Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i2p252-275

Conhecimentos matemáticos para o ensino de figuras planas e espaciais nos anos finais do ensino fundamental: a visualização em foco

Mathematical knowledge for teaching flat and spatial figures in the final years of elementary school: the visualization in focus

Conocimientos matemáticos para la enseñanza de figuras planas y espaciales en los últimos años de la educación primaria: la visualización en foco

Connaissances mathématiques pour l'enseignement des figures plates et spatiales dans les dernières années du fondamental : la visualisation en point de mire

Alana Nunes Pereira[1]
Universidade Federal do Espírito Santo
Doutora em Educação
https://orcid.org/0000-0003-2944-4142

Samira Zaidan[2]
Universidade Federal de Minas Gerais
Doutora em Educação
http://orcid.org/0000-0001-7163-5546

Resumo

Neste artigo, discutimos sobre conhecimentos para o ensino de figuras planas e espaciais, com foco específico na visualização matemática, desvendados de episódios ocorridos em aulas de geometria em uma turma de 7º ano do ensino fundamental. A pesquisa foi realizada em uma escola pública da rede federal de ensino e os sujeitos da pesquisa foram o professor de matemática regente da turma, dois estagiários e os estudantes da turma. Os dados produzidos a partir dos episódios foram incluídos na literatura específica sobre a visualização no ensino de geometria na educação básica. A partir da análise de conteúdo de excertos dos episódios, foi possível identificar demandas de saberes que se mostraram específicos para o ensino de geometria, as quais dizem respeito ao tratamento da visualização no ensino de figuras planas e espaciais nos anos finais do ensino fundamental. A partir da análise dos dados, inferimos que as questões relativas à visualização a evidenciaram não somente como um recurso e/ou estratégia para o ensino de geometria, mas como um conhecimento específico para o ensino de geometria no ensino fundamental.

[1] alana.pereira@ufes.br
[2] samirazai77@gmail.com

Palavras-chave: Conhecimento matemático para o ensino, Matemática escolar, Ensino de geometria, Visualização.

Abstract

In this paper, we discuss knowledge for teaching flat and spatial figures, with a specific focus on mathematical visualization, revealed from episodes that occurred in geometry classes in the 7th year middle school class. The research was carried out in a public school in the federal education network and the research subjects were the mathematics teacher in charge of the class, two interns and the students in the class. The data produced from the episodes were in the specific literature on visualization in teaching geometry in basic education. From the content analysis of excerpts from the episodes, it was possible to identify knowledge demands that were specific to the teaching of geometry, which concerns the treatment of visualization in the teaching of flat and spatial figures in the middle school. From the data analysis, we infer that the questions related to visualization highlighted it not only as a resource and/or strategy for teaching geometry, but as specific knowledge for teaching geometry in middle school.

Keywords: Mathematical knowledge for teaching, School mathematics, Geometry teaching, Visualization.

Resumen

En este artículo, discutimos conocimientos para la enseñanza de figuras planas y espaciales, con un enfoque específico en la visualización matemática, revelados a partir de episodios ocurridos en las clases de geometría en una clase de séptimo año de escuela primaria. La investigación se realizó en una escuela pública de la red educativa federal y los sujetos de investigación fueron el profesor de matemáticas a cargo de la clase, dos pasantes y los estudiantes de la clase. Los datos producidos a partir de los episodios fueron ubicados en la literatura específica sobre visualización en la enseñanza de la geometría en la educación básica. A partir del análisis de contenido de extractos de los episodios, fue posible identificar demandas de conocimiento específicas de la enseñanza de la geometría, que se refieren al tratamiento de la visualización en la enseñanza de figuras planas y espaciales en los últimos años de la escuela primaria. Del análisis de los datos, inferimos que las preguntas relacionadas con la visualización la destacaron no sólo como recurso y/o estrategia para la enseñanza de la geometría, sino como conocimiento específico para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria.

Palabras clave: Conocimientos matemáticos para la enseñanza, Matemática escolar, Enseñanza de la geometría, Visualización.

Résumé

Dans cet article, nous discutons des connaissances pour l'enseignement des figures planes et spatiales, avec un accent particulier sur la visualisation mathématique, révélées à partir d'épisodes survenus dans les cours de géométrie d'une classe de 7e année de l´enseignement fondamental. La recherche a été réalisée dans une école publique du réseau éducatif fédéral et les sujets de recherche étaient le professeur de mathématiques responsable de la classe, deux stagiaires et les élèves de la classe. Les données produites à partir des épisodes ont été localisées dans la littérature spécifique sur la visualisation dans l'enseignement de la géométrie dans l'éducation de base. À partir de l'analyse du contenu d'extraits des épisodes, il a été possible d'identifier des exigences de connaissances spécifiques à l'enseignement de la géométrie, qui concernent le traitement de la visualisation dans l'enseignement des figures planes et spatiales dans les dernières années du fondamental. De l'analyse des données, nous déduisons que les questions liées à la visualisation l'ont mise en valeur non seulement comme ressource et/ou stratégie pour l'enseignement de la géométrie, mais aussi comme connaissance spécifique pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire.

Mots-clés : Connaissance mathématique pour l'enseignement, Mathématique scolaire, Enseignement de géométrie, Visualisation.

Conhecimentos matemáticos para o ensino de figuras planas e espaciais nos anos finais do ensino fundamental: a visualização em foco

As discussões que concernem à formação de professores de matemática têm considerado, de maneira cada vez mais primordial, os conhecimentos relacionados ao seu ensino na educação básica e as questões que dizem respeito aos processos de incorporação desses saberes[3] na licenciatura (Moreira & David, 2005; Ball et al., 2008; Moreira & Ferreira, 2013). Encontram-se, na literatura, algumas visões a respeito de quais os saberes que são relevantes para ser tratados na licenciatura, acentuando-se o que os professores realmente precisam saber para ensinar. O entendimento do que seja esse conhecimento, e como ele é ou como ele deve ser caracterizado, tem sido um desafio para a educação matemática.

Uma das concepções sobre a formação inicial dos professores que ensinam matemática pressupõe que a licenciatura precisa se estruturar a partir de conhecimentos caracterizados como um amálgama de saberes indissociáveis e cuja natureza é das demandas da escola básica, dos fundamentos da própria matemática, das relações entre conhecimento e prática, dos contextos nos quais o ensino acontece, entre outros. Essa perspectiva vai ao encontro do que prezam Moreira e David (2005) ao discutirem a natureza epistemológica da matemática escolar como tanto um "conjunto de saberes produzidos e mobilizados pelos professores de matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos, etc." (p. 20).

A partir das experiências vividas pelas autoras do presente artigo ao atuarem como formadoras de professores de matemática em universidades públicas, notou-se que a geometria é uma área da matemática que necessita de discussões sobre quais os conhecimentos que estão relacionados ao seu ensino na educação básica. Aliados à percepção das autoras, estudos como os de Leivas (2009) e Procópio (2009) problematizam que, no que diz respeito ao conhecimento do conteúdo acadêmico, formação inicial de professores trabalha sobre uma geometria dissociada das questões sobre o ensino na educação básica. Isso leva a lacunas tanto nos aspectos relativos aos conceitos envolvidos no tratamento da geometria na licenciatura, quanto aos aspectos metodológicos para seu ensino. Podemos considerar, portanto, a necessidade de se rever a concepção de uma geometria presente na licenciatura que diz respeito ao conhecimento do conteúdo estritamente acadêmico, dissociada das questões sobre o ensino do seu conteúdo na educação básica.

