EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p174-199

Uma proposta de modelo epistemológico de referência para o estudo de limites dialogado via mecanismos de atenção

A proposal for an epistemological reference model for the study of the limits in the dialogue of attention mechanisms

Una propuesta de modelo de referencia epistemológico para el estudio de los límites a través del diálogo a través de mecanismos de atención

Une proposition de modèle épistémologique de référence pour l'étude des limites en dialogue avec les mécanismes d'attention

Vinicius Souza Bittencourt[1]
Universidade Federal do Oeste da Bahia
Doutorado em Matemática
https://orcid.org/0000-0003-3884-2919

Edmo Fernandes Carvalho[2]
Universidade Federal do Oeste da Bahia
Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências
https://orcid.org/0000-0002-2374-3873

Laerte Silva da Fonseca[3]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe
Doutorado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0002-6959-2652

Resumo

Neste ensaio teórico, apresenta-se propostas de tarefas e análises praxeológicas em um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral ressignificando a difusão da noção de limite de uma função pela definição. O referido MER tem como pressuposto epistemológico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard e as ideias de processamentos atencionais *top-down* e *bottom-up*. A produção de dados desse estudo ocorre via análise praxeológica a partir de tarefas extraídas de livros didáticos e análise *a priori* do MER construído. Como principal resultado, observou-se, por meio da análise inicial das tarefas que compuseram o MER, que os conhecimentos tácitos necessários para a resolução das tarefas podem ser evocados por sua estrutura, enquanto, no

[1] vinicius.bittencourt@ufob.edu.br
[2] edmofc@ufba.br
[3] laerte.fonseca@ifs.edu.br

processamento *bottom-up*, o uso de recursos imagéticos auxilia na focalização da atenção para aspectos conceituais importantes presentes nas tarefas propostas.

Palavras-chave: Limite de uma função, Mecanismos atencionais, Modelo epistemológico de referência.

Abstract

In this theoretical essay, we intend to present task proposals and praxeological analyzes in an Epistemological Reference Model (MER) for teaching Differential and Integral Calculus, giving new meaning to the diffusion of the notion of limit of a function by definition. The aforementioned MER has as its epistemological and methodological assumption the Anthropological Theory of Didactics by Yves Chevallard and the ideas of Top Down and Bottom up attentional processing. Data production for this study occurs via praxeological analysis based on tasks extracted from textbooks and a priori analysis of the constructed MER. As a main result, it was observed through the a priori analysis of the tasks that made up the MER, that the tacit knowledge necessary to solve the tasks can be evoked by their structure, while in bottom-up processing the use of imagery resources helps in focusing paying attention to important conceptual aspects present in the proposed tasks.

Keywords: Limit of a function, Attentional mechanisms, Epistemological model of reference.

Resumen

En este ensayo teórico se presentan propuestas de tareas y análisis praxeológicos en un Modelo de Referencia Epistemológico (MER) para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral, dando un nuevo significado a la difusión de la noción de límite de una función por definición. El mencionado MER tiene como presupuesto epistemológico y metodológico la Teoría Antropológica de la Didáctica de Yves Chevallard y las ideas de procesamiento atencional de arriba hacia abajo y de abajo hacia arriba. La producción de datos para este estudio se produce mediante un análisis praxeológico basado en tareas extraídas de libros de texto y un análisis a priori del MER construido. Como resultado principal, se observó, a través del análisis inicial de las tareas que conformaron el MER, que el conocimiento tácito necesario para resolver las tareas puede ser evocado por su estructura, mientras que, en el procesamiento ascendente, el uso de imágenes Los recursos ayudan a centrar la atención en aspectos conceptuales importantes presentes en las tareas propuestas.

Palabras clave: Límite de una función, Mecanismos atencionales, Modelo epistemológico de referencia.

Résumé

Dans cet essai théorique, des propositions de tâches et d'analyses praxéologiques sont présentées dans un Modèle Épistémologique de Référence (MER) pour l'enseignement du Calcul Différentiel et Intégral, donnant un nouveau sens à la diffusion de la notion de limite d'une fonction par définition. Le REM susmentionné a pour postulat épistémologique et méthodologique la Théorie Anthropologique de la Didactique d'Yves Chevallard et les idées de traitement attentionnel *top-down* et *bottom-up*. La production de données pour cette étude se fait via une analyse praxéologique basée sur des tâches extraites des manuels et une analyse a priori du MER construit. Comme résultat principal, il a été observé, à travers l'analyse initiale des tâches qui composent le MER, que les connaissances tacites nécessaires à la résolution des tâches peuvent être évoquées par sa structure, tandis que, dans le traitement de *bottom-up* l'utilisation de ressources d'imagerie permet de concentrer l'attention sur des aspects conceptuels importants présents dans les tâches proposées.

Mots-clés : Limite d'une fonction, Mécanismes attentionnels, Modèle épistémologique de référence.

Este trabalho apresenta propostas de tarefas e análises praxeológicas em um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Resumidamente, um MER pode ser entendido como uma rede de praxeologias cuja dinâmica se deve contrastar experimentalmente, haja vista ser uma hipótese científica e, ao mesmo tempo, específica do investigador (Fonseca et al., 2014; Ruiz-Munzón et al., 2011).

Tendo como ponto de partida a Didática da Matemática, tal conjunto de princípios, conceitos e teorias orientam a forma como os professores ensinam Matemática e como os alunos aprendem temas sobre essa área do saber. Um MER, certamente, é capaz de definir as crenças sobre o conhecimento matemático, os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da Matemática, os métodos de ensino mais eficazes, entre outros aspectos importantes para a prática educativa; portanto, o MER adotado serve como base para a construção de estratégias de ensino e aprendizagem em Matemática.

De acordo com Sierpińska (1994), um modelo epistemológico na Didática da Matemática deve considerar tanto o conhecimento matemático quanto o pedagógico. Isso significa que é preciso levar em conta não apenas a estrutura lógica e formal dos conceitos matemáticos, mas também as dificuldades e desafios que os estudantes enfrentam ao aprender esses conceitos.

> Nenhum educador pode se dar ao luxo de omitir o conteúdo do conhecimento. É o conteúdo do conhecimento que interessa à Didática, em oposição às teorias pedagógicas gerais. É claro que estes "mecanismos comuns" podem fornecer uma base teórica para considerações e servir na terminologia utilizada para descrever conclusões relativas a problemas de compreensão e tomada de decisões no ensino. No entanto, eles nunca são o objetivo final da pesquisa (Sierpińska, 1994, p. 98, tradução nossa).

Seguindo essa linha de pensamento, da Ponte et al. (2016) destacam a importância de considerar as interações entre os diferentes atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, como professores, alunos e materiais didáticos. Um modelo epistemológico eficaz deve ser capaz de integrar essas diversas dimensões e promover uma abordagem mais dinâmica e contextualizada do ensino da Matemática. Portanto, ressaltamos a necessidade de refletir sobre as concepções prévias dos estudantes em relação à Matemática, pois essas concepções podem influenciar significativamente a aprendizagem. Assim, um modelo epistemológico, na Didática da Matemática, deve levar em conta não apenas o objeto do saber a ser ensinado, mas também as concepções prévias dos alunos e aspectos da cognição que integrarão as condições e/ou restrições para a aprendizagem dos saberes em jogo.

Com base nesses trabalhos, entendemos que um modelo epistemológico, na Didática da Matemática, deve ser flexível o suficiente para dar conta das múltiplas formas de representação e comunicação presentes no contexto do ensino. Dessa forma, é possível garantir uma abordagem mais inclusiva e diversificada do ensino da matemática, promovendo uma aprendizagem mais significativa e autônoma por parte dos estudantes.

