EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i2p034-062

Conhecimento especializado do professor de matemática e conhecimento interpretativo: tecendo relações teóricas no âmbito da transformação geométrica isométrica rotação

Mathematics teacher's specialized knowledge and interpretative knowledge: weaving theoretical relations within the scope of isometric geometric transformation rotation

Conocimientos especializados del profesor de matemáticas y conocimiento interpretativo: tejiendo relaciones teóricas en el ámbito de la transformación geométrica isométrica de rotación

Connaissances spécialisées du professeur de mathématiques et connaissances interprétatives : tisser des relations théoriques dans le cadre des transformations géométriques isométriques de la rotation

Caroline Almeida Souza Silva[1]
Universidade Estadual de Campinas
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática
https://orcid.org/0000-0002-7089-7090

Sandra Menezes[2]
Universidade Estadual de Campinas
Doutora em Ensino de Ciências e Matemática
https://orcid.org/0000-0002-5998-8194

Miguel Ribeiro[3]
Universidade Estadual de Campinas
Doutor em Didática da Matemática
https://orcid.org/0000-0003-3505-4431

Resumo

Para melhorar a aprendizagem matemática dos alunos é necessário fazer diferente do que tem sido feito, o que implica uma mudança de foco de atenção e priorização nas especificidades do conhecimento matemático do professor que fundamenta sua prática. Nesse sentido, assumem-se duas conceitualizações que sustentam uma prática especializada: o conhecimento especializado do professor de matemática e o Conhecimento Interpretativo. Considerando essas duas conceitualizações de forma imbricada, maximiza-se assumir como ponto de partida o que os alunos conhecem e como conhecem, escutando o seu Pensar matemático, para atribuir significado aos raciocínios que sustentam suas produções, de modo a tomar decisões pedagógicas mais informadas, potenciando o entendimento matemático dos alunos. Uma vez

[1] caroldesouza86@gmail.com
[2] sandra.smenezes@hotmail.com.br
[3] cmribas78@gmail.com

que o conhecimento do professor impacta diretamente o entendimento dos alunos, é fundamental uma discussão centrada nos tópicos matemáticos mais problemáticos, e a transformação geométrica isométrica rotação é um desses. Assim, efetuamos uma discussão objetivando entrelaçar essas conceitualizações, recorrendo ao contexto da rotação, tendo como perspectiva aprofundar e refinar o entendimento do conteúdo das especificidades do conhecimento do professor de matemática e terminamos com algumas proposições para a pesquisa e formação.

Palavras-chave: Conhecimentos especializados do professor de matemática, Conhecimento interpretativo, Transformação geométrica isométrica rotação.

Abstract

To improve students' mathematical learning, it is necessary to do something different from what has been done, which implies a change in the focus of attention and prioritization on the specificities of the teacher's mathematical knowledge that underlies his/her practice. In this sense, two conceptualizations that support a specialized practice are assumed: the Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge and the Interpretative Knowledge. Considering these two conceptualizations in an intertwined way, it’s possible to optimize assume as a starting point what students know and how they know it, listening to their mathematical thinking, to attribute meaning to the reasoning that supports their productions, in order to make more informed pedagogical decisions, enhancing students’ mathematical understanding. Since the teacher's knowledge directly impacts students' understanding, a discussion focused on the most problematic mathematical topics is essential, and the isometric geometric transformation rotation is one of such topics. Thus, we held a discussion aiming to intertwine these conceptualizations, using the context of rotation, with the perspective of deepening and refining the understanding of the content of the specificities of the knowledge of the mathematics teacher and we ended with some propositions for research and formation.

Keywords: Mathematics teacher’s specialised knowledge, Interpretative knowledge, Isometric geometric transformation rotation.

Resumen

Para mejorar el aprendizaje matemático de los alumnos es necesario hacer algo distinto de lo que se ha hecho, lo que implica un cambio en el foco de atención y priorización en las especificidades del conocimiento matemático del profesor que subyace a su práctica. En este sentido, se asumen dos conceptualizaciones que sustentan una práctica especializada: el

Conocimientos especializados del profesor de matemáticas y el Conocimiento Interpretativo. Considerando estas dos conceptualizaciones de manera imbricada, es posible tomar como punto de partida lo que los alumnos conocen y cómo conocen, escuchando su pensamiento matemático para atribuir significado a los razonamientos que sustentan sus producciones, posibilitando prácticas matemáticas más informadas desarrollando y profundizando la comprensión matemática de los alumnos. Dado que el conocimiento del profesor impacta directamente en la comprensión de los alumnos, una discusión centrada en los temas matemáticos más problemáticos es esencial, y la transformación geométrica isométrica rotación es uno de ellos. Así, realizamos una discusión con el objetivo de entrelazar estas conceptualizaciones, utilizando el contexto de la rotación, con la perspectiva de profundizar y perfeccionar la comprensión del contenido de las especificidades del conocimiento de los profesores de matemáticas y finalizamos con algunas propuestas para la investigación y la formación.

Palabras clave: Conocimientos especializados del profesor de matemáticas, Conocimientos interpretativos, Transformación geométrica isométrica de rotación.

Résumé

Pour améliorer l'apprentissage mathématique des élèves, il est nécessaire de faire quelque chose de différent de ce qui a été fait, ce qui implique un changement d'attention et une priorisation sur les spécificités des connaissances mathématiques de l'enseignant qui sous-tendent sa pratique. En ce sens, deux conceptualisations sont supposées soutenir une pratique spécialisée: les connaissances spécialisées du professeur de mathématiques *e* et les connaissances interprétatives. En considérant ces deux conceptualisations de manière étroitement liée, il devient possible de prendre comme point de départ ce que les élèves savent et comment ils savent, en écoutant leur pensée mathématique, pour attribuer un sens aux raisonnements qui soutiennent leurs productions, afin de rendre une pédagogie plus éclairée. décisions, améliorant la compréhension mathématique des élèves. Puisque les connaissances de l'enseignant impactent directement la compréhension des élèves, une discussion centrée sur les sujets mathématiques les plus problématiques est essentielle, et la transformation géométrique isométrique de rotation en fait partie. Ainsi, nous menons une discussion entrelaçant ces conceptualisations, en utilisant le contexte de la rotation, afin d'approfondir et d'affiner la compréhension du contenu des spécificités des savoirs des enseignants de mathématiques et nous terminons par quelques propositions de recherche et de formation.

Mots-clés: Connaissances spécialisées du professeur de mathématiques, Connaissances interprétatives, Rotation de transformation géométrique isométrique.

Mathematics teacher's specialised knowledge e conhecimento interpretativo: tecendo relações teóricas no âmbito da transformação geométrica isométrica rotação

O nosso conhecimento enquanto professores é, dentre um conjunto de fatores controláveis, aquele que mais impacta a nossa prática profissional e, consequentemente, as aprendizagens e resultados dos alunos (Nye et al., 2004). Há quase 40 anos uma parte da pesquisa tem focado no conhecimento e saberes do professor (e.g., Shulman, 1986; Tardif, 2002); porém, esse foco não tem gerado melhorias na prática profissional do professor (entendidas aqui na perspectiva do foco das discussões matemáticas desenvolvidas), sequer nos resultados dos alunos que continuam a ser abaixo do esperado. Isso fica evidente nos resultados revelados pelos indicadores de aprendizagens matemática não satisfatórios em nenhuma etapa da Educação Básica (Brasil, 2024), independentemente do sistema de avaliação que se considere tanto a nível nacional (Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB) como internacional (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA). Essa ausência de resultados satisfatórios está relacionada, também, com o fato de o foco prioritário das discussões que têm sido promovidas ser geral e deixar à margem tanto uma discussão matemática (Fiorentini & Crecci, 2017) especializada quanto as especificidades do conhecimento do professor para essa prática, que são necessárias para uma transformação das aprendizagens e resultados de forma sustentada.