[3] Neste artigo, não se faz uma distinção epistemológica entre os termos conhecimentos e saberes. Ambos indicam um mesmo sentido, conforme fazem os autores que, a seguir, são considerados como nossos referenciais teóricos a respeito dos saberes próprios para e da formação de professores de matemática.

Entendendo-se que a formação docente pode se constituir de uma rede de discussões sobre a geometria a partir de abordagens que envolvam questões mais próximas ao seu ensino na escola básica, compreendemos, portanto, que questões vinculadas à visualização, à intuição e à imaginação devam ganhar protagonismo nos debates sobre a licenciatura. A partir dessa ideia, entendemos que haverá uma busca por romper com uma tradição na formação de professores em que o ensino dessa área, seja de caráter exclusivamente axiomático-dedutivo, ou que remete à concepção de que o professor, conhecendo a geometria acadêmica, estará apto a transpô-la didaticamente aos estudantes do ensino básico.

Diante dessa problemática, o presente artigo traz uma discussão sobre parte dos resultados de uma pesquisa de doutorado que investigou o que se pode constituir como um corpo de conhecimentos relacionados ao ensino da geometria nos anos finais do ensino fundamental. O objetivo do artigo é discutir, com base em dois episódios ocorridos em aulas de geometria em uma turma de 7º ano do ensino fundamental, conhecimentos para o ensino de figuras planas e espaciais revelados nesses episódios. Os saberes identificados estão delimitados a partir de questões pertinentes à visualização matemática e sua natureza epistemológica. As aulas foram ministradas por três sujeitos da pesquisa: um professor efetivo da escola pesquisada e dois estagiários, na época, estudantes de um curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública. Nas práticas acompanhadas, o professor regente e os estagiários trabalharam com conteúdos de geometria espacial e plana, mais especificamente explorando elementos da caracterização de poliedros e não poliedros e do conceito de quadrado.

Os episódios indicaram demandas de conhecimentos de geometria no que se refere, especificamente, à visualização matemática de objetos bidimensionais e tridimensionais. Sublinhamos que os saberes identificados foram mobilizados, ou não, por parte dos docentes. Assim, à luz dos referenciais teóricos adotados na pesquisa, esses conhecimentos se constituem, a nosso ver, como conhecimentos matemáticos específicos da profissão docente.

Inspirações teóricas: visualização no ensino de geometria na educação básica

Um dos componentes do ensino e aprendizagem de geometria defendido por autores da psicologia e da educação como um elemento importante nos processos de desenvolvimento do pensamento geométrico, tanto em níveis básicos como superiores de ensino, é a visualização (Presmeg, 1986; Kaleff, 2015). O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), por meio da publicação dos Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000), considera que o entendimento conceitual dos estudantes é aprimorado sempre que imagens visuais são usadas. Além disso, faz recomendações sobre a utilização das representações de entes geométricos e da visualização, bidimensional e tridimensional, como importante habilidade a ser trabalhada com estudantes de todos os níveis escolares, a fim de que eles se tornem experientes no uso dos diversos tipos de representações das formas geométricas.

Na literatura de pesquisa sobre a visualização no ensino e aprendizagem da matemática encontram-se várias definições e, principalmente, considerações sobre a sua importância como um apoio à intuição e à aprendizagem de conceitos matemáticos. Segundo Zimmermann e Cunningham (1991, p. 3), educadores matemáticos entendem que as imagens mentais e as representações externas (ou seja, não mentais) precisam interagir para que a compreensão de conceitos e a resolução de problemas matemáticos aconteçam. Assim, para os autores, a visualização é o contexto em que essa interação se realiza.

Arcavi (2003, p. 217) oferece uma caracterização da visualização abordando-a tanto como um substantivo (a imagem visual) quanto como um verbo (o processo ou atividade). Além de considerar a ideia de visualização centralizada na díade imagem visual - processo, ele parafraseia e articula as definições de Zimmermann e Cunningham (1991, p. 3) e de Hershkowitz *et al*. (1989, p. 75) para sugerir que:

> [A] Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre desenhos, imagens, diagramas em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de descrever e comunicar informações, de pensar e desenvolver ideias previamente desconhecidas e promover entendimentos (Arcavi, 2003, p. 217, tradução nossa[4]).

Gutiérrez (2006) caracteriza a visualização em educação matemática considerando, primeiramente, que o ensino de geometria elementar tem como uma das suas principais características o uso intensivo de objetos, figuras, diagramas e esquemas que, na concepção do autor, podem auxiliar os alunos na compreensão dos conceitos, propriedades e relações daquilo que se estuda.

Presmeg (1986) propõe uma definição de imagem visual como um esquema mental que retrata informações visuais ou espaciais, com ou sem a necessidade da presença de um objeto ou de outra representação externa. Assim como na definição de Yakimanskaya (1991), a pesquisadora supracitada inclui dentro do conceito de imagem visual todas aquelas imagens que possuem um suporte gráfico diferente de uma imagem mental. Presmeg (1986) também postula que a geração de entendimentos conceituais e a resolução de problemas matemáticos

[4] Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings (Arcavi, 2003, p. 217).

são atividades que envolvem lógica e raciocínio, e um indivíduo pode considerar, ou não, a presença de imagens visuais como parte essencial do trabalho sobre tais atividades.

Gonzato, Gondino e Contreras (2010) concebem a visualização de objetos tridimensionais em relação próxima com o raciocínio espacial. Os autores enfatizam a ideia de que visualizar um objeto espacial não envolve apenas a habilidade de vê-lo, no sentido fisiológico, mas a habilidade de reflexão sobre as suas possíveis representações, as relações entre seus elementos, sua estrutura e características. Para esses autores, visualizar também envolve a habilidade de se examinar as possíveis transformações do objeto em foco. A nosso ver, Yilmaz e Argun (2018) complementam essa defesa ao afirmarem que a visualização é um processo complexo de análise de transformações, construções, imagens mentais e representações, além de auxiliar no estabelecimento de conexões entre ideias matemáticas que não são previamente conhecidas e entendimentos que se desenvolvem gradualmente.

De maneira complementar ao que se entende por visualização no ensino e aprendizagem de geometria na escola básica e para a formação docente, destacam-se as pontuações de Fischbein (1993), o qual diz que a geometria, em especial, lida com entidades mentais que possuem, simultaneamente, características conceituais e figurais. Ou seja, na perspectiva do autor, as entidades mentais, também designadas por ele como entes geométricos, refletem tanto propriedades espaciais (forma, posição, tamanho), quanto qualidades conceituais (idealidade, abstração, generalidade). Tais entes possuem, portanto, dois componentes: um figural e um conceitual.

