sequência, especulamos que, devido às diferenças nos recursos utilizados, a escolha do professor de começar com a moda esteja ligada a implicação desse conceito com a frequência dos dados, o que o levou a desenvolver essa estratégia adaptada para Jorge.

A seguir, apresentamos os diálogos do professor com a turma e com Jorge especificamente quando das situações que envolvem a média aritmética. Para a turma, ele explorou o algoritmo para o cálculo de média aritmética com uma lista numérica. Posteriormente, ele apresentou e explorou com Jorge, esse algoritmo a partir do manuseio de peças de xadrez.

O início da interação entre o professor e a turma foi marcado por uma explanação rápida e segura sobre as medidas de tendência central. Entretanto, o aluno cego não participou ativamente dos diálogos, pois o professor separou os momentos de apresentação dos saberes: primeiro para os alunos videntes e depois para Jorge. Somente nesse último momento, Jorge teve a oportunidade de se expressar. A seguir, apresentamos um trecho do episódio que aborda a média.

**P:** *3, 4, 5, 6, 7, 8... Como fazer uma média aritmética deles?*
$\boldsymbol{A_v}$: *3+ 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33.*
**P:** *Dividido por quanto? Pela quantidade.*
$\boldsymbol{A_v}$**:** *6*
**P**: *Psiu, façam silêncio por favor! Preciso passar aqui para Gabriel, quero dizer, Jorge. Posso continuar?*
$\boldsymbol{A_v}$: *Sim.*
**P:** *Obrigado! Para que então ele venha entender, Jorge precisa escutar.* $\frac{33}{6}$ *?*
$\boldsymbol{A_v}$: *5,5.*
**P**: *Foi compreensível?*
$\boldsymbol{A_v}$: *Sim* (Santos, 2020, p. 122).

Segue, abaixo, o diálogo com Jorge sobre o estudo de média aritmética:

**P:** *Agora vou te ensinar a média aritmética, que vai te dar a noção de somar, analisar a quantidade de todos, peões... e dividir por cada peça apresentada.*
$\boldsymbol{A_c}$: *Ok.*
**P:** *Você, no caso, vai somar a quantidade... no caso, a frequência dessas variáveis.*
$\boldsymbol{A_c}$: *Mas, dá para saber? Dá para saber?*
**P:** *Como vamos saber, você vai separar as variáveis de novo, direitinho***.**
**P:** *Pessoal alguma dúvida?* [Se dirige a classe]
$\boldsymbol{A_v}$: *Não.*
**P:** *Tenho seis classes, seis variáveis, na média aritmética é dividido por cada espécie. Passe a mão! Quantas peças?*
$\boldsymbol{A_c}$: *Dezesseis.*
**P:** *Quantas variáveis?*
$\boldsymbol{A_c}$: *Seis.*
**P:** *Esses dezesseis dividido pelas variáveis... Se tenho dezesseis dividido por oito, você consegue fazer essa conta?*
$\boldsymbol{A_c}$: *Dois.*
**P:** *Muito bem!* (Santos, 2020, pp. 126–127).

Observamos um equívoco na instrução sobre a divisão, evidenciando falta de preparo para lidar com resultados decimais com Jorge. A seguir exploraremos esse aspecto e outros através do ponto de vista do professor.

## Ponto de vista do professor: análise descendente

A partir do trecho da aula sobre média aritmética, combinando com dados da entrevista, realizamos uma análise descendente, destacando para cada nível, o meio M, os sujeitos P e E (representa o papel que o sujeito pode se reconhecer ou imaginar) e a situação S (interação do sujeito com o meio).

Partimos do nível +3, do qual temos M3, o meio noosférico, um sujeito P-noosférico que pode ser investido pelo professor, o que nos dá S3, a situação noosférica. De acordo com as observações da aula e da entrevista, podemos aprimorar nossa análise sobre a situação noosférica (S3) e seus componentes. A situação noosférica, é composta pelos seguintes elementos: M3 e P3.

O meio M3’ inclui a afirmação "Não ter tido formação nisso, nessa parte, tenho que buscar todo dia" (Santos, 2020, p. 113), quando questionado sobre como ensinar um aluno cego. Isso sugere que para o professor houve formação para ensinar a uma classe como um todo (no sentido genérico), o que podemos considerar como M3[4].

