EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p534-552

Integração de abordagens pragmáticas e dedutivas no ensino de limites: conceito e teorema em ação

Integration of pragmatic and deductive approaches in teaching limits: Concept and theorem in action

Integración de enfoques pragmáticos y deductivos en la enseñanza de límites: Concepto y teorema en acción

Intégration des approches pragmatiques et déductives dans l'enseignement des limites: concept et théorème en action

Anderson Souza Neves[1]
Universidade Federal da Bahia
Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências
https://orcid.org/0000-0002-6631-194X

Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato[2]
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Doutora em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0001-8403-6032

Luiz Márcio Santos Farias[3]
Universidade Federal da Bahia
Doutor em Didática das Ciências
https://orcid.org/0000-0002-2374-3873

Resumo

Este estudo investiga a construção do conceito de limite de função, um desafio central no ensino de cálculo e análise. Utilizando duas pesquisas empíricas, uma finalizada, com base na teoria dos campos conceituais, e outra em andamento, fundamentada na teoria antropológica do didático, desenvolvemos tarefas que visam integrar modelos epistemológicos pragmáticos e dedutivos. Os resultados preliminares sugerem que essa integração pode minimizar as dificuldades de compreensão dos alunos e reduzir a fragmentação do conhecimento científico na área. Concluímos que a aplicação dessas abordagens teóricas proporciona uma visão mais coesa e eficaz no ensino de limites de função.

Palavras-chave: Limites, Teoremas e conceito em ação, Praxeologias pragmáticas e dedutivas.

[1] asneves@ufba.br
[2] sonia.burigato@ufms.br
[3] lmsfarias@ufba.br

Abstract

This study investigates the construction of the concept of the limit of a function, a central challenge in calculus and analysis teaching. Using two empirical studies, one completed, based on the theory of conceptual fields, and another in progress, based on the anthropological theory of didactics, we developed tasks that integrate pragmatic and deductive epistemological models. Preliminary results suggest that this integration can help students understand the subject and reduce the fragmentation of scientific knowledge in the area. We conclude that applying these theoretical approaches provides a more cohesive and effective vision in teaching the limits of a function.

Keywords: Limits, Theorems and concept in action, Pragmatic and deductive praxeologies.

Resumen

Este estudio investiga la construcción del concepto de límite de una función, un desafío central en la enseñanza del cálculo y el análisis. A partir dos estudios empíricos, uno concluido, basado en la teoría de campos conceptuales, y otro en curso, basado en la teoría antropológica de lo didáctico, desarrollamos tareas que integran modelos epistemológicos pragmáticos y deductivos. Los resultados preliminares sugieren que esta integración puede ayudar a los estudiantes a comprender la materia y reducir la fragmentación del conocimiento científico en el área. Concluimos que la aplicación de estos enfoques teóricos proporciona una visión más cohesionada y efectiva en la enseñanza de los límites de una función.

Palabras clave: Límites, Teoremas y concepto en acción, Praxeologías pragmáticas y deductivas.

Résumé

La présente étude examine la construction du concept de limite de fonction, un défi central dans l'enseignement du calcul et de l'analyse. À l’aide de deux études empiriques, l’une achevée, basée sur la Théorie des Champs Conceptuels, et l’autre en cours, basée sur la Théorie Anthropologique de la Didactique, nous avons développé des tâches visant à intégrer des modèles épistémologiques pragmatiques et déductifs. Les résultats préliminaires suggèrent que cette intégration peut minimiser les difficultés de compréhension des étudiants et réduire la fragmentation des connaissances scientifiques dans le domaine. Nous concluons que l’application de ces approches théoriques fournit une vision plus cohérente et plus efficace de l’enseignement des limites fonctionnelles.

Mots-clés: Limites, Théorèmes et concept en action, Praxéologies pragmatiques et déductives.

Integração de abordagens pragmáticas e dedutivas no ensino de limites: Conceito e teorema em ação.

O presente estudo faz parte do projeto "Concepção de um modelo epistemológico de referência (MER) para o conceito de limites como uma ferramenta que permite federar nas pesquisas em didática sobre os cálculos e análise", uma pesquisa multi-institucional, financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), que tem como objetivo propor um modelo epistemológico de referência (MER) acerca de limites que permita iniciar uma filtragem aprofundada da coerência epistemológica da investigação em didática e fornecer uma grade de leitura da coerência epistemológica das práticas institucionais para o ensino desse saber.

As ações desse projeto, desenvolvidas através de tarefas propostas em cinco instituições de ensino superior, nas cinco regiões do Brasil, foram pensadas para observar como os estudantes, professores e pesquisadores compreendem e desenvolvem suas ações acerca do ensino de limites.

A escolha desse objeto pelos investigadores é salutar, uma vez que esse objeto tem sido uma preocupação central dos pesquisadores da didática da matemática há várias décadas (Tall & Vinner 1981; Cornu, 1983, 1991; Schneider, 1988; Tall, 1991; Job, 2011). Essa centralidade não é acidental. Se por um lado, os limites constituem a pedra angular da integração entre cálculo e análise, por outro lado, as recorrentes e resistentes dificuldades de compreensão e apropriação deste conceito são atestadas por alguns investigadores de todo o mundo (Tall & Schwarzenberger, 1978; Tall, 1991; Williams, 1991; Bezuidenhout, 2001; Parameswaran, 2007; Schneider, 1988; Job, 2011; Job & Schneider, 2014).