Em uma teorização sobre o que se denomina conceito figural, o autor explica, inicialmente, que um ente geométrico pode ser descrito por suas propriedades conceituais, mas como também são imagens, apenas a descrição conceitual não é suficiente. Por exemplo, quando se raciocina em termos de compor, decompor e mover entes geométricos, estamos nos referindo a imagens e não somente a conceitos, uma vez que estes entes geométricos embora sejam regulados por uma natureza conceitual, também possuem uma natureza figural intrínseca.

O conceito (ou componente) figural é, portanto, "(...) o limite ideal de um processo de fusão e integração entre a lógica e as facetas figurais" (Fischbein, 1993, p. 150, tradução nossa[5]). Em outras palavras, o conceito figural é de natureza visual (tamanho, forma, posição) e expressa-se por imagens direta ou indiretamente reguladas por conceitos. A componente conceitual expressa, em maior ou menor grau de formalismo, por meio da linguagem escrita ou falada, das definições e propriedades associadas a certa classe de entes geométricos.

[5] No original: (...) ideal limit of a process of fusion and integration between the logical and the figural facets (Fischbein, 1993, p. 150).

Na concepção de Fischbein (1993), faz parte da natureza da geometria compreender as relações que existem entre os entes geométricos por meio de uma simbiose des seus componentes figural e conceitual. Como o componente figural está relacionado à imagem mental associada pelo aluno ao conceito, o autor preconiza que a harmonia entre esses dois componentes (figural e conceitual) é o que determina a noção adequada sobre o ente geométrico e o que caracteriza o raciocínio geométrico. Portanto, este, segundo Mariotti (1995), "(...) pode ser interpretado em termos de um processo dialético entre os aspectos conceitual e figural" de entes geométricos (p. 104, tradução nossa[6]).

Em resumo, pesquisas baseadas em experiências com ênfase em práticas de ensino e nos entendimentos que podem se desenvolver a partir delas discutem a visualização e a sua natureza apresentando-a como uma questão relevante para a educação matemática. Por mais relevantes e esclarecedoras que sejam tais pesquisas, seus resultados não devem significar que a visualização seja, nas palavras de Arcavi (2003, p. 238, tradução nossa[7]), "[...] uma panaceia para os problemas da educação matemática". No entanto, sua compreensão poderá servir ao avanço no que tange ao ensino de propriedades, conceitos e relações presentes na construção do conhecimento sobre geometria na educação básica (Presmeg, 1986; Zimmermann, Cunningham, 1991; Mariotti, 1995; Arcavi, 2003).

A prática de ensino de geometria como campo de investigação

Neste artigo, referimo-nos, especificamente, a dois episódios ocorridos em aulas observadas no 7º ano do ensino fundamental em uma escola de aplicação da rede federal de ensino, os quais identificamos nas seções seguintes como **o caso das bases dos prismas** e **uma definição de quadrado**, respectivamente. A investigação foi de caráter qualitativo, do tipo pesquisa participante (Bogdan, Biklen, 1991). Foram utilizados como instrumentos de produção de dados: a observação participante de aulas de matemática em turmas dos anos finais do ensino fundamental em que conteúdos de geometria foram tratados; gravações em áudio das aulas observadas; cadernos de campo de pesquisa contendo anotações diversas sobre as aulas observadas e sobre os sujeitos envolvidos na pesquisa.

Os sujeitos da pesquisa envolvidos nos episódios aqui tratados são, portanto, o professor de matemática regente da turma do 7º ano, cujo codinome é Benjamin, os estagiários que o acompanhavam em suas práticas nos momentos em que as observações foram realizadas, com

---

[6] No original: (…) can be interpreted in terms of a dialectical process between the figural and the conceptual aspects (…) (Mariotti, 1995, p. 104).
[7] No original: (...) a panacea for the problems of mathematics education (Arcavi, 2003, p. 238).

codinomes Hipátia e Hilbert (na época, alunos de um curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública) e os estudantes da turma. Cabe explicar que Benjamim, ao ser convidado para a pesquisa, relatou o fato de que, em muitas das aulas a serem observadas, a ministração dos conteúdos seria realizada pela dupla de licenciandos, sob a sua supervisão. Dessa maneira, os estagiários foram convidados a participar da pesquisa.

Os dados referentes aos episódios foram analisados sob a perspectiva da análise de conteúdo de Bardin (1977), em que procuramos identificar e problematizar, a posteriori, conhecimentos matemáticos para o ensino, no que tange à geometria nos anos finais do ensino fundamental, os quais entendemos que foram demandados a partir das práticas de ensino observadas. Ou seja, os saberes elencados e discutidos a partir das nossas análises podem ter sido ou não mobilizados pelos sujeitos. Em vista disso, analisamos que tais conhecimentos afloraram como relacionados aos diferentes tipos de questões colocadas nas aulas. Ressaltamos, também, que os dados foram analisados e discutidos à luz da literatura especializada sobre visualização matemática apresentada na seção anterior.

O caso das bases dos prismas

Em conjunto, os estagiários e Benjamin planejaram naquele ano letivo que as aulas de geometria sobre figuras planas e espaciais se iniciassem com atividades nas quais os estudantes do 7º ano pudessem descrever os objetos geométricos que lhes seriam apresentados: poliedros e não poliedros em acrílico; polígonos e círculos em borracha. A atividade também tinha como objetivo que os estudantes conseguissem classificar tais objetos segundo os seus próprios critérios, e que compreendessem que os objetos não planos têm uma ou duas de suas faces sobre dois planos distintos e paralelos, de maneira que as outras faces desses objetos estão fora desses dois planos.

Em seus planejamentos, os docentes (Benjamin, Hipátia e Hilbert) propuseram avançar aos poucos a partir da concepção inicial dos estudantes para um conhecimento geométrico sistematizado. Isto é, e propuseram-se partir do conhecimento já existente dos estudantes, da tarefa de relacionar esses saberes com objetos do meio social, para então seguir em direção a uma sistematização dos conhecimentos construídos por meio desse processo.

Assim, em uma das aulas observadas, foi proposta e realizada uma atividade em que alguns estudantes foram convidados a ir até a frente da sala, um de cada vez, para escolherem um objeto em acrílico – o qual era uma representação concreta de uma forma geométrica espacial –, dentre os objetos que estavam dispostos sobre duas mesas, para descrevê-los segundo o que viam e/ou o que sabiam a seu respeito. Além dos objetos em acrílico, havia um material feito de uma placa de isopor coberta por um tecido que foi nomeada por Benjamin como *pano*, e representava, nas aulas, um plano.