Uma de nossas propostas é discorrer sobre o aporte ferramental e teórico necessário à elaboração de um MER. Ao falarmos de "processos cognitivos envolvidos", "percepções e representações mentais dos alunos" e "múltiplas formas de representação e comunicação", percebemos que apenas os objetos matemáticos em si, que vivem a partir do "conhecimento matemático", não são suficientes na elaboração de um MER. Por isso, recorremos a algumas técnicas de Neurociência para basear o modelo, com ênfase nos mecanismos de atenção.

A atenção é um processo cognitivo fundamental para a aprendizagem, pois permite a seleção e focalização de estímulos relevantes para o processamento de informações. De acordo com Posner e Petersen (1990), a atenção pode ser dividida em três redes neurais distintas: a rede de alerta, responsável pela vigilância do ambiente; a rede orientada espacialmente, que direciona a atenção para determinadas áreas do espaço; e a rede executiva, envolvida no controle cognitivo e na resolução de problemas.

No contexto do ensino do Cálculo Diferencial e Integral, os mecanismos de atenção desempenham um papel crucial na compreensão dos conceitos matemáticos complexos. Segundo Zeki (2002), a percepção visual é uma das principais formas de processamento da informação matemática, sendo essencial para identificar padrões, relações e propriedades dos objetos matemáticos. Portanto, ao direcionar a atenção dos alunos para aspectos específicos das equações diferenciais e integrais, é possível que sejam ativados os conhecimentos prévios (processamento *top-down*) para a resolução de tarefas que poderão ser combinados com elementos figurais, que ativarão, por sua vez, o mecanismo *bottom-up* (evocando aspectos sensoriais visuais), para facilitar a compreensão dos estudantes sobre o objeto estudado.

Além disso, as emoções também desempenham um papel importante na regulação da atenção durante a aprendizagem. De acordo com Relvas (2023), elas influenciam diretamente a atividade neural relacionada à atenção seletiva, modulando a priorização de estímulos emocionalmente relevantes. Assim, estratégias que estimulem emoções positivas nos alunos podem aumentar sua motivação e seu engajamento com o conteúdo matemático. Todavia, o aspecto emocional não será objeto de análise deste trabalho.

Outro ponto relevante na elaboração de um modelo epistemológico para o ensino do Cálculo é a metacognição, ou seja, o conhecimento sobre nossos próprios processos cognitivos.

Segundo Schraw et al. (2006), os estudantes que possuem habilidades metacognitivas desenvolvidas são capazes de monitorar e regular sua atenção de forma mais eficiente durante tarefas complexas, como resolver problemas matemáticos. Portanto, incentivar os alunos a refletir sobre seus próprios pensamentos e estratégias pode contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos.

Estamos convencidos de que os mecanismos de atenção desempenham um papel fundamental na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Ao compreender como funciona nossa capacidade de foco e concentração, os educadores podem utilizar estratégias pedagógicas mais eficazes para facilitar a assimilação dos conteúdos pelos alunos. Além disso, considerar aspectos emocionais e metacognitivos na elaboração do modelo epistemológico pode potencializar ainda mais a aprendizagem matemática dos estudantes.

Mecanismos de atenção

As disciplinas da área de Exatas são frequentemente consideradas como desafiadoras e intimidantes por muitos estudantes. Elas exigem um alto nível de abstração e raciocínio lógico, o que pode gerar ansiedade e estresse nos alunos. De acordo com um estudo realizado por Pekrun et al. (2007), a ansiedade em relação a essas matérias está associada a uma baixa autoeficácia e autoestima dos estudantes.

Além disso, tais disciplinas podem impactar negativamente o aspecto psicossocial dos estudantes ao reforçarem estereótipos de gênero e raça. Segundo pesquisa realizada por Steele e Aronson (1995), mulheres e minorias étnicas tendem a se sentir menos capazes em disciplinas de exatas devido à estigmatização social e à pressão cultural. Isso pode levar a uma diminuição do interesse e da motivação desses grupos em seguir carreiras nas áreas de Ciências e Tecnologia.

Por outro lado, alguns estudos demonstram que o aprendizado das disciplinas de Exatas pode ter um impacto positivo no desenvolvimento cognitivo e emocional dos estudantes. De acordo com Boaler (2013), o ensino de Matemática baseado em problemas estimula a criatividade, o pensamento crítico e a resolução de conflitos, contribuindo para o desenvolvimento global dos alunos.

É importante ressaltar que os professores desempenham um papel fundamental na promoção do bem-estar psicossocial dos estudantes nas disciplinas de Exatas. Um estudo realizado por Hembree (1990) destaca a importância do apoio emocional dos professores na redução da ansiedade dos alunos em relação à Matemática. Estratégias pedagógicas que valorizam a diversidade promovem a equidade de gênero e incentivam a colaboração entre os alunos também são essenciais para criar um ambiente mais inclusivo e acolhedor.

A segurança emocional, por sua vez, não é garantia de sucesso no aspecto cognitivo, embora facilite essa via por meio do treinamento e do aperfeiçoamento dos mecanismos de atenção. Os mecanismos de atenção desempenham um papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem em geral e mais precisamente do Cálculo Diferencial e Integral. A atenção é responsável por direcionar a percepção e o processamento de informações, influenciando diretamente a compreensão e retenção dos conceitos matemáticos. No contexto do aprendizado do Cálculo, dois modelos teóricos são frequentemente utilizados para explicar os mecanismos de atenção: *bottom-up* e *top-down*. Para tanto, consideraremos a abordagem feita em Sarter et al. (2001).

O processamento *bottom-up* se refere à atenção espontânea e automática, direcionada pelos estímulos sensoriais externos. Nesse caso, a pessoa pode ser atraída pela apresentação visual ou auditiva dos conteúdos matemáticos, focando sua atenção em elementos específicos, como gráficos, equações ou explicações verbais. Esse tipo de atenção é essencial para a identificação de padrões e regularidades nos problemas de cálculo, facilitando a resolução das questões propostas.

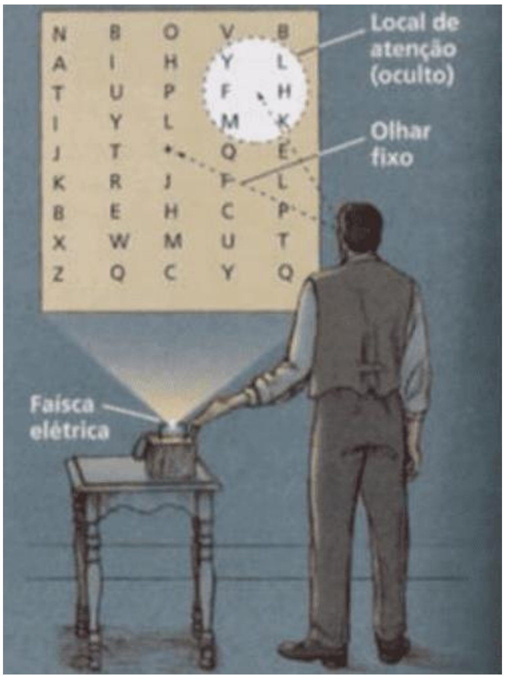

Figura 1a.

Experimento atencional de Helmholtz realizado em 1894 (Gazzaniga et al., 2006)

Por outro lado, o modelo *top-down* envolve uma atenção controlada e voluntária, guiada pelas expectativas, conhecimentos prévios e metas individuais do aluno. Nesse trabalho, o estudante utiliza suas experiências anteriores com o Cálculo para direcionar sua atenção aos aspectos mais relevantes da matéria, como conceitos fundamentais, técnicas de resolução de problemas ou aplicações práticas. O processamento *top-down* permite ao aluno organizar as informações de forma significativa e contextualizada, facilitando a compreensão e memorização dos conceitos matemáticos.