Apesar de décadas de pesquisas sobre o tema, os pesquisadores ainda não encontraram uma situação de ensino que aborde todas essas dificuldades (Job & Schneider, 2010). Ao mesmo tempo, esse conjunto de pesquisas levou a uma espécie de paradoxo. Os pesquisadores não conseguiram mitigar as lacunas desse problema, mas multiplicaram as visões e abordagens relativas ao estudo sobre o ensino dos limites, levando-o a uma forma de fragmentação do conhecimento científico na matéria (Job & Schneider, 2010; 2014). Concebemos que essa fragmentação ocorre porque os referenciais teóricos destas pesquisas podem ser difíceis de articular, o que levanta a questão do significado dos resultados das pesquisas obtidas e como vinculá-las.

Em função disso, trouxemos para esta discussão elementos produzidos em duas pesquisas, uma já finalizada e outra em andamento, que integram o projeto acima. Essas pesquisas foram levantadas como forma de construção do MER mencionado, mas consideram os trabalhos já finalizados e em desenvolvimento, para que possam colaborar com o processo de construção do conceito de limite de função com alunos do Brasil, na disciplina de Cálculo I da licenciatura e bacharelado do curso de matemática.

O conceito de limite de função vem sendo objeto de diversos estudos por ser considerado de difícil compreensão, fato corroborado pela maioria dos professores experientes da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (Baldino, 1995; Giraldo, 2004 & Tall, 1991). Há argumentações contra o seu ensino para estudantes de cursos como engenharia, considerado como mais indicado para os cursos de matemática (Fernandes, 2015). Todavia, os estudos mostram que mesmo nesses cursos os alunos têm muita dificuldade em diversos conceitos que são mobilizados para lidar com as situações envolvendo a construção do conceito de limite, tais como o conjunto dos números reais, as funções e a noção de infinito, que são consideradas de difícil compreensão (Artigue, 1995)

Em uma das pesquisas que trouxemos, foram estudadas as ações dos alunos ao lidar com situações para introdução do conceito de limite de função, pautadas principalmente na teoria dos campos conceituais (TCC). Primeiramente, delimitamos os conceitos envolvidos na construção do conceito de limite nas instituições, no caso o Brasil e a França, que seriam investigadas, bem como no nível de ensino em que este conceito é introduzido e nas dificuldades elencadas em pesquisas. A metodologia deste estudo já finalizado foi pautada na aplicação de atividades, questionários e entrevistas. As ações dos estudantes ao lidarem com as tarefas implementadas por esses instrumentos foram modelizadas conforme metodologia de análise construída. No caso específico, são as regras em ação, que são responsáveis pelo gerenciamento temporal das ações do sujeito, envolvendo meios de tomada de informação e, ao mesmo tempo, de controle na ação; e dos teoremas em ação, que são os conhecimentos matemáticos imbricados as regras em ação, e são responsáveis pela sua organização. Esses elementos teóricos nos permitiram estudar filiações e rupturas importantes nos esquemas dos estudantes e, assim, investigar o processo de construção do conceito de limite.

A outra pesquisa, em andamento, está alicerçada na teoria antropológica do didático (TAD), uma vez que esta teoria possibilita estudar a matemática por meio da antropologia humanas, a partir de atividades, considerando as instituições, pessoas, objetos e suas relações entre si e entre eles. Essas atividades são pensadas a partir das praxeologias (Chevallard, 1999), ou seja, é uma teoria que busca explicar a lógica por trás das ações humanas, fundamentada na ideia de que as pessoas agem de forma intencional e com propósito; em especial, as ações humanas no processo de compreensão do conceito de limites de funções.

As pesquisas de Job e Schneider (2014) caracterizaram que as dificuldades tanto no ensino quanto na aprendizagem de limites estão imbricadas nos obstáculos epistemológicos, diante da primazia dos modelos epistemológicos dominantes nas instituições. Nesse sentido, esses autores indicam que os modelos epistemológicos que estruturam o ensino de limites são formados, basicamente, por dois modelos praxeológicos, um pragmático e um dedutivo. O modelo praxeológico pragmático vive na noção intuitiva de limites através da manipulação entre números, tabelas e gráficos. Já o modelo praxeológico dedutivo é estruturado por meio da definição formal, usando ε e δ.

A metodologia deste segundo estudo, que integra o estudo maior, que é a construção de um MER, foi pautada pelo desenvolvimento de tarefas propostas, por meio de ateliers e engenharias (Artigue, 1988), e pela confrontação das praxeologias esperadas pela instituição (professor, pesquisador, universidades) com as praxeologias pessoais desenvolvidas pelos estudantes nas tarefas propostas. Esses resultados possibilitaram a construção de sequências didáticas que permitem a integração entre os modelos praxeológicos citados, minimizando a ruptura do ensino de limites pelos momentos de ensino pela noção intuitiva e definição formal.

Elementos teóricos envolvidos neste estudo

A construção do conceito de limite de função envolve diversos conceitos que são considerados de difícil compreensão pelo estudante, como o de função e o conjunto dos números reais. Artigue (1995) argumenta sobre a importância de se considerar isso quando estamos interessados na aprendizagem do conceito de limite. Desse modo, um dos estudos realizados que compõem este artigo se apoia em Vergnaud (2009), para quem um conceito não pode ser analisado de forma isolada: se estivermos interessados na sua aprendizagem, é preciso considerar um conjunto de situações envolvendo esse conceito, bem como o conjunto de conceitos envolvidos nessas situações. Em função disso, Vergnaud propõe o estudo do campo conceitual.

É por meio das situações que o conceito adquire sentido para o estudante e é investigando-o em ação, ou seja, lidando com essas situações, que podemos investigar o processo de construção do conhecimento (Vergnaud, 2009). Para resolver uma situação, o aprendiz mobiliza o que o autor denomina de esquema, um modo de organização da ação para um conjunto de situações onde se reconhece certa semelhança com outras já vivenciadas. Um esquema comporta: "Um objetivo, subobjetivo e antecipações; regras em ação de tomada de informação e de controle; invariantes operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação; e possibilidades de inferências em situação" (*ibid*., 2009, p. 21).