Um dos alunos que participaram da atividade – de codinome Otávio – escolheu a representação de um tronco de pirâmide de base quadrada para descrição. Enquanto explorava o material, o estudante chamou a atenção quanto a uma parte da figura, indicando-a como a sua base. Essa observação desencadeou uma discussão em torno da concepção de base de uma figura espacial, conforme se segue nos excertos abaixo:

> Otávio: Esta figura é um quadrado aqui [referindo-se a uma das bases do tronco de pirâmide], mas, aqui, hum ... bem ... é ... tem um quadrado grande para base, que seria, e um quadradinho pra fechar [..]
> Joana: Você não acha que, por exemplo, a parte quadrada maior que tá embaixo, no caso aí, é a base, mas o quadrado pequeno que tá em cima também pode ser uma base?
> Hipátia: Você acha que a figura, ela pode ter somente uma base?
> Joana: Não! Eu tô falando que nessa figura tem mais de uma base. Só que, tá... Mas, quando vê assim, né, nesse ângulo [...] ela também pode ter mais de uma base. Embaixo tem um quadrado maior, que no caso é a base, mas do lado e o quadrado menor também pode ser uma base, uai! (Diálogo entre estagiária e alunos, 2018) (Pereira, 2020, pp. 78-79).

Após algumas discussões, Hipátia solicitou que outro integrante de outro grupo fosse até a frente da sala para analisar um novo objeto. O aluno escolheu um cone:

> Hipátia: Já que ela não tem o que vocês chamaram de base, o que ela tem? [...] Por isso, Joana, que na matemática tem que descrever o que eu tô considerando a base. [...] Se eu colocar ela assim [com o vértice do cone apoiado sobre o pano], eu posso falar que essa é a base dela? [...] A gente define o que que eu tô considerando a base da figura. [...] Eu vou escolher o que eu chamo de base.
> Melissa: Eu acho que é tipo o ponto de apoio.
> Hipátia: Se a gente falar que é ponto de apoio, então, será que aqui ela não tem um ponto de apoio [colocando um icosaedro apoiado sobre uma das suas faces triangulares sobre o pano]? [...] Então, olha só. A gente não pode ficar somente na base que dá o apoio, que dá a sustentação. A gente tem que olhar uma outra condição pra falar assim: essa é a base da minha figura. Tá bom? Olha essa [um prisma de base triangular com uma das suas faces laterais apoiada no pano]! Ela poderia ficar assim e ela tá bem sustentada. [...] E aí, como é que eu vou escolher qual que é a base da minha figura? [...] Então, eu vou olhar qual característica que eu vou ter que observar pra falar que aquela é a base da figura? [...] Esses dois objetos aqui [mostrando uma pirâmide e um octaedro]. Eles têm características em comum?
> Joana: Eu posso considerar que ela [apontando para o octaedro] tem só uma base, já que todas as partes são bases? [...] Eu só não entendi o que é base...
> Hipátia: O que é base? É uma característica para, é... Como é que eu vou explicar essa parte? Vamos trabalhar com essa figura aqui [pegou um prisma de base triangular e um prisma de base pentagonal e os colocou sobre o pano]. [...] Como é que eu vou explicar isso? Quando eu pego uma família de figuras, por exemplo, elas têm, como é que eu daria nome para elas, para essa figura aqui [prisma de base triangular]? […] E esse aqui

> [prisma de base pentagonal]? [...] como a gente explicou pra vocês agora há pouco, dentro desse grupo de famílias, dentro desse grupo de figuras, dessas famílias, tem características que são comuns e tem característica que é individual da figura. Essa característica individual, quem vai me trazer essa informação é a base da figura. Então, olha essas duas aqui [os prismas de base triangular e de base pentagonal], que que elas têm em comum? Por que eu posso classificá-las na mesma família? [...] Porque elas são feitas de retângulos e... [...] Então, eu posso agrupar seguindo essa ideia. Quantas bases ela tem. Ela tem essas bases. E, como que eu diferencio já que elas fazem parte da mesma família?
> Joana e outros alunos: É a base!
> Hipátia: É a base. […] A base é o que diferencia a figura (Diálogo entre estagiária e alunos, 2018) (Pereira, 2020, pp. 84-100).

A abordagem metodológica realizada na aula foi escolhida porque, segundo o professor regente e os estagiários, os alunos não haviam tido contato adequado com conceitos de geometria no ano escolar anterior. Apesar desse fato, foi possível notar que os estudantes possuíam noções intuitivas sobre figuras geométricas espaciais, além de possuírem conhecimentos, mesmo que expressos com certas dificuldades, a respeito de alguns elementos dessas figuras por suas características e nomenclaturas conforme tratadas na geometria escolar (arestas, vértices, faces, bases, etc.).

Percebe-se que a ideia a respeito das bases de um prisma desencadeou diversos questionamentos por parte dos estudantes, os quais, em alguns momentos, foram respondidos pelos docentes ainda sob algumas incertezas sobre o que é a base enquanto um elemento de alguns poliedros. Nessa aula, compreendemos que a sistematização de uma ideia sobre a base de figuras espaciais foi realizada a partir da visualização no sentido atribuído por Kaleff (2013, p. 85) do "[...] ver o objeto (a imagem real, visual ou tátil do objeto físico) por meio do aparato sensorial". Ao se pensar nessa sistematização vinculada à exploração de uma caracterização das figuras, ela poderia ocorrer sob o ponto de vista do que preza o "[...] ver com os olhos da mente".

A partir do episódio relatado e das pontuações de Arcavi (2003) e Presmeg (1986) temos indícios de uma demanda de conhecimentos para o ensino de geometria no que tange à compreensão do uso da visualização como um processo em que a razão e a intuição sejam privilegiadas dentro de um relacionamento harmônico e coerente com o nível de escolarização ao qual ela se destina. Também como um processo em que se pode beneficiar dos conhecimentos dos estudantes quanto aos componentes figurais e conceituais dos entes estudados (Fischbein, 1993), favorecendo, assim, a construção e exploração de entendimentos novos e mais avançados sobre construções e características geométricas das figuras espaciais.

Desse modo, indicamos a importância de um saber relativo à análise dos possíveis obstáculos e dificuldades do uso da visualização, principalmente quando ela está atrelada a uma abordagem pedagógica em que a intuição é priorizada como o principal patamar da construção do pensamento geométrico.

Práticas de ensino em que o recurso à visualização se faz presente, e em que as representações das figuras são apresentadas aos estudantes prontas para manipulação ainda requerem dos professores saberes relativos à antecipação de possíveis dificuldades, dúvidas e equívocos nesse processo. Como exemplos de algumas questões que podem permear a reflexão dos professores sobre isso, podemos apontar: Que dúvidas podem aparecer ao serem exploradas representações concretas já prontas? Que equívocos podem ser gerados a partir da manipulação dessas representações? Quais são os conceitos-chave envolvidos na exploração de poliedros e não poliedros? Estamos conscientes de que não há como o professor prever todos os obstáculos frente ao assunto que irá trabalhar. Entretanto, conhecer algumas possibilidades, conforme afirmam Moreira e David (2005), é parte do seu saber profissional.

Nesta prática, o uso intencional pelo professor regente e estagiários, do recurso à visualização de objetos para discutir suas características e trazê-las às figuras geométricas que representam, apresenta claramente um conhecimento para o ensino. Pela visualização proposta e realizada pelos estudantes foram apontadas características intuitivas, transportadas para as figuras geométricas em que se poderia sistematizar propriedades matemáticas.