Em conjunto, os modelos *bottom-up* e *top-down* contribuem para uma eficaz aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Enquanto a atenção *bottom-up* auxilia na identificação rápida de informações importantes nos problemas matemáticos, a atenção *top-down* possibilita uma abordagem mais estruturada e reflexiva sobre os conteúdos estudados. Ao combinar esses dois mecanismos de atenção, os professores podem promover um aprendizado mais profundo e significativo dos conceitos matemáticos entre os alunos.

Tabela 1.

Propostas: como o mecanismo bottom-up pode auxiliar na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral

Bottom-up
1. Utilização de exemplos concretos e práticos para introduzir os conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral. 2. Incentivo à resolução de problemas simples antes de abordar questões mais complexas. 3. Estímulo à participação ativa dos alunos na construção do conhecimento, por meio de atividades práticas e experimentais que demonstrem as aplicações do cálculo na vida real. 4. Introdução gradual dos conceitos matemáticos, começando pelos fundamentos da álgebra e geometria antes de avançar para o Cálculo propriamente dito. 5. Realização de revisões periódicas e exercícios de fixação para consolidar o aprendizado dos alunos em cada etapa do processo de ensino-aprendizagem. 6. Fomento ao desenvolvimento da capacidade crítica e analítica dos estudantes, incentivando-os a questionar e explorar diferentes abordagens para a resolução de problemas matemáticos. 7. Aplicação de técnicas de gamificação no ensino do cálculo diferencial e integral, como forma de engajar os alunos e tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo. 8. Utilização de recursos tecnológicos, como *softwares* específicos para cálculos matemáticos, para auxiliar os alunos na visualização e compreensão dos conceitos apresentados em sala de aula. 9. Promoção da interdisciplinaridade no ensino do cálculo, relacionando os conteúdos matemáticos com outras áreas do conhecimento, como Física, Química e Engenharia. 10. Estabelecimento de uma relação próxima entre professores e alunos, criando um ambiente acolhedor e motivador para o aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral.

Tabela 2.

Propostas: como o mecanismo top-down pode auxiliar no ensino aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral

Top-down
1. Definição clara de objetivos e metas de aprendizagem: permitir ao professor estabelecer de forma precisa quais são os conceitos fundamentais que os alunos devem dominar no Cálculo Diferencial e Integral. 2. Organização da sequência didática: é possível estruturar o conteúdo de forma hierárquica, priorizando a compreensão dos conceitos mais amplos antes de avançar para detalhes mais específicos. 3. Contextualização dos conceitos matemáticos: relacionar os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral com situações práticas do cotidiano dos alunos, facilitando a compreensão e aplicação deles. 4. Estímulo à resolução de problemas complexos: ao apresentar aos alunos desafios que exigem a integração de diversos conceitos do Cálculo, o método *top-down* favorece o desenvolvimento da capacidade analítica e crítica dos estudantes. 5. Incentivo à autonomia e autodidatismo: os alunos são estimulados a buscar novas fontes de informação e a desenvolver habilidades de pesquisa independente na área do Cálculo Diferencial e Integral. 6. Utilização de recursos tecnológicos: uso de ferramentas digitais como *softwares* gráficos e simuladores, ampliando as possibilidades de visualização e experimentação dos conceitos matemáticos. 7. Integração interdisciplinar: ao adotar uma perspectiva holística na abordagem do Cálculo Diferencial e Integral, o método *top-down* favorece a conexão entre diferentes áreas do conhecimento, enriquecendo o processo educativo. 8. Feedback contínuo e personalizado: fornecer retornos individualizados aos alunos, identificando suas dificuldades específicas no aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral e propondo estratégias para superá-las. 9. Estímulo à reflexão metacognitiva: ao promover uma abordagem reflexiva sobre o próprio processo de aprendizagem, os alunos desenvolvem maior consciência sobre suas estratégias cognitivas no estudo do Cálculo. 10. Promoção da criatividade e inovação: professores podem estimular os alunos a explorarem novas formas de pensar e resolverem problemas no contexto do Cálculo Diferencial e Integral, incentivando a criatividade e a originalidade na construção do conhecimento matemático.

O uso consciente do mecanismo *top-down* permite que os alunos sejam capazes de direcionar sua atenção para aspectos específicos do conteúdo, filtrando as informações relevantes e ignorando distratores. Ao utilizar estratégias de organização mental e elaboração cognitiva, os estudantes conseguem processar as informações de forma mais eficaz.

Limites

O conceito de limite é fundamental na Análise Real; dele resultam várias outras ideias importantes, como derivadas, integrais, continuidade e otimização. Apesar de ser considerado básico, muitas pessoas com formação no campo das Ciências Exatas têm dificuldade em compreender completamente tal conceito. O termo "limite" possui diversos significados, mas aqui refere-se ao valor para o qual uma função real se aproxima à medida que os elementos de seu domínio se acumulam em torno de um valor específico. Para aqueles que não seguem carreiras na área da Matemática, a falta de compreensão do conceito de limite pode não ser tão problemática; no entanto, para estudantes e professores de Matemática no nível superior, essa compreensão afetará diretamente sua capacidade de avançar em cursos mais complexos ou em aplicações nas mais diversas áreas. Atualmente, o ensino dessa noção – não a ideia intuitiva, mas a formalização – no Cálculo é abordado pela formalização fundamentada em quantificadores e desenvolvida por Weierstrass:

> O número L é o limite da função f(x), onde x tende a x_0, se dado qualquer número arbitrariamente pequeno ε, outro número δ possa ser encontrado tal que para todos os valores de x diferindo de x_0 por menos que δ, o valor de f(x) diferir de L por menos que ε. (Boyer, 1949, p. 287)

Esta não é exatamente a forma como o conceito de limite aparece nos livros de Cálculo atualmente, mas é bem próxima da atual. A partir daqui, seguem as experiências dos autores no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, Análise Real ou Análise Complexa. Na etapa inicial de um curso de Cálculo ou de Análise, o contexto é o das funções reais (seu contradomínio é o conjunto dos reais) a uma variável real (seu domínio é um subconjunto dos reais); nesse *locus*, costuma ser apresentado o conceito de limite. Trazendo mais rigor matemático à definição de Weierstrass, formula-se a noção de limite da seguinte forma: seja f uma função (real a uma variável real) e p um ponto de acumulação para f (ou para o domínio de f), o limite da função f quando x tende a p é igual a L se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe, a partir deste ε fixado, $\delta > 0$ tal que $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Em outras palavras, se a distância de x a p inferior a δ, em que x é um ponto do domínio de f distinto de p (arbitrário, com essa condição), implicar que a distância de f(x) a L é inferior a ε.

Esse fato é representado graficamente da seguinte forma:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

Figura 1b.

Representação gráfico-simbólica do limite.

A expressão representada na Figura 1, sintetiza a famosa abordagem de limites por épsilons e deltas, que denotaremos por ε-δ. Aqui cabe explicitar o ponto de partida da primeira forma de analisar esse conceito. Embora se tenha dito que esse conceito é visto em uma etapa inicial das disciplinas de Cálculo, as experiências relatadas seguem desta definição de limite apresentada, a nível de revisão, em cursos mais avançados, como Cálculo Vetorial (para funções de várias variáveis) e Análise Real em instituições de três estados brasileiros (Bahia, BA, Mato Grosso, MT e São Paulo, SP) onde o primeiro autor lecionou a referida disciplina. Ao rever o conceito de limite, verificou-se, pelos estudantes, a formulação das seguintes questões:

- O que é um ponto de acumulação?
- O que significa um ponto acumular em um valor?
- Logo após fazer a apresentação da definição, o professor fala que a ideia é fazer épsilon e delta tenderem a zero. Por quê?
- Épsilon é variável ou é constante? Está fixo ou é arbitrário?
- Delta é variável ou é constante? Está fixo ou é arbitrário?
- x é variável ou é constante? Está fixo ou é arbitrário?
- f é variável ou é constante? Está fixo ou é arbitrário?
- O que significa "x - p" entre as barras?
- Por que $0 < |x - p|$? (Afinal, se $x = p$, teremos $|x – p| = |p – p| = 0$.)