Assim, diante de uma situação, o estudante identifica o que precisa ser feito, seu objetivo, e por meio das regras em ação de tomada de informação e controle, escolhe ou aciona os invariantes operatórios que são os conhecimentos matemáticos necessários para lidar com a atividade. De outro modo:

> A conduta não é formada somente por ações, mas também por informações necessárias à continuidade da atividade, e os controles que permitem ao sujeito ter segurança de que ele fez o que pensava fazer e que ele continua no caminho escolhido.
>
> [...]
>
> Ainda mais decisivo do ponto de vista cognitivo são os invariantes operatórios uma vez que os conceitos em ação permitem retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas em ação necessários ao cálculo, ao mesmo tempo, dos objetivos e subobjetivos suscetíveis de serem formados, e de regras em ação, de tomada de informação e de controle permitindo atingi-los. (Vergnaud, 2009, p. 22)

Foram esses invariantes operatórios observados nas ações dos estudantes que permitiram que estudássemos os conhecimentos que eles mobilizaram ao lidarem com as situações para construção do conceito de limite de função. Assim, modelizamos as produções dos alunos em regras em ação e teoremas em ação. Uma síntese dessa modelização de análise pode ser observada na Figura 1.

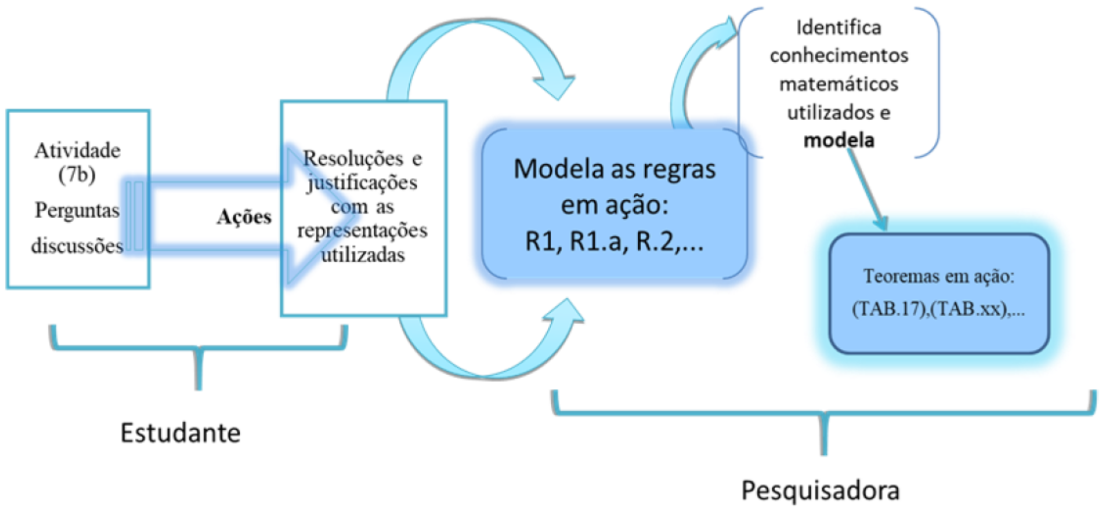


Figura 1.

Metodologia de análise da pesquisa (Fase I da metodologia de análise de Burigato (2019, p.88).

Podemos aperfeiçoar as análises das ações dos estudantes a partir da TAD (Chevallard, 1999). É no seio desta teoria que encontramos elementos para desconstrução e reconstrução de praxeologias matemáticas, que podem ser representadas por $[T, \tau, \theta, \Theta]$ e estruturadas pelos blocos do saber-fazer (práxis) $[T, \tau]$, voltado para o saber prático, e do saber (logos) $[\theta, \Theta]$, que é o discurso epistêmico que justifica as escolhas da práxis. Entendemos que a integração [T, τ]$\leftrightarrow$[θ, Θ] possibilita a construção de um modelo do saber (matemático) que postula que qualquer atividade pode ser conceituada como uma tarefa (T), por exemplo, calcular um limite ($f(x)=L$); uma técnica (τ), que é uma das muitas formas para o cálculo de um limite, a depender da tarefa (T). Caso a tarefa refira-se a um cálculo de limite por meio de uma representação gráfica de uma função, o estudante pode usar a intuição (τ_1), neste caso, visual. E para determinar o limite de uma função algébrica, um estudante pode realizar esse cálculo por meio de expressões algébricas (τ_2).

A tecnologia (θ) é uma justificativa da técnica (τ) usada para resolver a tarefa (T), ou melhor, uma tecnologia (θ_1) para (τ_1) é a intuição; ou seja, visualmente, quanto mais próximo f estiver de L, mais próximo x estará de a. A tecnologia (θ_2) deve ser a lógica de predicativos ($\exists$ - existe; $\forall$ - para todo) e as inequações modulares ($0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$). Por sua vez, a teoria (Θ), que é um nível de justificação mais abstrato do que a tecnologia, para estes exemplos, é a densidade dos números reais, ou seja, haverá um número real entre dois números reais quaisquer.

A partir das ideias propostas por Chevallard (1992) e pelos elementos praxeológicos citados, é possível representar as ações dos sujeitos nas instituições em relação ao saber desenvolvido nas classes, compreendendo a atividade matemática como outra atividade humana qualquer incorporada às instituições. Esses elementos teóricos nos auxiliam na compreensão da forma como o saber limites foi sendo desenvolvido, e seu ensino pensado e organizado ao longo do tempo. É através dessas observações que se torna possível a reconstrução praxeológica para minimizar as lacunas na compreensão do conceito de limite (Doumbia, 2020).