Uma definição de quadrado

Em aulas seguintes, Benjamin trabalhou com desenhos de formas bidimensionais e tridimensionais, sem a presença dos estagiários, recorrendo ao uso de técnicas de desenho geométrico com régua e compasso. O objetivo de cada construção era a obtenção e exploração, com os estudantes, de uma figura geométrica e, a partir dela, a construção do que ele nomeava como **artemetria** (mistura de arte com geometria, segundo Benjamin).

Em uma dessas aulas, Benjamim explicou que a primeira construção seria um quadrado inclinado, de seis centímetros de medida de lado, e que tal figura deveria ser construída mais ao centro de uma folha A4 que foi disponibilizada aos estudantes. Ele orientou-os na construção de dois lados adjacentes do quadrado. Enquanto os alunos construíam um quadrado em suas folhas, Benjamin continuou solicitando que o quadrado ficasse inclinado e terminou de desenhar a figura no quadro, à mão livre, o que resultou em distorções dos ângulos de 90º, conforme ilustrado na Figura 1:

Figura 1.

Quadrado inclinado desenhado à mão livre no quadro (Pereira, 2020, p. 123)

> Benjamin: [...] A ideia é que o quadrado fique virado, tá? Ele não deixa de ser quadrado, ok? Quais são os elementos, as características de um quadrado, vocês sabem?
> Melissa [levantando a mão]: Eu! Tem que ter os lados iguais.
> Benjamin: Os quatro lados iguais.
> Joana: O quadrado é que tem quatro ângulos de 90º?
> Benjamin: Ele tem que ter quatro ângulos de 90º. Os quatro lados iguais [escrevendo essas informações no quadro]. Tá? Aí depois a gente vai ver isso pra ver como que essas definições funcionam. Porque eu tenho uma figura, olha só essa figura! Ela... Ela é uma quadrado [desenhou no quadro, à mão livre, um retângulo]? [...] E ela tem os quatro ângulos retos, olha só [fazendo as marcações com quadradinhos nos ângulos retos do retângulo]!
> Davi: Ah, é um retângulo, ué!
> Benjamin: Olha essa figura aqui, olha [desenhou no quadro, à mão livre, um losango]
> Aluno: É um quadrilátero..
> Benjamin: Ela tem os quatro lados iguais, mas ela não tem os quatro ângulos retos, tá vendo? Então, a gente vai ter que estudar esses elementos, bem aos poucos, por isso que a gente tem que ficar atento. Na figura que você vai desenhar aí agora, você precisa de uma figura de quatro lados. Os quatro lados têm que ter seis centímetros, mas os ângulos internos dessa figura precisam ser ângulos de... 90º. Vai lá gente! [...] É engraçado que quando a gente vira o quadrado nessa posição [a posição em que estava o desenho no quadro], tem alunos que acham que isso não é um quadrado. Aí dá outro nome. Ah, isso aí parece aquela figura que é igual a um docinho. Como é que chama aquela figura que é no formato de um docinho? Aquela que eu desenhei ali, mais ou menos, no canto. Como que se chama essa figura aqui? (Diálogo entre estagiária e alunos, 2018) (Pereira, 2020, p. 123).

Enquanto envolvia os estudantes na construção de um quadrado inclinado, o professor explorava, a partir da visualização, algumas características de quadriláteros que os classificam como retângulos ou losangos. Benjamin voltou à construção do quadrado e disse aos alunos que, naquele momento, eles já sabiam como construí-lo ou como construir um losango com ângulos de 90º, conforme os excertos a seguir descrevem:

> Benjamin: Olha só, gente. Essa figura geométrica ... então, olha essa figura geométrica. Ela tem quatro lados?
> Alunos: Sim.
> Benjamin: Então, se ela tem quatro lados ... que nome que a gente dá pra ela na

> matemática?
> Alguns alunos: Quadrilátero.
> Benjamin: Os quatro lados ... são paralelos? O que que isso quer dizer? Olha só. Se eu pegar esse lado aqui [apontando para um lado do quadrado desenhado no quadro] e esticar ele infinitamente [prolongou o lado com pontilhados nas duas direções] e esse lado infinitamente [fez a mesma coisa com o lado oposto] eles vão se encontrar? [...] Ele tem um par de lados paralelos ... Eles não vão se encontrar, tá? Depois eu vou mostrar isso melhor no GeoGebra para vocês. [...] Então, que nome que eu dou pra figura que tem todos os lados paralelos?
> Alguns alunos: Paralelogramo.
> Benjamin: Paralelogramo. Agora nós vamos olhar para os ângulos. Ele tem quatro ângulos...?
> Christopher: De 90º.
> Benjamin: De 90º e que são chamados de ângulos... retos. Se ele tem todos os ângulos retos, que nome que eu dou para essa figura?
> Christopher: Retângulo? Reto?
> Benjamin: Essa figura também é um retângulo. Agora, vamos olhar para os lados. Ela tem os quatro lados iguais?
> Alunos [em coro]: Sim.
> Benjamin: Uma figura com os quatros lados iguais, que nome que eu dou para ela?
> Christopher: Losango.
> Benjamin: Losango. E aí, gente, olha só! Uma figura, que é um quadrilátero, que é paralelogramo, que é retângulo e que é losango, ao mesmo tempo, recebe o nome de...?
> Alunos [em coro]: Quadrado.
> Benjamin: Então, o que é um quadrado? É um quadrilátero, porque tem quatro lados. É um paralelogramo, porque todos os lados são paralelos, né? Vão ter dois pares de lados paralelos. É um retângulo, porque vai possuir todos os ângulos de 90º, ângulos retos. É um losango, porque todos os lados são iguais. E aí, por ele ser isso tudo, ele recebe um nome especial que é quadrado. Então, um cara, para ele ser quadrado, ele tem que passar por isso tudo. E é esse o cuidado que a gente tem que ter. Ah, ele tem os quatro lados iguais, mas não tem os ângulos retos, vai ser quadrado? (Diálogo entre estagiária e alunos, 2018) (Pereira, 2020, pp. 124-125).

Ao propor a construção de um quadrado inclinado, consideramos que houve uma fuga do desenho na posição prototípica que geralmente encontramos (Presmeg, 1986). O professor explorou com os estudantes a ideia de que naquela posição, o quadrado desenhado não interferiria na sua definição como tal figura, retirando o posicionamento do foco quando se pensa na sua caracterização. Vale ressaltar que Benjamin também se preocupou em deixar claro para os estudantes que a não padronização das configurações das figuras não interfere na sua caracterização.

Sua discussão sobre o quadrado, a nosso ver, priorizou elementos relevantes no que se refere ao estudo de uma figura geométrica, pois, além de criar uma situação em que os alunos pudessem fazer uma construção do quadrado, manuseando instrumentos de desenho geométrico, ainda os levou à discussão sobre as condições de sua caracterização como tal. Sobre a definição de quadrado, embora os alunos já possuíssem conhecimentos sobre a figura, seja pela sua experiência escolar ou pela experiência social, Benjamin, a partir da forma de ensino abordada, reconstruiu e sistematizou o conceito relativo a tal figura geométrica, de maneira que a visualização e a intuição estiveram em harmonia no desenvolvimento do raciocínio geométrico (Presmeg, 1986; Fischbein, 1993).

