

Modelo epistemológico de referência no ensino de função em suas ideias básicas: uma concepção praxeológica

Epistemological reference model in teaching functions through its basic ideas: a praxeological conception

Modelo epistemológico de referencia en la enseñanza de función en sus ideas básicas: una concepción praxeológica

Modèle épistémologique de référence dans l'enseignement fonctionnel dans ses idées de base : un concept praxéologique

Karina de Oliveira Castro¹

Universidade Federal de Goiás (UFG)

Doutorado em Educação Matemática

<https://orcid.org/0000-0003-0315-2774>

Antonio Sales²

Universidade Anhanguera-Uniderp

Doutorado em Educação

<https://orcid.org/0000-0001-5515-6625>

Resumo

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo praxeológico que contribua na análise do conhecimento a partir da concepção de um modelo epistemológico de referência (MER). O conteúdo matemático que serviu de base é o ensino de função em suas ideias básicas. O ponto de partida foi um estudo dos elementos que embasam o MER por meio da Teoria Antropológica do Didático (TAD). A justificativa se encontra no campo do ensino do cálculo e na tentativa de contribuir não só no estudo do conteúdo matemático em si, mas, principalmente, fornecer uma alternativa de análise por meio de um modelo praxeológico construído para esse fim. Pelos moldes teóricos das dimensões de um problema didático, foi feita uma análise epistemológica do desenvolvimento do conceito para efeitos de construção do MER. As análises econômica e ecológica permitiram uma retomada das bases teóricas da TAD e, conseqüentemente, a elaboração do que chamamos de modelo praxeológico global: produto final que serve de análise não só para o campo do cálculo, mas para o conhecimento institucional como um todo.

Palavras-chave: Dimensões de um problema didático, Modelo epistemológico de referência, Teoria antropológica do didático, Ideias básicas de função.

¹ karinadeoliveiracastro@gmail.com

² profesales@hotmail.com

Abstract

The aim of this paper is to develop a praxeological model that contributes to the analysis of knowledge based on the conception of an epistemological reference model (ERM). The mathematical content that served as the basis is the teaching of functions in its basic ideas. The starting point was a study of the elements that support the ERM through the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). The justification lies in the field of calculus teaching and the attempt to contribute not only to the study of the mathematical content itself but also to provide an alternative analysis through a praxeological model built for this purpose. Through the theoretical frameworks of the dimensions of a didactic problem, an epistemological analysis of the concept's development was carried out for the purpose of constructing the ERM. The economic and ecological analyses allowed a reassessment of the theoretical foundations of the ATD, consequently leading to the creation of what we call the global praxeological model: a final product that serves as an analysis not only for the field of calculus but for institutional knowledge.

Keywords: Dimensions of a didactic problem, Epistemological reference model, Anthropological theory of the didactic, Basic ideas of functions.

Resumen

El objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo praxeológico que contribuya para el análisis del conocimiento desde la concepción de un modelo epistemológico referencia (MER). El contenido matemático que sirvió de base es la enseñanza de la función en sus ideas básicas. El punto de partida fue un estudio de los elementos que sostienen el MER por medio de la Teoría Antropológica del Didáctico (TAD). La justificativa se encuentra en el campo de la enseñanza del cálculo y del intento de contribuir no solo en el estudio del contenido matemático en sí, pero, sobre todo en la fornecer una alternativa de análisis a través de un modelo praxeológico construido para este propósito. Por los modelos teóricos de las dimensiones de un problema didáctico, se realizó un análisis epistemológico del desarrollo del concepto pára efectos de construcción del MER. Los análisis económicos y ecológicos permitieron una reanudación de las bases teóricas de la TAD y, en consecuencia, la elaboración de lo que llamamos de modelo praxeológico global: producto final que sirve de análisis no para el campo del cálculo, sino para el conocimiento institucional en su conjunto.

Palabras-clave: Dimensiones de un problema didáctico, Modelo epistemológico referencia, Teoría antropológica de lo didáctico, Ideas básicas de función.

Résumé

L'objectif de ce travail est de développer un modèle praxéologique contribuant à l'analyse des connaissances basé sur la conception d'un Modèle Épistémologique de Référence (MER). Le contenu mathématique qui a servi de principe est l'enseignement de la fonction dans ses idées de base. Le point de départ a été une étude des éléments qui font partie du MER à travers la Théorie Anthropologique de la Didactique (TAD). La justification a lieu dans le domaine de l'enseignement du calcul et dans la tentative de contribuer non seulement à l'étude du contenu mathématique lui-même, mais surtout de fournir une analyse alternative à travers un modèle praxéologique construit à ce but. A partir des modèles théoriques des dimensions d'un problème didactique, une analyse épistémologique du développement du concept a été réalisée en vue de construire le MER. Les analyses économiques et écologiques ont permis une reprise des bases théoriques de la TAD et par conséquent l'élaboration de ce que nous appelons un modèle praxéologique global : un produit final qui sert à l'analyse pas pour le domaine du calcul tout seul, mais pour la connaissance institutionnelle efficacement.

Mots-clés : Dimensions d'un problème didactique ; Modèle épistémologique de référence ; Théorie anthropologique du didactique ; Idées fondamentales de fonction.

Modelo epistemológico de referência no ensino de função em suas ideias básicas: uma concepção praxeológica

A proposta deste trabalho é contribuir no sentido de aprofundamento das ideias que compõem o corpo teórico que embasa a concepção de um modelo epistemológico de referência (MER). Partindo da justificativa a respeito do ensino do cálculo, elegemos o conceito de função como fio condutor das análises. O intuito é teorizar a elaboração do MER por meio das bases teóricas que fundamentam o problema didático, na visão de Gáscon (2011) e dos constructos básicos da Teoria Antropológica do Didático, especialmente a noção de praxeologia, desenvolvida por Chevallard (1998).

Ao final da investigação, teremos não só elementos para estudo do ensino do conceito de função, mas, também, uma expansão do modelo praxeológico construída a partir do MER utilizado.

Breves apontamentos sobre o modelo praxeológico na teoria antropológica do didático

A Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Chevallard (1999), tem como elementos principais: objetos, indivíduo e instituição. Objetos são as entidades materiais e imateriais, representadas pela letra **o** e que existem para o indivíduo **x**. Se há um conjunto de objetos **o** e um indivíduo **x**, há a instituição **I**. Esses elementos se relacionam mutuamente. O indivíduo **x** se relaciona com a instituição **I** por meio do que a TAD chama de relação institucional e, ainda, o indivíduo **x** se relaciona com o objeto **o** por meio do que o autor chama de relação pessoal. Portanto, objeto, indivíduo e instituição são a base dessa teoria a qual interpreta a realidade por meio da relação que existe entre os seus elementos.

O conceito de instituição é basilar na TAD e, para Michèle Artigue, é esta noção que revela e compreende o indivíduo: “Para a TAD, os objetos básicos são as instituições. O indivíduo emerge de suas várias subjugações institucionais, ele é visível através de seus efeitos. Serve primeiro para revelá-los e entendê-los” (Artigue, 2010, p. 42, tradução nossa). As práticas institucionais ganham vida por meio da relação entre seus entes básicos (*rapport*). Chevallard (1998, 1999) busca desenvolver um modelo que dê conta de descrever e analisar essas práticas institucionais. O autor desenvolve, então, o modelo praxeológico, a praxeologia: “[...] admite-se, de fato, que toda atividade humana regularmente desempenhada pode ser resumida em um único modelo, que aqui se resume pela palavra praxeologia” (Chevallard, 1998, p. 1, tradução nossa). O modelo praxeológico é composto por quatro elementos, que, juntos, são capazes de modelar a atividade humana, as práticas sociais e a atividade matemática, na visão de Chevallard (1999). Vejamos a seguir.

Constrói-se a noção de praxeologia começando pelo conceito de **tarefas** e **tipos de tarefas**. A ideia é que toda a prática institucional pode ser analisada por meio de um sistema de tarefas. Quando levamos em conta o universo metodológico da matemática numa sala de aula, por exemplo, fala-se em tarefas de estudo. Usando sua abordagem simbólica e axiomática, (Chevallard, 1998) o autor mostra que há **tarefas τ** e **tipos de tarefas T**. Os tipos de tarefas T são expressos por verbos e objetos bem precisos. Por exemplo: “calcular a raiz da equação” é um tipo de tarefa, mas “calcular”, apenas, não é. Entende-se que a noção de tarefa τ é a mais ampla e abrangente. E daí depreende-se a ideia de tipos de tarefas T. Além disso, Chevallard (1998) também fala em gêneros de tarefas, que seriam uma tarefa composta por um verbo sem uma especificação. Por exemplo: calcular. Temos, portanto, uma linha hierárquica: tarefas τ , gêneros de tarefas τ e tipos de tarefas T. Chevallard (1998) ainda enfatiza que o objeto essencial da didática é a reconstrução em instituição desses artefatos, dessas obras. Podemos afirmar que as tarefas visam à reconstrução de determinada obra institucionalmente prevista e, de certa forma, validada.

O segundo elemento do modelo praxeológico é aquele que explicita o modo de realizar os tipos de tarefas T: é o que o autor chama de **técnica τ** . O autor explica que a palavra técnica vem do grego *tekhnê* e significa saber fazer. Bosh e Chevallard (1999) esclarecem que a palavra **técnica** na sua abordagem teórica vem de um conceito bem amplo cuja ideia é a de uma maneira de resolver determinada situação. Assim sendo, no modelo praxeológico, técnica não quer dizer, em primeira mão, algoritmo ou método específico. É algo mais abrangente, sobre o qual se situam, por exemplo, as técnicas para resolver uma equação, para instalar um aplicativo, para abrir uma porta etc.

O conceito de técnica τ compõe o bloco técnico-prático no modelo praxeológico, simbolizado por $[T / \tau]$. É o que costumeiramente chama-se de saber-fazer. Temos, portanto, “[...] um certo tipo de tarefa, T, e uma certa técnica, τ , para realizar tarefas desse tipo” (Chevallard, 1998, p. 2, tradução nossa). Há três considerações importantes a respeito do conceito de técnica na abordagem praxeológica que faremos a seguir.

Primeiro, uma técnica τ pode não ser suficiente para realizar uma tarefa do tipo T em sua totalidade. Isso significa que pode haver desde técnicas que abordem parte de T, que abordem sua totalidade e, ainda, técnicas que sejam superiores a outras. Chevallard (1998) mostra que, por exemplo, qualquer técnica de cálculo em \mathbb{N} não é suficiente para certo tamanho de números. Segundo, nem toda técnica τ pode ser classificada como algorítmica. Por exemplo, pintar um desenho e expor os axiomas de determinado campo da matemática são técnicas que não dependem de algoritmos, de passos a serem seguidos e executados. Chevallard (1998)

argumenta, contudo, que parece haver certa tendência algorítmica na realização das tarefas. Finalmente, Chevallard (1998) postula que geralmente há um pequeno número de técnicas τ relacionadas a um tipo de tarefa T. Ou seja, institucionalmente falando, somente algumas são reconhecidas. Isso faz com que determinadas técnicas alternativas sejam excluídas ou, ainda, passem a existir em outras instituições. De fato, em determinados momentos podemos assistir a coexistência de técnicas diferentes na resolução de algumas equações. Por exemplo, nas disciplinas de química e física, o aluno pode ser apresentado a alguma técnica de cancelamento de termos semelhantes cujos passos são diferentes daqueles demonstrados pelo professor de Matemática.

Esse primeiro par de elementos do modelo praxeológico, $[T / \tau]$, o bloco saber-fazer, é o que estabelece uma ligação com a ideia de relação, objetivo da praxeologia. Ou seja, Bosh e Chevallard (1999) modelam a relação institucional e pessoal a partir do conceito de tarefas e técnicas. É por meio da realização de técnicas e tarefas que o indivíduo estabelece sua relação com a instituição e, desse processo, é possível identificar a derivação de um fenômeno. Bosh e Chevallard (1999) explicam que essa relação emerge por meio do que chamamos de “conhecimento” e “saber”, quase uma descrição reducionista. Ou seja, o que aparece de fato é uma espécie de naturalização do par tarefa/técnica. Isso faz com que a instituição conviva com tarefas rotineiras, naturalizadas e, quase sempre, não questionadas. A maioria das tarefas institucionais são, de fato, tarefas rotineiras: a técnica usada para realizá-las, embora tenha sido construída um dia, foi rotinizada, a ponto de não mais aparecer como tal – usar essa técnica para executar tal tarefa agora é autoaplicável, evidente e já não apresenta qualquer problema (Bosh; Chevallard, 1999, p. 6, tradução nossa).