Essas observações são essenciais para a constituição de um MER alicerçado em aspectos históricos e epistemológicos sobre os limites, o que possibilita o surgimento de algumas questões: Quais saberes integravam o saber limites? Quais estruturas ainda não existiam? Por que o saber acerca de limites estava organizado de tal forma? O que e de que forma mudou esse saber ao longo do tempo? Estas questões são fundamentais para compreendermos as ações humanas no processo de evolução do saber em questão e, consequentemente, as práticas institucionais dos sujeitos que ensinam e estudam limites.

Para o processo de reconstrução praxeológica, nos aproximamos dos trabalhos de Job e Schneider (2010, 2014). Estes autores indicam que há dois modelos praxeológicos que sobressaem no ensino de limites: pragmático e dedutivo. O primeiro tem uma proposta mais dinâmica pela manipulação da noção intuitiva, utilizando as expressões “tende a” ou “se aproxima de” carregado de grandes reforços em tabelas, gráficos, expressões algébricas, etc., que mobiliza o argumento genérico de "falta de precisão" e de "falta de simbolização." Já o segundo tem uma proposta estática, usando a definição formal, por meio de ε e δ, e precisa que se inicie na seguinte definição: Seja f uma função e a um ponto contido no domínio de f. Dizemos que f tem limite L, no ponto a, se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer x pertencente ao domínio de f, a condição abaixo seja satisfeita: ($0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$). O limite L, quando existe, é único e representamos por: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

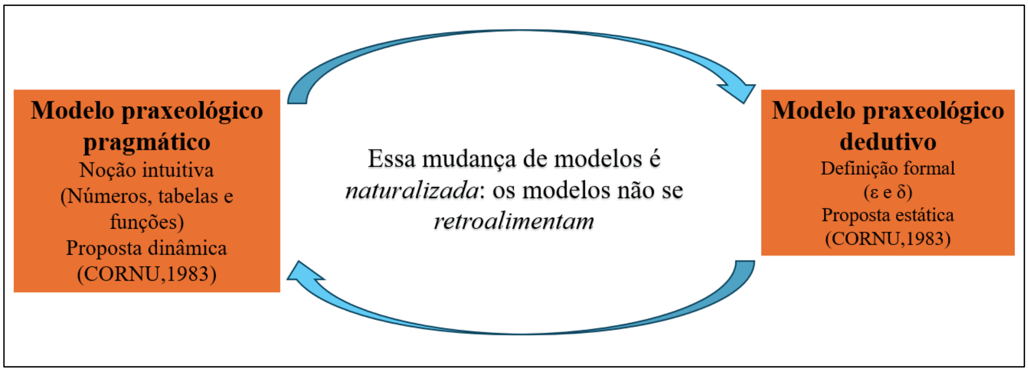


Figura 2.

Naturalização de mudança de modelos praxeológicos: pragmáticos e dedutivos (Os autores)

Assim, enquanto nas praxeologias pragmáticas a tarefa (T) consiste em avaliar as características que existem como objetos que ainda não foram definidos formalmente, as técnicas (τ) são justificadas usando argumentos pragmáticos enquanto a validação da técnica, a tecnologia(θ), utiliza argumentos dedutivos, ou seja, a justificativa para praxeologias pragmáticas repousam sobre as praxeologia dedutivas. Esse fenômeno é indicado por Farias, Carvalho e Teixeira (2018) como a *perda da razão de ser* para o ensino do conceito de limites, que se caracteriza pelo "desaparecimento do significado do saber no processo transpositivo (nas praxeologias matemáticas institucionais)" (Farias, Carvalho, & Teixeira, 2018, p. 104) nas práticas institucionais de ensino (Bosch & Gascón, 2010) quando os conceitos, tanto praxeologias pragmáticas quanto pelas praxeologias dedutivas, não são devidamente explorados em situações em que os professores estudam e ensinam os saberes institucionais.

Logo, entendemos essa mudança entre modelos praxeológicos que não se retroalimentam, que é tratada com uma certa naturalidade (Figura 2) e é dominante nas instituições, e que Job (2011) indica como o fenômeno da naturalização (Job & Schneider, 2014), e que, de certa forma "inviabiliza" que os professores problematizem o conceito de limites para produzir avanços significativos.

Encaminhamentos metodológicos

O estudo aqui apresentado é de natureza qualitativa (Garnica, 2001), uma vez que esta modalidade de pesquisa, que se aproxima do método de investigação em didática da matemática, é do tipo experimental, diante das descrições e interpretações tanto das perspectivas esperadas pelos professores e/ou pesquisadores quanto das variações das análises relatadas pelo pesquisador. Além disso, o autor acrescenta que os elementos essenciais da pesquisa qualitativa está na

> [...] preponderância dos processos indutivos, a predominância de dados descritivos, a ênfase ao processo em detrimento do produto, a necessidade de questões geradoras e regras bem definidas de ação para a análise dos dados coletados, critérios de avaliação públicos, discutidos e acordados pela comunidade, e a responsabilidade do pesquisador em relação à sua pesquisa [...] definida em um contexto teórico-metodológico qualquer." (*ibid*., 2001, p.8-9)

Nesse contexto, essa investigação considerou a proposta de análise de tarefas em duas perspectivas: à luz da TCC, em especial, a construção dos teoremas em ação, e a segunda, na perspectiva de como esses teoremas em ação possibilitam a compreensão dos modelos pragmático e dedutivo que, desenvolvidos de forma integradas, podem minimizar os obstáculos da aprendizagem de limites.