A constituição de M3 nos leva a conceber que P3 pode ter os seguintes conhecimentos:

*C+3: A oralidade permite que alunos videntes e cegos aprendam juntos. Os alunos devem manter o silêncio para não prejudicar a aprendizagem de Jorge. Teve formação para ensinar de forma genérica a todos os alunos, indicando que a verbalização oral é um recurso disponível para o professor, assim como ouvi-la está disponível para todos os alunos. A princípio, todos podem aprender com a mesma situação, Jorge através da audição.*

*(C+3)’: A oralidade da situação proposta pode ser insuficiente, e o uso de outros recursos é útil para o aluno aprender matemática, especialmente recursos concretos, dada a situação do aluno. Como o professor considera que não teve formação para ensinar alunos com deficiência, ele precisa buscar recursos adicionais cotidianamente. Esse aluno pode necessitar de atividades individuais diferentes das tarefas dos colegas em momentos específicos.*

Essa composição nos ajuda a compreender melhor as complexidades da situação noosférica e os conhecimentos e desafios enfrentados pelo professor e pelos alunos em um meio de aprendizagem que seja acessível.

No nível +2, temos M2, o meio de construção, P-construtor, o professor organizando a sequência dos conteúdos, o que nos dá S2: a situação de construção.

Seguindo o aninhamento, temos que S2 = M3, então a situação de construção nesse caso é “fazer os alunos calcularem medidas de tendência central”. Como estamos fazendo uma análise da aula, particularmente da situação envolvendo o cálculo da média, constatamos que o plano de construção do professor iniciava-se com a exploração de média, depois mediana e por fim, moda. P2 deve então desenvolver um modo de intervenção didática correspondente.

O meio M2 correspondente incluirá o conhecimento do professor sobre os métodos de apresentação nessa ordem com os dados que explorará na aula. Podemos dizer que esse meio inclui pelo menos as situações que P2 conhece no contexto do cálculo de tendência central. A

[4] Usaremos o apóstrofo para indicar uma variação do elemento, considerando a complexidade da atividade para o professor quando lida com a lógica coletivo x individual (Toullec-Théry, 2015).

interação de P2 com M2 resulta na seguinte situação didática: apresentar como calcular a média, revisitando a noção de frequência absoluta de uma variável da aula anterior.

Para Jorge, o M2 é a priori o mesmo, mas o plano de construção do professor iniciava-se com uma revisão de "variáveis", frequência absoluta de cada tipo (peças do xadrez), depois inicia-se a exploração de moda, inclusive explorar o aspecto de mais de uma moda, depois mediana e, por fim, média. P2 deve então desenvolver um modo de intervenção didática correspondente.

O meio M2 correspondente incluirá o conhecimento do professor sobre os métodos de apresentação nessa ordem com os dados que explorará na aula. Podemos dizer que esse meio inclui pelo menos as situações que P2 conhece no contexto do cálculo de tendência central, o que segundo a entrevista, baseou-se em uma organização da situação para o aluno por conta própria.

A interação de P2 com M2 resulta na seguinte situação didática: apresentar como calcular a média, revisitando a noção de "variável" e frequência absoluta de uma variável da aula anterior. P2 investe nos conhecimentos:

*C+2: refere-se à sequência organizada de conteúdos pelo professor para a construção do ensino sobre o cálculo de medidas de tendência central. Isso inclui a exploração da média, moda e mediana, nesta ordem.*

*(C+2)': este conhecimento, bifurcado do conhecimento principal, representa uma variação na sequência de conteúdos organizada pelo professor, especificamente para o caso de Jorge. Neste caso, a sequência começa com uma revisão de variáveis, seguida pela exploração da frequência absoluta de cada classe (peças de xadrez), em seguida, moda (incluindo múltiplas modas) e, por fim, mediana e média.*

Essa composição detalha como o professor organiza os conteúdos de acordo com as necessidades e características dos alunos, demonstrando uma adaptação do plano de ensino para atender às demandas específicas de aprendizagem de cada grupo de alunos, o que tem implicações no saber em jogo.

Em nível +1, temos que S1 = M2. A situação de projeto S1 é fazer com que os alunos calculem médias aritméticas de uma lista de números. P1, o professor planejador, analisa previamente (ou no momento da aula) o impacto da situação construída para a aprendizagem dos alunos. O meio M1(meio didático) com o qual ele interage são as reações dos alunos que ele observa na situação S0 ou que ele observou em situações que ele considera similares.