Tendo por base os postulados de Bosh e Chevallard (1999), podemos afirmar que se chega ao conhecimento institucional por meio de tarefas e técnicas que são, na maioria das vezes, rotineiras. Entendemos que analisar os tipos de tarefas em determinada instituição pode nos levar ao tipo de conhecimento que é produzido. Cabe aqui, também, expor o pensamento de Casabò (1994). Em sua tese, ela argumenta que só será possível descrever parcialmente uma relação pessoal ou institucional, visto que haverá sempre uma espécie de evolução em que as técnicas se articulam entre si, formando uma técnica de nível superior. Além disso, a autora explica que uma técnica parcial pode ser descrita como um “momento” de uma técnica mais ampla (Casabò, 1994).

Existe um conjunto de postulados que ditam as condições e restrições das tarefas e técnicas de uma instituição. O objetivo desses postulados é tornar a técnica compreensível e justificada. Dessa forma, faz parte da praxeologia, enquanto modelo da atividade humana, não

só enunciar, mostrar as técnicas e tarefas de uma instituição, mas apresentar um discurso que seja capaz de descrevê-las. Bosh e Chevallard (1999) indicam que esse discurso descritivo é a **tecnologia da técnica**. A tecnologia é simbolizada por θ . É, portanto, aquele postulado que torna a técnica válida.

Nesse sentido, é importante levantar algumas considerações pertinentes a respeito da tecnologia (Chevallard, 1998), como, por exemplo: toda técnica τ traz sempre algum vestígio de uma tecnologia θ . Há casos em que a tecnologia é integrada à técnica. Há casos em que a multiplicação pode ser o discurso tecnológico que valida a técnica e, ainda, ela pode ser a própria técnica. O autor também lembra que, enquanto a primeira função da tecnologia é justificar a técnica, a segunda é explicar essa justificativa. Contudo, segundo ele, esse último passo dá lugar a uma demonstração. Isso significa que, em matemática, as tecnologias mais utilizadas são aquelas de cunho demonstrativo, as quais usam o próprio campo e linguagem matemática para explicar determinada técnica. O autor dá um exemplo: a tecnologia dos números complexos justifica o fato de não se trabalhar com raízes quadradas negativas no campo dos reais numa equação do 2º grau. Interessante observar que técnicas utilizadas pelos alunos da educação básica só terão uma justificativa no Ensino Médio.

Finalmente, há um último elemento na praxeologia cuja função é explicar e justificar a tecnologia (da mesma forma que esta justifica a técnica), ou seja, existe um discurso que dá embasamento e vida às tecnologias. Esse elemento é a **teoria**, Θ . Com isso, Chevallard (1998, p. 4) expõe que a teoria é uma espécie de “[...] nível superior de justificação-explicação-produção [...]”. Um comentário interessante do autor é quando ele mesmo se questiona se poderíamos pensar num movimento infinito em que existiria uma teoria da teoria. Ele explica que os três níveis técnica/tecnologia/teoria parecem ser suficientes para analisar a atividade institucional pretendida. E Chevallard (1998) comenta ainda que a teoria – o último nível – dá mostras de estar desaparecendo, de forma que algumas justificativas são tratadas como uma referência a outras instituições.

[...] a justificação de uma determinada tecnologia é, em muitas instituições, tratada pela simples referência a outra instituição, real ou suposta, supostamente portadora de tal justificação. Este é o significado do clássico “Nós demonstramos na matemática...” do professor de física, ou o “Nós vimos na geometria...” do ex-professor de matemática (Chevallard, 1998, p. 4, tradução nossa).

Aqui, cabe questionar se o estudo de função no ensino superior é conduzido como uma referência ao ensino básico, ou seja, se a teoria é construída praxeologicamente e apenas é revisitada por meio de discursos de memória e retomada breve dos conteúdos.

Elemento importante a ser considerado é o fato de Chevallard (1998) lembrar que há um espectador que assiste à exposição teórica, mas não participa da sua exposição. Infere-se que tal fato decorre de momentos construídos para esse fim. Trazendo para o ambiente escolar, pode-se questionar: há momentos de exposição teórica? O aluno assiste ou participa dessa construção? Toda teoria exposta na escola é feita dessa forma? Quais são esses momentos teóricos? Nas palavras do autor:

Em grego, *theôria* tirou de Platão o significado moderno de “especulação abstrata”. Mas originalmente referia-se simplesmente à ideia de contemplar uma performance, sendo o *theôros* **o espectador que assiste à ação sem dela participar**. De fato, as afirmações teóricas frequentemente parecem abstratas, muito distantes das preocupações dos tecnólogos e técnicos "simples". Esse efeito de abstração está correlacionado com o que funda a **grande generalidade dos enunciados teóricos** – sua capacidade de justificar, explicar, produzir (Chevallard, 1998, p. 5, tradução e grifo nosso).

E a outra afirmativa do autor nesse excerto que mais chama a atenção é o fato de ele mostrar que os enunciados teóricos possuem a característica de grande generalidade. Vamos nos questionar: se a teoria abraça propriedades de generalização, será possível afirmar que o aluno, ao generalizar, está construindo seu ambiente teórico? E, se ele constrói um ambiente teórico, é possível verificar quais são os elementos técnicos, do bloco saber-fazer, que ele toma por base? Além disso, se direcionarmos o foco para o currículo de matemática, em cálculo, quais tópicos são tratados como teoria, como técnica?

A seguir, faremos um breve apanhado sobre as três dimensões de um problema didático, segundo Gáscon (1999, 2011), buscando relacionar as ideias com o que já foi apresentado até aqui.

As três dimensões de um problema didático – implicações praxeológicas

Gascón (1999) explica que as inquietações docentes relacionadas ao objeto do ensino, às maneiras e razões do que ensinar, dão origem a um problema didático. Esse problema de investigação é explicitado por meio de três dimensões básicas: epistemológica, econômica e ecológica.

A dimensão epistemológica busca descrever e interpretar a organização matemática que está posta. Almouloud e Silva (2021) apontam que os estudos epistemológicos analisam a razão de ser dos conteúdos matemáticos e que esses estudos podem provocar no professor a construção de um novo saber-fazer. Segundo os autores, isso é feito por meio de um estudo histórico que analise seu desenvolvimento. Gáscon (2011) explica que o Modelo Epistemológico de Referência – MER é a forma que o didata utiliza para analisar tais fatos

didáticos e matemáticos na dimensão epistemológica. Assim, por meio do MER, é possível desconstruir e reconstruir as praxeologias analisadas.

Pela exposição teórica feita na seção anterior, destacamos que há um movimento de retomada constante no modelo praxeológico: técnicas são retomadas para auxiliar na construção de outras tecnologias; organizações matemáticas vão sendo cada vez mais ampliadas. Ou seja, há momentos de construção e momentos de retomada em que se pressupõe que uma organização matemática seja base de outra construção. Usando termos praxeológicos, vemos que o que foi considerado ambiente tecnológico-teórico em determinado momento, pode ser o bloco técnico-prático em outro. Essa concepção da praxeologia interessa ao nosso estudo. Vamos levantar, aqui, uma hipótese: o aluno pode enxergar o ambiente teórico por meio de uma generalização e, ainda, justificar determinadas técnicas de uma maneira não prevista pelo professor (ou pelo currículo). O aluno, ao retomar determinados conceitos, dá mostras de como constrói seu ambiente teórico.

O MER deve ser sempre tomado como uma hipótese de trabalho e ser constantemente revisitado. Um ponto importante a respeito desse modelo é que ele é necessário para estudar o conhecimento matemático antes de ser transportado ao ensino (Gáscon, 2011). Segundo o autor, o MER possibilita compreender e interpretar o que é ensinado e, ainda, mostra o porquê de encontrarmos determinado objeto em um conteúdo matemático e não outros. Farras, Bosch & Gáscon (2013) explicam que o MER permite questionar a forma como as instituições interpretam o conhecimento matemático.

Retomando o modelo praxeológico, seu objetivo é descrever a relação institucional. Há dois blocos fundamentais: um técnico e um teórico. Assim: $[T, \tau]$ e $[\theta, \Theta]$. Chevallard (1998) traz outros desdobramentos a partir daí e afirma que, em torno de um único tipo de tarefas T , diz-se que há uma praxeologia pontual, cujo conjunto praxeológico é denotado por $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

Um desdobramento dessa abordagem é o fato de o conjunto $[T, \tau, \theta, \Theta]$ ser identificado por um saber, em sentido amplo, ou seja, aquilo que se chama de conhecimento parece desconsiderar sua parte técnica, o bloco saber-fazer. De fato, por esse modelo, entende-se que toda teoria é vista como um discurso capaz de validar a parte técnica. Tem-se a impressão, portanto, de que conhecimento é tudo aquilo que é abstrato. A consequência é que, segundo Chevallard (1998), as instituições acabam eliminando as praxeologias específicas, em que uma teoria responde por um único tipo de tarefa. Assim, o que mais se vê são organizações praxeológicas: uma tecnologia atendendo a vários tipos de técnicas – organizações locais – ou uma teoria que dá conta de várias tecnologias – as organizações regionais. Há, ainda, as organizações globais: complexo praxeológico formado por várias organizações regionais.

Uma consequência importante que deriva dessa ideia de organização em nível local, global e regional é o fato de que, quando uma praxeologia pontual passa para uma praxeologia local, o que fica em destaque é a tecnologia. Da mesma forma, quando se passa para a praxeologia regional, o que vem à tona é a teoria. Ou seja, segundo Chevallard (1998), em ambos os casos o conhecimento teórico aumenta, em detrimento do bloco saber-fazer. Além disso, segundo o autor, o saber, o bloco teórico, também permite gerar uma técnica, por isso o discurso de que o bloco saber-fazer seria uma simples aplicação da teoria.

Há, portanto, diferenças na abordagem dos entes [prática: T, τ] e [teoria: θ, Θ], levando-se em conta a abordagem praxeológica. Aqui, também, enxergamos uma existência dialética entre o bloco técnico e o teórico. Fica claro que é preciso considerar o fato de que, no ensino da matemática, pode-se levar o aluno a construir um ambiente teórico por meio da exploração de tarefas e técnicas e que, além disso, algumas abordagens teóricas podem ser justificadas pela abordagem técnica. Aliás, a esse respeito, Chevallard (1998) afirma que alguns temas em matemática são apresentados em seu discurso teórico enquanto outros aparecem na forma de tarefas.

Gáscon (2011) mostra algumas considerações importantes a respeito do MER utilizado pelo didata. É necessário que o modelo escolhido tenha a amplitude apropriada ao campo matemático do problema matemático a ser estudado; apontar os fenômenos didáticos que se tornam visíveis por meio do MER interpretado; propor problemas de investigação coerentes com a posição conceitual da análise e do pesquisador e produzir explicações provisórias que estejam relacionadas ao estudo feito. O autor explica que a dimensão epistemológica do problema didático “[...]é uma dimensão nuclear, pois [...] permeia e condiciona fortemente as demais dimensões” (Gáscon, 2011, p.210, tradução nossa).

Neste trabalho, buscamos propor um modelo praxeológico para o estudo das ideias básicas de Função. Alguns aspectos necessitam ser colocados em evidência para que o MER construído esteja em consonância com os objetivos da pesquisa. Nesse sentido, Gáscon (2011) orienta que é necessário elaborar questões que busquem analisar: a amplitude do campo matemático do conteúdo função a ser adotada; a maneira como os conhecimentos foram sendo incorporados na escola por meio da escala de níveis de codeterminação; a posição conceitual no tipo de problema analisado, dentre outros.