Para mudar esse cenário, é fundamental uma alteração de foco de atenção das pesquisas e da formação das generalidades para as especificidades (Ribeiro, 2018) desse conhecimento do professor, pois, se buscamos resultados diferentes, não tem sentido continuar a fazer o mesmo (Ribeiro & Silva, 2024). Esse conhecimento específico para a prática profissional do professor pode ser compreendido segundo diferentes conceitualizações (e.g., *Mathematical Knowledge for Teaching*[4] – MKT (Ball et al., 2008); *Knowledge Quartet* – KQ (Rowland, 2009); *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018); Conhecimento Interpretativo – CI (Jakobsen et al., 2014). Aqui, optamos por focar as duas últimas conceitualizações (MTSK e CI) que se complementam e que permitem melhor entender as características do conteúdo do conhecimento do professor de matemática para que possamos, posteriormente, equacionar formas propositivas[5] de desenvolver esse conhecimento.

[4] Optamos por utilizar a nomenclatura em inglês por esta já ser reconhecida internacionalmente e a tradução pode acarretar uma dessignificação, que se encontra associada a cada uma das dimensões da conceitualização.
[5] Forma parte da agenda de pesquisa do grupo CIEspMat realizar formações especializadas com essa intencionalidade e no âmbito do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0). Temos desenvolvido várias propostas

O *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) é uma conceitualização teórica elaborada para aprofundar a compreensão dos elementos que compõe o conhecimento especializado do professor envolvido na sua prática matemática, também, serve de ferramenta analítica que permite investigar esse conhecimento, no sentido de compreendê-lo e, a partir disso, realizar orientações para a formação de professores (Carrillo et al., 2018). O Conhecimento Interpretativo (CI) é igualmente uma conceitualização teórica que une o conhecimento matemático especializado envolvido e necessário para a prática matemática de interpretar produções dos alunos com o conhecimento da abordagem de erros e raciocínios não usuais, entendendo-os como oportunidades de aprendizagem (Di Martino et al., 2020). Assim, o CI fundamenta a prática interpretativa do professor para interpretar e atribuir significado às produções dos alunos e propor *feedback* construtivo que contribua com o desenvolvimento do entendimento dos alunos (Jakobsen et al., 2014).

Ambas as conceitualizações se referem ao conhecimento matemático especializado que sustenta a prática de ensinar matemática em cada um dos tópicos que os alunos têm direito de conhecer, mesmo que esses tópicos sejam problemáticos, em termos das dificuldades que os alunos possam apresentar. Um dos tópicos que os alunos (e professores) revelam dificuldades é a transformação geométrica isométrica rotação, sendo esta considerada a mais difícil entre as isometrias (e.g., Küchemann, 1980; Turgut et al., 2014; Xistouri & Pitta-Pantazi, 2011). Apesar disso, é essencial entender que a rotação corresponde a uma operação que se efetua com uma figura seguindo um conjunto de procedimentos específicos e generalizáveis (algoritmo) obtendo como resultado desse algoritmo uma imagem, pois esse entendimento permite estabelecer e entender as conexões com outros tópicos matemáticos como seja com as demais transformações geométricas isométricas (translação e reflexão), funções, simetria e congruência (Hollebrands, 2003).

Para tornar possível ultrapassar as dificuldades dos alunos na rotação e em outros tópicos, é essencial desenvolver (e para isso, compreender) o conteúdo do conhecimento matemático especializado e interpretativo do professor. Assumimos a necessidade e importância de melhor entender as relações entre o MTSK e o CI, a partir da especialização que assumem para o conhecimento do professor, por considerarmos que um mais amplo e profundo entendimento dessas especificidades contribuirá para pensar e operacionalizar focos e contextos formativos que contribuam para fazer o que ainda não foi feito e, assim, também possibilitar

formativas almejando, por último, a melhoria da qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos nos mais variados tópicos matemáticos.

que as aprendizagens e resultados dos alunos fiquem dentro do esperado. Nesse sentido, discutimos as relações entre essas conceitualizações, focando as similaridades e diferenças, para compreender melhor as especificidades do conteúdo do conhecimento matemático profissional do professor, e, para isso, recorremos ao contexto do tópico rotação.

Mathematics teacher's specialised knowledge

O *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018) é uma conceitualização teórica que modela o conhecimento do professor de matemática e permite caracterizar e compreender as especificidades do conteúdo do seu conhecimento, entendido como um todo especializado, e seus elementos constituintes tanto no âmbito matemático, quanto no pedagógico, o que possibilita investigar esse conhecimento com foco nas diferentes práticas profissionais do professor.

Em termos de operacionalização, o MTSK considera o conhecimento do professor composto por dois domínios: o *Mathematical Knowledge* – MK e o *Pedagogical Content Knowledge* – PCK (Figura 1). O MK corresponde ao conhecimento do professor de matemática com relação à disciplina científica dentro de um contexto educacional, enquanto o PCK refere-se ao conhecimento pedagógico especificamente relacionado com o ensino e a aprendizagem da matemática.

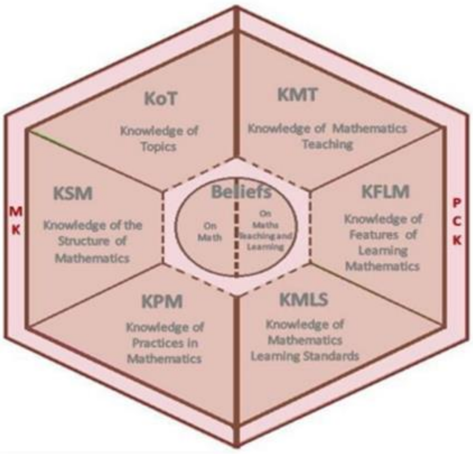


Figura 1.

Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (Carrillo et al., 2018, pp. 241)

Considerando o nosso objetivo, focamos a atenção no conteúdo do MK, pois as especificidades do seu conteúdo sustentam o Conhecimento Interpretativo (Ribeiro, 2024). O MK é subdividido em três subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). Por forma a trazer exemplos do conteúdo desse conhecimento, optamos por focar no tópico da rotação por ser problemático diante das dificuldades dos alunos e professores (e.g. Gomes, 2012; Küchemann, 1980; Turgut et al., 2014; Xistouri & Pitta-Pantazi, 2011).

O *Knowledge of Topics* (KoT) relaciona-se com o conhecimento das grandes ideias matemáticas e os tópicos a serem ensinados. Compreende o conhecimento matemático para além do saber fazer em nível de conhecimento do aluno (Carrillo et al., 2018). É composto por quatro categorias: (i) procedimentos; (ii) definições, propriedades e fundamentos; (iii) registros de representação; (iv) fenomenologia e aplicações.

(i) procedimentos, inclui o conhecimento do professor de diferentes formas de fazer em matemática, utilizando algoritmos (convencionais e alternativos) ou outras estratégias. No âmbito da rotação, envolve conhecer que, para determinar o centro de rotação em uma tarefa em que já se tem a figura e a imagem (rotacionada), necessitamos escolher um ponto pertencente à figura e seu correspondente na imagem, uni-los, traçar a mediatriz, repetir esse procedimento escolhendo outro ponto e seu correspondente na imagem para obter a mediatriz entre eles, de modo que, na intersecção dessas duas mediatrizes, tem-se o centro de rotação.

(ii) definições, refere-se ao conhecimento de várias definições para um mesmo tópico e inclui conhecer um conjunto mínimo de propriedades do tópico que permitem identificá-lo univocamente. Como exemplo, envolve conhecer que uma possível definição de rotação é:

> Fixemos um ponto O no plano Π agora orientado (como a tradição recomenda, o sentido positivo é o anti-horário). Dado um ângulo α, a *rotação de centro* O e *amplitude* α é a transformação que a cada ponto A do plano Π associa o ponto $A' = R_{\alpha}(A)$ de forma que se tenha AO' = AO, $\widehat{AOA'} = \alpha$ e o sentido de A para A' (em torno de O), positivo (Wagner, 1993, pp. 75).

(ii) propriedades, inclui o conhecimento do conjunto de todos os atributos matemáticos que são comuns ao tópico. Contempla conhecer, por exemplo, que o centro de rotação é o único ponto fixo na rotação (exceto na rotação identidade).

(ii) fundamentos, relaciona-se com o conhecimento do conjunto de atributos matemáticos que "sustentam" o tópico e conectam conceitos (Camacho & Guerrero, 2019). Refere-se a conhecer, por exemplo, que a figura, o centro de rotação, o ângulo de rotação (amplitude e sentido) e a imagem são os fundamentos da rotação.