No caso de Jorge, a situação S1 sofre uma alteração, embora ele escute a verbalização oral do momento coletivo, o cálculo da média é explorado usando a quantidade de cada tipo de peça de xadrez. P1 investe em conhecimentos:

*C+1: está relacionado ao conhecimento sobre como calcular médias aritméticas de uma lista de números. Isso inclui o entendimento do conceito de média, bem como os procedimentos para calcular a média de um conjunto de dados.*

*(C+1)': é uma variação do conhecimento principal, relacionada à adaptação da situação de projeto S1 para atender às necessidades específicas de um aluno, como Jorge, que utiliza estratégias sensoriais diferentes para realizar os cálculos de média. Isso pode incluir a modificação da tarefa para torná-la mais acessível para ele, como calcular a média usando a quantidade de cada tipo de peça de xadrez que ele ouve sendo mencionada ou que ele tateia.*

No nível 0, S0 = M1, do qual a situação de projeto é aquela na qual ocorre a interação entre o professor e os alunos para ensinar o conceito de média aritmética. M0 (meio de aprendizagem) inclui as estratégias e métodos utilizados pelo professor para ensinar o conceito de média aritmética. Isso inclui a explicação do conceito, a interação com os alunos e a abordagem adaptada para atender às necessidades específicas de Jorge.

P0 é o responsável por conduzir a aula e explicar o conceito de média aritmética para a turma. Ele controla o fluxo da aula, faz perguntas aos alunos e fornece explicações claras sobre o assunto. Ele também interage diretamente com Jorge para garantir que ele compreenda o conceito, através da situação das peças de xadrez.

E0 são os alunos da turma que estão aprendendo sobre média aritmética. Eles interagem com o professor durante a aula, respondendo às perguntas e participando das atividades propostas. Entre os estudantes, há aqueles que utilizam a visão como via de aprendizagem $A_v$ e Jorge, que adota outras estratégias adaptadas às suas necessidades específicas. Para P0, há mobilização dos seguintes conhecimentos:

*C0: é sobre o conceito de média aritmética e suas propriedades matemáticas. Isso inclui entender como calcular a média de um conjunto de números, dividindo a soma de todos os valores pelo número total de valores.*

*(C0)': é uma variação do conhecimento principal e envolve adaptar a explicação da média aritmética para atender às necessidades específicas de um aluno, como Jorge, que pode precisar de uma abordagem diferente para compreender o conceito. Isso pode incluir o uso de exemplos concretos ou manipulativos para ajudar na compreensão.*

## Análise *a posteriori*: ponto de vista do professor

Observando o desenrolar da aula, vamos aprofundar a análise, comparando o ponto de vista do professor com o que ocorreu na aula, destacando as concordâncias e/ou os mal-entendidos, e possíveis novos conhecimentos a partir dessas observações.

No nível +3, o professor reconhece a necessidade de buscar recursos adicionais diariamente para ensinar o aluno com deficiência visual, indicando uma falta de formação específica nessa área. Durante a aula, o professor utiliza recursos táteis, como peças de xadrez, para tornar o conteúdo acessível para Jorge.

O conhecimento do professor em buscar recursos adicionais para atender às necessidades específicas de Jorge é refletido na aula, na qual ele utiliza peças de xadrez para explicar os conceitos matemáticos. Isso indica uma concordância entre a intenção didática do professor e a prática dele ensejada na aula observada.

No entanto, consideramos que tensões podem surgir pela falta de formação específica do professor para lidar com alunos com deficiência visual. Isso pode resultar em uma abordagem improvisada durante a aula. Um novo conhecimento que pode surgir para o professor é a importância da adaptação e da busca contínua por recursos para garantir a inclusão, contudo mais do que isso, o estudo desse material e do saber visado para a aula é essencial (Morás, 2023).

No nível +2, o professor organiza a sequência de conteúdos e recursos de acordo com as necessidades da turma. Na aula, o professor adapta a sequência da apresentação para Jorge, começando com uma revisão de "variável" e frequência usando peças de xadrez antes de introduzir o conceito de moda, mediana e média aritmética.

Destacamos, uma tensão entre o ponto de vista do professor e a compreensão do aluno no caso abaixo:

> **P:** *Olhe, aqui nós temos as peças de xadrez, eu quero inicialmente que você separe em variáveis.*
> $\boldsymbol{A_c}$: *Como assim?*
> **P:** *Os peões, o cavalo, cada um com seus aliados, separe em montinhos*. (Santos, 2020, p. 123).

O mal-entendido do aluno representado por "como assim?" pode ser atribuído à falta de clareza na comunicação do professor. Quando o professor mencionou "variáveis" ao se referir às peças de xadrez, o aluno pode ter interpretado erroneamente que o professor estava se referindo a diferentes categorias ou tipos de objetos, em vez de entender que cada peça individual representava um valor específico da variável "tipo de peça de xadrez".

Essa confusão pode ter ocorrido devido à ambiguidade do termo "variável", que pode ser interpretado de diferentes maneiras, especialmente por alunos que não estão familiarizados com conceitos estatísticos.