Para que a dimensão epistemológica de um problema didático seja analisada, é necessário, portanto, que haja a construção de um MER provisório, de âmbito local ou regional, sendo formulado em termos de organizações praxeológicas, no modelo da TAD. “Isto significa que os MER devem ser escritos de acordo com a gênese e o desenvolvimento [...] de certas

praxeologias matemáticas” (Gáscon, 2011, p.212, tradução nossa). Segundo o autor, a análise da dimensão epistemológica permite integrar a gênese, o desenvolvimento e a transposição institucional do conhecimento matemático.

A dimensão econômica de um problema didático inclui questões a respeito do funcionamento da organização matemática (OM) e didática (OD) envolvidas. Isso abrange o conjunto de normas institucionais que regem o sistema e a análise detalhada dessas OM e OD vigentes, bem como a experimentação e avaliação de novas organizações e fatos didáticos - sempre por meio do MER adotado (Gáscon, 2011). É importante considerar que o problema didático deve conter uma praxeologia ampla, que faça referência a todas as etapas da transposição didática (Chevallard, 2005), ou seja, percorrer desde o saber sábio até o saber aprendido. Assim, é necessário analisar como a questão do problema didático é interpretada na instituição do ensino.

Algumas questões que podem ser levantadas na dimensão econômica são: qual é a esfera institucional a ser levada em conta no estudo do problema? Quais são as características gerais das OM e OD na instituição? Quais dificuldades aparecem se as OD forem modificadas?

Já na dimensão ecológica, são analisadas as condições e restrições impostas às praxeologias em cada nível da escala de codeterminação desenvolvida por Chevallard (2001). Nesse caso, segundo Gáscon (2011), há uma preocupação com o estudo da ecologia das praxeologias matemáticas numa perspectiva institucional. O autor explica que, nos níveis mais altos da escala (pedagogia, escola, sociedade), existem questões consideradas como não pertencentes à matemática, mas que incidem na sala de aula. Aqui, inferimos que o saber exigido em algumas áreas como Química, Economia, Biologia, podem ser analisados na perspectiva da sociedade e civilização e possuem características de amplitude e generalização. Assim, há questões que a sociedade propõe que se estude na escola, numa espécie de legitimidade cultural (Gáscon, 2011).

De certa forma, a estrutura das praxeologias é mais detalhada. Contudo, há que se levar em conta a difusão dos saberes na perspectiva dos níveis de codeterminação didática. Assim, a dimensão ecológica de um problema didático investiga quais restrições – e de que níveis elas vêm – afetam a ecologia das praxeologias matemáticas (Gáscon, 2011). Uma das questões que podem ser respondidas por meio da dimensão ecológica é se alguma atividade matemática dominante condiciona toda a forma de organizar o ensino. Uma consideração importante feita por Gáscon (2011) é que as restrições impostas nível a nível não são definitivas, mas podem ser modificadas por um agente da instituição, como o professor, por exemplo. Defendemos que o primeiro passo é tomar consciência dessas restrições. A análise das dimensões

epistemológica, econômica e ecológica contribuem no sentido da identificação dos fenômenos dominantes e na elaboração de propostas de emancipação didática. Este trabalho caminha nesse sentido.

Modelo epistemológico dominante no ensino do cálculo e o problema didático inicial

Focamos este estudo, de maneira ampla, na compreensão do conceito de Função. Não é difícil encontrar trabalhos que tratem desta temática. Elegemos o estudo de Rodrigues et al. (2021) como parâmetro para conhecermos outras pesquisas que também se ocupam desta temática. A esse respeito, Gáscon (2011) frisa que os problemas científicos acabam por se integrar a outros, já que não é possível haver questões isoladas e independentes. Nas palavras do autor:

Problemas científicos não são desenvolvidos de forma isolada e independente, mas sim integram diferentes *tipos de problemas*. Ao longo de seu desenvolvimento, os problemas didáticos relacionam-se não apenas com problemas da mesma natureza, mas também com outros que aparentemente estão muito distantes (Gáscon, 2011, p. 225, grifo ao autor, tradução nossa).

Dessa forma, compartilhamos os mesmos questionamentos gerais quando lidamos com a questão “aprendizagem em matemática”, sendo essa uma abordagem bem ampla. Aqui não nos ocupamos de relacionar os problemas didáticos que circundam essa questão – acreditamos que a temática pode ser foco de uma pesquisa mais aprofundada. No entanto, é possível colher alguns apontamentos muito pertinentes a esse respeito em Rodrigues et al. (2021). Este trabalho mostra que os temas mais recorrentes estão ligados à superficialidade da abordagem no conceito de função; dificuldade na relação com os diversos registros; falta de compreensão em dependência de variáveis; dificuldade em relacionar o conceito a problemas do cotidiano.

O que se observa é que os temas estão ligados a questões que vão desde a compreensão básica do conceito à manipulação simbólica. Isso nos leva a supor que o modelo dominante no ensino da função não consegue sedimentar ideias basilares e acaba privilegiando uma abordagem simbólica, já que há uma dificuldade em transportar o conceito para o dia a dia.

Citamos agora o trabalho de Rezende (2003), que mapeou dificuldades de natureza epistemológica no ensino do cálculo e, a partir destas constatações, o autor delineou um conjunto de considerações enfáticas quanto ao tema:

A partir do mapeamento realizado foi observado, em essência, um único **lugar-matriz** das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo: **o da omissão/evitação das ideias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo**. (Rezende, 2003, p.402, grifo do autor).

A pesquisa conclui que a falta do trabalho com as ideias básicas do cálculo no ensino básico contribui para o fracasso na sua aprendizagem. Este estudo veio ao encontro de nossa aposta e interesse enquanto pesquisadora na área da educação matemática. Nossos estudos a nível de mestrado (Castro, 2012) e doutorado (Castro, 2022) buscaram defender e analisar o trabalho com ideias básicas de função. Nesse sentido, encontramos elementos que nos permitem, de certa forma, ampliar nosso foco investigativo e contribuir com o que vem sendo discutido na área. Para atingir este objetivo, vamos apresentar a concepção do problema didático inicial deste estudo.

Gáscon (2011) anunciou o desenvolvimento de um problema didático de maneira esquemática, como indicado a seguir.

$$\{[(P_0 \oplus P_1) \subset P_2] \subset P_3\} \subset P_\delta$$

Aqui, P_1 , P_2 e P_3 representam as três dimensões fundamentais do problema. O interessante, nesse caso, é que P_0 é o problema didático inicial e deve ser adicionado à P_1 , a primeira dimensão epistemológica. Há, então, uma espécie de inclusão à P_2 e P_3 , que são as outras dimensões. Portanto, P_δ representa o problema didático já incorporado pelas três dimensões fundamentais.

Dessa maneira, formulamos o questionamento inicial do presente estudo nos seguintes termos:

- P_0 : De que forma as ideias básicas de função podem contribuir para o desenvolvimento do conceito?

O problema inicial fica, portanto, definido como o **desenvolvimento do conceito de função por meio de suas ideias básicas**. A nosso ver, ele carrega características quanto a generalidade e amplitude de formulação do questionamento. Nas próximas seções, vamos fazer o estudo de cada uma das dimensões fundamentais, de maneira que o problema seja analisado por meio de relativa amplitude histórica, características e restrições institucionais. Ao final dessa análise, teremos nosso problema didático delimitado.

Dimensão epistemológica: um MER para desenvolvimento das ideias básicas de Função

A dimensão epistemológica possibilita a construção dos MERs por meio da análise dos fenômenos didáticos e históricos. Vamos aqui apresentar, com a devida brevidade, o desenvolvimento histórico do conceito de função, destacando suas ideias básicas. O objetivo é analisar quais conceitos fizeram parte da sua construção.

É importante frisar que o MER é sempre um modelo relativo dos fenômenos didáticos e deve estar de acordo com o modelo epistemológico da atividade matemática (Gáscon, 2011). Assim, buscamos construir um MER específico do fenômeno que pretendemos analisar, de acordo com o problema inicial apontado: o desenvolvimento do conceito de função por meio de suas ideias básicas. Além disso, vamos propor um modelo que leve em conta a dimensão praxeológica do conhecimento já institucionalizado, ou seja, após ele ser transportado para o ambiente escolar. Gáscon (2014) lembra que o MER específico serve não só para interpretar os modelos epistemológicos dominantes quanto também para determinar quais problemas de pesquisa podem ser formulados.

Retomamos o questionamento inicial deste estudo:

- P_0 : De que forma as ideias básicas de função podem contribuir para o desenvolvimento do conceito?

Pela concepção de um problema didático, a questão P_0 é adicionada à primeira dimensão, P_1 . Vamos elaborar as seguintes questões de cunho epistemológico, nos baseando em Gáscon (2011). O objetivo é construir um caminho de análise que possa gerar, ao final, um modelo praxeológico do problema didático P_δ já incorporado pelas três dimensões fundamentais.

- Qual é a razão de ser do conceito?
- Como ele foi sendo interpretado de acordo com seu desenvolvimento?
- Qual é a amplitude do desenvolvimento do conceito?

Optamos por nos basear na obra de Caraça (2010) para tratar da evolução do conceito de função. O autor indica que o ser humano, desde os primórdios de sua existência, sentiu a necessidade de fazer previsões sobre os fenômenos naturais que o rondavam, uma vez que, a partir da previsão, é possível se precaver e tentar dominar a natureza. Contudo, há que considerar dois aspectos fundamentais da realidade em que o homem está inserido: a interdependência e a fluência.

Pela **interdependência**, entende-se que todas as coisas do mundo estão interligadas, ou seja, dependem umas das outras. Caraça (2010) cita como exemplo a análise de uma planta de determinada região. Verifica-se que, sobre ela, incidem vários aspectos e características. Pode-se citar o tipo de solo que favorece seu crescimento, os animais que dela se alimentam e aqueles que dela sobrevivem. Há ainda que se levar em conta os aspectos da região em que está inserida, de que forma o homem se aproveita de seu surgimento, sua posição numa cadeia de outras plantações e outros aspectos.

Já a **fluência** está relacionada a um ciclo de evolução, de desenvolvimento, e pode ser encontrada no meio vegetal e animal, à exceção dos minerais. Assim, percebemos que os fenômenos se sucedem numa ordem de nascimento, crescimento e morte.

A importância desses dois aspectos verifica-se quando o pesquisador se propõe a estudar determinado fenômeno da realidade. Caraça (2010) explica que o fato de as coisas serem interdependentes e fluentes dificulta a análise de apenas um determinado aspecto. Para tanto, há que se tomar posse da noção de isolado. O isolado é um recorte da realidade, já que torna inviável estudar tudo ao mesmo tempo. Porém, devido à fluência e desenvolvimento das coisas, até mesmo o isolado não está livre de mudanças, de evolução. A essa evolução, dá-se o nome de Fenômeno Natural.

O que se verifica, no entanto, é que há fenômenos regulares, ou seja, que se comportam de maneira idêntica, ao se preservarem suas condições iniciais. Essa característica é de suma importância, tendo em vista que regularidade implica repetição e, por sua vez, permite previsão, isto é, “[...] **repetir e prever** é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de dominar a natureza. [...] Daqui resulta que uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Natureza é a **procura de regularidades** dos fenômenos naturais.” (Caraça, 2010, p. 112, grifo do autor). Portanto, temos contato aqui com uma das ideias fundamentais de Função: a de **regularidade**.

Caraça (2010) discorre sobre o longo processo que está por trás do passo que se deu entre a identificação de uma lei natural e sua **generalização** na linguagem matemática, nesse caso, a própria formalização do conceito de função. Para isso, ele apresenta a descrição de Lei Natural. Essa concepção está relacionada à ideia de regularidade. Ou seja, fenômenos naturais regulares são chamados, por Caraça (2010), de leis naturais.