A definição de limite supracitada, simplesmente registrada pela Figura 1, mobiliza as seguintes abordagens:

1. Conectivos lógicos ("implicar").
2. Quantificadores ("existe", "para todo", ambos podem ser considerados a partir da Teoria Ingênua de Conjuntos).
3. Variáveis.
4. Função módulo.
5. Distância (a partir da função módulo).
6. Ponto de acumulação.
7. Função real.
8. Função e seus descritores (domínio, contradomínio, lei).

Nas aulas de Cálculo, o conceito de limite é frequentemente considerado como um dos mais complexos pelos alunos (Karatas et al., 2011; Swinyard & Larsen, 2012). Identificar as dificuldades na compreensão dos Limites é importante para sua relação com outros conceitos matemáticos. Equipar os estudantes com ferramentas conceituais necessárias para abordar uma gama de problemas matemáticos e aplicados, que envolvem a fundamentação do cálculo diferencial e integral, a compreensão dos conceitos infinitesimais, o o desenvolvimento do raciocínio abstrato e a formalização do conceito de mudanças que, por sua vez, permitirão analisar como uma função se comporta à medida em que suas variáveis se aproximam de determinados valores, envolve o uso do limite de uma função, teoremas relacionados ao conceito de limite e determinar se o limite existe pela definição formal. A capacidade dos alunos em alcançar essas habilidades depende da compreensão adequada da definição formal da referida noção.

Entretanto, o objeto matemático carece de uma vivência adequada dentro da disposição institucional normalmente vigente. Considere, por exemplo, as representações gráficas das Figuras 2 e 3.

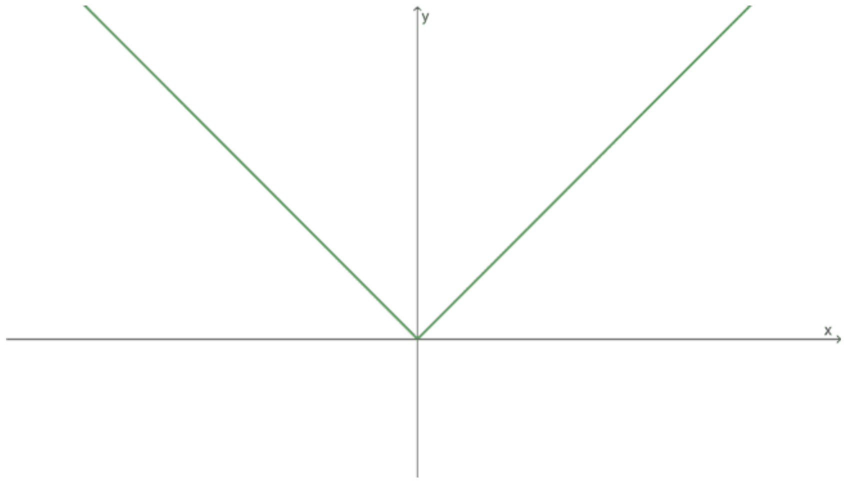

Figura 2.

Gráfico no plano xy em forma de "V".

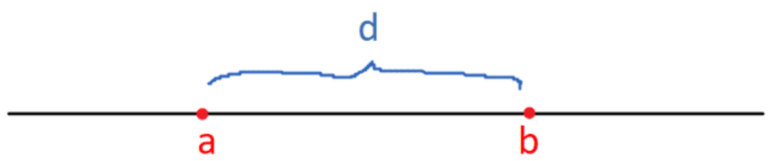

Figura 3.

Representação gráfica da distância entre dois números na reta real.

Um dos autores, em experimentos didáticos em turmas de Cálculo Diferencial numa universidade federal do oeste baiano, lança a pergunta: quando a palavra "módulo" (no contexto dos números reais) é pronunciada, qual dessas figuras surge em sua "visualização mental": a Figura 2 ou a Figura 3? A maioria responde, sem titubear: Figura 2. Adentrando no aspecto investigativo, observou-se que não há uma associação *a priori* entre "distância" e "módulo". Essa pergunta, bem como os esboços de respostas norteiam de certo modo o MER aqui proposto, na medida em que sinalizam que existe uma possibilidade das noções sobre mecanismos atencionais contribuíram na aprendizagem do referido objeto do saber.

Ademais, a atenção é um mecanismo fundamental para a aprendizagem em qualquer área do conhecimento. Quando se trata do tema “limites”, a capacidade de concentração e foco se torna ainda mais relevante, uma vez que exige reflexão, autocontrole e capacidade de estabelecer restrições pessoais e lógicas. No que tange à pergunta supracitada sobre a representação que os estudantes fazem em relação a palavra módulo, um MER pautado nos mecanismos atencionais leva em consideração o papel das figuras que representam o objeto sem deixar de lado os conhecimentos tácitos dos estudantes.

Estudos na área da neurociência têm demonstrado que a atenção é regulada por regiões específicas do cérebro, como o córtex pré-frontal, responsável por funções executivas como o planejamento, tomada de decisões e controle emocional (Cosenza & Guerra, 2009). A atenção se torna ainda mais importante quando se trata de aprender sobre limites, pois esse tema demanda um esforço cognitivo maior para a compreensão do conceito e dos procedimentos para o cálculo do limite de uma função pela definição, já que a abordagem usual na instituição CDI se dá de níveis mais abstratos para aplicações ou situações concretas.

Os conceitos de “derivada” e “integral” permitem analisar o comportamento global das funções, indo além do simples estudo local proporcionado pelo limite. A derivada mede a taxa de variação de uma função em relação a sua variável independente, fornecendo informações sobre a inclinação da curva em determinado ponto. Já a integral permite calcular a área sob uma curva, possibilitando encontrar soluções para problemas de otimização e cálculo de volumes.

Enquanto o limite foca no comportamento pontual das funções, a derivada e a integral proporcionam uma visão mais abrangente e completa de seu comportamento global. Também, mediante uma mudança de quadro, novas funções podem surgir a partir de uma dada função real. Elas permitem analisar tendências, identificar pontos críticos e realizar cálculos complexos que seriam impossíveis apenas com o conceito de limite. Do ponto de vista das organizações didáticas para o CDI, tanto a derivada quanto a integral decorrem do conceito de limite. Dessa forma, é possível dizer que os conceitos de derivada e integral são complementares ao de limite. Eles

> são concebidos como modelos pragmáticos de magnitudes consideradas como objetos mentais dando origem a uma atividade matemática que tem seu próprio nível legítimo de racionalidade, embora diferente do nível padrão subjacente aos aspectos formais dos limites, por exemplo, definições “estáticas” usando quantificadores. Este modelo permite-nos defender a utilidade de ter em conta um obstáculo epistemológico chamado **positivismo empírico** como uma grelha de interpretação das reações dos alunos a tarefas que envolvem limites, quer por si só, quer em relação com outros conceitos, tais como derivadas, integrais, etc. O valor científico deste obstáculo epistemológico reside

> na sua capacidade de abranger e dar sentido a tipos de erros cada vez mais amplos (Job & Scneider, 2014, p. 3).

Como vemos no excerto acima, a decorrência de que trata o parágrafo anterior talvez se justifique pelo fato de o conceito de limite de uma função ser concebido como modelo pragmático, o que implica estratégias metodológicas para difusão com esse viés de aplicação para outros objetos do saber.