(iii) registros de representação, refere-se ao conhecimento das diferentes formas de representar um tópico, processo ou procedimento e podem ser registros aritméticos, concretos, gráficos, pictóricos, envolvendo linguagem verbal ou simbólica (Duval, 1996). No âmbito da rotação, integra conhecer que $R_o\ [(X, Y, Z), 60°]$ representa a rotação de um triângulo com vértices X, Y e Z com centro de rotação em O a partir de um ângulo de 60° no sentido anti-horário.

(iv) fenomenologia e aplicações, relaciona-se a conhecer os fenômenos e conceitos associados a cada tópico, atribuindo significado às possíveis exteriorizações desses fenômenos. No âmbito da rotação, envolve conhecer que os contextos que a evocam estão associados a entendê-la como um movimento rígido, resultante de uma operação (seguindo os procedimentos da rotação – algoritmos generalizáveis) com uma figura original, a partir de um centro (ponto) ou eixo (reta), que inclui a amplitude e o sentido de um ângulo (de rotação) e uma função bijetora (relação entre pontos de dois conjuntos – figura e imagem).

Complementarmente a esse conhecimento de cada um dos tópicos, cumpre-nos, enquanto professores, o conhecimento que permita entender a matemática como uma rede de conceitos e, para esse entendimento, as conexões entre diferentes tópicos matemáticos são fundamentais. O *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) refere-se ao conhecimento do professor das diferentes conexões entre tópicos matemáticos considerando a dimensão temporal de sequenciação matemática e aos elementos de cada tópico e é composto pelas categorias (Montes & Climent, 2016): (i) conexões de complexificação; (ii) conexões de simplificação; (iii) conexões transversais; (iv) conexões auxiliares.

(i) conexões de complexificação, envolve uma perspectiva mais complexa que as discussões específicas requeridas pelo contexto. No âmbito da rotação, a conexão de complexificação da rotação com a conversão[6] de razões trigonométricas no contexto do círculo trigonométrico refere-se a conhecer que, por meio da rotação do triângulo retângulo no círculo trigonométrico, é possível converter as razões trigonométricas do 3.º quadrante para o 1.º quadrante, sendo

[6] Apesar de comumente nos documentos curriculares e, inclusive, nos livros didáticos utilizarem o termo "redução" de razões trigonométricas entre quadrantes, em termos de linguagem matemática adequada o que acontece é uma conversão.

essa conversão em termos da amplitude do ângulo de rotação e não dos elementos da figura.

(ii) conexões de simplificação, refere-se a algo mais simples do que as discussões específicas requeridas pelo contexto. Inclui conhecer a conexão do ângulo de rotação (ângulo ao centro de uma circunferência) e fração (no sentido parte e todo) pois, por exemplo, rotacionar uma figura 90° a partir de um ponto coincidindo com o centro da circunferência e um determinado sentido, corresponde a considerar $\frac{1}{4}$ da circunferência.

(iii) conexões transversais, inclui conhecer que a natureza dos conceitos se relaciona ao abordar diferentes conceitos ao longo da matemática escolar. Um exemplo envolve conhecer a conexão transversal entre rotação e simetria rotacional, conhecendo que toda a imagem obtida, após a transformação, em conjunto com a figura, por serem congruentes, possuem simetria rotacional.

(iv) conexões auxiliares, integra conhecer conceitos ou tópicos diferentes, que não são foco da discussão, acrescentando um elemento necessário para contribuir e sustentar a discussão matemática. No âmbito da rotação, inclui conhecer a conexão auxiliar entre os procedimentos utilizados para efetuar a rotação de uma figura no plano cartesiano e os procedimentos de localização de pontos neste plano, pois é necessário determinar as coordenadas de alguns pontos da figura, bem como do centro de rotação para obter as coordenadas de alguns pontos da imagem.

Para além desse conhecimento do professor das diferentes conexões entre tópicos matemáticos, cumpre-nos conhecer os aspectos centrais do que significa a prática de produzir matemática, em termos de seu funcionamento enquanto ciência, conhecimento esse que se inclui no *Knowledge of Practices in Mathematics* – KPM (Carrillo et al., 2018; Rebolledo et al, 2022). Considera-se neste subdomínio as seguintes categorias: (i) prática de demonstrar; (ii) prática de definir; (iii) prática de resolver problemas; (iv) o papel da linguagem matemática.

(i) prática de demonstrar, relaciona-se a conhecer como ocorre o desenvolvimento das demonstrações partindo, por exemplo, de casos particulares e estabelecendo regularidades até alcançar o nível de generalização; ou conhecer o método por absurdo. Inclui, também, o conhecimento do uso e papel dos exemplos e contraexemplos, bem como justificar, fazer deduções e induções. Envolve conhecer que como a reflexão central (em relação a um ponto ou eixo) é um caso particular das rotações cuja amplitude do ângulo de rotação é de 180°, independentemente do sentido, pode-se utilizar a reflexão central para efetuar demonstrações associadas à rotação.

(ii) prática de definir, refere-se ao conhecimento das condições necessárias e suficientes para gerar definições, ou seja, as características de hierarquia, não circularidade, não ambiguidade, não contradição, minimalidade, independência sob mudança de representação, equivalência e elegância de uma definição. Envolve conhecer, que para definir a rotação deve-se especificar os seus fundamentos (a figura, o centro de rotação e ângulo de rotação – amplitude e sentido – e a imagem), além de determinar o plano (ou espaço) em que ela será definida.

(iii) prática de resolver problemas, contempla o conhecimento das estratégias de simplificar, reinterpretar, decompor, sistematizar e introduzir um elemento auxiliar para explorar a solução para um problema, considerando o uso de gráficos e desenhos como heurísticas. Integra conhecer que uma estratégia de simplificar diante do problema de determinar a medida da geratriz de um cone reto – obtido por meio da rotação de um triângulo retângulo –, corresponde a utilizar a altura desse triângulo (que coincide com a altura do cone) como o eixo de rotação e um ângulo de rotação de amplitude de 360° (sentido independe) e determinar assim, por meio do teorema de Pitágoras, a medida da hipotenusa que coincidirá com a medida da geratriz do cone.

(iv) o papel da linguagem matemática, relaciona-se a conhecer o papel dos símbolos para reduzir e expressar brevemente informações e os símbolos convencionais nos contextos de validação, além de conhecer a notação matemática e o significado dos quantificadores. Envolve, também, o conhecimento da linguagem matemática formal. No âmbito da rotação, contempla conhecer que em termos da linguagem matemática formal é inadequado utilizar os termos "girar", "rodar" ou "deslocar" para se referir a essa transformação, sendo necessário especificar que o movimento é uma rotação efetuada a partir de um ângulo orientado (amplitude e sentido determinados).

Esse conhecimento matemático especializado fundamenta a prática profissional do professor para possibilitar que os alunos entendam o que e por que o fazem a cada momento, considerando os diferentes tópicos matemáticos. Ao assumir isso como ponto de partida para uma prática especializada é requerido o conhecimento especializado associado à interpretação denominado Conhecimento Interpretativo (Ribeiro et al., 2013; Di Martino et al., 2020; Mellone et al., 2020).

Conhecimento Interpretativo

A prática profissional do professor de matemática ao interpretar e atribuir significado às produções dos alunos sustenta-se no seu conhecimento matemático especializado (Jakobsen et al., 2014; Ribeiro, 2024). É essencial o conhecimento matemático para além de *saber fazer,* ou meramente aplicar uma "regra" para que o professor interprete os raciocínios e formas de pensar dos alunos expressos em suas produções (verbais e escritas), sejam elas incorretas, imprevistas ou não usuais – matematicamente adequadas, mas diferentes das esperadas pelo professor (Di Martino et al., 2020). Para atribuir significado às produções dos alunos, torna-se necessário conhecer os tópicos matemáticos a serem ensinados, elaborar conexões entre esses tópicos e reconhecer as potencialidades matemáticas das produções dos alunos de maneira válida e significativa (Jakobsen et al., 2014) para, posteriormente, realizar as melhores decisões pedagógicas.