Há leis qualitativas e leis quantitativas. As primeiras estão ligadas à variação de qualidade e as segundas, de quantidade. Citemos um exemplo: se considerarmos duas circunferências A e B, com 3cm e 5cm de raio, respectivamente, podemos afirmar que a circunferência A é mais circular que a circunferência B? Outra questão: podemos dizer que a circunferência A é maior que a circunferência B? O que possibilita uma discussão sobre qualidade e quantidade pode ser sintetizada na seguinte concepção: a característica da curvatura é relativa ao juízo de qualidade. Há qualidades que não nos permitem admitir graus diferentes de intensidade. Outras, contudo, permitem que façamos juízos de mais que, menos que, maior que e menor que. Assim, diz-se que esses casos admitem variação segundo a quantidade.

É possível identificar inúmeros outros exemplos sobre qualitativo e quantitativo para leis da Física. Um primeiro exemplo que apresentamos é o seguinte: “cada planeta descreve em

torno do Sol uma elipse, da qual o Sol ocupa um dos focos (1ª lei de Kepler)” (Caraça, 2010, p.113). Nesse caso, trata-se de uma Lei qualitativa. Vejamos, agora, o enunciado de um exemplar de Lei quantitativa-qualitativa: “Para todo gás existe uma temperatura, chamada temperatura crítica, acima da qual ele não pode ser liquefeito; logo que a temperatura desça abaixo da temperatura crítica, o gás pode liquefazer-se, submetendo-o a uma pressão conveniente” (Caraça, 2010, p.113). Por fim, trazemos uma contribuição para esclarecer pela exemplificação o que é uma Lei quantitativa: “Para todo o corpo em queda livre no vácuo, as alturas de queda são diretamente proporcionais aos quadrados dos tempos de queda” (Caraça, 2010, p.113)..

Caraça (2010) chama a atenção para o fato de o desenvolvimento da Ciência estar diretamente ligado à **atenção dada às leis quantitativas**. Segundo ele, durante um tempo, os homens prenderam-se a explicações qualitativas dos fenômenos. A partir do Renascimento, contudo, os estudiosos abandonaram as explicações qualitativas e deram “[...] novo rumo à barca da Ciência, dedicando-se à **observação e experimentação**, procurando **medir**, tentando explicar por variações de quantidade, tecendo uma teia de leis quantitativas.” (Caraça, 2010, p.117, grifo do autor). A matematização dessas leis é o conceito formalizado de Função que ora conhecemos. Caraça (2010) explica que:

[...] o rumo novo da Ciência [...] é o rumo duma **ordenação matemática** do Universo. [...] Veja, portanto, o leitor como, ao cabo de 20 séculos, renasce das cinzas, onde parecia enterrado para sempre, aquele ideal de **ordenação matemática quantitativa** que víamos despontar com os pitagóricos. (Caraça, 2010, p.190, grifo do autor).

O novo rumo da Ciência trouxe inúmeros benefícios. Por toda a parte há, agora, a tendência para o quantitativo, para a medida. Podemos, assim, afirmar que o estado propriamente científico de cada ramo só tem início quando nele se introduz a medida e o estudo das variações quantitativas como explicação da variação qualitativa (Caraça, 2010). Dessa forma, **a Ciência Moderna adota a lei quantitativa como forma de explicação da realidade**.

Percebe-se que houve um longo período na história em que as leis qualitativas imperavam em uma “[...] tendência para fugir de tudo aquilo que viesse ligado às concepções quantitativas e dinâmicas [...]” (Caraça, 2010, p.185). A partir do século XI, a Europa assiste a uma grande transformação provocada, principalmente, pelo desenvolvimento das primeiras cidades. Tal fato fez surgir uma nova sociedade, com a criação de uma classe nova de indivíduos, a qual impôs à Filosofia e à Ciência um novo rumo.

As necessidades do Comércio e da Indústria exigem um estudo do mundo exterior tal como ele se nos apresenta. [...] Os problemas da navegação, por exemplo, levam a uma

investigação cada vez mais cuidadosa dos movimentos dos astros e, duma maneira geral, exigem um estudo mais rigoroso do movimento, um estudo **quantitativo**, que permita **medir e prever**. (Caraça, 2010, p.187, grifo do autor).

Há, portanto, a necessidade da existência de um instrumento matemático adequado ao estudo das leis quantitativas. Contudo, segundo o autor, tal feito não se deu de maneira linear. Ou seja, “deu-se uma gestação lenta em que necessidade e instrumento interagiram, ajudando-se e esclarecendo-se mutuamente” (Caraça, 2010, p.118). Podemos afirmar que as condições históricas do momento não favoreciam o desenvolvimento das ideias básicas de função ligadas à sua formalização.

A ideia de **variável** aparece como basilar para a formalização do conceito. Antes dela, temos contato com aspectos rudimentares, ou seja, aqueles que compõem a noção de Função, mas, ao mesmo tempo, não dão conta de formalizá-la em termos matemáticos. Assim, poderíamos dizer que o instrumento ainda está, de certa forma, incompleto, pois não se tem contato com suas grandiosas ferramentas. Somente a partir do século XI, a sociedade dá sinais de que uma grande transformação estava por vir. Portanto, a introdução dessa ideia – de variável – foi fundamental para o desenvolvimento da noção de Função.

De fato, para Caraça (2010), há que se criar um instrumento matemático que seja suficiente para estudar as variações de quantidade descritas nas leis quantitativas. Para isso, o autor aponta como tais leis podem ser traduzidas: é pela forma como as grandezas se correspondem. O autor cita o exemplo da queda de corpos no vácuo e apresenta uma tabela que, segundo sua concepção, dá apenas uma ideia da referida lei (Tabela 1).

Tabela 1.

Valores para a lei da queda de corpos no vácuo (Caraça, 2010, p.118)

| Tempo (em segundos) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------|----------|------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| Espaço (em metros) | 0 | 4,9 | 19,6 | 44,1 | 78,4 | 122,5 |

Caraça (2010) mostra-nos, na tabela 1, dois conjuntos postos em correspondência. Assim, a lei da queda dos corpos no vácuo está em correspondência entre o conjunto tempo e o conjunto espaço. O instrumento matemático apropriado ao estudo das leis quantitativas deve conter, essencialmente, a correspondência entre dois conjuntos.

Aparece-nos, portanto, mais uma ideia básica associada ao conceito de Função: **a correspondência**. Cabe destacar que a ideia de correspondência, ligada ao conceito de Função, está relacionada à correspondência de variáveis, o que implica considerar que, para formalizar o conceito, ainda é necessário desenvolver outra noção básica, a de variáveis. Contudo,

acreditamos na importância do estabelecimento da ideia de correspondência, ainda que não esteja ligada, diretamente, às variáveis.

A concepção de variável aparece como artifício para o aperfeiçoamento da formalização do conceito. Assim, é necessária a criação de uma representação simbólica para os conjuntos que serão correspondidos, do contrário “[...] teríamos sempre que estar pegados a tabelas de resultados particulares e não obteríamos a generalidade conveniente” (Caraça, 2010, p.119). A variável é, portanto, o símbolo que representa qualquer um dos elementos de um conjunto; é, assim, uma entidade de natureza superior, ou seja, é o símbolo da vida coletiva do conjunto.

A ideia de **variável** formaliza o conceito de função por meio de uma **generalização simbólica**, o qual se revela o instrumento próprio para o estudo das leis quantitativas. O exemplo anterior da lei da queda dos corpos consiste na correspondência entre o conjunto dos tempos e o conjunto dos espaços. Se t é a variável do conjunto dos tempos e e a variável do conjunto dos espaços, a lei consiste numa correspondência entre t e e . Assim, a variável e é função da variável t . Simbolicamente: $e = f(t)$, sendo t , a variável independente; e e , dependente.

Na tabela 1, apresentada anteriormente, observamos apenas alguns pares de valores da lei da queda dos corpos, enquanto $e = f(t)$ implica que qualquer valor de t corresponde a um valor (e um só) de e .

A definição de função dada por Caraça (2010, p.121) está assentada nas seguintes proposições: “Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$ se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$ ”.

Para x , chama-se variável independente e y , variável dependente.

O autor chama a atenção para o fato de a expressão matemática do conceito (neste caso, $e=f(t)$) permitir a seguinte afirmativa: para qualquer valor de t corresponde um (e só um) de e , ao passo que as tabelas apresentam apenas alguns pares dos valores da correspondência. Essa noção, para Caraça (2010), é um exemplo do poder que o conceito de Função traz em si.

Para o autor, a lei de associação entre as duas variáveis fecha a cadeia: **lei quantitativa** → **função** → **definição analítica**. Mas o autor ainda destaca que essa não é a única forma de estabelecer a correspondência entre as duas variáveis, já que, muitas vezes, o conceito de função é inapropriadamente confundido com o de expressão analítica, e salienta que esse é apenas o terreno em que a função vai nutrir-se. Partindo desse contexto, nota-se que a definição matemática de função pela noção de correspondência entre variáveis implica ideia de **dependência**, uma vez que uma das variáveis é dependente da outra.

Caraça (2010) aponta que relacionar função à sua expressão analítica prevaleceu durante muito tempo e ainda hoje está impregnada na linguagem. Contudo, o mesmo autor mostra que houve a necessidade da depuração do conceito, de modo que se evidenciasse o que ele interpreta como essencial na noção de função: a correspondência das duas variáveis.

Eves (2008) destaca o fato de o conceito de função ter passado por evoluções acentuadas. Segundo o autor, “a história do termo **função** proporciona [...] exemplo interessante da tendência dos matemáticos de generalizar e ampliar os conceitos” (Eves, 2008, p.660, grifo do autor). A partir do instante em que o conceito foi formalizado, houve uma depuração cada vez maior da simbologia matemática que o define para ser apresentado ao estudante; é apenas o **último capítulo** de uma história que percorreu a própria evolução das Ciências e do pensamento matemático.

É possível acompanhar a transmutação do conceito desde a Antiguidade até a época moderna e vários estudos apresentam esses dados, como Youschkevitch (1976), Boyer (1986), Rogalski (2013), Eves (2008). Estes trabalhos mostram que, de maneira geral, o simbolismo chega à formalização, como mostrado a seguir.

- Galileu Galilei (1564-1642) dá um tratamento quantitativo às leis matemáticas.
- René Descartes (1596-1650) estabelece uma relação de dependência entre as variáveis.
- Isaac Newton (1643-1727) introduz o termo variável independente.
- Leibniz (1646-1716) utiliza a palavra “função”.
- Johan Bernoulli (1667-1748) e Leonhard Euler (1707-1783) utilizam expressões analíticas para definir função.
- Depuração do conceito, a partir do século XX, através da relação entre conjuntos.

Finalizando, percebe-se que a necessidade humana básica que deu origem ao conceito foi a **previsão** e a descrição de **fenômenos regulares**. Sua matematização é um instrumento que possibilita o estudo de **leis quantitativas**. Essas leis aparecem por meio da **correspondência** entre os entes quantificados – as **variáveis**, de forma que essas variáveis se tornam **dependentes** uma da outra. Na figura 1, apresentamos um esquema do que foi exposto até aqui.