Organização praxeológica e transposição didática

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) fundamenta-se na ideia de que a prática educativa é influenciada por praxeologias específicas, ou seja, conjuntos de saberes e práticas que orientam as ações dos sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Segundo Chevallard e Joshua (1985), as praxeologias são compostas pelo saber fazer (saberes técnicos) e pelo saber ensinar (saberes pedagógicos), os quais se relacionam de maneira dialética.

Nesse sentido, a TAD destaca a importância da relação entre o saber fazer e o saber ensinar, ressaltando que ambos devem ser considerados de forma integrada no planejamento e execução das atividades educativas. Essa integração permite uma abordagem mais holística do conhecimento, contribuindo para uma maior compreensão dos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem.

Além disso, a TAD distingue entre dialéticas ostensivas e não ostensivas. As dialéticas ostensivas referem-se aos processos explícitos e conscientes que ocorrem durante as interações didáticas, enquanto as dialéticas não ostensivas dizem respeito aos processos implícitos e inconscientes presentes nas práticas educativas. De acordo com Chevallard (1994), o reconhecimento dessas duas dimensões é fundamental para uma análise crítica das estratégias pedagógicas adotadas.

A instituição é um elemento central na TAD, pois representa o contexto social, cultural e político em que as praxeologias se desenvolvem. Segundo Chevallard e Joshua (1982), as instituições exercem papel determinante na configuração dos saberes escolares e na organização das relações entre professores, alunos e demais agentes educativos. Dessa forma, a TAD propõe uma abordagem complexa e multidimensional da educação, considerando não apenas aspectos individuais, mas também coletivos e sociais.

Sobre a proposta de MER

Quais praxeologias são evocadas por estudantes no que se refere à noção intuitiva de “limite” de uma função e à definição formal? Embora projetos pedagógicos de cursos de

Matemática, por exemplo, citem a apresentação da definição de limite como parte da ementa de um curso de Cálculo, não há justificativas nem detalhamentos suficientes que norteiem uma forma para que tal assunto seja tratado em sala de aula. Com objetivo experimental na Didática do Ensino Superior, apresentou-se a seguinte tarefa: "Como construir um esquema gráfico coerente com a definição formal de limite? Como esse esquema pode ajudar na representação gráfica do limite?". A tarefa citada é, na verdade, o plano de fundo para a questão deste estudo: "Como construir um modelo de representação gráfica para o limite de uma função?". Essa pergunta é genérica, mas será limitada ao contexto das funções reais de uma variável real, considerando a topologia usual dos conjuntos dos números reais.

Primeiras hipóteses para a construção do modelo

Suponhamos que os alunos já tenham tido contato com o conceito formal de limites a partir de cursos ou etapas anteriores em um curso de Cálculo ou Análise. A ideia agora é representar graficamente o limite, uma vez que a institucionalidade do Ensino de Cálculo traz, além do conceito analítico e das manipulações algébricas, a representação gráfica de diversos objetos da ecologia de um curso de Cálculo regular. Percebe-se, inclusive, que a apresentação do conceito de diversos objetos é motivada por registros gráficos justificados em face de uma melhor compreensão sobre o tema por meio de recursos imagéticos, por exemplo: função (Figura 4); continuidade e descontinuidade (Figura 5); derivada (Figura 6) e integral (Figura 7). E para limites? Qual é a representação gráfica "canônica" de um limite?

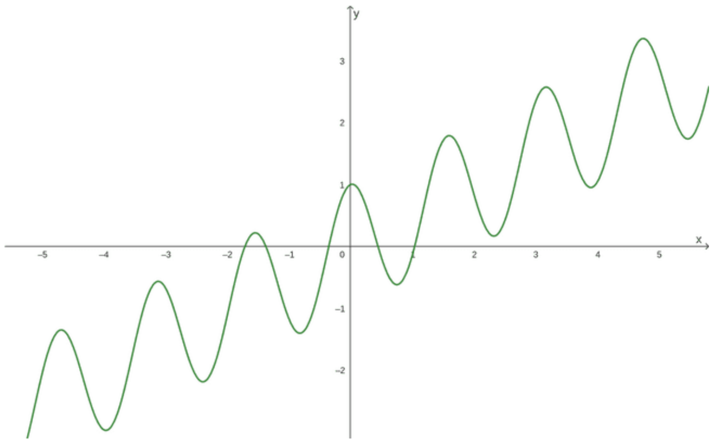

Figura 4.

Representação do gráfico de uma função real a uma variável real.

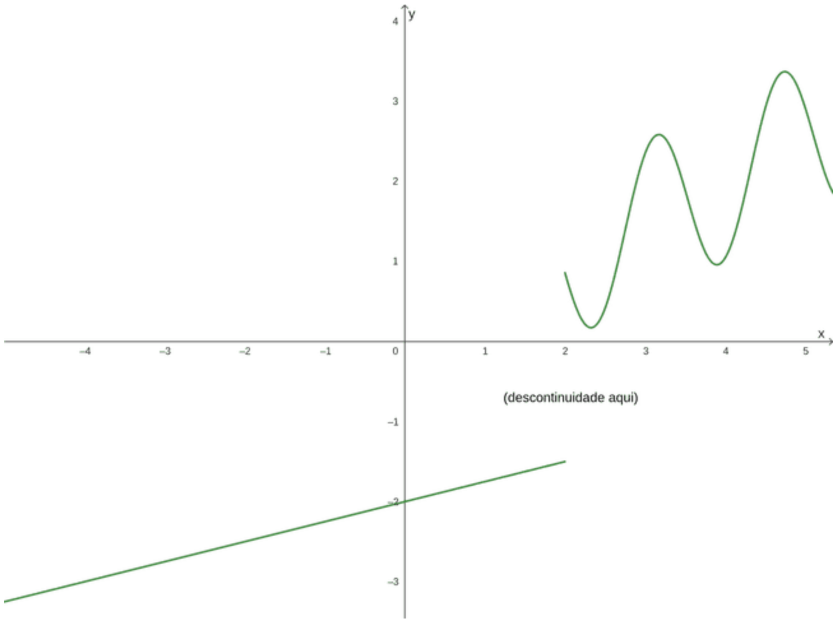

Figura 5.

Representação do gráfico de uma função descontínua.

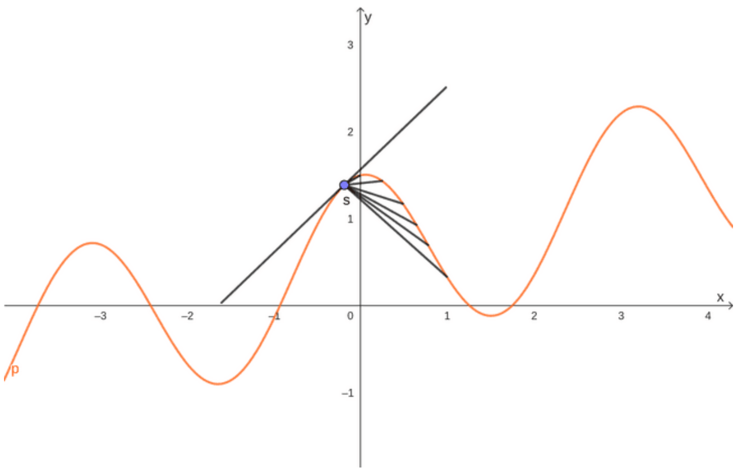

Figura 6.

Representação gráfica para a motivação da definição de derivada via "retas secantes que se aproximam da reta tangente (local) em um ponto do gráfico".