Esse conhecimento do professor é denominado Conhecimento Interpretativo – CI (Ribeiro et al., 2013) e, de acordo com a Enciclopédia de Educação Matemática Springer Nature, esse conhecimento:

> Refere-se ao conhecimento matemático amplo e profundo que permite aos professores apoiarem os alunos no desenvolvimento de seu próprio conhecimento matemático tendo como ponto de partida seus próprios raciocínios e produções, independentemente de serem não standard ou incorretas. O CI complementa o conhecimento de erros típicos ou estratégias dos alunos, com o conhecimento de possíveis origens de erros típicos e atípicos e o conhecimento do uso dos erros como uma efetiva fonte de aprendizagem (Di Martino et al., 2020, pp. 426).

O CI está envolvido na prática interpretativa do professor que envolve ouvir o Pensar matemático dos alunos para além do mero sensorial – escuta hermenêutica (Davis, 1997; Di Martino et al., 2017) – prestando atenção aos detalhes para interpretar profundamente e atribuir significado ao que se escuta (Mellone, et al., 2020) e, assim, (re)desenhar os percursos de aprendizagem a partir do que os alunos conhecem em matemática, para que avancem no desenvolvimento do seu conhecimento matemático (Di Martino et al., 2017) de modo a explorar as dificuldades e erros associados e realizar orientações pedagógicas mais informadas com base no significado atribuído.

Essas orientações são entendidas como *feedback*, isto é, a informação que é fornecida pelo professor a um aluno sobre os aspectos de seu desempenho ou entendimento (Hattie &

Timperley, 2007). Essa informação objetiva minimizar a distância entre o que se realiza e o que é esperado (Sadler, 1989). O *feedback* é uma forma de comunicação entre professor e aluno (Black & William, 1998), de modo que ao propor *feedback* o professor explicita informações, podendo indicar ao aluno como proceder, ajudando-o a se "deslocar", para diminuir a distância entre o conhecimento que já possui e o que ainda não foi desenvolvido, logo, o *feedback* é um elemento essencial para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos (Santos & Pinto, 2009), para que reflitam sobre suas respostas iniciais e pensem em novas estratégias matemáticas (Dalto & Silva, 2020).

O *feedback* comumente proposto aos alunos pode ser distribuído em cinco categorias (Galleguillos & Ribeiro, 2019; Santos & Pinto, 2009): (i) *feedback* sobre como resolver o problema; (ii) *feedback* confuso; (iii) contraexemplo como *feedback*; (iv) *feedback* superficial e (v) *feedback* construtivo.

(i) *feedback* sobre como resolver o problema contém instruções indicando os procedimentos a serem seguidos pelos alunos para resolverem um problema específico.

(ii) *feedback* confuso, apesar de correto, é incompreensível para o aluno, devido à complexidade de suas orientações.

(iii) contraexemplo como *feedback* apresenta um exemplo explicativo de o porquê a resolução do aluno estar incorreta.

(iv) *feedback* superficial trata-se de uma orientação insuficiente ou inconsistente, que não ajuda o aluno a entender seus erros.

(v) *feedback* construtivo contém orientações claras propostas aos alunos e que contribuem para o desenvolvimento do seu conhecimento matemático.

As categorias (i) e (ii) associam-se a uma prática interpretativa instrutiva, orientando ao aluno como proceder e não requer que o professor atribua significado às produções do aluno nem escute o seu Pensar matemático. As categorias (iii) e (iv) estão associadas a práticas avaliativas e focam em explicar o porquê de a produção do aluno contém erros, porém demandam do professor uma interpretação correta dessa produção, requerendo o conhecimento matemático que o permita abordar um problema de diferentes maneiras e requer que ele conheça diversos exemplos para poder explicar o porquê de alguns modos de proceder serem incorretos. A categoria (v) relaciona-se a uma prática para além de simplesmente instruir o aluno como proceder ou apenas avaliar a sua produção, requerendo um olhar especializado para entendê-la (mesmo que contenha erros) e atribuir significado matemático.

Assim, proporcionar um *feedback* construtivo ao aluno que contribua para que este efetivamente entenda matemática é mais amplo do que somente indicar se a produção está correta ou não, podendo conter dicas, exemplos, correções, explicações ou estratégias alternativas (Galleguillos & Ribeiro, 2019), consideradas sempre em forma de questionamentos, ou seja, precisa incitar o aluno a analisar novamente suas respostas, para que possa reformular as suas formas de pensar e desenvolver estratégias cada vez mais eficientes. Esse movimento de fornecer um *feedback* que seja contributivo para que os alunos desenvolvam o seu entendimento é difícil e de extrema complexidade (Santos & Pinto, 2009).

Para a proposição de um *feedback* construtivo é fundamental conhecer diferentes estratégias e representações para a resolução de um mesmo problema, ou desenvolver esse entendimento durante a interpretação, possibilitando atribuir significado a todas as produções dos alunos, inclusive as que diferem das do professor – que se encontram fora do que se denomina espaço solução.

O espaço solução refere-se ao conjunto das múltiplas formas de raciocínios, estratégias e representações matemáticas que cada indivíduo (professor e aluno) deve conceber ao ter de resolver um problema, mesmo que ele apresente uma única solução (Jakobsen et al., 2014). No entanto, esse espaço solução do professor, geralmente, é composto por um único elemento, isto é, o professor conhece, essencialmente, uma única maneira de proceder para resolver um problema (e.g., Jakobsen et al., 2014; Di Martino et al., 2017). Assim, faz-se necessário ampliar as fronteiras do espaço solução do professor, e incrementar a cardinalidade de elementos desse espaço, pelo desenvolvimento de seu CI (Jakobsen et al., 2014), para que a proposição de *feedback* não considere apenas as diferentes abordagens matemáticas utilizadas na busca de uma solução para o mesmo problema, mas possa, também, entender e atribuir sentido às produções dos alunos assumindo-as como ponto de partida para as discussões matemáticas subsequentes.

O nível de Conhecimento Interpretativo do professor fundamenta o desenvolvimento de determinada prática interpretativa (Mellone et al., 2017): (i) interpretação avaliativa; (ii) interpretação para a prática letiva; (iii) interpretação como pesquisa.

(i) interpretação avaliativa sustenta-se no conhecimento do professor para estabelecer uma correspondência entre a sua maneira de resolver um problema e a do aluno, levando em consideração o seu modo como parâmetro para obter a resposta correta e determinando como incorreta as produções que não condizem com a sua;

(ii) interpretação para a prática letiva tem por base o conhecimento que permite ao professor (re)desenhar as seguintes etapas, a partir das produções dos alunos (interpreta a produção e repensa seu planejamento das próximas discussões a serem propostas, de modo a delinear um novo percurso para alcançar o objetivo de aprendizagens matemáticas);

(iii) interpretação como pesquisa o professor (re)analisa sua própria formalização matemática, revendo seu modo de proceder para resolver um problema para que seja coerente com as produções dos alunos, ainda que estas pareçam estar em conflito com o que é ensinado tradicionalmente na escola. Nesse sentido, o professor pode pesquisar outras maneiras de resolver um problema, que podem advir de resultados de pesquisa ou discutindo a produção com os pares, o que possibilita que ele amplie seu espaço solução, passando a conhecer novas formas de proceder.

Se buscamos uma prática matemática que possibilite aos alunos entenderem o que fazem e por que o fazem a cada momento, e em que se assume como ponto de partida as diferentes formas de pensar matematicamente que circulam nesses momentos, a interpretação das produções dos alunos não se pode configurar como um processo que envolva somente uma escuta avaliativa (interpretação avaliativa). Isso ocorre quando o professor considera que existe somente uma resposta “correta” e apenas efetua uma correspondência entre a produção do aluno e o que ele espera. Para a melhoria da prática profissional do professor é necessário desenvolver o seu CI, que possibilitará uma prática interpretativa como pesquisa (Mellone et al., 2020).