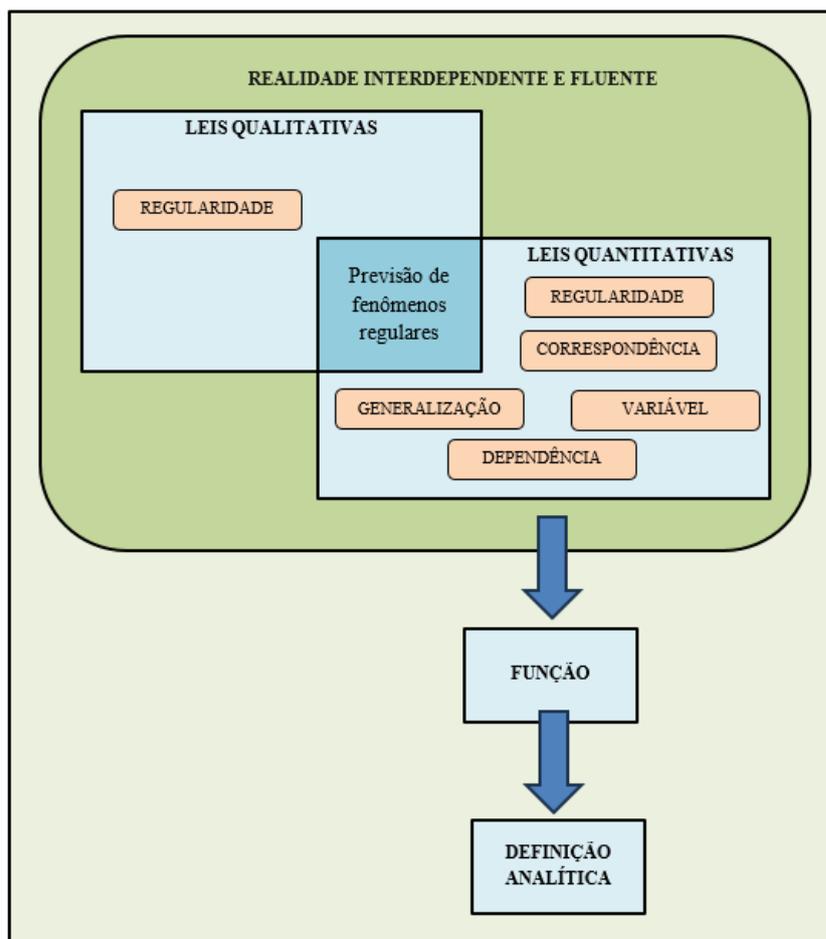


Figura 1.

Esquema da evolução do conceito de função

Gascon (2011) explica que a composição do modelo epistemológico de referência (MER) possibilita uma análise do conhecimento antes de ser transformado em ensino e por que determinados objetos matemáticos são encontrados na escola e outros não. Portanto, esse estudo da dimensão epistemológica permitiu identificar as noções que embasam o conceito de função antes que ele esteja formalizado ou institucionalizado.

Esse MER desenvolvido considera a expansão das ideias num crescendo, até que atinja a formalização (figura 2).

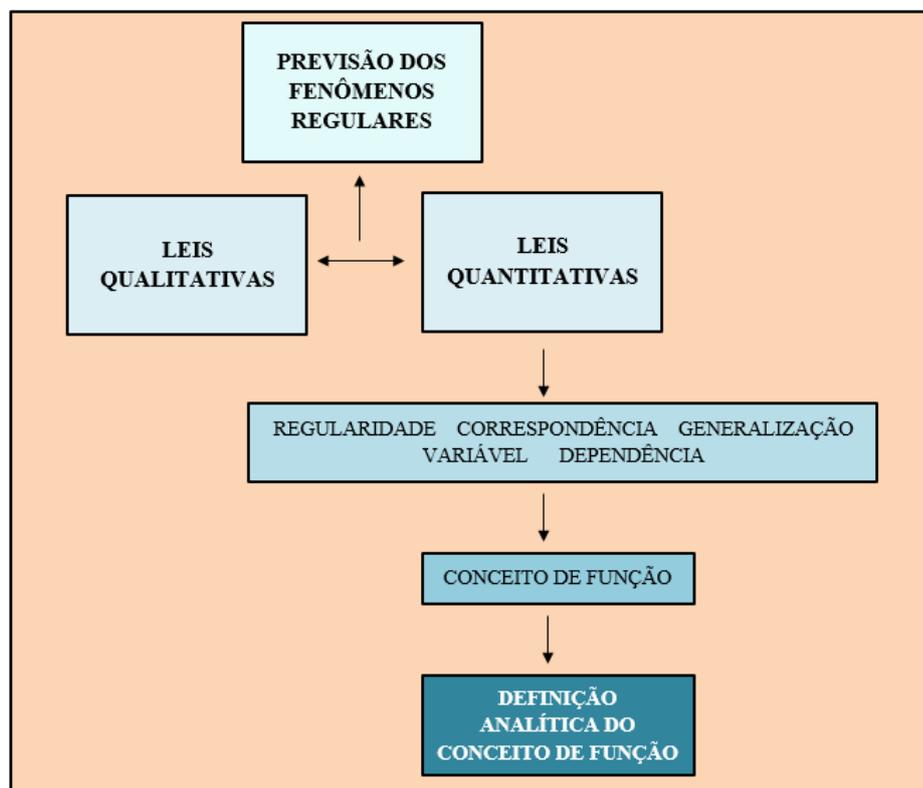


Figura 2.

MER para o desenvolvimento do conceito de função por meio das suas ideias básicas

Esse modelo considera a evolução do conceito antes de sua formalização institucional pela escola. Retomamos os questionamentos feitos:

- Qual é a razão de ser do conceito?
- Como ele foi sendo interpretado de acordo com seu desenvolvimento?
- Qual é a amplitude do desenvolvimento do conceito?

É interessante observar a importância da ideia de lei natural na gênese do conceito. Contudo, defendemos que a razão de ser do conceito foi a previsão dos fenômenos regulares. O MER construído (figura 2) deu mostras dessa evolução antes que a transposição didática fosse feita. E fica fácil notar que houve uma gênese muito lenta e, de fato, a linguagem simbólica – algébrica – foi primordial na evolução da ciência como um todo.

As ideias básicas regularidade, correspondência, variável, generalização e dependência interpretam esse conhecimento, mas a linguagem simbólica aparece como instrumento potente para sua efetiva aplicação. Em termos de amplitude, percebe-se uma evolução que vai desde os primórdios da humanidade e que, de alguma forma, acompanha o desenvolvimento da ciência até a atualidade.

Conforme expusemos anteriormente, Farras, Bosch e Gáscon (2013) afirmam que é possível questionar a forma como as instituições interpretam o conhecimento por meio do MER. Aqui já é possível perceber que, no ensino superior, a disciplina de cálculo parte da concepção analítica já definida de função. A análise do MER permite identificar os seguintes “grandes momentos” no desenvolvimento do conceito: **gênese, desenvolvimento, linguagem e aplicação**. Após a análise das outras dimensões do problema didático, teremos elementos para avaliar a difusão das ideias de função numa perspectiva praxeológica, ou seja, após o conceito ser institucionalizado.

Dimensão econômica: possibilidades de análise pela abordagem praxeológica

A análise da dimensão econômica busca interpretar fenômenos ligados à organização matemática (OM) e didática (OD). Aqui, portanto, já tratamos de um conceito institucionalizado, do saber a ser ensinado. Elaboramos as seguintes questões para conduzir a análise nesta dimensão:

- Qual é a razão de ser do conceito na instituição escola?
- Como são estruturadas as OM e OD de acordo com a evolução do conceito?

Faremos, agora, um estudo das características desta dimensão, considerando os constructos teóricos da TAD. A ideia é que, ao final, tenhamos elementos que nos permitam construir um modelo praxeológico capaz de descrever o desenvolvimento do conceito de função.

Conforme mostrado, a noção de instituição é a espinha dorsal da TAD. As práticas institucionais são visíveis por meio das relações entre seus entes básicos. O modelo praxeológico descreve essas práticas. Além disso, os temas percorrem a instituição de duas formas: por meio de uma realidade matemática que deriva do saber sábio – a organização matemática (OM); e por uma maneira de conduzir esse saber já dentro da instituição – a organização didática (OD).

Nesta seção, vamos analisar de que forma as ferramentas praxeológicas podem participar do desenvolvimento da dimensão econômica do problema didático. Assim, teremos o estudo da estrutura das OM e OD numa perspectiva teórica, de acordo com os apontamentos básicos da TAD.

Chevallard (1998) faz algumas considerações sobre o modo como as praxeologias se manifestam nas instituições. Ele explica que há dois tipos de perguntas que são desenvolvidas na realidade social: “o que é isso?” e “como determinar isso?”. As respostas para a primeira questão são no sentido fraco, segundo o autor. Já a segunda pergunta dá origem a uma resposta

forte. E, para o autor, são as questões fortes que demandam a construção de um praxeologia. Assim, **as praxeologias são construídas**. Estudar uma questão é, portanto, desenvolver uma organização praxeológica inédita. O que ocorre na escola, no entanto, é que estudar a questão é recriar uma resposta que já foi produzida em outra instituição.

De fato, construir praxeologias inéditas demanda relações diversas daquelas em que é necessário recriar o que já está produzido. Se o currículo de matemática prevê que o tema álgebra, por exemplo, deve estar consolidado em algumas das suas etapas para determinada série, a praxeologia a ser construída pode trazer em seu bloco prático noções que o professor imagina que já foram sedimentadas. E, ao contrário, se a praxeologia é do tipo que busca uma construção por parte do aluno, o professor pode explorar temas que não estariam previstos nesse modelo que busca recriar técnicas já vistas, por exemplo. Recriar uma resposta que já existe, segundo Chevallard (1998), faz com que, em certos casos, haja uma inversão na relação pergunta-resposta: a resposta virá antes da pergunta.

Um exemplo é fornecido pelo próprio autor: nas organizações regionais que são controladas pela mesma teoria, há uma tendência em se “empurrar para periferia, sob o nome de aplicações, os tipos de tarefas que são em princípio geradores da obra [...] perante uma tecnologia potencialmente produtora de novas técnicas e que não pode limitar-se a algumas aplicações definidas a priori” (Chevallard, 1998, p. 15, tradução nossa). Ou seja, o professor pode optar por trabalhar primeiro com uma teoria e daí retirar tarefas ao invés de construir essa teoria com seus alunos a partir dessas tarefas. Assim, já dentro de uma OD, não há uma garantia de que as tarefas virão antes da teoria, praxeologicamente falando. Portanto, essa é uma possibilidade na maneira de conduzir o conhecimento nas aulas e/ou instituição. Vê-se, portanto, que o professor se depara com duas tarefas: determinar as OM a partir dos documentos oficiais e conduzir uma construção ou reconstrução por meio de uma OD.

Quando falamos em documentos oficiais, é preciso considerar que o objeto, pelo viés da TAD, é um ente que precisa ser reconhecido – tanto pela instituição quanto pelo sujeito – e, segundo Chevallard (2003), há diversas maneiras de cumprir esse roteiro, ou seja, é praticamente impossível garantir que haverá sempre uma boa relação entre instituição e sujeito. É o conceito de relatividade institucional. A escola, por meio do seu currículo oficial, prevê determinados comportamentos por meio dos objetos que ela reconhece. Dessa concepção, chegamos ao conceito de aprendizagem na TAD.

O sujeito X relaciona-se com um objeto institucionalmente reconhecido, validado pelas cláusulas do que podemos chamar de contrato institucional C_I . Se o sujeito X se apropria do objeto da maneira que a instituição prevê e reconhece, diz-se que X é um “bom sujeito” de I

(Chevallard, 1992). Notamos então que, pela aprendizagem, ocorre uma mudança no sujeito, na pessoa (aquela que “vive” na instituição) e não no indivíduo. Portanto, aprendizagem na TAD é uma mudança que ocorre sob a jurisdição da instituição. E se não ocorre, é porque a relação pessoal não está conforme seus postulados. Assim, aprendizagem sob esse enfoque não tem relação com fatores cognitivos e biológicos. Ela está estritamente ligada ao que prevê a instituição e seus contratos.

Com isso, queremos dizer que as OM são estruturadas de acordo com o que é previsto na instituição por meio de seus documentos oficiais. Portanto, uma análise nesse sentido deve investigar de que forma a gênese, desenvolvimento, linguagem e aplicação do conceito de função aparecem tanto na educação básica e no ensino superior na forma do que é esperado pela instituição.

Há praxeologias específicas para cada OM e o modo de desenvolvê-las se dá por gestos que compõem os momentos didáticos. Esses momentos didáticos, segundo Chevallard (1997, 1998), surpreendentemente, são situações que estarão sempre presentes na atividade do professor. São seis os momentos didáticos. Resumidamente, podemos dizer que o primeiro deles é o momento de encontro com a OM a ser estudada. Em seguida, as tarefas T são exploradas por meio das técnicas τ . Ou seja, o ambiente técnico-prático da praxeologia, $[T, \tau]$, é construído aqui. O terceiro momento é aquele que vai compor o par teórico-tecnológico: $[\theta, \Theta]$. Esse ambiente está relacionado às técnicas τ . No entanto, frisa o autor que este terceiro momento acaba se tornando o primeiro! Ou seja, os problemas, as tarefas, acabam se tornando uma aplicação da tecnologia e teoria, conforme já dissemos anteriormente.