Assim, entendemos que, nessa aula, o professor trabalhou sob a perspectiva de que uma figura geométrica tem natureza conceitual (Fischbein, 1993). Um quadrado não é apenas uma imagem desenhada na lousa ou em uma folha de papel, mas trata-se de uma forma regulada por uma definição, ainda que esta definição seja guiada por um objeto real. No episódio, pode-se perceber mobilização de um conhecimento sobre a maneira de se definir o quadrado, em que há uma caracterização dessa figura geométrica, apoiada em uma representação não prototípica, que a inclui em outras classificações de figuras planas e que expressa para os estudantes tanto as suas propriedades figurais quanto conceituais (Presmeg, 1986; Fischbein, 1993).

Emerge desse episódio, ainda, um conhecimento mobilizado por Benjamin sobre o uso de figuras não prototípicas, um elemento importante da visualização que fomenta a criação de imagens mentais não necessariamente padronizadas, que contribuem na produção de significados, favorecendo o entendimento de conceitos (Presmeg, 1986). Também se relaciona a essa situação, a nosso ver, um conhecimento sobre um tipo de atividade em que é possível se trabalhar tanto a construção não padronizada da figura quanto a exploração da sua caracterização.

Discussões sobre conhecimentos matemáticos para o ensino de figuras geométricas nos anos finais do ensino fundamental com foco na visualização

Com base nos episódios relatados, ao situarmos os dados que consultamos na literatura sobre visualização, procuramos trazer à luz possibilidades de conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria no ensino fundamental que deles emergiram. Conforme já relatado, focalizamos as demandas de conhecimentos relacionados à visualização em geometria. Assim sendo, identificamos alguns conhecimentos, os quais entendemos que fazem parte da constituição de um conjunto de saberes matemáticos para o ensino de geometria no ensino fundamental e, portanto, são específicos do professor de matemática. Resumimos alguns deles a seguir.

Conhecimentos sobre prismas, pirâmides, cones e cilindros, que auxiliem os professores na construção, junto aos estudantes, de uma caracterização dessas formas geométricas como aquelas que possuem faces predefinidas como suas bases, de maneira que o papel desses elementos nessa caracterização seja explicitado. Conhecimentos sobre poliedros e não poliedros, que auxiliem os professores nas explicações sobre uma caracterização dos primeiros como figuras espaciais formadas por uma reunião finita de polígonos, em que cada lado de cada polígono é comum a um outro polígono.

Conhecimentos sobre prismas, pirâmides, cones e cilindros, que auxiliem os professores na construção, junto aos estudantes, de uma caracterização dessas formas geométricas como aquelas que possuem faces predefinidas como suas bases e de maneira que o papel desses elementos, nessa caracterização, seja explicitado. Conhecimentos especializados sobre poliedros e não poliedros que auxiliem os professores nas explicações sobre uma caracterização dos primeiros como figuras espaciais formadas por uma reunião finita de polígonos, em que cada lado de cada polígono é comum a um outro polígono.

Conhecimentos sobre a visualização, enquanto componente do ensino e aprendizagem de geometria, mobilizando o conhecimento que os estudantes já possuem como um processo relacionado à criação e à interpretação de imagens mentais para a geração de informações sobre entes geométricos, ao reconhecimento de relações e transformações entre objetos da geometria, à caracterização de formas geométricas, à construção e compreensão de conceitos e à simbiose entre os componentes figurais e conceituais das figuras geométricas. Esses conhecimentos implicam outros, os quais estão relacionados aos obstáculos e às dificuldades associados ao uso da visualização no ensino de geometria na educação básica e em conhecimentos sobre a antecipação de dúvidas que possam ser levantadas pelos estudantes, especialmente quando se trabalha com a manipulação e visualização de representações concretas de figuras geométricas.

Conhecimentos sobre um repertório diversificado de representações de figuras geométricas que auxiliem o professor na condução do progresso dos estudantes na criação de imagens mentais dos entes geométricos. Conhecimentos sobre um repertório de representações de imagens de figuras espaciais e planas (desenhos, materiais concretos, imagens dinâmicas geradas em softwares, entre outras) não prototípicas, que encorajem os estudantes a evitarem a recorrência excessiva às figuras prototípicas como únicas imagens mentais de figuras geométricas.

Conhecimentos relacionados à escolha e à criação de situações didáticas e tarefas que auxiliem os estudantes no desenvolvimento do raciocínio espacial, especialmente no que se refere à passagem do espaço para o plano, e lhes proporcionem oportunidades de experimentação, de construção e de análise de representações diversas de figuras geométricas e dos conceitos a elas relacionados.

Ao analisarmos o episódio sobre as bases de um prisma, notamos que a ideia sobre esse elemento se estabeleceu como uma discussão bastante profícua e, ao mesmo tempo, polêmica, tanto para os estudantes quanto para os próprios docentes, que recorreram a explicações sobre as bases e sobre a caracterização de prismas que, em alguns pontos, não satisfizeram ou contradisseram alguns elementos da caracterização das figuras como entes geométricos abstratos.

No que se refere, ainda, à ideia de bases, os docentes propuseram que esses elementos fossem definidos como os que diferenciam as figuras entre si, dentro de um mesmo grupo de figuras. No que diz respeito à caracterização de prismas, os docentes engendraram o conceito de que essas são formas cujas faces laterais são todas retangulares. Todavia, essas sistematizações acabaram por desencadear algumas dificuldades de entendimento por parte dos alunos, as quais foram expostas em alguns diálogos que apresentamos.

Em nossa visão, a abordagem do assunto poliedros e não poliedros circulou em torno da visualização de alguns tipos de representação dessas figuras, no sentido do "ver para argumentar" (Santos, 2014). Ou seja, os argumentos debatidos na aula foram formulados e discutidos após a visualização dos objetos pelos alunos. Nesses casos, de acordo com Gutiérrez (1996), a visualização precisa reforçar o uso das representações para obtenção de informações que auxiliem na criação e no uso de imagens mentais como representações de conceitos geométricos.

Especialmente sobre conceitos geométricos, estes podem ser entendidos no contexto da geometria ensinada na escola básica como um conjunto composto pelas propriedades, relações e definições referentes aos entes geométricos (Cifuentes, 2003). Consideramos que o conceito de quadrado mobilizado por Benjamin exemplifica essa noção. Ainda de acordo com Cifuentes (2003, p. 60), dada a natureza visual de diversas designações na geometria (forma, congruência, semelhança etc.), os conceitos geométricos precisam exprimir "além de propriedades, transformações e correspondências inerentes aos entes estudados".

Novamente sobre o processo de construção e aprendizagem de conceitos geométricos, pode-se dizer que são várias as contribuições do estímulo à criação de imagens mentais, que os professores precisam conhecer. Dreyfus (1991), por exemplo, defende que imagens mentais de conceitos matemáticos são necessárias à obtenção dos significados a eles associados. Gutiérrez (1996), citando Kosslyn (1980), afirma que esse autor já identificava quatro processos aplicáveis à visualização em relação às imagens mentais que são importantes no estudo conceitual e que precisam ser reconhecidos pelos professores.