Para entender essas práticas interpretativas conceitualizamos no grupo CIEspMat[7], as denominadas Tarefas Interpretativas – TI (Mellone et al., 2020) que se associam ao objetivo formativo de desenvolver o Conhecimento Interpretativo dos professores[8] e ao objetivo investigativo de melhor entender o conteúdo desse conhecimento e como ele se desenvolve. As TI são um recurso formativo e instrumento de coleta de informações em contextos com essa intencionalidade (entendendo pesquisa e formação de forma imbricada), por situar as discussões no contexto da prática matemática do professor associadas a interpretar e atribuir significado às produções de alunos no âmbito de um tópico matemático que se revela problemático para os alunos.

[7] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. www.ciespmat.com.br

[8] Há também TI conceitualizadas para a formação de formadores de professores.

As TI são estruturadas em três partes: (i) Parte Preliminar; (ii) Parte I; (iii) Parte II. A Parte Preliminar visa aceder, e pela discussão desenvolver, o CI e com esse fito contém questões sobre o tópico que se aborda em algumas das dimensões do conhecimento especializado do professor – matemático e/ou pedagógico. A Parte I é estruturada a partir de uma tarefa para o aluno (indicada tipicamente dentro de um retângulo), seguida de questões para o professor que contemplam algumas das categorias do conhecimento especializado dos diferentes subdomínios do MTSK. Já a Parte II tem por objetivo específico desenvolver o CI e é composta por um conjunto de produções de alunos (escritas, em vídeo, discussões de sala de aula) selecionadas por serem matematicamente potentes e por focarem as principais dificuldades dos alunos no tópico ou conterem estratégias não usuais. É solicitado aos professores que interpretem essas produções e proponham um *feedback* construtivo para cada uma das diferentes formas de pensar que ajudem os alunos a entender e ampliar o seu conhecimento.

Consideremos um exemplo de uma Tarefa Interpretativa no âmbito da rotação[9] em que na Parte Preliminar contém duas questões que buscam aceder e desenvolver o conhecimento especializado do professor. A primeira direciona-se a discutir a fenomenologia da rotação e a segunda foca-se em definições matematicamente válidas de rotação, que sejam compreensíveis para os seus alunos.

Na Parte I (Figura 2) inclui-se uma tarefa para os alunos (dentro de um retângulo) cujo objetivo de aprendizagens matemáticas é desenvolver o entendimento dos alunos em rotação, no que se refere a identificar seus elementos constituintes e procedimentos realizados para efetuar a rotação, a partir de imagens rotacionadas. Essa tarefa para o aluno serve de gênese para a discussão formativa. Inclui-se, também, três questões para o professor, sendo que, na primeira, solicita-se que o professor resolva a tarefa para os alunos (conhecimento associado a saber fazer a tarefa para os alunos); na segunda, direciona-se a atenção para a identificação das maiores dificuldades matemáticas dos alunos ao resolver a tarefa e para antecipar possíveis respostas, considerando-as para o planejamento e implementação das discussões matemáticas; na terceira foca-se em o que (e como) os alunos necessitam conhecer para responder a tarefa, de forma a possibilitar uma discussão de tópicos associados a rotação.

Na Parte II (Figura 2), incluem-se quatro produções de alunos (da tarefa para o aluno incluída na Parte I) e solicita-se que o professor interprete e atribua significado às formas de pensar e proceder em matemática que sustentam cada uma dessas produções e que forneça um

[9] Formam parte de uma das Tarefas Interpretativas no âmbito da rotação que têm sido conceitualizadas no grupo CIEspMat.

feedback construtivo para cada produção. Nesta Parte II, pretende-se aceder ao nível de Conhecimento Interpretativo dos participantes e, pelas discussões associadas promover uma mudança de nível desse conhecimento.

Aqui, focamos em uma dessas produções (Camila) incluídas na Parte II, que possibilita discutir a dificuldade e problemática em identificar o centro de rotação como o único ponto que se mantém fixo ao efetuar a rotação e que envolve conhecer o procedimento usual para identificar o centro de rotação. Essa produção foi selecionada, uma vez que contém uma das maiores dificuldades dos alunos nesse tópico (Küchemann, 1980), que está associada a não conhecer um dos fundamentos da rotação (centro), bem como a não visualizar o movimento.

Parte I

Tarefa: Rotacionado cartas[10]

(Deve explicar sempre o seu raciocínio descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

1. Observe as duas situações abaixo. Em cada situação temos uma carta de "dama de copas":

situação 1

situação 2

[...]

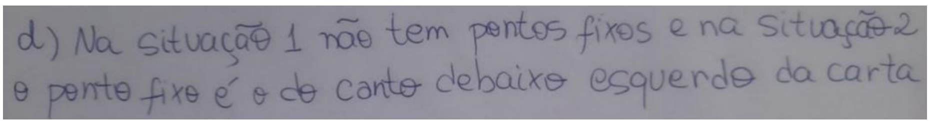
(d) Em cada situação, consegue identificar algum ponto que se mantém fixo, quando se efetua o movimento? Se sim, indique que ponto é esse e justifique.

[...]

[...]

Parte II

1. Após implementar essa tarefa com seus alunos do 7.º ano D, o professor Mário obteve algumas respostas e resolveu também levá-las para discutir na formação do CIEspMat. Veja a produção da aluna Camila referente à questão (d) da tarefa para o aluno:


d) Na situação 1 não tem pontos fixos e na situação 2 o ponto fixo é o do canto debaixo esquerdo da carta

Produção de Camila para a questão (d).

(a) Para essa produção, indique se a considera matematicamente correta (adequada) ou não, justificando o raciocínio matemático evidenciado.

---

[10] Adaptado de Paques, O. T. W. Oferenda musical de Bach. Série Matemática na Escola. Guia do professor, versão para tela, (pp. 9). https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/1143/oferendamusicaldebach-guia.pdf

[...]

Figura 2.

Parte de uma Tarefa Interpretativa no âmbito da rotação

Os professores necessitam interpretar a produção de Camila e fornecer um *feedback* construtivo, o que requer escutar o Pensar matemático da aluna para além de uma "escuta sensorial", exigindo uma escuta hermenêutica que, de fato, considere como ponto de partida o que e como a aluna revela conhecer e possibilitar propor discussões claras e objetivas para auxiliá-la a desenvolver o seu entendimento matemático.

A partir dessa produção (focando na situação 1 da tarefa), apresentam-se exemplos de práticas interpretativas (Mellone et al., 2017) que podem ser efetuadas e que se associam a diferentes níveis de conhecimento interpretativo, assumindo como ponto de partida que a produção é matematicamente incorreta.

Uma interpretação avaliativa corresponde a interpretar a produção como incorreta, mostrando ao aluno como identificar o centro de rotação, no sentido de "dar a regra" (*feedback* sobre como resolver o problema do tipo instrutivo); uma interpretação para a prática letiva envolve interpretar a produção como incorreta, pois o aluno não conseguiu resolver o problema (identificar o centro de rotação), enunciando a ele que o centro de rotação é um dos pontos da figura (*feedback* superficial do tipo avaliativo), nesse tipo de prática o professor pode pensar em outras tarefas para ajudar os alunos a entenderem os elementos constituintes da rotação; uma interpretação como pesquisa, também, consideraria a produção do aluno como incorreta, porém, nessa prática, o professor busca entender por que o aluno não identificou o centro de rotação e que conhecimento matemático precisa ser desenvolvido para que o aluno resolva o problema (conhecer os elementos constituintes da rotação e os procedimentos associados). Com o intuito de que o aluno reveja sua produção e identifique o centro de rotação, o professor o orienta a traçar algumas mediatrizes, questiona sobre o que acontece com todas essas mediatrizes e se elas se intersectam, de modo que o aluno perceba a intersecção em um único ponto comum que é o centro de rotação (*feedback* do tipo construtivo).

Relações entre o conhecimento matemático especializado e o conhecimento interpretativo

O *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) e o Conhecimento Interpretativo (CI) concebem o conhecimento do professor como especializado[11], pelo que se torna fundamental entender quais as relações e conexões entre essas conceitualizações, de modo a contribuir para refinar e aprofundar o entendimento do conteúdo do conhecimento do professor e de suas especificidades, e de forma a complementar o que já se conhece (e.g., Piccoli e Souza, 2020; Almeida e Lopes, 2023; Jakobsen et al., 2022). Inclusive o conhecimento em tópicos específicos como subtração (Ribeiro, 2024) e medidas (Di Bernardo et al., 2018), relativamente ao conteúdo desse conhecimento, e a equacionar que pesquisas se tornam necessárias para esse aprofundamento, bem como em que focar a atenção nas formações para desenvolver esse conhecimento e melhorar a qualidade da prática matemática e das aprendizagens e resultados dos alunos.