Considere o limite $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$ e suponha que encontramos o valor deste limite investigando o intervalo do eixo dos y próximos de 2 mas agora escolhemos o "tamanho" desta proximidade, no caso com amplitude 0,5 que vamos chamar de épsilon (ε), ou seja, $\varepsilon = 0{,}5$. Assim, estamos olhando os valores da função no eixo y em que $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$, ou de outro modo $1{,}5 < f(x) < 2{,}5$.

a) Encontre valores no eixo x que correspondam exatamente aos valores da função com a amplitude ε=0,5 e explique como você fez para encontrá-los.

b) Escreva a resposta encontrada no item (a) na forma de desigualdade e veja se consegue determinar uma amplitude para o intervalo encontrado e denomine de δ(delta).

c) Pensando agora que estamos interessados em escolher valores para x para que todo f(x) correspondente fique $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$, poderíamos ter outros valores para δ? Justifique sua resposta.

d) Somando 2 em todos os membros das desigualdades $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ obtemos $-\varepsilon < f(x) - 2 < \varepsilon$ e escrevendo na forma de módulo, temos $|f(x) - 2| < \varepsilon$. Escreva na forma de módulo a desigualdade encontrada no item (b).

Figura 3.

Primeira atividade escolhida, tarefa 1 (Retirado de Burigato, 2019, p. 100).

Escolhemos, para apresentar neste artigo, as situações envolvendo tabelas, observação de representação gráfica e manipulações algébricas para, assim, podermos discutir as produções com as representações mais utilizadas pelo ensino (Burigato, 2019). Iremos denominá-las de tarefa 1, Figura 3, e de tarefa 2, Figura 4.

Sabendo que $\lim_{x \to 3} 2x - 5 = 1$ pela noção intuitiva, confira se o valor encontrado para o limite pode ser verificado pela definição formal e responda os itens em seguida.

a) Relacione as desigualdades encontradas, ou os módulos, da definição por épsilon e delta com a definição intuitiva de limite e justifique como fez estas relações.

b) Faça a representação gráfica da função dada com os intervalos encontrados.

c) Explique o limite da função com suas palavras, levando em consideração os itens (a) e (b), utilizando tanto a definição formal, como a intuitiva.

Figura 4.

Segunda atividade escolhida, tarefa 2 (Retirado de Burigato,2019, p. 102).

As produções do estudante foram modelizadas em teoremas em ação, considerando os resultados de pesquisas sobre o conceito de limite de função em um ponto (Burigato, 2019), e as listas de atividades e livro didático utilizados pela professora da disciplina, como exibido na Figura 5. Organizados em duplas, um estudante resolvia a atividade em uma folha de papel e em seguida discutia com seu colega as suas escolhas para lidar com a atividade. Assim, os dados foram produzidos por meio das resoluções escritas nas folhas de atividades e nos áudios das discussões realizadas.

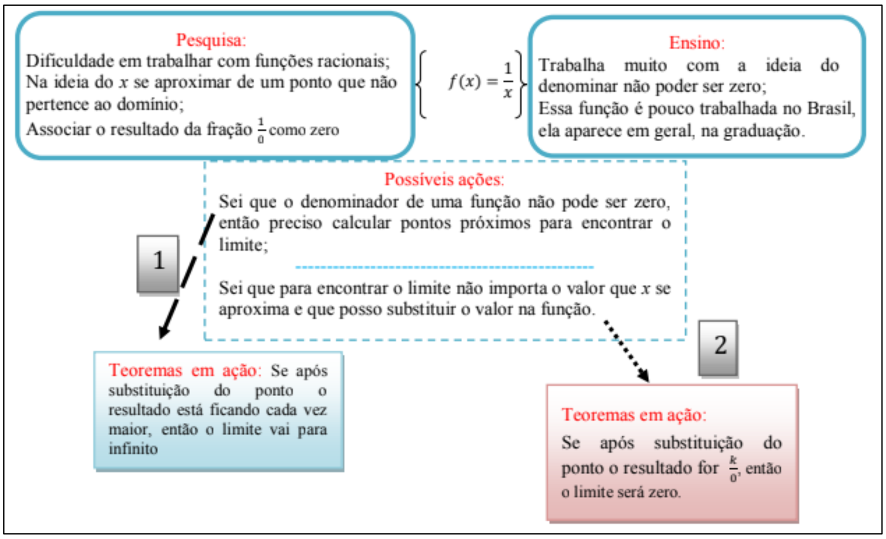


Figura 5.

Síntese d a modelagem (Exemplo da modelagem realizada por Burigato, 2019, p.115).

Os elementos que serão apresentados neste texto seguiram os índices conforme explicitados na Figura 1, no caso os teoremas em ação e regras em ação.

Discussões e análises

A primeira atividade, tarefa 1, envolvia elementos da definição intuitiva com os quantificadores da definição formal e, nesta situação, o estudante ainda não havia sido apresentado à definição formal de limite de função em um ponto. Estávamos interessados em investigar as adaptações dos esquemas mobilizados pelo sujeito ao lidar com as noções de proximidade envolvendo um "tamanho" para os elementos de um intervalo, que no caso era um épsilon particular.

A representação da tarefa era $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, e o estudante inicialmente fez a simplificação da função para resolver o item (a) que envolvia um intervalo dado para valores da função e, com a manipulação das inequações, foi respondendo aos outros itens. Apresentamos um dos teoremas em ação modelizados, com sua respectiva regra em ação.