Uma abordagem mais clara poderia ter sido o professor explicar explicitamente que as peças de xadrez representam os valores da variável "tipo de peça de xadrez", que é uma variável qualitativa nominal, na qual cada peça é categorizada em uma classe específica.

Consideramos que há, em parte, uma concordância entre o plano do professor e o que ocorreu na aula, na qual ele adaptou a sequência do conteúdo para atender às necessidades específicas de Jorge. No entanto, se essa adaptação não for bem planejada, pode surgir uma tensão, resultando em uma abordagem fragmentada ou desconexa com o que foi desenvolvido para a turma como um todo. Por exemplo, enquanto a situação com a lista numérica foi usada para traçar uma sequência de exploração de média, mediana e moda, para Jorge a sequência foi organizada de maneira inversa.

Nosso debate não se centra na adequação dessa sequência, mas destaca, em primeiro lugar, a situação apresentada aos alunos pode ter influenciado as decisões do professor em relação à sequência adotada em cada caso. Em segundo lugar, outros elementos são evocados pelo professor no caso de Jorge que não foram para os demais, como uma relação explícita de frequência e as tendências ou uma discussão sobre a existência de mais uma moda, por exemplo.

Um novo conhecimento que pode surgir é a importância de uma adaptação cuidadosa e planejada da sequência de conteúdo para garantir uma experiência de aprendizagem para o aluno com deficiência que, dentro do possível e quando necessário, dialogue com a situação para a classe como um todo (Nogueira, 2020).

No nível +1, o professor planeja a interação entre ele e os alunos para ensinar o conceito de média aritmética, considerando as necessidades específicas da turma e do aluno Jorge. Durante a aula, o professor interage com os alunos, explicando o conceito de média aritmética e adaptando a abordagem para garantir que Jorge compreenda o conteúdo.

Há concordância entre o plano do professor e o que ocorreu na aula quanto à interação para ensinar o conceito de média aritmética. No entanto, uma tensão pode surgir se a adaptação não for eficaz, prejudicando a compreensão de Jorge. Embora o objetivo de P2, que era a compreensão do algoritmo da média aritmética, tenha sido atingido, o professor fez alguns ajustes que serão analisados na situação S0.

No nível 0, o professor executa as estratégias traçadas, incluindo a explicação do conceito e algoritmo do cálculo da média, interage com todos os alunos a partir da verbalização oral e aplica ajustes adaptativos nessas interações para atender às necessidades específicas de

Jorge. Durante a aula, o professor utilizou estratégias de ensino, como explicação do algoritmo e tem uma interação direta com Jorge usando peças de xadrez. Adaptou-se a abordagem que foi levada a turma para garantir a compreensão do conceito e do algoritmo por Jorge.

Nesse nível encontramos uma concordância entre o plano do professor no nível +1 e o que ocorreu na aula em relação às estratégias de ensino utilizadas. O professor demonstra adaptação e sensibilidade ao utilizar recursos táteis e explicar para Jorge buscando uma acessibilidade didática (Assude, Perez, Suau, Tambone & Vérillon, 2014).

Os alunos seguiram as instruções do professor – somar os números e dividir pela quantidade de números – de forma direta, realizando os cálculos conforme orientado. Eles somaram os números fornecidos e dividiram o resultado pela quantidade total. Essa abordagem reflete a aplicação de um procedimento previamente ensinado, sem necessariamente envolver uma compreensão profunda por trás das operações (Cazorla *et al*., 2019).

Compreender o conceito de média aritmética envolve realizar a operação de soma dos valores de um conjunto e, em seguida, dividir essa soma pelo número total de valores do conjunto. Essa operação produz um valor médio que representa a tendência central dos dados, equilibrando as contribuições de cada valor.

Interpretar o resultado envolve entender seu significado no contexto específico em que está sendo aplicado. Essa compreensão não se limita apenas à realização de cálculos matemáticos, mas também à interpretação dos resultados em diferentes situações. No caso exemplificado, não uma interpretação contextualizada com situações que os alunos possam reconhecer a importância da média, apenas o entendimento do procedimento do cálculo da média (Cazorla *et al*., 2019)

Ainda assim, em relação à situação que o professor apresenta, os alunos reconhecem a relação entre os números apresentados e os resultados esperados. Eles associam corretamente a soma dos números à primeira parte da operação e a quantidade total de números à segunda parte. Essa correspondência lhes permite chegar à resposta correta para a média aritmética. Neste caso específico, não há *a priori* indicação de que os alunos possam seguir métodos alternativos para resolver o problema, o que pode não demandar uma evolução dos conhecimentos do professor quanto a uma abordagem diferente nesse caso em específico.