O primeiro deles diz respeito à capacidade que se deve desenvolver com os estudantes de geração da imagem mental de uma figura a partir do conhecimento de informações sobre ela. O segundo refere-se ao fortalecimento das habilidades em explorar imagens mentais para que possam observar os elementos fundamentais da figura estudada. O terceiro corresponde ao desenvolvimento da capacidade de transformação da imagem mental de uma figura em outras imagens mentais da mesma ou de outras figuras. Deste modo, finalmente, temos o desenvolvimento da capacidade dos alunos no uso de imagens mentais como suporte de suas respostas a questões sobre as características e propriedades das figuras geométricas.

Gutiérrez (1996) traz um exemplo do que Kosslyn (1980) defende ao nos provocar a pensar que estudantes que estão aprendendo conceitos e relações entre quadriláteros podem ser estimulados, enquanto isso, a imaginar um retângulo se encolhendo para se tornar um quadrado e transformando-se, depois, novamente em um retângulo. Trazendo essa reflexão de Gutiérrez (1996) para os contextos de ensino atuais, as imagens mentais dos estudantes, enquanto aprendem conceitos da geometria, podem ser melhor desenvolvidas com auxílio do uso de imagens dinâmicas geradas por softwares, por exemplo.

A respeito das caracterizações de algumas das formas tridimensionais que poderiam auxiliar no esclarecimento de alguns desentendimentos durante as aulas observadas – que, segundo nossa compreensão, se configuram como conhecimentos importantes para os professores durante o ensino de figuras espaciais – consideramos uma breve discussão sobre uma caracterização de prismas.

Do ponto de vista da matemática acadêmica, um prisma pode ser construído e definido a partir de um polígono $A_1A_2...A_n$ contido em um plano α. Escolhe-se um ponto B_1 qualquer, não pertencente a α, e traça-se por esse ponto um plano β paralelo a α. Traçam-se o segmento de reta A_1B_1 e, pelos demais vértices $A_2...A_n$, os segmentos de retas paralelos e congruentes a A_1B_1 que cortam β nos pontos $B_2...B_n$. Chama-se prisma (ou prisma convexo) a reunião dos segmentos de retas paralelos a A_1B_1 que cortam β nos pontos $B_2...B_n$. Os polígonos $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$, contidos nos planos α e β, respectivamente, são chamados de bases do prisma. Os quadriláteros $A_1B_1A_2B_2$, $A_2B_2A_3B_3$, e assim por diante, são paralelogramos que compõem as faces laterais da Figura 2 (Carvalho, 2005).

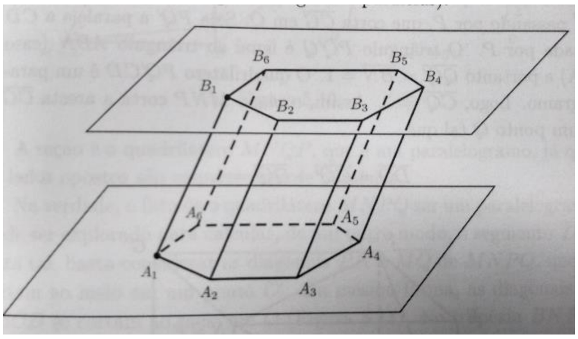

Figura 2.

Construção de um prisma (Carvalho, 2005, p. 37)

Essa maneira de se construir e se definir um prisma esclarece que as suas bases são os dois polígonos congruentes e paralelos $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$. As faces do prisma são paralelogramos – nem sempre retângulos – por consequência da sua construção a partir dos dois polígonos paralelos. No entanto, defendemos que apresentar aos estudantes uma definição dessas figuras sob esse ponto de vista, de modo já finalizado, não se mostra adequado da perspectiva do ensino de geometria no 7º ano do ensino fundamental. Durante a formação dos alunos do ensino fundamental, é necessário que os professores estejam atentos à complexidade da geometria, que consideramos, na perspectiva colocada por Battista (2007, p. 843), como "uma rede interligada de conceitos, formas de raciocínio e sistemas de representação, usada para conceptualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginários". Entendendo a geometria dessa maneira, concebemos que a visualização e o uso de representações podem em muito contribuir para o processo de ensino e aprendizagem, desde que complementem e, ao contrário, não substituam o pensamento abstrato e/ou provoquem um adiamento – de maneira quase inconsciente para quem os emprega em suas práticas – do seu avanço.

Em nossas análises, a questão sobre os conceitos em geometria se mostrou muito importante. Yilmaz e Argun (2018) argumentam que na educação matemática o estabelecimento consciente de conceitos e relacionamentos entre entes matemáticos exige uma construção organizada de um processo de abstração e, segundo eles, a visualização possuiu um papel central nessa composição. Principalmente no que se refere ao ensino de geometria, o conhecimento de atividades que proporcionem aos estudantes oportunidades para que desenvolvam suas habilidades visuais e os incentivem ao raciocínio visual e conceitual deve ter um importante lugar no domínio dos conhecimentos dos professores.

Segundo os autores citados acima, na medida em que os estudantes são encorajados a criar imagens mentais relacionadas aos conceitos, cada vez mais se tornam capazes de avaliar a veracidade das informações que recebem e as inconsistências dessas imagens, o que implica uma elaboração conceitual cada vez mais precisa. Nas etapas em que os estudantes ainda não têm uma imagem mental clara do conceito abstraído, ou formaram uma imagem incorreta, o processo de abstração pode ser amparado com recursos visuais apropriados. Yilmaz e Argun (2018) ainda defendem que deve ser considerado como um saber dos professores o conhecimento a respeito de como auxiliar os estudantes a formarem expressões de imagens através de processos de transformação do visual para o simbólico.

Consideramos relevante, também, que os professores possuam conhecimentos que permitam antecipar e reconhecer possibilidades de dificuldades e dúvidas apresentadas pelos estudantes, bem como identificar quando e como tratar suas concepções e equívocos. Nas análises dos episódios pôde-se ver exemplos em que o ensino amparado nos processos de visualização deixou transparecer algumas dificuldades, obstáculos e possibilidades de internalizações inadequadas de conceitos por parte dos alunos. Dreyfus (1991) defende que é importante que os professores tenham conhecimento das dificuldades que os estudantes podem apresentar durante a visualização, tais como:

> [...] [suas] incapacidades de ver diagramas de diferentes maneiras; dificuldades em reconhecer as transformações implicadas nos diagramas; [...] falha na distinção entre uma figura geométrica e o desenho que representa essa figura; falha em unir as suas visualizações ao pensamento analítico (Dreyfus, 1991 apud Costa, 2000, p. 177).

Vinculado ao tratamento de representações e imagens mentais está, ainda, o conhecimento que os professores precisam ter sobre o uso de figuras prototípicas como componente do ensino de geometria (Presmeg, 1986). Nos episódios relatados, houve dois momentos distintos relacionados a essa questão. Nas aulas sobre figuras espaciais, os objetos em acrílico eram, em certa medida, representações padronizadas de algumas figuras. Não havia entre eles, por exemplo, objetos representativos de prismas e cones oblíquos, nem de poliedros em configurações mais incomuns para o conhecimento dos alunos. Já na aula em que Benjamin trabalhou com o quadrado e o hexágono, ao contrário, os desenhos construídos para análise e construção conceitual não eram padronizados, e isso foi explorado pelo professor.