Por razões de economia didática geral, no entanto, as estratégias tradicionais de gestão de estudos geralmente fazem deste terceiro momento a primeira etapa do estudo, uma etapa que é então comum ao estudo de vários tipos de problemas T_i – todos aqueles, dentre os tipos de problemas a serem estudados, que parecem responder ao mesmo ambiente teórico-tecnológico $[\theta / \Theta]$. O estudo deste tipo de problema surge então, classicamente, como uma série de aplicações do bloco teórico-tecnológico assim constituído (Chevallard, 1998, p. 21, tradução nossa).

Por exemplo, no nono ano do Ensino Fundamental, encontra-se a seguinte habilidade na Base Nacional Curricular Comum – BNCC (Brasil, 2018, p. 315), para a unidade temática Álgebra: (EF09MA06B) – “Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis”. Nesse caso, o professor pode optar por iniciar o estudo de função por sua abordagem teórica e, logo a seguir, apresentar à classe problemas que tenham o caráter de aplicação. Desse modo, haveria uma

espécie de inversão nos moldes da praxeologia. O bloco teórico-tecnológico, $[\theta, \Theta]$, viria primeiro. Caso a OD prevista pelo docente, para essa habilidade da BNCC, explore primeiro as tarefas e técnicas, o conceito de função surgiria como uma tecnologia-teoria construída pelo aluno. Notamos que a organização didática adotada pelo docente permite uma espécie de alternância na justaposição dos blocos praxeológicos. Cabe perguntar quais as consequências de tal movimento na relação pessoal do aluno com os objetos estudados.

Há o quarto momento didático: é aquele em que outras técnicas são exploradas. Contudo, espera-se que o aluno utilize um ambiente teórico no seu desenvolvimento. Nesse momento, portanto, pode-se dizer que a classe precisa utilizar uma referência matemática no emprego da técnica. Como exemplo, podemos citar uma habilidade prevista na BNCC para o oitavo ano (Brasil, 2018, p. 310): EF08MA07 – “Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano”. Para essa habilidade, o aluno necessita ter construído seu ambiente teórico com relação às equações de 1º grau. Há claramente um crescendo nas concepções teóricas na gestão dos momentos didáticos.

Já o momento da institucionalização prevê que haja uma absorção de elementos matemáticos necessários à organização matemática (OM) no seu devido discurso matemático. Chama a atenção o fato de que há objetos auxiliares que não participam da elaboração matemática desse momento.

O sexto e último momento didático é a avaliação. Ela, de algum modo, se articula com a institucionalização. Chevallard (1998) explica que há um sentido amplo na avaliação: ela deve ser vista como uma análise não só da relação pessoal do sujeito com o objeto, mas também da avaliação das relações institucionais. A nosso ver, essa perspectiva tira do aluno uma pretensa responsabilidade sobre determinada dificuldade em alguma organização matemática.

Retomando, agora, as questões formuladas para a dimensão econômica:

- Qual é a razão de ser do conceito na instituição escola?
- Como são estruturadas as OM e OD de acordo com a evolução do conceito?

Pela breve análise teórica dos elementos da TAD, percebemos que a razão de ser do conceito deve ser identificada em sua **perspectiva institucional**. A análise epistemológica mostrou que foi a previsão dos fenômenos regulares que deu origem à noção de função. Quando o conceito é escolarizado, defendemos que sua razão de ser pode vir determinada após uma análise criteriosa das OM que compõem o ensino da álgebra. Dado o limite deste estudo, propomos que esta análise possa ser feita numa perspectiva longitudinal, com a devida profundidade. Além disso, acreditamos que essa razão de ser só possa surgir determinada após a análise das OM e OD.

A respeito da estruturação das OM e OD, Chevallard (1997a) explica que uma OM pode ser sempre modificada, ampliada. Há diversos tipos de organização em praxeologia: organizações pontuais, locais, regionais e globais. A cada uma dessas ampliações, o ambiente teórico vai ficando mais em destaque. Assim, o conhecimento teórico vai se expandindo em relação ao bloco técnico, de forma que a teoria permite gerar novas técnicas. Vê-se uma direção prática \rightarrow teoria. Não é um movimento compassado, preciso, mas uma abordagem cujo objetivo inicial (e final) é construir com o aluno uma relação institucional dentro da organização matemática desejada. E, para isso, a organização didática prevê uma retomada de técnicas cada vez mais imbuídas de um discurso matemático elaborado.

Enxergamos uma espécie de ampliação dos discursos praxeológicos acompanhada de uma retomada de conceitos que se tornam base para as construções futuras. Assim, o elemento teórico que justifica a técnica será a base para novas técnicas, que, por sua vez, demandam novo discurso teórico (Figura 3).

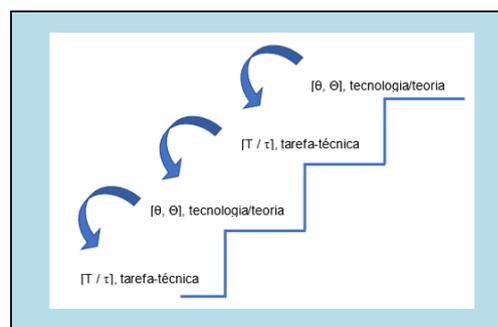


Figura 3.

Ampliação do discurso praxeológico privilegiando a retomada de elementos teóricos e técnicos

Numa análise em larga escala do MER que construímos, podem-se pensar as ideias básicas do conceito de função compondo o bloco tarefa/técnica e a definição analítica e simbólica representando a tecnologia/teoria. Essa seria uma perspectiva de construção final do conceito. Contudo, essas ideias são abordadas durante todo o ensino básico. O que ocorre é que, a nosso ver, o aluno não tem a percepção desse movimento crescente e sempre toma cada conteúdo como um fim em si mesmo.

Dimensão ecológica: níveis de codeterminação didática e a difusão institucional do conhecimento

Do mesmo modo que a seção anterior, vamos analisar o desenvolvimento da dimensão ecológica numa perspectiva mais teórica. Elaboramos uma questão para ser analisada.

- De que maneira o conhecimento é difundido na instituição escola?

Se os momentos didáticos descrevem a organização didática (OD) numa espécie de liberdade do professor, não se pode dizer o mesmo de uma organização matemática (OM). Uma OM não depende de gestos didáticos. Ela já está pronta, construída. Assim, com o objetivo de analisar uma OM, Chevallard (2002) introduz a noção de níveis de codeterminação didática. Essa escala permite analisar de que forma uma OD pode permear uma OM. Por exemplo, determinado tópico deve estar relacionado a um tema, o qual pertence a um domínio e setor específicos. Seguindo a ordem apresentada por Chevallard (2001), há um movimento que vai de fora da escola para dentro: da humanidade até chegar ao nível tópico, já na sala de aula. Eis a escala:

Humanidade \Leftrightarrow Civilização \Leftrightarrow Sociedade \Leftrightarrow Escola \Leftrightarrow Pedagogia \Leftrightarrow Disciplina \Leftrightarrow Domínio \Leftrightarrow Setor \Leftrightarrow Tema \Leftrightarrow Tópico.

Vale destacar que, em relação às praxeologias, Chevallard (2002) explica que praticamente não existem organizações pontuais – aquelas cuja tecnologia θ se refere a apenas um tipo de tarefa T. Ao contrário, segundo ele, **o aluno tem a tendência de enxergar cada tipo de tarefa com um assunto único, praticamente independente dos outros tópicos**. O professor, porém, vê uma unidade de forma mais ampla: tarefas imbuídas em determinadas tecnologias. O que Chevallard (2002) argumenta é que o aluno faz uma espécie de reconstrução pontual onde o professor enxerga uma organização regional. A nosso ver, tal fato faz com que o aluno enxergue os tópicos de maneira única e, muitas vezes, desligados entre si. **O professor, de posse do currículo, visualiza a organização global. O estudante, não.**

A respeito dessa reconstrução, explica o autor: “No movimento de desconstrução-reconstrução das obras a serem estudadas, apenas reconstruímos fragmentos de um quebra-cabeça que jamais será reconstruído como um todo” (Chevallard, 2002, p. 3, tradução nossa). Além disso, o fato de o professor não situar os temas em seus respectivos setores e domínios, faz com que ele os apresente em forma de “bloco único”. Isso se deve pelo fato de o docente focar seu trabalho, na maioria das vezes, nos níveis de maior especificidade. Como num quebra-cabeça, poderíamos dizer que o professor (a escola, a instituição) trabalha no todo, no conjunto, enquanto o aluno enxerga as peças separadas, as unidades e, por vezes, não tem a chance de visualizar a imagem completa.

Chevallard (2011) argumenta que a utilização dessa escala permite reconhecer as condições e restrições das praxeologias consideradas e os atores envolvidos. Ele situa os pedagogos no nível escola e os sociólogos no nível sociedade. Para ele, as atitudes desses personagens atingem, em última análise, a sala de aula. No caso da álgebra, por exemplo, ele

mostra que sua difusão se deu por um constrangimento no nível civilização. O que ocorreu é que havia uma preferência ocidental pelas palavras, pela retórica, e uma repulsa pelo simbólico, sincopado. Contudo, é a álgebra simbólica que a sociedade moderna encontra nas escolas. Isso mostra como as condições vão sendo impostas e absorvidas nível a nível. Mas, de alguma forma, é necessário levar em conta as consequências advindas dessas restrições e condições.

Chevallard (2007) explica que o tópico (trabalhado pelo aluno por meio da tarefa T) chega até a disciplina (matemática, por exemplo) através do tema θ . O que ocorre é que os níveis setor e domínio assumem um papel mais ligado a rótulos, a especificidades do currículo e não são utilizados como fonte para o desenvolvimento dos níveis inferiores (tema, tópico).

Há duas possibilidades de “leitura” da escala de níveis de codeterminação didática: Humanidade \Leftrightarrow Civilização \Leftrightarrow Sociedade \Leftrightarrow Escola \Leftrightarrow Pedagogia \Leftrightarrow Disciplina \Leftrightarrow Domínio \Leftrightarrow Setor \Leftrightarrow Tema \Leftrightarrow Tópico. Uma delas parte de cima para baixo e mostra como os conteúdos foram pensados e construídos de forma a modelar a realidade que deve chegar até a sala de aula. A outra possibilidade começa de baixo, do nível tópico, e revela o trabalho do professor. Nesse caso, pode-se considerar a forma como o docente adapta (ou constrói) as questões que devem (ou deveriam) fazer o caminho inverso, ou seja, atingir de volta a sociedade. Mas Chevallard (2001) afirma que, no trabalho docente, há uma crença de que os níveis mais elevados da organização didática – os níveis superiores – “[...] não contam no destino do conhecimento cuja disseminação eles devem assumir” (Chevallard, 2001, p. 6).

O que percebemos até aqui é a existência de diferentes formas de cumprir esse roteiro. A escola, modelando o estudo de questões da humanidade, acaba fragmentando essas questões de tal maneira que, pela hierarquia de níveis de codeterminação, chegam ao aluno (pelo trabalho do professor) como um conhecimento desconectado da realidade maior que o gerou. Já o trabalho do professor, muito distante dos níveis superiores, fica confinado na especificidade da sua disciplina, totalmente desvinculado de um contexto mais amplo. Isso provoca o que Chevallard (2001) chama de descolarização dos conteúdos.

Um pequeno esquema pode ser visto na figura 4 e não tem a pretensão de esgotar o tema ou estruturar os conceitos de maneira estanque. A ideia é fazer um entrelaçamento entre o modelo praxeológico e os níveis de codeterminação didática.