No caso de Jorge, a situação é outra, não se trata de uma lista de números. Ele pode calcular a média aritmética das peças de xadrez simplesmente somando todas as quantidades de peças (8 peões + 2 torres + 1 rainha + 1 rei + 2 cavalos + 2 bispos) e dividindo pelo total de tipos de peças (6). Assim, ele poderia chegar à média aritmética das peças de xadrez (2,6 peças).

Este resultado por ser “contínuo” já nos aponta uma confusão no entendimento da natureza dos números que representam a quantidade de peças de xadrez. O resultado de 2,6 como média das peças de xadrez não faz sentido no contexto do número de peças, pois estamos lidando com uma contagem discreta de itens.

No entanto, temos ainda mais inquietudes. Quando lidamos com números em uma lista, calcular a média aritmética é uma prática comum e útil (Cazorla *et al.*, 2019). No entanto, quando lidamos com conjuntos de itens diferentes, como as peças de xadrez, o contexto muda.

No caso de Jorge, ele trabalha com diferentes tipos de peças de xadrez, sendo que cada tipo possui uma quantidade associada. Em vez de calcular a média das peças de xadrez como um todo, talvez faria mais sentido calcular a média da quantidade de cada tipo de peça individualmente. Por exemplo, Jorge poderia fazer o seguinte:

a) Somar a quantidade de cada tipo de peça (por exemplo, 8 peões, 2 torres, 1 rainha, 1 rei, 2 cavalos e 2 bispos).
b) Dividir a soma total pelo número de um tipo de peça.

Essa abordagem daria a Jorge uma média que representaria a quantidade média de cada tipo de peça em seu conjunto. Por exemplo, se ele fizesse os cálculos e encontrasse que a média da quantidade de peões é 2, isso significaria que, em média, ele tem 2 peões em seu conjunto de peças de xadrez[5].

Essa análise mais detalhada permite que Jorge compreenda melhor a distribuição de suas peças de xadrez e é mais apropriada do que calcular uma média geral de tipos de peças representando valores numéricos. Nesse caso, um desafio para Jorge é a identificação da frequência de cada tipo de peça. Ele pode reconhecer que as peças de xadrez são diferentes e que cada uma tem uma quantidade específica.

Consideramos que um novo conhecimento que pode surgir para o professor é a importância da criatividade do professor ao adaptar sua abordagem de ensino para atender às necessidades específicas dos alunos, mas que não pode subestimar as transformações que os significados do saber matemático em jogo podem passar pela mudança da organização e material didático utilizado.

Se para os alunos, a natureza racional da média não parece provocar tensões com o objetivo do professor, na situação envolvendo as peças de xadrez, isso se tornou evidente quando o professor alterou os valores sem explicar a Jorge o motivo da mudança de divisão de 16 por 6 para uma divisão por 8.

[5] Levando em consideração que as peças que lhe foram apresentadas correspondiam apenas a um lado do tabuleiro.

**Os conhecimentos do professor e bifurcação descendente**

Queremos trazer à luz, a partir das análises anteriores, uma interpretação dos conhecimentos do professor e resgatar alguns fenômenos observáveis que são relevantes para nossas discussões nesse trabalho.

Durante a aula, o professor emprega instruções diretas para elucidar o conceito de média aritmética. Por exemplo, ele afirma: "você no caso vai somar a quantidade, no caso a frequência dessas variáveis" (Santos, 2020, p. 126). Entretanto, ao se dirigir à turma em geral, ele omite a especificação das "variáveis".

No contexto do cálculo da média a partir de uma lista de números, cada dado tem uma frequência igual a 1, enquanto na situação envolvendo peças de xadrez, essa uniformidade não é observada; pode haver frequências diferentes de 1, dependendo do tipo de peça, como peões, torres, bispos ou cavalos. Notamos que, em efeito, o termo "variáveis" utilizado pelo professor se refere aos diferentes tipos de peças, o que revela um equívoco na utilização da terminologia, especialmente porque esta possui um significado específico no contexto estatístico.

Essa abordagem demonstra não apenas o domínio do professor sobre o conteúdo matemático, mas também seus conhecimentos para o ensinar de maneira acessível aos alunos. A presença de um aluno com deficiência visual exige do professor uma adaptação pública de seus conhecimentos. A situação particular desse aluno requer que o professor adapte o ensino da matemática, talvez sem essa necessidade específica, ele não sentiria a urgência de explicitar essas adaptações no ensino da disciplina.