Em termos de semelhanças entre essas conceitualizações, é importante referir que ambas consideram a prática do professor como sendo especializada e que essa especialização se considera no âmbito matemático e pedagógico. Assumem, também, uma relação imbricada entre o conteúdo do conhecimento do professor e o tipo e foco da sua prática com os alunos.

Uma diferença entre essas conceitualizações se refere ao MTSK focar o conhecimento do professor nas dimensões matemática e pedagógica, associadas a diferentes práticas relacionadas ao ensino, como seja a prática de planejamento, a prática de sala de aula ou a prática avaliativa, enquanto que o CI tem como foco o conhecimento matemático especializado envolvido e requerido que sustenta uma prática interpretativa e que se relaciona com a priorização explícita de assumir como ponto de partida para as discussões e desenvolvimento de conhecimento e competências matemáticas dos alunos o que eles já conhecem e como conhecem cada tópico. (Este mesmo princípio ocorre em contextos formativos associado à necessidade de que os professores vivenciem os mesmos tipos de experiências que se espera propiciar aos seus alunos – apenas em um nível de formação profissional distinto.)

No CI consideram-se diferentes práticas interpretativas e cada uma delas encontra-se associada a níveis de interpretação. Esses níveis de interpretação perspectivam-se relacionados com níveis de conhecimento matemático especializado (em cada categoria), o que possibilita entender o quanto "escutamos o pensar matemático dos alunos" (Mellone et al. 2023) e atribuímos significado ao que escutamos e incorporamos na nossa prática matemática (*feedback* que fornecemos). Entretanto, mesmo que o professor possua o conhecimento matemático amplo

[11] Optou-se por relacionar o CI ao MTSK, pois essa é a única conceitualização que concebe todo o conhecimento do professor como especializado.

e profundo (entendido como associado a um nível de conhecimento mais elevado) em cada uma das distintas categorias do MTSK, isso não garante, necessariamente, que irá efetuar uma interpretação como pesquisa (nível mais elevado). Mais do que deter esse conhecimento especializado é fundamental “algo a mais” que permita identificar e atribuir significado aos erros dos alunos ou às estratégias não usuais ou convencionais, tornando-se necessário sustentar essa prática interpretativa em uma perspectiva de ensino que desenvolva as competências matemáticas dos alunos.

Assim, quando a produção do aluno apresenta uma maneira de proceder próxima da maneira do professor, a interpretação a ser realizada demanda somente efetuar uma correspondência direta entre essa forma de proceder dos dois – o professor a considerará como correta. Já diante de produções não usuais (distintas das formas de proceder do professor) torna-se necessário deter um conhecimento matemático especializado, de um nível mais elevado, que possibilite efetuar conexões matemáticas e pedagógicas para uma prática interpretativa (relação direta) que se sustente em entender os “comos” e os porquês desses raciocínios e formas de proceder em matemática, possibilitando fornecer um *feedback* que contribua para que os alunos ampliem o seu entendimento e competências.

Além de entender os “comos” e os porquês matemáticos que sustentam os raciocínios não usuais, uma prática interpretativa dos níveis superiores envolve a validação matematicamente adequada, ou não, desses raciocínios e uma tomada de decisão consciente com uma perspectiva de futuro entendimento. Há uma relação de similaridade entre o conhecimento sobre as formas de produzir matemática que é evocado e permite ao professor interpretar a produção do aluno, o que se associa ao conhecimento relacionado à exploração e geração de conhecimento matemático.

Para além de identificar, a prática profissional do professor envolve tomar decisões pedagógicas e essas se fundamentam em seu conhecimento matemático (relacionam-se com suas crenças de e sobre a matemática, o seu ensino e aprendizagem e experiências anteriores) para propor um determinado *feedback* e implementar uma específica prática matemática. Essas decisões pedagógicas necessitam garantir a utilização de uma linguagem matematicamente adequada, independentemente da etapa educativa em que o professor leciona, incluindo argumentos e justificativas matemáticas generalizáveis e a implementação dessas práticas imbrica-se com o conhecimento que detemos.

Com o intuito de elucidar e ilustrar a operacionalização dessas relações entre os níveis de conhecimento, trazemos um exemplo no âmbito da rotação (Tabela 1).

Tabela 1.

Relações entre os níveis de conhecimento no âmbito da rotação

Subdomínios do MK e categorias	Exemplos de conteúdo de conhecimento	Níveis de MK	Descrição da produção do aluno	Níveis de CI
KoT – Definições, propriedades e fundamentos	Conhecer que uma possível definição de rotação é: Fixemos um ponto O no plano Π agora orientado (como a tradição recomenda, o sentido positivo é o anti-horário). Dado um ângulo α, a *rotação de centro* O e *amplitude* α é a transformação que a cada ponto A do plano Π associa o ponto $A' = R_{\alpha}(A)$ de forma que se tenha AO’ = AO, $\widehat{AOA'} = \alpha$ e o sentido de A para A’ (em torno de O), positivo (Wagner, 1993, pp. 75). Conhecer a propriedade da rotação em que o centro de rotação é o único ponto fixo na rotação (exceto na rotação identidade). Conhecer que figura, centro de rotação, ângulo de rotação (amplitude e sentido) e imagem são os fundamentos da rotação.	N1: Conhecer que existe uma definição para a rotação.	Produção em que o aluno define a rotação considerando a figura, o ângulo de rotação e a imagem, mas não especifica o centro de rotação, inclusive como um ponto fixo (conhecer uma definição de rotação)[12].	Interpretação avaliativa: Interpretar a produção como incorreta, não justificando o que falta na produção para ser correta, pois o professor não conhece a definição de rotação.
		N2: Conhecer que existe uma definição para a rotação que deve explicitar figura, imagem e ângulo de rotação, porém não especifica o sentido e a amplitude, e o centro de rotação (ponto fixo).		Interpretação para a prática letiva: Interpretar a produção como incorreta, explicitando que falta algum elemento em sua definição, sem dizer qual. Além disso, o professor considera que em futuras tarefas, precisará discutir quais são fundamentos da rotação.
		N3: Conhecer que existem diferentes formas de definir a rotação e que devem explicitar todos os seus fundamentos.		Interpretação como pesquisa: Interpretar a produção como parcialmente correta, uma vez que o aluno revelou conhecer alguns dos fundamentos da rotação. O professor orienta-o a verificar se, em sua produção, não há ambiguidade e se, a partir dela, pode-se identificar todas as rotações no plano, para que o aluno perceba que falta especificar o centro de rotação. A partir disso, o professor ainda questiona o papel do centro de rotação e onde ele pode estar localizado, com o intuito de que o aluno conclua que ele é o único ponto fixo da rotação.
KSM – Conexões transversais	Conhecer a conexão transversal de rotação e simetria rotacional, pois a imagem obtida	N1: Conhecer que figuras obtidas por isometrias	Produção em que o aluno não identifica a simetria	Interpretação avaliativa: Interpretar a produção como incorreta, explicitando que em sua produção há simetria (indica a resposta).