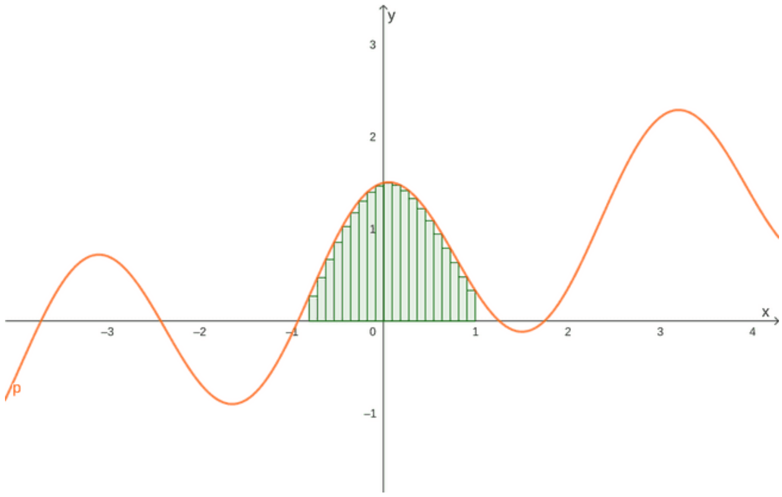

Figura 7.

Representação gráfica para a motivação da definição de integral via cálculo de área por “aproximações por retângulos para preenchimento de uma área limitada pelo gráfico de uma função que não muda de sinal em intervalo”.

A questão colocada como central é desmembrada em diversas outras questões, evidenciando, portanto, o desequilíbrio ecológico acerca do tema “limites”:

- Como diferenciar o estudo de uma função do estudo do gráfico de uma função?

- Como perceber o limite no gráfico de uma função qualquer?

- As funções comumente abordadas no curso de Cálculo são suficientes para o estudo de limites?

A última pergunta ilustra como o Ensino de Cálculo não é tão generalista quanto se pretende ser (no discurso ou no ementário): as funções adotadas como exemplos ou exercícios são dos seguintes tipos:

a) constante, ou seja, $f(x) = k$, em que k é um número real fixado;

b) polinomial de grau n, ou seja, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais, $a_n \neq 0$ e $n > 0$ é um natural;

c) potência, ou seja, $f(x) = x^k$, em que k é um número fixado qualquer e o domínio de f pode ser alterado a depender do valor de k;

d) exponencial, ou seja, $f(x) = a^x$, em que a é uma base para uma exponenciação: a é um número real não nulo e diferente de 1;

e) logarítmica, ou seja, $f(x) = \log_a x$, em que a é uma base para um logaritmo: a é um número real não nulo e diferente de 1;

f) trigonométrica, por exemplo, $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, $f(x) = \cos(x)$, etc.;

g) trigonométrica hiperbólica, f(x) = senh(x), f(x) = cosh(x), etc.;

h) modular, ou seja, f(x) = |x|: |x| vale x, se $x \geq 0$ e |x| vale -x, se $x < 0$.

Observamos que a própria apresentação dos tipos de funções acima listados carece de uma definição mais rigorosa. Tomemos como exemplo a exponencial e consideremos a função $f(x) = 2^x$, com x sendo um número real qualquer. Se x = 3, por exemplo, sabe-se da Educação Básica que $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, ou seja, f(3) = 8. Porém, uma vez que x é um número real qualquer, ele pode assumir o valor x = π. O que é f(π), ou seja, como calcular 2^π? Esse tema se constitui um terreno muito fértil para produções futuras e não será detalhadamente discutido aqui. Além disso, as funções citadas, exceto pela modular, são de classe C^∞, ou seja, para qualquer m natural, a derivada de ordem m existe (são "infinitamente" deriváveis). E, no universo das funções reais (a uma variável real), a chance de se eleger *aleatoriamente* uma função de classe C^∞ é zero, isto é, as típicas funções de um curso de Cálculo são "artificiais", apontando, entre outras, para a disparidade entre a modelagem matemática e o mecanismo empírico dos dados tais e quais "a Natureza dispõe".

Uma mudança de quadro

Conforme citado, embora não sejam o mesmo objeto do ponto de vista conceitual, "função" e "gráfico de função" são constantemente confundidos. Esse é um elemento *a priori* considerado no MER: tomar o gráfico como ponto de partida para o estudo de funções é um dificultador à compreensão de limites. Recordemos que uma função f: Dom →CDom, em que $Dom \subset \mathbb{R}$ e $CDom \subset \mathbb{R}$ são o domínio e o contradomínio de f respectivamente, é regida por uma lei que "combina" elementos do domínio com elementos do contradomínio. Esta forma de "combinar" elementos de conjuntos considerados distintos é formalizada por meio da noção de par ordenado. Por exemplo, dada uma função f, o par $(a,b) \in Dom \times CDom$ é interpretado da seguinte forma: "b está em função de a" ou "b = f(a)". O gráfico de f, por sua vez, é a reunião de todos os pares combinados mediante esta função:

$$\text{graph}(f) = \{(x,f(x)), \text{ com } x \in \text{Dom}(f)\}.$$

Se consideramos a definição de função por meio dos pares ordenados (com em um curso de Teoria dos Conjuntos), a distinção entre função e seu gráfico é mero rigor matemático, pois na prática os objetos são indistinguíveis. Convém destacar que $Dom \times CDom \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, e é por esse motivo que o gráfico de uma função é representado no plano cartesiano.

Porém, é possível fazer o registro gráfico de uma função antes da "junção" entre domínio e contradomínio.

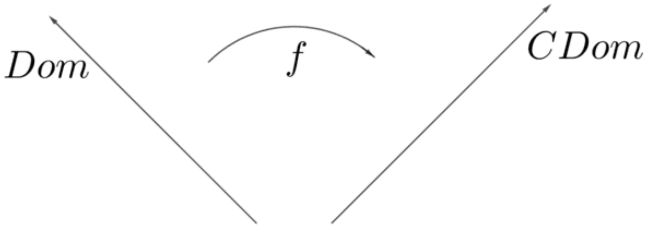

Figura 8.

Representação gráfica de uma função sem o esboço gráfico no plano.

O conjunto dos números reais ℝ é, justificadamente, representado por uma reta euclidiana orientada; por isso, esse conjunto é denominado *reta real* ou, simplesmente, *reta*. Os conjuntos Dom e CDom são subconjuntos de ℝ; dessa forma, a representação gráfica adotada na Figura 8. A linha arredondada indica a relação funcional entre Dom e CDom, revelando um recurso de *bottom-up* no que concerne a atenção em relação ao objeto ensinando.

Em experimentações didáticas com turma de CDI em que o primeiro autor atua, foram realizadas observações que indicam que a não junção entre Dom e CDom dão uma melhor noção do comportamento da função ao analisar apenas a forma com que esta varia (graficamente) em seu contradomínio.

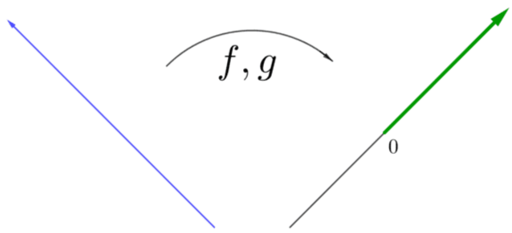

Figura 9.