Portanto, isso levanta a questão de que a inclusão abre uma área de interesse para estudos mais detalhados, que explorem os ajustes que o professor faz em seus conhecimentos didáticos para tornar o meio de aprendizagem mais inclusivo, através de diversas formas de acesso ao saber (Assude *et al*., 2014; Castillan, 2020).

O professor demonstra sensibilidade ao contexto da sala de aula ao adaptar o procedimento de cálculo da média aritmética de dividir 16 por 6 para dividir 16 por 8. Não temos informações suficientes para compreender se essa adaptação “brusca” do valor do divisor nessa divisão foi por motivos que levem em conta a natureza discreta das peças ou o professor a mudou em razão de considerar que o aluno não conseguiria fazer essa divisão.

De toda forma, essa mudança reflete sua compreensão dos conhecimentos matemáticos específicos para o ensino (SCK|), que leva em conta a natureza do saber em jogo no primeiro caso, ou os conhecimentos dos conhecimentos do aluno Jorge no segundo caso. O professor faz um ajustamento que, de toda forma, é resultado do contexto das peças de xadrez usadas na atividade.

Nesse cenário, e com base na análise descendente, identificamos um fenômeno que guarda semelhanças essenciais com o conceito de bifurcações didáticas delineado por Margolinas (2004). A autora destaca que os alunos podem se envolver em situações matemáticas que parecem similares à primeira vista, mas que são imprevistas pelo professor, o que pode dificultar o alcance dos objetivos de aprendizagem.

Essa observação nos conduz a uma reflexão sobre como o professor, ao perceber a necessidade de tornar o conhecimento acessível, desdobra o domínio do "ensino do algoritmo de média aritmética a partir de uma lista de números" em outros conhecimentos que levem em consideração as especificidades do aluno com deficiência visual.

Nesse sentido, entendemos que não podemos mais adotar exclusivamente uma abordagem genérica do ponto de vista do professor; é imperativo considerar as adaptações que ele realiza na situação para toda a turma, em uma abordagem que particulariza a experiência de aprendizado para o aluno com deficiência. No caso analisado podemos representar esse fenômeno da seguinte forma:

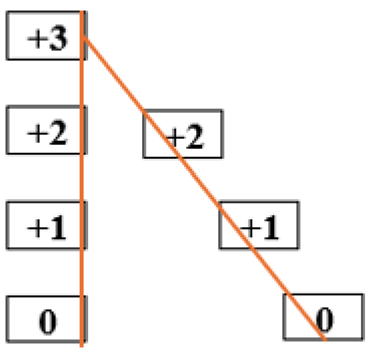


Figura 1.

*Bifurcações descendentes no ponto de vista do professor (elaboração própria)*

Para detalhar a trajetória ilustrada na figura 1, utilizamos a lógica de bifurcações descendentes do ponto de vista do professor, partindo do nível mais alto (+3) até o mais baixo (0). A trajetória principal (à esquerda) representa a abordagem genérica destinada a toda a turma, enquanto o ramo marginal (à direita) ilustra uma adaptação particular realizada para Jorge.

No nível +3, o professor elabora o plano geral para a classe como um todo, utilizando a verbalização oral como principal meio de acesso comum do saber a todos os alunos. A ideia é que todos os alunos, inclusive Jorge, podem compreender o tema estudado ao ouvir as explicações do professor.

No entanto, percebendo que para Jorge o acesso deveria ocorrer de outras formas, o professor introduz no nível +2 um acesso adaptado para ensinar as medidas de tendência central. À primeira vista, poderíamos pensar que se trata dos mesmos conhecimentos: ensinar medidas de tendência central. No entanto, ao observar como a aula ocorreu, notamos, por exemplo, que a ordem de apresentação dessas tendências foi diferente para a turma como um todo em relação àquela direcionada para Jorge, além da revisitação da frequência absoluta, que foi explicitada apenas para este último.

Consideramos que há uma conexão no nível +3, pois acreditamos que o acesso via verbalização oral do professor estava acessível a Jorge. Inclusive, consideramos que o professor não percebe que a situação adaptada para Jorge já muda em princípio, uma vez que a aula verbalizada, que visava atender a toda a turma, já fez o aluno desenvolver conhecimentos acerca do saber em jogo.

Com isso, não estamos questionando os motivos que levam o professor a separar o momento de acompanhamento individual de Jorge. Isso é possível para qualquer aluno. Nosso objetivo aqui é esclarecer que, muitas vezes, é imperceptível para o professor que esse acompanhamento individual pode se desligar do "fio condutor" da aula que ele visou para a turma e que há riscos no controle dele de situações que se constroem "em paralelo".