[12] Uma das dificuldades dos alunos é a de não considerar os fundamentos da rotação, o que se relaciona com a maioria dos erros associados (e.g., Turgut et al., 2014).

	após a transformação em conjunto com a figura, por serem congruentes, possuem simetria rotacional, sendo a simetria uma propriedade de todas as transformações isométricas.	possuem simetria.	rotacional após efetuar a rotação de uma figura e explicita que não há simetria[13].	
		N2: Conhecer que figuras obtidas por isometrias do tipo rotação possuem simetria rotacional.		Interpretação para a prática letiva: Interpretar a produção como incorreta, explicitando que verifique novamente se não há simetria, pois figura e imagem são congruentes. Passa a considerar que, em futuras tarefas, necessita discutir a simetria como uma propriedade das transformações isométricas.
		N3: Conhecer que todas as figuras transformadas por rotações, necessariamente, possuem como propriedade a simetria rotacional devido figura e imagem serem congruentes.		Interpretação como pesquisa: Interpretar a produção como incorreta, orientando-o a olhar para o todo (figura e imagem) e considerar se há diferença entre ambas. Também, orienta-o a rotacionar novamente a imagem conforme o ângulo determinado, mas invertendo o sentido em uma perspectiva de reversibilidade, para que verifique que todos os pontos da figura e seus respectivos pontos da imagem se sobrepõem – coincidem – para que entenda que há congruência, o que garante a simetria rotacional.
KPM – O papel da linguagem matemática	Conhecer que em termos da linguagem matemática formal é inadequado utilizar os termos “girar”, “rodar” ou “deslocar” para se referir a essa transformação, sendo necessário especificar que o movimento é uma rotação efetuada a partir de um ângulo orientado (amplitude e sentido determinados).	N1: Conhecer que a rotação é um tipo de deslocamento.	Produção em que o aluno expressa a rotação como um deslocamento, sem especificar que esse movimento é uma rotação efetuada a partir de um ângulo orientado[14].	Interpretação avaliativa: Interpretar a produção como incorreta, enunciando que o termo correto é rotação.
		N2: Conhecer que a rotação é um tipo de deslocamento, mas que é preciso especificar em relação a que – ângulo – esse movimento é realizado.		Interpretação para a prática letiva: Interpretar a produção como incorreta, orientando-o a especificar o que é considerado nesse deslocamento, dizendo que se denomina rotação. O professor passa a considerar que, em futuras tarefas, necessita discutir e utilizar o termo correto para se referir a essa transformação isométrica.

[13] Essa dificuldade ocorre comumente, uma vez que os alunos não diferenciam a transformação isométrica da simetria (Bulf, 2010) – propriedade da transformação.
[14] Essa inadequação de se referir a rotação como um deslocamento – termo amplo e impreciso – associa-se a não efetuar uma diferenciação dessa transformação isométrica de outras (Thaqi et al., 2011), como a translação (deslocamento unidirecional em relação a um vetor de translação).

		N3: Conhecer que a rotação é uma transformação isométrica cujo movimento efetuado é um deslocamento em relação a um ângulo orientado.		Interpretação como pesquisa: Interpretar a produção como parcialmente correta, indagando-o se o movimento que se refere é qualquer tipo de deslocamento, o que é preciso considerar nesse deslocamento e o que de fato é considerado para efetuar o movimento, para que entenda que se trata de um movimento específico associado a um ângulo orientado. Considerando a última noção a ser conhecida pelo aluno, o professor explicita como se denomina essa transformação.

Como forma de ilustrar as relações teóricas que temos discutido, buscamos sintetizar toda essa informação de modo que seja mais "entendível" (Figura 3).

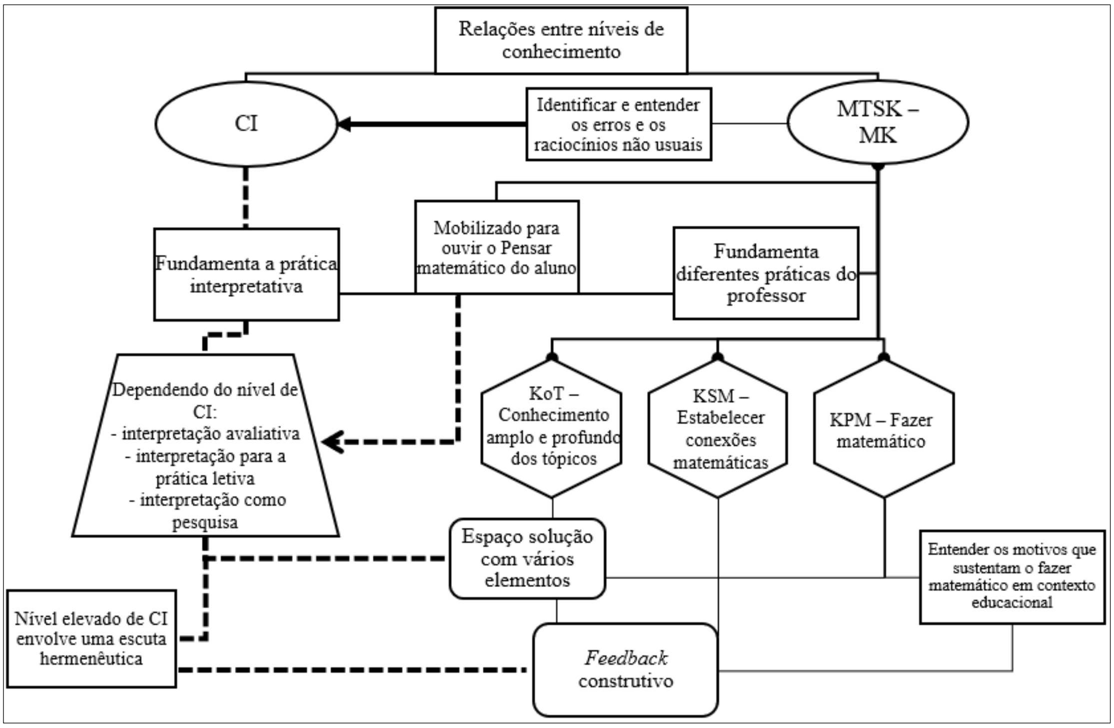


Figura 3.

Relações entre o Mathematics Teacher's Specialised Knowledge e o Conhecimento Interpretativo

Nesta representação, cada um dos tipos de figuras representa uma componente do MK e do CI. Para as conceitualizações teóricas envolvidas utilizamos a representação oval; para os subdomínios do MK recorremos à representação hexagonal (associado à configuração da representação do MTSK); as noções relacionadas ao CI – espaço solução e *feedback* construtivo – são representadas por uma forma retangular arredondada; os níveis de CI representam-se por um trapézio. Todos os demais elementos que se associam às relações e complementações entre as conceitualizações foram representados em retângulos.

Para representar as relações entre esses elementos, utilizam-se diferentes tipos de linhas: linhas tracejadas conectam elementos que remetem ao CI e os elementos associados – noções espaço solução e *feedback* construtivo. Para as representações que conectam os elementos do MK, seus subdomínios e o que ele permite utilizam-se linhas contínuas. As demais relações estão representadas por linhas finas e se associam às relações diretas entre as conceitualizações. Além disso, utilizou-se uma linha contínua com seta para conectar o elemento "identificar e entender os erros e os raciocínios não usuais" aos elementos do CI. A principal relação entre o CI e o MK está representada pela linha tracejada com seta.

Comentários finais

O MK e o CI entrelaçados são os recursos intencionais que potencializam a prática profissional do professor para atribuir significado às produções dos alunos. Assim, estabelecer possíveis relações teóricas entre essas conceitualizações é uma das formas de focar a atenção da pesquisa na prática interpretativa do professor, pois essas conceitualizações têm como premissa que o conhecimento do professor de matemática é especializado – por isso, assume-se o MTSK – e requerido para essa prática especializada, em níveis superiores de interpretação.

Essa busca por uma compreensão mais profunda dos elementos que constituem o conhecimento profissional do professor, considerando-o especializado, é um ponto de partida para conceitualizar e realizar formações (desenvolvendo a pesquisa de forma imbricada) que objetivam desenvolver o conhecimento especializado e interpretativo do professor, pois esse conhecimento não se desenvolve ao longo de sua experiência em sala de aula, mas necessita de contextos formativos com essa intencionalidade (Ribeiro et al., 2013). Conhecer essas relações e como impactam a prática matemática, se configura como fundamental para que as aprendizagens dos alunos possam estar dentro do esperado. Nesse sentido, entender cada uma dessas conceitualizações e as suas relações otimiza centrar as discussões e focos formativos que são mais essenciais para possibilitar práticas que desenvolvam conhecimento e competências, e contribuam para erradicar as dificuldades dos alunos, também por estarem alinhadas às dos professores – como é o caso das reveladas na rotação (e.g., Turgut et al., 2014). O desenvolvimento desse conhecimento em contextos formativos, sustentado no que a pesquisa especializada já identificou e servindo de contexto para refinar essa pesquisa, possibilita avaliar resultados anteriores e oportuniza que os professores façam, na sua prática profissional, o que ainda não foi feito, elevando o seu nível de conhecimento, ampliando o seu espaço solução e permite fornecer um *feedback* construtivo, impactando nas aprendizagens matemáticas de seus alunos e, em consequência, de seus resultados.