Cifuentes (2005, 2010) chama atenção para o fato de que é inerente aos processos de visualização fazer uma contextualização espaço-temporal da imagem, ou seja, uma contextualização em que faz sentido identificar, nos momentos iniciais de trabalho com uma determinada forma, uma representação padrão dela. Em um segundo momento do trabalho com visualização, mais devotado à abstração, explica o autor, há uma separação repentina da imagem de sua posição contextual. Ainda que esse segundo momento busque na representação não padronizada elementos para o estudo da forma, esse fenômeno, quase inevitavelmente, conduz o estudante a conceber como principal identificação da figura geométrica um protótipo dela (Hershkowitz, 1990; Presmeg, 1986).

Considerações finais

Face ao objetivo deste artigo, que procura discutir, com base em dois episódios ocorridos em aulas de geometria em uma turma de 7º ano do ensino fundamental, conhecimentos para o ensino de figuras planas e espaciais apresentados nesses episódios com foco específico na visualização, destacamos que os saberes identificados possuem uma conformação centrada em aspectos da geometria que se ensina na escola, uma vez que foram caracterizados a partir de demandas reais de práticas de ensino, e também em elementos apontados pela literatura especializada que foi consultada. Ou seja, estamos em conformidade com as hipóteses levantadas por autores como Moreira e David (2005).

Como uma conclusão oriunda da nossa investigação, salientamos que as questões relativas à visualização a evidenciaram não somente como um recurso e/ou estratégia para o ensino de geometria, mas pudemos notá-la em nosso estudo no âmbito de conhecimentos específicos para o ensino de geometria no ensino fundamental.

Sobre o tratamento da visualização como um saber para o ensino de geometria, inferimos, segundo o nosso estudo, que o fato dele não ocorrer pode levar os futuros professores a desconhecerem a utilidade do raciocínio visual e seus diferentes e importantes papéis na educação matemática. Em segundo lugar, notamos que os professores de matemática, em sua formação inicial, necessitam de oportunidades de se aprofundar e de se familiarizar com conhecimentos relacionados ao papel da visualização no ensino de geometria e a tarefas de raciocínio visual, apreciando o seu potencial educacional, analisando e desenvolvendo ferramentas para aplicá-las em suas salas de aula.

Os achados do nosso estudo podem contribuir para a ideia de estruturação de uma educação geométrica dos futuros professores a partir de saberes constituídos segundo demandas de práticas reais de ensino, bem como de elementos presentes na literatura de pesquisa que leva em conta discussões sobre ensino e aprendizagem da geometria/matemática. Esse entendimento converge para a afirmação de Moreira (2012) de que a perspectiva de estruturação da formação de professores, segundo um corpo de conhecimentos específicos desse profissional, tem na prática de ensino um elemento essencial.

A licenciatura ainda é marcada por um referencial de formação dicotômico: conteúdo acadêmico versus modos de ensinar. O amálgama de conhecimentos que, segundo vários autores, caracteriza o saber específico para o ensino, ainda não foi suficientemente investigado e compreendido pelas comunidades acadêmicas que trabalham na formação de professores e, por isso, mais estudos precisam ser realizados. Quando esses tipos de saberes são investigados, a partir de pesquisas como esta, são suscitadas questões e demandas de conhecimentos dos professores que merecem tratamento no patamar de saberes da e para a prática, sem uma separação pontual sobre esta ou aquela fração desses conhecimentos como mais ou menos relevantes para o trabalho de ensinar.

Referências

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa Edições.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908).

Bogdan, R.; Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Carvalho, P. C. P. (2005). *Introdução à Geometria Espacial*. SBM.

Cifuentes, J. C. (2005). Uma Via Estética de Acesso ao Conhecimento Matemático. *Boletim GEPEM (USU)*, Rio de Janeiro, *46*, 55-72.

Cifuentes, J. C. (2010). Do conhecimento matemático à educação matemática: uma “odisseia espiritual”. In: *Filosofia, Matemática e Educação Matemática*, Editora UFJF.

Cifuentes, J. C. (2011). O “Salto Arquimediano”: um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático. *Scientiae Studia (USP)*, *9*, 645-667.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 33-48).

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. Educational Studies in Mathematics, *24*(2), *Springer*, 139-162.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th PME Conference* (pp. 3-19).

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometria. In Flores et al (org). *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Federación Española de Sociedades de Professores de Matemática (FESPM). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Gonzato, M., Godino, J. D., & Contreras, J. M. (2010). Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. Marín et al (org) *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 383-392). Ciudad Real: SEIEM.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. P. Nesher & J. Kilpatrick (org.). *Mathematics and Cognition* (pp. 70-95). Cambridge University Press.

Kaleff, A. M. M. R. (2015). Formas, padrões, visualização e ilusão de ótica no ensino da geometria. *VIDYA*, *35*(2), 75-91.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

Leivas, J. C. P. *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura em matemática*. (2009). [Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná].

Mariotti, M. A. (1995). Images and Concepts in geometrical reasoning. In: Exploiting Mental Imagery with Computers Mathematics Education. pp. 97-115, Springer.

Moreira, P.C., & DAVID, M.M.M.S. (2005). *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Autêntica.

Moreira, P. C., & Ferreira, A. C. (2013). O lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática. *Bolema*, *27*(47), 981-1005.

National Concil of teachears of mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics NCTM. Reston.

Pereira, A. N. (2020). *Conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria na educação básica*. [Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais]. https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/3614.

Presmeg, N.C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *3*(6), 42-46.

Procópio, R. B. (2011). *Geometria como um curso de serviço para a licenciatura em matemática: uma leitura da perspectiva do modelo dos campos semânticos.* [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora].

Roldão, M. do C. (2007). Função docente: natureza e construção do conhecimento profissional. *Revista Brasileira de Educação, 12*(34).

Santos, A. H. (2014). *Um estudo epistemológico da visualização matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização*. [Dissertação de mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Paraná]. https://exatas.ufpr.br/ppgecm/wp-content/uploads/sites/27/2016/03/045_AlessandraHendidosSantos.pdf.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Yakimanskaya, I. S. (1991). The development of spatial thinking in schoolchildren. *Soviet Studies in Mathematics Education, 3.*

Yilmaz, R., & Argun, Z. (2018). Role of visualization in Mathematical Abstraction: The Case of Congruence Concept. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *6*(1), 41-57.

Wu, H. (2011). The miss education of mathematics teacher. *Notices of the MAS, 58*(3).

Zimmermann, W., & Cuningham, S. (1991). Introduction: What is Mathematical Visualization? Zimmerman & Cunningham (org.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-7). MAA.

REVISÃO DE LÍNGUA PORTUGUESA E NORMAS APA:

Eleonora Dantas Brum

noradantas@yahoo.com.br

Fone: (19) 98164-9474