As limitações e potencialidades, especialmente as primeiras, muitas vezes levam o professor a separar um grupo, até mesmo um único aluno. No entanto, para esses casos, dificilmente no tempo didático da classe ele conseguirá alcançar o objetivo estipulado, pois muitas vezes precisa recorrer a conceitos vistos anteriormente (Toullec-Théry, 2015).

No caso analisado, percebemos que o professor só revisita a frequência para Jorge. Nos dados encontrados na dissertação de Santos (2020), não encontramos informações se houve, simultaneamente, um trabalho do professor com os demais alunos que levasse em conta uma lista com dados que tivessem uma frequência diferente de 1.

Nesse sentido, Jorge foi temporariamente desconectado do tempo didático da classe. O professor não tem conhecimento didático, nesse caso, das implicações que surgem na gestão de situações semelhantes, quiçá diferentes. Isso é problemático para os professores que constantemente se dizem incapazes de ensinar alunos com deficiência, pois possuem um ponto de vista centrado na turma como um todo (Costa, 2007; Mesquita & Sousa, 2023).

O que parece prevalecer, nesses casos, para o professor é: como conectar-se ou manter-se conectado ao “fio condutor” principal visado pelo professor nesses casos? Quando possível, é preciso entender que o professor é sujeito da política inclusiva também e, amparado pelo conhecimento de que todos aprendem participando juntos, precisa recontextualizar a situação que parecia separada para um aluno para a turma toda. Por que a situação das peças não poderia ter sido aplicada a todos? Cabe o princípio de inclusão de conjuntos: a situação das peças de xadrez está contida nas situações possíveis de serem instaladas para todos pelo professor.

Por isso, tratamos esse caso como um bifurcação descendente. Margolinas (2004) percebe que o aluno pode investir em situações não planejadas pelo professor. No caso analisado neste estudo, identificamos um ramo que bifurca quando o professor busca soluções para a tensão do trabalho coletivo e trabalho individual, especialmente no caso em que há alunos com deficiência em classe, o que é uma diferença visível à instituição.

Com isto queremos dizer que outras bifurcações poderiam ter surgido nas aulas, mas são possivelmente visíveis ao professor que atenta cuidadosamente à produção dos seus alunos. No caso analisado, Jorge é um sujeito institucionalmente com uma diferença visível: aluno com deficiência visual.

De uma forma ampla, a interação entre o ponto de vista do professor, que espera que os alunos compreendam e apliquem corretamente o procedimento ensinado, e o ponto de vista do aluno destaca a importância do professor monitorar continuamente o progresso dos alunos e fazer ajustes em sua abordagem de ensino para atender às necessidades individuais dos alunos, como no caso de Jorge, que pode precisar de uma explicação mais adaptada devido à sua deficiência visual.

## Considerações finais

A análise feita neste trabalho, ancorada nos elementos observados durante a aula, reforça a importância dos diferentes tipos de conhecimento do professor e destaca a necessidade de uma abordagem adaptativa e sensível ao contexto no ensino da matemática.

Nossa análise buscou explorar as complexidades dessa interação entre o conhecimento matemático, a inclusão escolar e as ações didáticas, visando contribuir para uma compreensão mais profunda do ensino da matemática em contextos inclusivos.

Ao analisar a adaptação do ensino para atender às necessidades de um aluno com deficiência visual, observamos que o professor adotou estratégias diferentes de acesso ao conhecimento, demonstrando sensibilidade ao contexto da sala de aula, o que nos aponta a necessidade de pesquisas que discutam conhecimentos matemáticos para ensino em contextos inclusivos.

Este estudo, por exemplo, identificou em vários momentos a necessidade de conhecimentos didáticos para a inclusão, ou ainda, sobre a inclusão. A inclusão de dispositivos de assistência pode levar o professor a acreditar que a inclusão está sendo alcançada simplesmente pela presença desses dispositivos, sem necessariamente entender como isso impacta as ações didáticas dele e sem reconhecer a necessidade de desenvolver conhecimentos específicos para lidar com essa situação.

Por exemplo, embora a verbalização oral tenha sido uma forma de acesso comum a todos os alunos, o professor introduziu adaptações específicas para Jorge, reconhecendo a necessidade de abordagens diferenciadas. No entanto, identificamos que, o professor escolhe uma situação “diferente” buscando uma adaptação. Essas adaptações podem resultar na desconexão temporária do aluno do ritmo da classe, destacando a importância de uma abordagem mais inclusiva.

Essa observação levanta questões sobre como os professores podem melhorar a prática para garantir a participação coletiva, reconhecendo que a inclusão não é apenas uma responsabilidade individual, mas também uma questão sistêmica que requer uma abordagem holística.