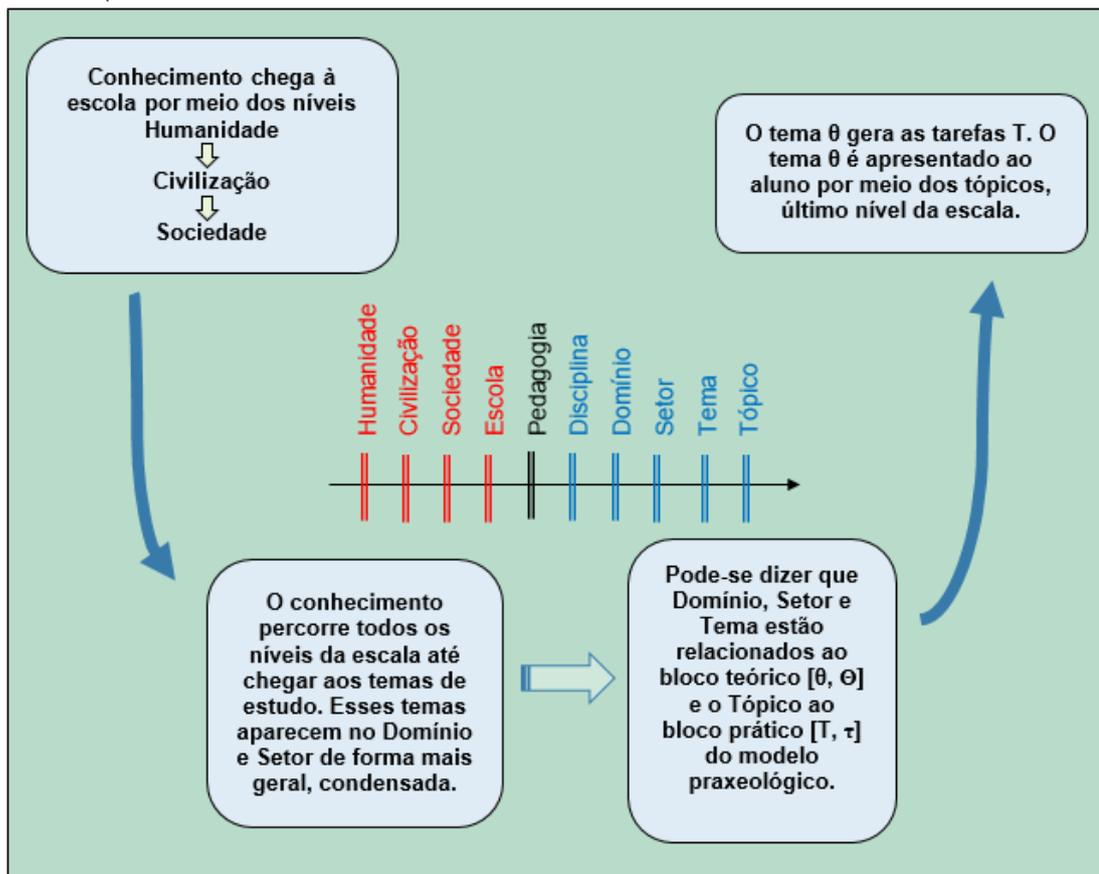


Figura 4.

Níveis de codeterminação e o modelo praxeológico

Nesta microanálise, podemos afirmar que o nível pedagógico, na educação básica, é representado pelos preceitos da BNCC, a qual elege competências gerais para a educação básica. Esta é a fronteira que marca o limite entre a escola e o mundo externo a ela. A partir daí, o que há são prerrogativas ligadas à disciplina da matemática.

A figura 5 faz um esquema a respeito de nossas ideias sobre as possibilidades de “leitura” da escala de codeterminação didática (Chevallard, 2001) e, também, lança alguma luz ao nosso questionamento:

- De que maneira o conhecimento é difundido na instituição escola?

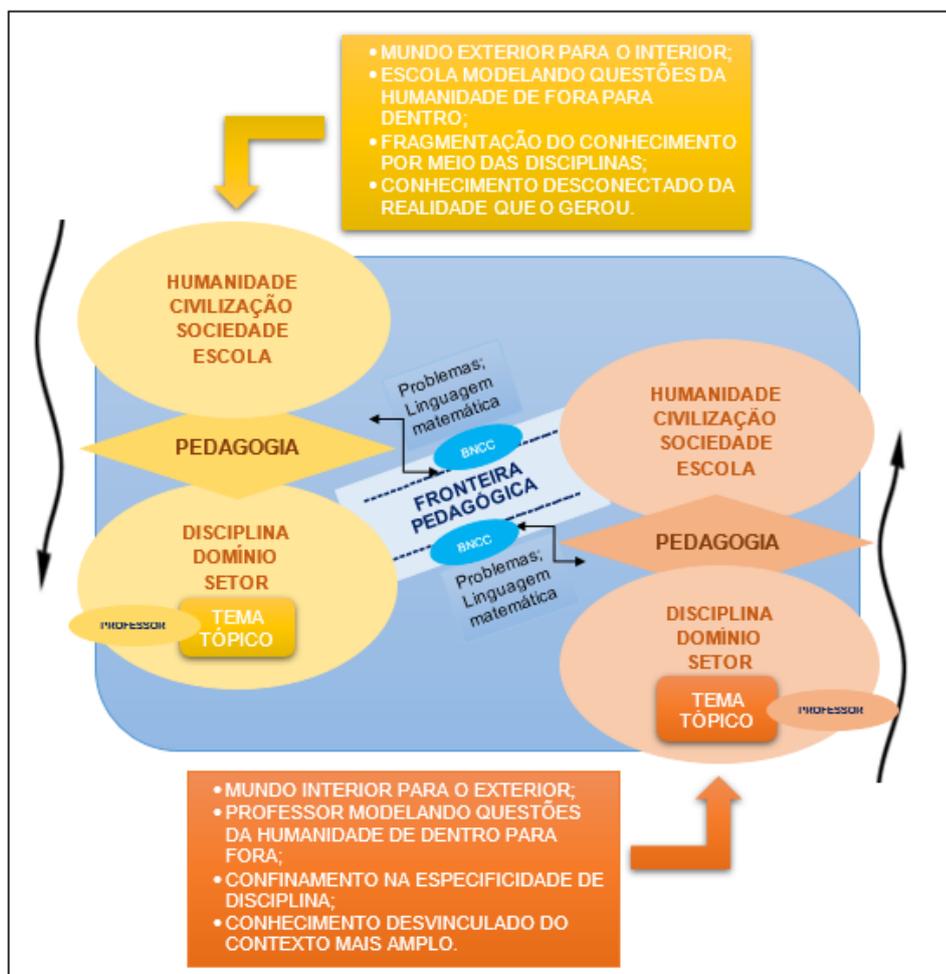


Figura 5.

Difusão do conhecimento de acordo com a escala de codeterminação didática

Da figura 5 depreende-se que o trabalho do professor, confinado nos temas e tópicos, permanece, de certa forma, limitado num mundo próprio. Além disso, vê-se, ainda, que é necessário passar pela fronteira pedagógica – aqui a BNCC – nos dois sentidos que estamos admitindo nesta pesquisa: tanto da sala de aula para fora da escola quanto no movimento inverso. A nosso ver, há dois caminhos para a difusão do conhecimento na escola: um deles vem de “fora para dentro”, portanto, o oficial e, por que não, o ideal para a instituição; e o outro caminho, que vai de dentro para fora. Esse, apostamos, é o caminho real, aquele que de fato acontece. Portanto, as OM descrevem esse percurso oficial e as OD o real, aquele que o aluno tem contato por meio dos temas e tópicos.

Caminhos para a construção de um modelo praxeológico

A partir das análises anteriores, defendemos que o modelo epistemológico de referência pode ser interpretado por meio de dois trajetos: do mundo exterior para o interior e o inverso.

É reconhecido que o MER descreve um saber ainda não institucionalizado (aquele que vai compor as OM) mas, ao mesmo tempo, ele é um instrumento que serve de parâmetro para descrever as organizações didáticas, ou seja, aquele saber que já foi transportado para a instituição.

De fato, Gáscon (2011, p. 211, tradução nossa) explica que “[...] as questões que fazem parte da dimensão epistemológica sugerem que ela não só ocupa uma posição privilegiada em todos os problemas didáticos, mas também é indissociável das restantes dimensões (a econômico-institucional e a ecológica)[...]”. E, nesse sentido, nossa aposta é que a análise do caminho institucional do conhecimento, levando em conta seus dois sentidos de difusão, pode identificar pontos onde determinado conceito “estaciona” ou, ainda, sequer é abordado.

Além disso, mesmo que o modelo epistemológico seja uma dimensão provisória, que precisa ser revisitada, fica claro perceber que o caminho institucional é, de certa forma, fechado, pré-definido. Portanto, há que se encaixar esse saber sábio num parâmetro institucional. O que queremos dizer com isso é que há diferenças na razão de ser conceitual de um conhecimento matemático e sua razão de ser institucional. Para além dessas constatações, há ainda a percepção do aluno, que fica confinado no contato com os tópicos. Assim, o aluno tem contato com a praxeologia do professor, que pode ser diversa do modelo praxeológico institucional, devido à “liberdade” presente naqueles momentos didáticos, conforme visto anteriormente.

Nesse ponto, defendemos a concepção do MER acompanhada de uma análise praxeológica que descreva uma difusão institucional mais ampla do conhecimento, atingindo nível e setor: teremos, portanto, um **modelo praxeológico global**, que permita um estudo em termos de expansão conceitual no sentido teoria → técnica → teoria. Assim, o primeiro nível, teoria, vem da gênese do conhecimento, analisada a nível epistemológico. O segundo nível trata das técnicas que derivam desse saber sábio (reforçando que tratamos aqui de técnicas no sentido da TAD) e, no terceiro nível, tratamos das teorias institucionais que justificam e conferem aplicação às técnicas.

O esquema seguinte permite visualizar esta ideia (figura 6).

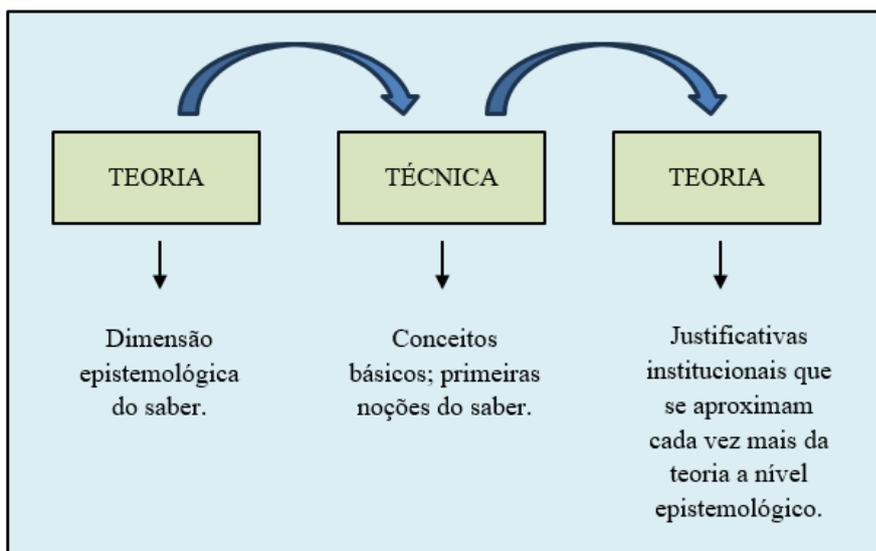


Figura 6.

Modelo praxeológico global

O esquema mostra uma primeira aplicação desse modelo no sentido da utilização dos conceitos primitivos do conceito. A ideia é que técnica e teoria sejam analisadas numa expansão cada vez maior. Assim, temos um modelo praxeológico que toma por princípio o saber em sua gênese e busca as ideias dessa gênese numa abordagem teórica. Nos parâmetros desse estudo, temos como primeiro nível as ideias básicas do conceito de função assumindo um papel de teoria para que as técnicas, a partir daí, sejam justificadas.