De forma a ampliar esse entendimento, validar essas relações e impacto na prática do professor e nas aprendizagens dos alunos, torna-se necessário perspectivar uma agenda de pesquisa a médio e longo prazo que busque melhor compreender essas relações entre as conceitualizações em diferentes tópicos matemáticos, ampliando o leque de exemplos de conteúdo de conhecimento matemático especializado e as relações entre os níveis de conhecimento do MK e do CI. Assim, algumas questões em aberto que podem contribuir para guiar essas pesquisas futuras são:

(i) Que relações se verificam, e como se transformam, entre o conhecimento especializado (MTSK) e o conhecimento interpretativo do professor de matemática no âmbito de cada tema específico (entendido como constituído por um conjunto de tópicos relacionados), como as transformações geométricas isométricas?

(ii) Quais os elementos críticos no conhecimento do professor que otimizam ou limitam, e como, uma prática interpretativa em cada um dos níveis de interpretação e de conhecimento?

(iii) Que conhecimento especializado e interpretativo revelam (e como desenvolver) formadores de professores para desenvolver as especificidades do conhecimento do professor para implementar práticas interpretativas associadas ao mais elevado nível de interpretação?

Agradecimentos

O presente trabalho é parte dos projetos de pesquisa financiados pelo CNPq (172354/2023-4 e 317937/2023-5) e do projeto "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

Referências

Almeida, M. V. R., & Lopes, R. (2023). Promovendo o conhecimento especializado de futuros professores de Matemática sobre o algoritmo da divisão euclidiana. *Educação Matemática Pesquisa, 25*(3), 373-402. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i3p373-402

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5*(1), 7–74. https://doi.org/10.1080/0969595980050102

Brasil. (2024). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). *Saeb 2023: detalhamento da população e resultados: nota técnica Nº 18/2023/CGMEB/DAEB*. Brasília, DF: Inep. https://www.gov.br/inep/pt-br/centrais-de-conteudo/acervo-linha-editorial/publicacoes-institucionais/avaliacoes-e-exames-da-educacao-basica/saeb-2023-detalhamento-da-populacao-e-resultados

Bulf, C. (2010). The effects of the concept of symmetry on learning geometry at French secondary school. In *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 726-735). France, Lyon. https://hal.science/hal-02182374

Camacho, A. M. R., & Guerrero, L. S. (2019). Conocimiento especializado del profesor de primaria en formación: un estudio de caso de la enseñanza de la noción de razón. *Quadrante*, *28*(2), 100-124. https://doi.org/10.48489/quadrante.23029

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzáles, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Dalto, J. O., & Silva, K. A. P. (2020). Portfólio de atividades de modelagem matemática como instrumento de avaliação formativa Portfolio of mathematical modeling activities as an instrument of formative assessment. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 22*(1), 371-393. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i1p371-393

Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for research in mathematics education, 28*(3), 355-376. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.28.3.0355

Di Bernardo, R., Policastro, M. S., Almeida, A. R., Ribeiro, M., Melo, J. M., & Aiub, M. (2018). Conhecimento matemático especializado de professores da educação infantil e anos iniciais: conexões em medidas. *Cadernos Cenpec| Nova série, 8*(1). http://dx.doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v8i1.391

Di Martino P., Mellone M., Minichini C., & Ribeiro M. (2017). Prospective teachers' interpretative knowledge: giving sense to subtraction algorithms. *In Proceedings ERME topic conference mathematics teaching, resources and teacher professional development*. ERME, Hall, 66-75. https://hdl.handle.net/11568/876747

Di Martino, P., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2020). Interpretative knowledge. In: Stephen Lerman. (Org.). *Encyclopedia of Mathematics Education. 1ed.: Springer International Publishing*, 424-428. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100019-1

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(3), 349-382. https://revue-rdm.com/1996/quel-cognitif-retenir-en/

Fiorentini, D., & Crecci, V. M. (2017). Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática. *ZETETIKÉ. Revista de Educação Matemática, 25*(1), 164-185. http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i1.8647773

Galleguillos, J., & Ribeiro, M. M. (2019). Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: focus on the provided feedback. In *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Netherlands. https://hal.science/hal-02422519/

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. In Pinto, H., Jacinto, H., Henriques, A., Silvestre, A. & Nunes, C. (Orgs.), *Atas do XXIII seminário de investigação em educação matemática* (pp. 233-244). Lisboa: Associação de Professores de Matemática. https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/20835/1/Gomes_%20SIEM%20Actas_2012.pdf

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81–112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 55-72. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00004-X

Jakobsen, A., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2022). A methodological approach to the development of prospective teachers' interpretative knowledge. In *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bozen-Bolzano, Italy. https://hdl.handle.net/11250/3062524

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*(3-4), 135-150. https://hdl.handle.net/11588/586956

Küchemann, D. (1980). Children's Difficulties with Single Reflections and Rotations. *Mathematics in School*, *9*(2), 12-13.

Mellone, M., Jakobsen, A., Ribeiro, M., & Parlati, A. (2023). Ethical dimension in the use of interpretative tasks in mathematics teacher education: fraction division. In Proceedings Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME. https://hal.science/hal-04407634/

Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P., & Pacelli, T. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education*, *22*(2), 154-167. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710557

Mellone, M., Tortora, R., Jakobsen, A., & Ribeiro, M. (2017). Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research. In *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Dublin, Ireland. https://hal.science/hal-01949034/

Montes, M. A., & Climent, N., (2016). Conocimiento de la estructura matemática (KSM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*, 21-29. SGSE: Huelva. http://hdl.handle.net/10272/12509

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects?. *Educational evaluation and policy analysis*, *26*(3), 237-257. https://doi.org/10.3102/01623737026003237

Piccoli, J. P., & Souza, E. (2020). Manual didático brasileiro do segundo ano do ensino fundamental: o conhecimento especializado do professor que ensina matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, *23*(1), 231-262. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p231-262

Rebolledo, R. D., Zakaryan, D., & Carvajal, C. A. (2022). El conocimiento de la práctica matemática. In *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 57-69). Dykinson.

Ribeiro, M. (2024). Conhecimento interpretativo de futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais ao atribuírem significado a produções de alunos no contexto de abordagens alternativas ao algoritmo típico da subtração. *Debates em Educação*, *16*(38), e16020-e16020. https://doi.org/10.28998/2175-6600.2024v16n38pe16020

Ribeiro, M. (2018). Das generalidades às especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática: metodologias na conceitualização (entender e desenvolver) do conhecimento interpretativo. *Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática. Biblioteca do Educador. Brasil: SBEM*, *13,* 167-185.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. In *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel: PME.

Ribeiro, M.; Silva, C. (2024). Especificidades do Conhecimento Interpretativo do professor e das Tarefas para a Formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*. (aceite).

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching: Reflecting on Practice with the Knowledge Quartet*. SAGE.

Sadler, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science, 18*, 119-144. https://doi.org/10.1007/BF00117714

Santos, L., & Pinto, J. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of PME 33, the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp.49–56). Thessaloniki: PME.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional*. Vozes.

Thaqi, X., Giménez, J., & Rosich, N. (2011). Geometrical transformations as viewed by prospective teachers. In *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 578-587). Rzeszow. Poland. http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/CERME7.pdf

Turgut, M., Yenilmez, K., & Anapa, P. (2014). Symmetry and rotation skills of prospective elementary mathematics teachers. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*, 383-402. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a19

Wagner, E. (1993). *Construções Geométricas.* GRAFTEX Comunicação Visual.

Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2011). Elementary students' transformational geometry abilities and cognitive style. In *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 568-577). Rzeszów, Poland. http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/CERME7.pdf