> Teorema em ação (TAB.vii): *Se uma função f pode ser simplificada, então o limite da função f simplificada será igual ao limite da função f.* Vinculado a regra em ação (RB.4): Quando preciso encontrar o limite de uma função racional, eu sei que posso simplificar a expressão algébrica da função para trabalhar com uma expressão mais simples, para facilitar os cálculos. (Burigato, 2019, p.119)

Ele simplificou a expressão algébrica da função dada para o limite e substituiu nas inequações $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$, obtendo $2 - 0{,}5 < x + 1 < 2 + 0{,}5$, e fez a manipulação correta obtendo $1{,}5 < x < 2{,}5$. Neste item, um dos problemas que o estudante discutiu com o seu colega foi o fato da resposta, no caso o intervalo, estar em termos de x. Modelizamos as ações do aluno em um teorema em ação incorreto:

> Teorema em ação (TAB.3): *No estudo de limite de funções, sempre é preciso trabalhar com elementos do domínio para obtermos a resposta em termos de f(x).* Vinculado a regra em ação: Se estou resolvendo qualquer atividade com funções, eu sei que preciso trabalhar com os elementos do domínio. (Burigato, 2019, p.120)

Esta foi uma dificuldade do aluno que consideramos importante para o trabalho com a definição formal. Em geral apresenta-se a definição intuitiva que trabalha a aproximação de pontos do domínio a um determinado ponto, observando-se o que acontece com os valores da função; entretanto, na definição formal, faz-se o caminho contrário, pois parte-se da análise de um intervalo, dado por um tamanho épsilon, em que os valores da função estão se aproximando do valor da função, que é o limite. Para este estudante isso não teria sentido, ele argumenta com seu colega que tinha feito diferente "*mas acho que você tem de deixar assim como f(x)*".

A transição dos aspectos intuitivos para o formal é naturalizada (Job, 2011; Job & Schineider, 2014) de modo que, neste caso, a operação com elementos de uma função fez com que o estudante não conseguisse compreender o resultado encontrado na manipulação algébrica. Ele sabia que tinha realizado as operações algébricas corretamente, mas simplesmente ignorou-as e substituiu-as por *f(x)*. O esquema mobilizado para situações anteriores e que foram efetivos são os que ele mobiliza nas que ele identifica semelhanças. São as rupturas necessárias e que fariam com que o ele conseguisse construir esquemas para o novo conceito que estava em construção, mas ele não consegue romper com esses invariantes operatórios e fazer as novas filiações, que são fundamentais para lidar com a definição formal de limite Vergnaud (1990).

As lacunas supracitadas na compreensão de limites ficam evidentes quando o estudante adota uma práxis [T, τ] de um modelo pragmático e tenta justificar essa prática, um logos [θ, Θ] no modelo dedutivo.

Neste aspecto, Artigue (1995) nos traz que o estudante não tem o conceito de função bem construído quando precisa lidar com atividades envolvendo o conceito de limite de função. Ela argumenta que são essas situações envolvendo o limite que trazem aspectos ainda não vivenciados que vão fazer com que o aluno amplie sua compreensão sobre as funções, desconstruindo a ideia de que eles chegam a esse ponto do ensino em que o conceito de limite de funções é apresentado, com o conceito de função bem construído.

Com relação aos novos elementos que estavam sendo apresentados sobre a definição de limite, modelizamos o seguinte teorema:

> Teorema em ação (TAB.i.a) *Se os valores da função se aproximam de um valor L quando x se torna próximo de um dado ponto p, então o limite da função é L quando x tende a p*. Vinculado a regra em ação: Quando estou resolvendo uma atividade sobre limite é preciso lidar com elementos do domínio, eu sei que preciso trabalhar com valores próximos ao ponto que estamos lidando com o limite. (Burigato, 2019, p.121)

Outro ponto pertinente de análise foram as representações utilizadas. O estudante fez a representação gráfica corretamente, mesmo sendo um caso de função em que estudos mostram que eles têm dificuldades tanto em representar como em compreender o que está acontecendo com a função (Segadas-Vianna, Tall, & Vinner, 1981). Inclusive, com sua discussão com o colega que obtivemos por meio dos áudios, inferimos que foi essa representação que o auxiliou nas escolhas dos invariantes operatórios mobilizados na atividade e, no caso, de ter alterado o resultado da manipulação algébrica das inequações.

A tarefa 2 foi proposta após a correção da tarefa 1, em outro dia, juntamente com a apresentação e discussão da definição formal de limite de função em um ponto. O estudante fez a substituição da função dada na expressão em módulo $|(2x - 5) - 1| < \varepsilon$ e chegou à inequação $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ele percebeu que tem parte dessa inequação na outra inequação $0 <$

$|x - 3| < \delta$, mas não conseguiu o delta em termos do épsilon, como foi realizado na tarefa anterior. Ele argumentou que deveria achar um número específico e que era estranho deixar o número com uma letra. Modelizamos com o teorema em ação incorreto (TAB.2): *O resultado de uma atividade com uma expressão algébrica sempre será um número*. E quando precisa relacionar o épsilon com o delta, ele retoma a ideia de que é preciso sempre analisar os valores de x, do domínio para saber o que acontece com os valores da imagem, “[...] para encontrar <*o intervalo de* $|f(x) - 1| < \varepsilon$ *, é preciso encontrar os valores de f(x) encontrando os x próximos a 3*>” (Burigato, 2019, p.124), mobilizando novamente o teorema em ação (TAB.3) que citamos anteriormente.

Nesta situação o resultado da manipulação algébrica novamente foi problemático, principalmente quando o estudante tenta fazer filiações com os conhecimentos sobre função. Os invariantes operatórios mobilizados, no caso os dois teoremas em ação que citamos, (TAB.2) e (TAB.3), entram em conflito com os novos aspectos com que o estudante precisa lidar para construir um novo conceito; mesmo assim ele teve dificuldade em romper com esses elementos de seu esquema.

Essas rupturas são necessárias e, ao mesmo tempo, é preciso construir invariantes apropriados para o conceito de limite. Um teorema em ação incorreto mobilizado nessa atividade foi o (TAB.1) *Se o limite existe, então o δ deve igual ao ε dado.* Nesse momento o estudante buscava refletir sobre o “tamanho” necessário para que o limite existisse e, novamente, as representações gráficas e algébricas causaram confusões. Em um momento da discussão, o estudante argumentou que acreditava que deveria “criar” um delta para relacionar com o épsilon. Acreditamos que os teoremas em ação incorretos (TAB.2) e (TAB.3) contribuíram para este problema, sendo importante investir em situações para desconstruir esses conhecimentos equivocados.