As possibilidades institucionais, no campo da função, é que a teoria pode ser abordada com a formalização do conceito, que vai desde a linguagem natural (retórica) até a simbolização das ideias de forma algébrica. O nível técnico, portanto, responderá por praxeologias técnicas: aquelas em que o bloco teórico aparece depois; e o nível teórico é aquele em que as praxeologias assumem um saber já formalizado como base no sentido técnica-teoria. Não é demais lembrar que Chevallard (1997) alerta para o fato de o professor iniciar uma OD por meio de uma tarefa como uma aplicação de uma teoria. No modelo que propomos, há uma observância mais atenta nesse sentido teoria → técnica → teoria.

Uma ampliação desse modelo é aquela que admite uma difusão do conhecimento institucional por meio de uma extensão no movimento que vai sempre de uma teoria para a praxeologia nos moldes originais: técnico [T, τ] e teórico [θ, Θ] (figura 7):

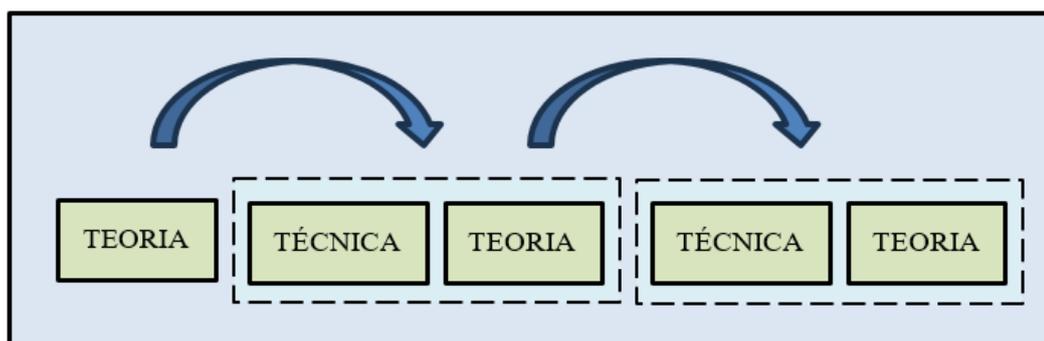


Figura 7.

Difusão do conhecimento institucional no modelo praxeológico global

Finalizando, apostamos ainda que o modelo praxeológico global dá conta da análise das três dimensões de um problema didático (Gáscon, 2011), sendo que as praxeologias técnicas podem ser estudadas na perspectiva econômica, privilegiando as OM e OD; e as praxeologias teóricas permitem uma análise a nível ecológico, no parâmetro da escala de codeterminação didática (figura 8).

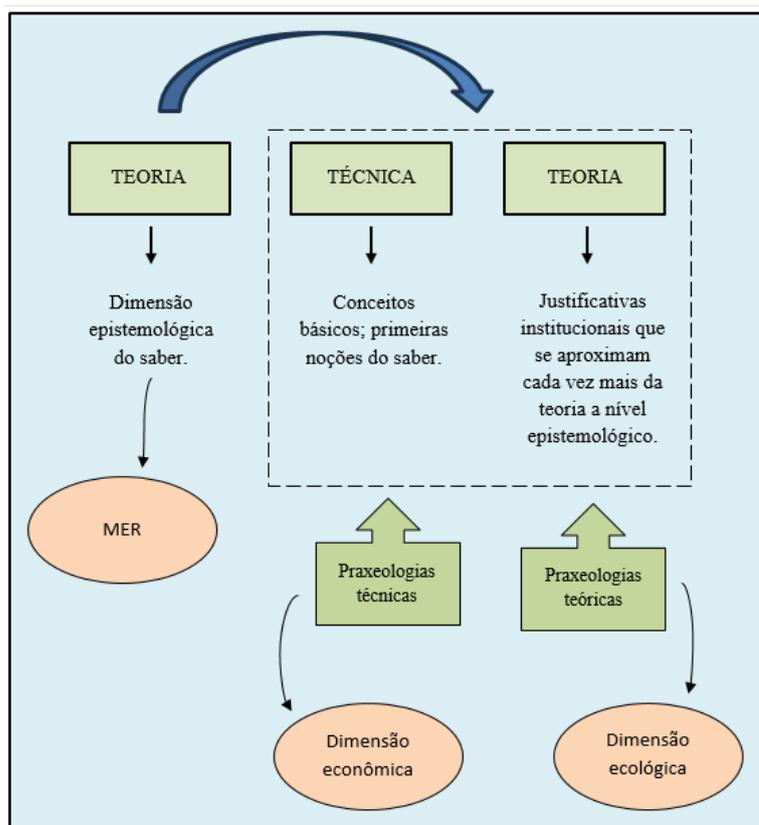


Figura 8.

Modelo praxeológico global e as três dimensões de um problema didático

Problema didático, MER e Modelo praxeológico global: considerações finais

Conforme exposto, as três dimensões de um problema didático partem de uma questão inicial que vai sendo ampliada por meio das dimensões epistemológica, econômica e ecológica, cada uma delas com seus questionamentos. Retomando, o desenvolvimento do problema didático que apresentamos aqui para conduzir esse estudo está colocado da seguinte forma.

Questão P_0 para o problema: desenvolvimento do conceito de função por meio de suas ideias básicas.

- De que forma as ideias básicas de função podem contribuir no desenvolvimento do conceito?

Questões P_1 de dimensão epistemológica:

- Qual é a razão de ser do conceito?
- Como ele foi sendo interpretado de acordo com seu desenvolvimento?
- Qual é a amplitude do desenvolvimento do conceito?

Questões P_2 de dimensão econômica:

- Qual é a razão de ser do conceito na instituição escola?
- Como são estruturadas as OM e OD de acordo com a evolução do conceito?

Questão P_3 de dimensão ecológica:

- De que maneira o conhecimento é difundido na instituição escola?

Buscando um apoio no MER que desenvolvemos para análise da evolução do conceito de função e que considera a expansão das ideias num crescendo até que atinja a formalização (figura 2), o problema didático P_δ geral fica assim definido: como as ideias básicas de função percorrem o caminho institucional na perspectiva técnica e teórica, considerando o modelo praxeológico global para a difusão do conhecimento?

Pelas ideias desenvolvidas no modelo praxeológico global, o desafio será determinar que elementos teóricos serão transportados para o bloco saber-fazer, nesse movimento de ampliação e retomadas constantes.

Considerações futuras

O objetivo geral deste estudo foi desenvolver um modelo praxeológico que contribua na análise do conhecimento a partir da concepção de um MER para o ensino de função em suas ideias básicas. Vamos afirmar que o MER é o recorte da realidade que o pesquisador toma para si enquanto objeto de análise. Dada que a realidade é fluente e interdependente (Caraça, 2010), esse recorte possui todas as características de um fragmento recortado e encaminhado para a

análise: limitações tanto de ordem epistemológica quanto teórica. Com isso, queremos dizer que o pesquisador/professor deve adotar uma postura de vigilância epistemológica e buscar submeter o produto de sua análise de volta a essa realidade, numa perspectiva de reanálise e confronto de suas ideias com o fragmento inicial.

Apresentamos as ideias do MER por meio da concepção do problema didático e utilizamos o ensino de função como caminho de análise porque acreditamos que esse conceito é base para o ensino do cálculo em todas as suas aplicações. Portanto, usamos ferramentas de cunho teórico, buscando explorar as ideias básicas da TAD.

Neste trabalho, temos uma primeira aproximação das ideias que pretendemos desenvolver a respeito do modelo praxeológico global. O próximo passo é, portanto, submeter nossas conclusões à realidade institucional que é, também, fluente e interdependente.

Referências

- Almouloud, S. A. & Silva, M. J. F. (2021). Estudo das três dimensões do problema didático de números racionais na forma fracionária. *Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas Em Educação Matemática*, 3(2), 114 - 151. <https://doi.org/10.36661/2596-318X.2021v3n2.12660>
- Artigue, M (2010). La théorie anthropologique du didactique: rapports et articulations possibles avec d'autres approches. In: Bronner, A.; Larguier, M.; Artaud, M.; Bosch, M.; Chevallard, Y.; Cirade, G.; Ladage, C. (org.), *Apports de la théorie anthropologique du didactique: diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. (p. 29-39). IUFM de l'académie de Montpellier.
- Bosch, M. & Chevallard, Y (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*. 19(1), p. 77-124. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf
- Boyer, C. B (1986). *História da Matemática*. Trad. Elza Gomide. Edgard Blucher.
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação - MEC; Secretaria de Educação Básica - SEB http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf
- Caraça, B. J (2010). *Conceitos fundamentais da matemática*. Gradiva.
- Casabò, M. B (1994). *La dimensión ostensiva em la actividad matemática: el caso de la proporcionalidad*. [Tesis Doctorado en Ciencias – Matemáticas – Facultat de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona], Barcelona.
- Castro, K. O. (2012). *Ideias e conceitos básicos de função no 7º ano do ensino fundamental: possibilidades e desafios*. [Dissertação de mestrado em Educação Matemática, Universidade Severino Sombra], Vassouras, RJ.
- Castro, K.O. (2022). *Generalização algébrica: uma abordagem praxeológica*. [Tese de doutorado em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo]. <https://repositorio.pgscogna.com.br/handle/123456789/48261>

- Chevallard, Y (1982). Pourquoi la Transposition Didactique? Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'imag, Grenoble. *Actes de l'année*. Grenoble: Université scientifique et médicale de Grenoble http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf.
- Chevallard, Y (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. v.12, n. 1, p. 73-112. <https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/>
- Chevallard, Y (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*. v.17, n. 3 http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Familier_e_t_problematique.pdf
- Chevallard, Y (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 19(2), http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27.
- Chevallard, Y (1999). La recherche en didactique et la formation des professeurs: problématiques, concepts, problèmes. In: Xe école d'été de didactique des mathématiques, 18-25 août, Houlgate. *Actes [...]*. Houlgate, 1999, p. 98-112. <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/ete.pdf>.
- Chevallard, Y (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *Conférence donnée le 1er avril 2001 dans le cadre des XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM) tenues à l'Escuela de Magisterio de Huesca (Université de Saragosse)*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_2001_-_Osca.pdf
- Chevallard, Y (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation, In: XIe école d'été de didactique des mathématiques, 21-30 août, Corps. *Actes [...]*. La Pensée Sauvage, p. 41-56. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_1_etude_3.pdf
- Chevallard, Y (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In: Maury, S. S.; caillot, M. (ed.). *Rapport au savoir et didactiques*. p. (p. 81-104). Éditions Fabert.
- Chevallard, Y (2005). *La transposición didáctica: del saber sábio al saber enseñado*. Buenos Aires.
- Chevallard, Y (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique de Didactique. In: A. Estepa, L. Ruiz, F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp.705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y (2011). Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD. *Texte d'un exposé réalisé le 28 janvier 2011 dans le cadre du Séminaire de l'ACADIS (ADEF, Marseille)*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_Acadis_28-01-2011_Notes1.pdf
- Eves, H (2008). *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Unicamp.
- Farras, B. B., Bosch & M. & Gáscon, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educ. Matem. Pesq.*, v.15, n.1, p. 1-28.
- Gascón, J (1999). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. In *Actas del III Simposio de la SEIEM*, (p. 129-150), Valladolid.

- Gascón, J (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, v.14, n.2, p. 203-231.
- Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, p. 99-12. ISSN: 0187-8298. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854006>
- Rezende, W. M. (2003). *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica* [Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo]. doi:10.11606/T.48.2003.tde-27022014-121106.
- Rodrigues, R. F., Lucas, C. O., Castro, S. L., Menezes, M. B. & Santos, M. C (2021). Elaboração, Análise e Aplicação de um Modelo Epistemológico de Referência para o Ensino do Conceito de Função na Licenciatura em Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática* [online]. v. 35, n. 70, pp. 614-636. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a04>
- Rogalski, M (2013). Quelques points sur l’histoire et l’epistemologies des fonctions, pouvant clarifier certaines questions didactiques sur leur enseignement. *JIEM; IJSME*. v.6(1),
- Youschkevitch, A. P (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Arch. Hist. Exact Sci.* 16, 37–85 <https://doi.org/10.1007/BF00348305>