Representação gráfica de domínio, contradomínio e imagem das funções $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = |x|$ *por duas retas orientadas. Ambas têm a mesma imagem: o intervalo [0, +∞].*

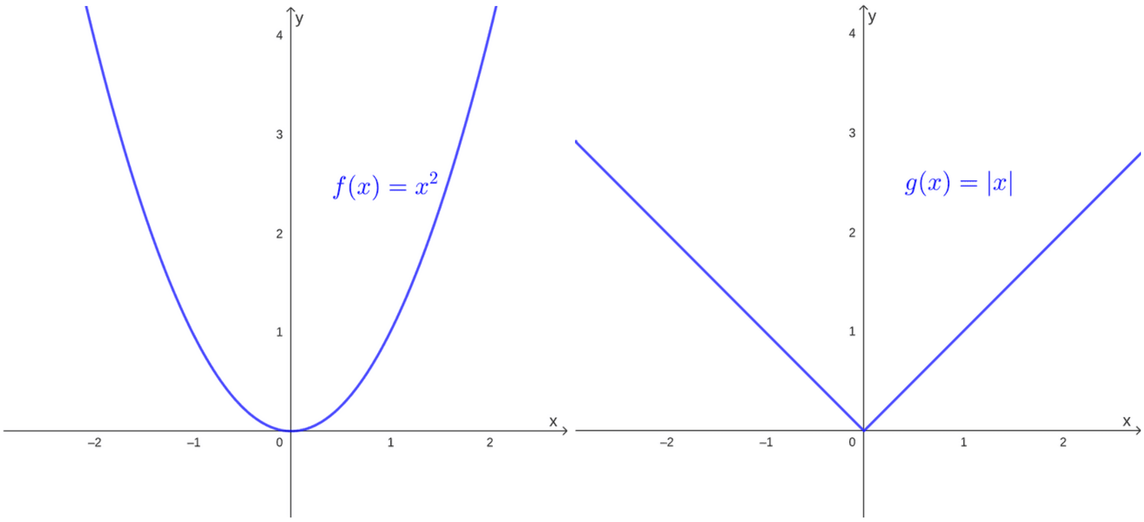

Figura 10.

Representação dos respectivos gráficos das funções f(x) = x^2 *e g(x) = |x| no plano cartesiano.*

Deixamos o seguinte alerta: a representação da Figura 10 é "míope", pois funções sabidamente distintas podem ser representadas de modo idêntico.

Organização praxeológica

Retomemos o conceito de limite, em sua definição formal: o limite da função f quando x tende a p é igual a L se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe a partir deste ε fixado, $\delta > 0$ tal que $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Consideremos as duas subtarefas a seguir.

Subtarefa 1: Representar graficamente o limite, caso exista, da função f(x) = x^3 *quando x tende a -2.*

- Mecanismo de atenção (*top-down*): Observar, com algum grau de rigor, o regramento lógico que permite uma conclusão matemática e as tecnologias necessárias, em especial os pré-requisitos, tendo em vista a compreensão da subtarefa.
- Praxeologia pontual (tarefa, técnica, tecnologia e teoria): A subtarefa foi dada. A técnica pode ser pensada em algumas etapas. AP primeira é a manipulação algébrica, com compreensão geométrica, dos módulos destacados: $0 < |x - p| < \delta$ significa "$p - \delta < x < p + \delta$ e $x \neq \delta$"; $|f(x) - L| < \varepsilon$ significa "$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$". Portanto, a organização dos módulos, na definição, pressupõe a busca por candidatos nos intervalos $]p – \delta, p + \delta[$ e $]L – \varepsilon, L + \varepsilon[$. A próxima etapa consiste em encontrar valores de épsilons e deltas adequados para satisfazer a condição, portanto os valores épsilon-delta mudam ao longo da busca. Observamos que essa busca por épsilons-deltas é finita por duas razões cruciais: a) a limitação computacional e b) a limitação dos sujeitos que realizam a busca

"épsilon-delta" ao tempo! Portanto, a representação gráfica proposta não se constitui uma demonstração da existência do limite. Dessa forma, uma proposta razoável é a de comparar os valores de f(x), no contradomínio, a um ponto fixado; suponha sem perda que esse ponto é a origem, o 0 (zero). A tecnologia é "limites", e os teoremas associados e a teoria são a Análise Real.

- Mecanismo de atenção (*bottom-up*): utilização de cores para os diferentes objetos tratados.

Considerações teóricas:

i. Faz sentido calcular o limite quando x tende a -2, pois -2 é um ponto de acumulação de $\mathbb{R}$, o domínio da função $f(x) = x^3$.

ii. A existência de candidatos ao limite dependerá da distância de $f(]\, p - \delta, p + \delta\, [)$ ao ponto zero. Mais especificamente, o comprimento do intervalo $f(]\, p - \delta, p + \delta\, [)$ será o indicativo da existência de um candidato ao limite: se este comprimento aumenta, vamos considerar que não há candidatos; se este diminui, então pode existir um candidato (se os intervalos fossem compactos, por exemplo, $[p - \delta, p + \delta]$, o Teorema dos Intervalos Encaixados seria capaz de garantir a existência do candidato ao limite).

iii. Para a escolha do candidato ao limite, vamos proceder de forma completamente intuitiva. Vamos causar uma perturbação "majorada" e outra "minorada", e observar como se comporta a função. Os valores na coluna do meio (de -15,525 a -8,0012) e os da coluna da direita (de -3,375 a -7,9988) são os cálculos para $f(-2-\delta)$ e $f(-2+\delta)$ respectivamente. Por esses cálculos, um candidato a limite é -8.

Tabela 3

Cálculo de candidatos a limite

δ	-2-δ	-2+δ
0,5	-15,625	-3,375
0,4	-13,824	-4,096
0,3	-12,167	-4,913
0,2	-10,648	-5,832
0,1	-9,261	-6,859

0,01	-8,120601	-7,880599
0,001	-8,012006001	-7,988005999
0,0001	-8,001200060001	-7,998800059999

iv. Por sua vez, a imagem adotada será a de segmentos retas, representando intervalos reais; se uma função é contínua em um intervalo real I, então, sua imagem f(I) também será um intervalo; o conceito de continuidade costuma surgir depois do conceito de limite (tendo por base a literatura usual desse tema adotada no Brasil). Portanto, vamos começar "atropelando etapas" nesta representação gráfica.

v. Adotamos o procedimento heurístico. Supondo que o limite seja, de fato, igual a -8, vamos criar as representações domínio-imagem em retas distintas, na procura por épsilon-delta. Para cada ε, o intervalo $]-8-\varepsilon, -8+\varepsilon[$ será chamado de J_ε; para cada δ, o intervalo $]-2- \delta, -2+ \delta[$ será chamado de I_δ.

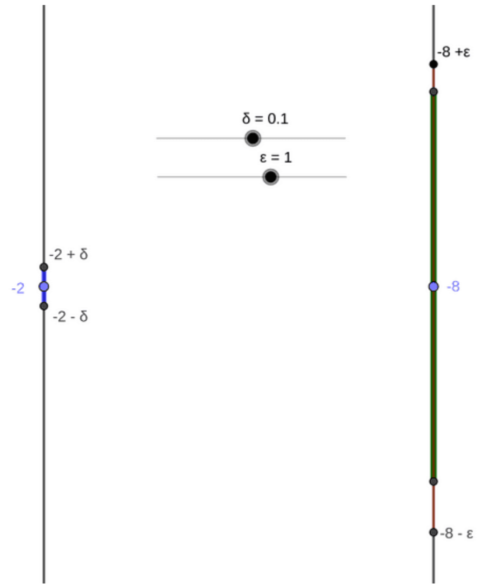

Figura 11.

Representação geométrica dos ε e δ *de acordo com dados da tabela 3.*

Para a função considerada, fixado $\varepsilon = 1$, observe que $\delta = 0,1$ é tal que $f(I_\delta) \subset J_\varepsilon$. Portanto, fixado $\varepsilon = 1$, $\delta = 0,1$ atende à condição para validação da busca de um limite. Observe que esse comportamento se mantém ainda que se tenha valores de ε maiores que 1, o que torna essa busca inoportuna. Logo, a busca poderá ficar interessante com valores menores que 1 e maiores que 0. Na verdade, a ideia é fazer ε tender a zero. Neste trabalho, foi utilizado o *software* Geogebra para a geração desse tipo de imagem. Para ε = 0,5, já encontramos restrições de ordem computacional para fazer o registro gráfico.