Esses elementos mobilizados nas situações envolvendo o campo conceitual de limite de função podem ser analisados por meio da TAD, através da discussão dos aspectos da praxeologia pragmática, as tarefas e os esquemas mobilizados para resolver esses tipos de praxeologias com os esquemas que podem auxiliar a imersão e o desenvolvimento das praxeologias dedutivas. No Quadro 1 a seguir, trazemos alguns dos elementos identificados nas ações dos estudantes, conforme as representações mobilizadas por ele.

Elementos identificados nos esquemas mobilizados

Obtidos pelas respostas na forma algébrica:

- Se a função em que vou calcular o limite não tem nenhuma restrição no ponto de investigação do limite, então posso substituir o ponto na variável x da função;
- Se estou lidando com limite de funções, então sempre preciso trabalhar com elementos do domínio para obter a resposta em termos de *f(x);*
- Eu trabalho sempre com elementos do domínio das funções.
- Se o limite existe, então o δ deve ser igual ao ε dado;
- Eu faço cálculos de vários pontos próximos ao ponto para ver limite quando x tende a *p.*
- Se uma função *f* pode ser simplificada, então o limite da função *f* simplificada será igual ao limite da função *f*;
- Eu simplifico a expressão algébrica da função para facilitar os cálculos;
- Eu trabalho com valores próximos ao ponto em que estamos lidando com o limite;
- O resultado de uma atividade com uma expressão algébrica sempre será um número.

Obtidos pelas respostas na forma de linguagem natural, escrita ou oral:

- Para descobrir o limite, eu encontro o *y* para valores de x próximos ao ponto de investigação do limite.
- O limite da função é como a função se comporta quando se aproxima de um ponto *x* ou *f(x)*.
- Para obter o limite tendendo a um ponto *p*, precisamos descobrir valores de *f(x)* próximos ao ponto *p*.
- O limite pode ser diferente do valor que a função assume no ponto de investigação do limite.
- A função, quando *x* tende a *p*, tende a *L*, mas $f(p) \neq L$.

Figura 6.

Elementos do campo conceitual identificado nas situações conforme (Fonte: Parte do quadro da pesquisa (Burigato, 2019, p.145)).

Os elementos do campo conceitual apresentados na Figura 6, indicam o predomínio do modelo pragmático por meio da noção intuitiva. Além disso, destacamos que prevalece o domínio algébrico sobre os domínios numéricos e gráficos, como pode ser observado na Figura 7.

Realizações representacionais e formais do conceito de Limite.

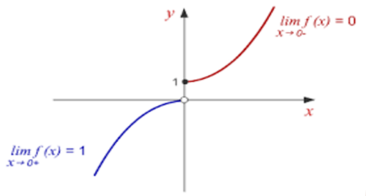
x	f(x)	x	f(x)
1	2	3	8
1,5	2,75	2,5	5,75
1,8	3,44	2,2	4,64
1,9	3,71	2,1	4,31
1,95	3,8525	2,05	4,15250
1,99	3,97010	2,01	4,03010
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Números reais, infinitamente pequenos e grandes, funções e quantidades.

x	$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{3x-6}$	x	$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{3x-6}$
1,9	1,20333333	2,1	1,47000000
1,99	1,32003333	2,01	1,34670000
1,999	1,33200033	2,001	1,33466700
1,9999	1,33320000	2,0001	1,33346667
1,99999	1,33332000	2,00001	1,33334667
1,999999	1,33333200	2,000001	1,33333467

Livros didáticos

mudanças de representações e procedimentos dos Limites.



a) $\lim_{x\to 3}(x^2+2)$ b) $\lim_{x\to 4} x$ c) $\lim_{x\to 100} 7$ d) $\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{2x+1}$ e) $\lim_{x\to 5}\frac{x+2}{x-4}$

f) $\lim_{x\to -2}(3x-1)$ g) $\lim_{x\to -3}(-x)$ h) $\lim_{x\to 7} 100$ i) $\lim_{x\to -1}\pi$ j) $\lim_{x\to \pi}(-1)$

Figura 7.

O domínio algébrico sobressai sobre os domínios numéricos e gráficos.

Observamos nas interações e respostas dos estudantes uma forte influência do modelo pragmático nos domínios numérico, algébrico e gráfico, nesta ordem. O primeiro domínio está fortemente conectado ao trabalho sobre as tabelas. Já o segundo, está ligado às manipulações algébricas, e o terceiro às construções gráficas das funções desenvolvidas nos domínios anteriores.

A falta de compreensão dos elementos que contemplam as funções é bastante evidente, em especial, sob as manipulações do saber domínio de funções. Ao não compreender esse conceito e suas propriedades que alimentam a ideia intuitiva do conceito de limite, o estudante dificilmente vai compreender a relação que deve existir entre o delta (δ) e o épsilon ε. Se não há a compreensão do modelo pragmático, consequentemente, os estudantes não vão compreender o modelo dedutivo, apenas utilizá-lo para mostrar os valores possíveis para δ e ε para mostrar a existência de um limite, desconsiderando os elementos da própria definição formal de limites. Por conseguinte, a transição entre esses dois modelos é naturalizada.

Pela definição formal, quando $x \epsilon D(f)$, se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, temos que se $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Dizemos que, quando existe, f tem limite L, no ponto a, é único e representamos por: $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Os quantificadores ∀ (para todo) e ∃ (existe) são fundamentais para o entendimento de que se pode assumir quaisquer valores de ε para determinar um valor de δ, de forma a ter aproximações cada vez menores, ou seja, determinar o limite de uma função próximo de determinados pontos do domínio.