Ainda carecemos de estudos abrangentes que explorem a organização de situações didáticas por parte dos professores em ambientes inclusivos, com uma análise didática que busque identificar os impactos dessas práticas nos conhecimentos dos docentes. Pesquisas dessa natureza poderiam alimentar debates significativos e servir como um alicerce de conhecimento para professores que enfrentam desafios, como a inclusão de alunos com diferenças visíveis, reconhecidas institucionalmente.

O estudo das bifurcações descendentes nesse contexto parece promissor, pois, embora ainda estejamos em uma análise de estudo de caso, outros estudos podem ser conduzidos considerando a diversidade que a inclusão traz consigo, assim como as diferentes abordagens e respostas dos professores à política de educação inclusiva.

De maneira mais ampla, destacamos que a utilização da ferramenta teórico-metodológica da estruturação do meio nos oferece possibilidades de analisar os conhecimentos dos professores em toda sua complexidade.

## Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, por meio do Programa de Doutorado-Sanduíche no Exterior (PDSE), que proporcionou o estágio de pesquisa do primeiro autor no laboratório ACTé da Université Clermont Auvergne, na França, sob a supervisão da Professora Doutora Claire Margolinas e do Professor Doutor Olivier Rivière. Agradecemos também ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB) pelo apoio institucional, viabilizado pelo afastamento para qualificação concedido pela Portaria 1791/2023 da Reitoria/IFPB de 03 de outubro de 2023.


## Referências


Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., Tambone, J., & Vérillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique : Une étude de cas. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *34*(1), 33–57. https://revue-rdm.com/2014/accessibilite-didactique-et/

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide ? *American Educator,* Fall *14*–46. http://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/65072

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Brousseau, G. (1986). La relation didactique : le milieu. *Actes de la IVème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Paris : Irem Paris 7.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage Editions.

Castillan, L. (2020). *Améliorer l'accessibilité des manuels scolaires pour les élèves déficients visuels* [Tese de Doutorado]. Université Toulouse le Mirail - Toulouse II]. https://theses.hal.science/tel-03431384

Cazorla, I. M., Santana, E. R. dos S., & Utsumi, M. C. (2019). O campo conceitual da média aritmética: Uma primeira aproximação conceitual. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *14(1)*, 1–21. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2019.e62827

Costa, M. C. S. (2007). *Sentimentos de professores frente às dificuldades na prática da educação inclusiva de alunos com deficiência no ensino fundamental* [Dissertação de Mestrado em Psicologia da Educação, Pontifícia Universidade Católica]. https://tede.pucsp.br/bitstream/handle/16330/1/Maria%20Cristina%20%20Sanchez%20da%20Costa.pdf

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La pensée Sauvage, 89-102.

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances : Analyse de l'activité du professeur. Actes de la 11éme Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques: Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques* [Habilitation à diriger les recherches en Sciences de l'Éducation, Université de Provence - Aix-Marseille I]. https://theses.hal.science/tel-00429580

Mesquita, D., & Sousa, C. (2023). Sentimentos dos professores perante situações de inclusão. *CADERNOS DE PESQUISA: PENSAMENTO EDUCACIONAL, 18(1),* 115–128. https://doi.org/10.35168/2175-2613.UTP.pens_ed.2023.Vol18.N50.pp115-128

Mizukami, M. da G. N. (2004). Aprendizagem da docência: Algumas contribuições de L. S. Shulman . *Educação*, 33–50. https://periodicos.ufsm.br/reveducacao/article/view/3838

Morás, N. A. B. (2023). *Um Dispositivo Didático Com Potencialidades Inclusivas: Um estudo a respeito de problemas de estruturas aditivas com números naturais*. [Tese de Doutorado em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná]. https://tede.unioeste.br/handle/tede/6618

Nogueira, C. M. I. (2020). Educação Matemática Inclusiva: Do que, de quem e para quem se fala? In A. M. M. R. Kaleff & P. C. Pereira, *Educação Matemática: Diferentes Olhares e Práticas*. Editora Appris.

Santos, V. L. (2020). *Análise sobre o fenômeno da transposição didática interna no ensino de estatística: Um estudo com a inclusão de um aluno cego em uma sala de aula regular*. [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual da Paraíba]. http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3922

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4. https://doi.org/10.2307/1175860

Toullec-Théry, M. (2015). *Des politiques françaises en matière d'éducation centrées sur l'individualisation, la personnalisation plus que sur le collectif: Quels effets sur les apprentissages des élèves ?* França: CNESCO. https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2016/09/toullec1.pdf