Subtarefa 2: Representar graficamente o limite, caso exista, da função f(x) = tg(x) quando x tende a $\pi/2^-$. Observação: a notação usada é a de limite lateral e tender a $\pi/2^-$ significa se aproximar de π/2 mas sempre por valores estritamente menores a π/2.

Os mecanismos de atenção e a praxeologia pontual são os mesmos da Subtarefa 1.

Considerações teóricas:

i. Faz sentido calcular o limite quando x tende a π/2, pois π/2 é um ponto de acumulação do domínio da função f(x) = tg(x). É importante notar que π/2 não faz parte do domínio da função tangente. Comentário: este é um aspecto muito importante no que diz respeito aos mecanismos de atenção, pois, na maioria dos casos envolvendo relações aluno-professor em sala de aula, constatamos que o cálculo do limite de uma função f(x) quando x tende a p é feito sem a observância ao fato de p ser um ponto de acumulação do domínio de f.

i. A existência de candidatos a limite dependerá da distância de $f(]\, p - \delta_1, p - \delta_2\, [)$ ao ponto zero, com $0 < \delta_2 < \delta_1$, posto que se trata de um limite lateral à esquerda. Mais especificamente, o comprimento do intervalo $f(]\, p - \delta_1, p - \delta_2\, [)$ será o indicativo da existência de um candidato ao limite nas condições análogas à Subtarefa 1.

Tabela 4

Cálculo de candidatos a limite

δ1	π/2-δ1	tg	δ2	π/2-δ2	tg	comprimento_imagem
0,500	1,071	1,830	0,250	1,321	3,916	2,086
0,400	1,171	2,365	0,200	1,371	4,933	2,568
0,300	1,271	3,233	0,150	1,421	6,617	3,384
0,200	1,371	4,933	0,100	1,471	9,967	5,033
0,100	1,471	9,967	0,050	1,521	19,983	10,017

0,010	1,561	99,997	0,005	1,566	199,998	100,002
0,001	1,570	1000,000	0,001	1,570	2000,000	1000,000

A coluna “comprimento_imagem” é o comprimento do intervalo] $f(p - \delta_1)$, $f(p - \delta_2)$ [, com os deltas especificados. Esses cálculos apontam para a inexistência de um limite, porém sem apresentar uma demonstração formal deste fato.

Com base numa análise *a priori* e nas experimentações didáticas numa turma de Cálculo Diferencial compostas por 40 estudantes dos cursos de Matemática de licenciatura e bacharelado e Engenharia da Construção Civil, inferimos que o MER apresentado nesta seção se mostrou como um recurso didático válido no ensino-aprendizagem de limites, mas não se pode dizer que está investido do rigor necessário para ser caracterizado como uma demonstração matemática.

Considerações finais

O ensino de limites é um tema fundamental na Matemática, sendo essencial para a compreensão de diversos conceitos e aplicações. Nesse sentido, a abordagem epistemológica para o ensino de limites deve considerar os mecanismos de atenção dos estudantes, buscando criar estratégias que facilitem a aprendizagem e promovam uma maior compreensão do conceito.

Ao levar em conta os mecanismos de atenção dos alunos, é possível identificar quais são os pontos que mais despertam interesse e engajamento, permitindo ao professor adaptar sua metodologia de ensino e tornar as aulas mais dinâmicas e participativas. Além disso, ao utilizar recursos que estimulem a concentração e foco dos estudantes, como atividades práticas e exemplos contextualizados, é possível alcançar condições mais favoráveis para a compreensão dos objetos estudados e garantir uma melhor absorção do conteúdo.

Outro aspecto importante a ser considerado na abordagem epistemológica para o ensino de limites é a repetição espaçada. Revisitar o mesmo conteúdo em intervalos regulares ajuda na memorização e consolidação da informação. Dessa forma, ao criar um plano de estudo que inclua revisões periódicas dos conceitos de limites, é possível fortalecer o entendimento dos alunos e garantir uma aprendizagem mais sólida. Além disso, é fundamental incentivar a autonomia dos estudantes na aprendizagem, permitindo que eles desenvolvam habilidades como autoavaliação e autorregulação.

Ao fornecer ferramentas para que os alunos monitorem seu próprio progresso e identificar suas dificuldades, promove-se uma maior responsabilidade pelo aprendizado e estimula-se um ambiente colaborativo entre colegas. Em suma, adotar uma abordagem epistemológica que leve em conta os mecanismos de atenção dos alunos no ensino de limites permite criar um ambiente propício para a construção do conhecimento matemático. Por meio da combinação de estratégias que estimulem o interesse, concentração e autonomia dos estudantes, é possível favorecer uma aprendizagem significativa e duradoura nesse campo fundamental da Matemática.

Referências

Boaler, J. (2013). The stereotypes that distort how Americans teach and learn math. The Atlantic, *12*. https://www.theatlantic.com/education/archive/2013/11/the-stereotypes-that-distort-how-americans-teach-and-learn-math/281303/

Boyer, C. B. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development.* Dover.

Chevallard, y. (1994). Les Processus de Transposition Didactique et leur Theorisation. In: Arasac, G.; Chevallard, Y.;Martinand, J.-L. & Tiberghien, A. (Ed.). *La transposition didactique à l'épreuve*. Grenoble: La Pensée sauvage, p. 135-180.

Chevallard, Y. & Joshua, M. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(2), 157-239.

Cosenza, R., & Guerra, L. (2009). *Neurociência e educação*. Artmed.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, *25*(2), 77- 98.

Fonseca, C., Gascón, J., & Lucas, K. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3). 289-318.

Fonseca, L. et al. (2017). Uma ecologia dos mecanismos atencionais fundados na neurociência cognitiva para o ensino de matemática no século XXI. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, *1*, 19-30.

Gazzaniga, M. S., Ivry, R. B., & Mangun, G. R. (2006). *Neurociência Cognitiva: a biologia da mente*. Artmed.

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for research in mathematics education*, *21*(1), 33-46.

Job, P., & Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM*, *46*, 635-646.

Karatas, I., Guven, B., & Cekmez, E. (2011). A Cross-Age Study of Students' Understanding of Limit and Continuity Concepts. *Bolema*, *24*(38), 245-264.

Pekrun, R., Frenzel, A. C., Goetz, T., & Perry, R. P. (2007). The control-value theory of achievement emotions: An integrative approach to emotions in education. In P. A. Schutz & R. Pekrun (Eds.), *Emotion in education* (pp. 13-36). Academic Press.

Posner, M. I., & Petersen, S. E. (1990). The attention system of the human brain. *Annual review of neuroscience*, *3*(1), 25-42.

Relvas, M. P. (2023). *Neurociência na prática pedagógica*. Digitaliza Conteúdo.

Ruiz Munzón, N., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. *Documents: Un panorama de la TAD*, *10*, 743-765.

Sarter, M., Givens, B., & Bruno, J. P. (2001). The cognitive neuroscience of sustained attention: where top-down meets bottom-up. *Brain Research Reviews*, *35*, 146-160.

Schraw, G., Crippen, K. J., & Hartley, K. (2006). Promoting self-regulation in science education: Metacognition as part of a broader perspective on learning. *Research in science education*, *36*(2), 111-139.

Sierpińska, A. (1994). The diachronic dimension in research on understanding in niathematics-usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle. *Didactica Mathematicae*, *16*(1), 73-101.

Steele, C. M., & Aronson, J. (1995). Stereotype threat and the intellectual test performance of African Americans. *Journal of personality and social psychology*, *69*(5), 797-811.

Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). Coming to Understand the Formal Definition of Limit: insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 465-493.

Zeki, S. (2002). *Inner vision: An exploration of art and the brain*. Oxford University Press.