Esses elementos auxiliam as praxeologias dedutivas. Mas as representações dificultam e limitam a mobilização de conhecimentos para o desenvolvimento de praxeologias dedutivas.

Considerações finais

As discussões apresentadas nesse artigo sobre o conceito de limite de função a partir de duas pesquisas, uma já finalizada e outra em desenvolvimento, apresentam ideias iniciais sobre um modelo epistemológico de referência dinâmico e que busca considerar aspectos epistemológicos que possibilitem a transição dos modelos praxeológicos pragmáticos e dedutivos, minimizando o fenômeno da naturalização. Esse processo de transição ainda está sendo desenvolvido nesse projeto.

Observamos que os estudantes apresentaram lacunas em uma série de conceitos que vivem no modelo praxeológico pragmático, como as articulações dos domínios numéricos, algébricos e gráficos das funções, prevalecendo apenas o domínio algébrico, diante da falta de integração entre as representações que, consequentemente, dificultam e limitam a mobilização de conhecimentos.

Tocante ao modelo dedutivo, observamos que na definição formal, os estudantes consideram que devem buscar valores cada vez mais próximos de x para encontrar os valores da imagem cada vez mais próximos de $f(x)$, quando, na verdade, a pesquisa de Doumbia (2020) caracterizou essa forma de trabalho como um obstáculo epistemológico, uma vez que a definição indica a ideia oposta: quando ε se aproxima cada vez mais de zero ($f(x)$ está mais próximo de L) δ estará muito mais próximo de zero (x estará mais próximo de a). Sendo assim, é fundamental que os atores que promovem o ensino de limites compreendam esse modelo praxeológico, possibilitando a assimilação das propriedades e teoremas que seguem essa definição.

Portanto, compreendemos que é fundamental uma modificação nas propostas de ensino que considere tarefas que possibilitem a integração entre os domínios e suas representações e consequentemente, os dois modelos praxeológicos, pragmáticos e dedutivos.

Agradecimentos

A pesquisa que originou o presente artigo contou com o apoio do CNPq por meio do projeto universal, que está sendo fundamental para a continuidade dos estudos para a constituição de um MER para o ensino do conceito de limites.

Referências

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions. 9(3). p. 281-308.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los princípios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: GÓMEZ, P. (ed.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. p. 97-140.

Bezuidenhout, J. (2001) Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 32(4). p. 487-500.

Bosch, M. Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica e las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estúdio e investigación", IN: BRONNER, Alain et al. *Apports de la théorie anthropologique du didactique*: Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. IUFM de l'académie de Montpellier, p.55-90.

Burigato, S. M. M. S. (2019). *Um Estudo sobre a Aprendizagem do Conceito de Limite de Função por Estudantes nos Contextos Brasil e França*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches em Didactique dês Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage, 12 (1). p.73-112.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(2).

Cornu, B. (1983) *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et obstacles*. [Docteur en Mathématiques Pures, L'Université Scientifique et Médicale de Grenoble].

Doumbia, C. O. (2020) *Un modèle didactique de référence pour la construction des savoirs et l'actualisation des connaissances sur la notion de limite au Mali*. Tese [Doutorado em Ensino, filosofia e história das Ciências]. Universidade Federal da Bahia. Universidade Estadual de Feira de Santana], Salvador.

Fernandes, J. A. N. (2015). *Ecologia do Saber: O Ensino de Limites em um Curso de Engenharia.* Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) Universidade Federal do Pará, Belém.

Farras, B. B.; Bosch, M.; Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. In: *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo. 15(1). p.1-28.

Farias, L. M. S.; Carvalho, E. F.; Teixeira, B. F. (2018) O trabalho com funções à luz da incompletude do trabalho institucional: uma análise teórica. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, 20(3), p. 97-119.

Garnica, A. V. M. (2006). *Pesquisa em história da Educação Matemática no Brasil*: sob o signo da pluralidade. Coleção História da Matemática para professores. Livraria da Física.

Job, P. (2011) *Etude du rapport a la notion de definition comme obstacle a l'acquisition du caractere lakatosien de la notion de limite par la methodologie des situations fondamentales/adidactiques*. [Docteur en Sciences, Faculte des Sciences, Didactique des sciences mathematiques, Universite de Liege].

Job, P. & Schneider, M. (2010) Une situation fondamentale pour le concept de limite? Question de langage, de culture? Comment la Théorie Anthropologique du Didactique permet-elle de problématiser cette question? *Actes du IIe congrès international sur la TAD*. Uzès (France). p. 615-632.

Job, P., Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM Mathematics Education*. 46, p. 635–646.

Parameswaran, R. (2007) On Understanding the Notion of Limits and Infinitesimal Quantities. *Int J Sci Math Educ* 5. p. 193–216.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*. [Docteur en Sciences, Faculte des Sciences. Unîversite Catholique de Louvain.

Segadas-Vianna, C. (2016). Obstáculos Referentes ao Desenvolvimento do Conceito de Função. In: FONSECA, L. S. (Org.). *Didática do Cálculo: Epistemologia, Ensino e Aprendizagem.* São Paulo: Editora Livraria da Física, p. 112-121.

Tall, D. O.; Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*. v. 82. p. 44 – 49.

Tall, D.; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 3, n. 12, p. 151-169.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.

Vergnaud, G. (2009). O que é aprender? In Bittar, M. e Muniz, C. A. *A aprendizagem Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*. (pp. 13-35). Curitiba, Editora CRV.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10 (2, 3), p.133-170.

Williams, S. R. (1991) Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*. 22(3), p. 219–236.