EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i2p329-358

Micropercursos no estudo de Simetria: condições e restrições em uma formação continuada com professores de Matemática

Micropaths in the study of Symmetry: conditions and restrictions in continuing education with Mathematics teachers

Microvías en el estudio de la Simetría: condiciones y restricciones en la formación continua de profesores de Matemáticas

Les micropathes dans l'étude de la symétrie : conditions et restrictions en formation continue auprès des professeurs de Mathématiques

Cintia Melo dos Santos[1]
Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD)
Doutorado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0003-2121-3120

José Luiz Magalhães de Freitas[2]
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS)
PhD em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0001-5536-837X

Tatiani Garcia Neves[3]
Secretaria Municipal de Educação de Dourados/MS (SEMED)
Doutorado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0002-1518-2156

Resumo

O presente artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado que investigou possibilidades do desenvolvimento de micro Percursos de Estudo e Pesquisas (PEP) por meio de um estudo praxeológico desenvolvido em uma formação continuada de professores de matemática. A formação foi realizada com um grupo de doze professores atuantes na educação básica, na qual trabalhamos com sistemas didáticos intrínsecos aos estudos dos conteúdos geométricos amparados pela metodologia do PEP. Todas as sessões foram gravadas em áudio e vídeo e, posteriormente, transcritas para a análise da produção dos dados. Para o estudo e desenvolvimento do PEP, buscamos compreensões da Teoria Antropológica do Didático (TAD), com ênfase no paradigma didático, questionamento do mundo e dos níveis de codeterminação, identificando práticas pedagógicas dos professores participantes da pesquisa.

[1] cintiasantos@ufgd.edu.br
[2] joseluizufms2@gmail.com
[3] tatianigarcianeves@gmail.com

Ao analisar as condições e restrições que permeiam sistemas didáticos, pudemos perceber que os professores são dependentes dos livros didáticos e que esse recurso tem direcionado suas práticas pedagógicas. Vimos também o quanto as condições impostas nas suas formações acadêmicas acabam sendo refletidas no modo como conduzem suas práticas em sala de aula, reproduzindo um ensino direcionado pelo paradigma de visita às obras no que diz respeito ao ensino de Geometria. Além disso, observamos a necessidade dos professores de estudar e buscar mais informações em torno dos conceitos abordados e o quanto suas praxeologias estão no bloco fazer, com poucas justificativas teóricas e tecnológicas. Nesse cenário, vimos que o PEP provocou nos professores uma desestabilização praxeológica dos seus conhecimentos geométricos.

Palavras-chave: Micropercursos, Formação Continuada, Práticas pedagógicas, Conteúdos geométricos.

Abstract

This article is an excerpt from a doctoral research that investigated possibilities for developing micro Study and Research Paths (PEP) through a praxeological study developed in continuing education for mathematics teachers. The training was carried out with a group of twelve teachers working in basic education, in which we worked with didactic systems intrinsic to the studies of geometric contents supported by the SRP methodology. All sessions were recorded in audio and video and later transcribed for data production analysis. For the study and development of the SRP, we sought to understand the Anthropological Theory of Didactics (ATD), with emphasis on the didactic paradigm questioning the world and the levels of codetermination, identifying conditions and restrictions that permeate the pedagogical practices of the teachers participating in the research. By analyzing the didactic systems, we could see that teachers are dependent on textbooks and that this resource has directed their pedagogical practices. We also saw how much the conditions imposed in their academic training end up being reflected in the way they conduct their practices in the classroom, reproducing a teaching directed by the paradigm of the visit to the works with regard to the teaching of Geometry. In addition, we observed the teachers' need to study and seek out more information about the concepts covered and how much their praxeologies are in the doing block, with few theoretical and technological justifications. In this scenario, we saw that the SRP caused a praxeological destabilization of their geometric knowledge in teachers.

Keywords: Micropathways, Continuing Education, Pedagogical Practices, Geometric Contents.

Resumen

Este artículo es un extracto de una investigación doctoral que investigó posibilidades para el desarrollo de micro Recorridos de Estudio e Investigación (REI) a través de un estudio praxeológico desarrollado en la educación continua de profesores de matemáticas. La capacitación se realizó con un grupo de doce docentes que laboran en educación básica, en los cuales se trabajó con sistemas de enseñanza intrínsecos al estudio de contenidos geométricos apoyados en la metodología REI. Todas las sesiones fueron grabadas en audio y video y posteriormente transcritas para el análisis de la producción de datos. Para el estudio y desarrollo del REI, buscamos comprensiones de la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD), con énfasis en el paradigma didáctico, cuestionamiento el mundo y los niveles de codeterminación, identificando condiciones y restricciones que permean las prácticas pedagógicas de docentes participantes en la investigación. Al analizar los sistemas de enseñanza, pudimos ver que los docentes dependen de los libros didácticos y que este recurso ha guiado sus prácticas pedagógicas. También vimos cómo las condiciones impuestas en su formación académica terminan reflejándose en la forma en que realizan sus prácticas en el aula, reproduciendo una enseñanza guiada por el paradigma de la visita a obras en lo que respecta a la enseñanza de la Geometría. Además, observamos la necesidad de que los docentes estudien y busquen más información en torno a los conceptos tratados y en qué medida sus praxeologías están en el “los profesores están en el modo hacer que en el modo saber hacer ”, o sea, con pocas justificaciones teóricas y tecnológicas. En este escenario, vimos que el REI provocó en los docentes una desestabilización praxeológica de sus conocimientos geométricos.

Palabras clave: Micro recorridos, Educación continua, Prácticas pedagógicas, Contenidos geométricos.

Résumé

Cet article est un extrait d'une recherche doctorale qui a étudié les possibilités de développement de micro Parcours d'Etudes et de Recherche (PER) à travers une étude praxéologique développée en formation continue pour les professeurs de mathématiques. La formation a été réalisée avec un groupe de douze enseignants travaillant dans l’éducation de base, dans lequel nous avons travaillé avec des systèmes didactiques intrinsèques aux études de contenus géométriques soutenus par la méthodologie PER. Toutes les sessions ont été enregistrées en audio et en vidéo, puis transcrites pour l’analyse de la production de données. Pour l’étude et le développement du PER, nous avons cherché à comprendre la théorie anthropologique de la didactique (TAD), en mettant l'accent sur le paradigme didactique, en interrogeant le monde et les niveaux de codétermination, en identifiant les conditions et les restrictions qui imprègnent les pratiques pédagogiques des enseignants participant à la recherche. En analysant les systèmes didactiques, nous avons pu vérifier que les enseignants sont dépendants des manuels scolaires et que cette ressource a orienté leurs pratiques pédagogiques. Nous avons également vu à quel point les conditions imposées dans leur formation académique finissent par se refléter dans la manière dont ils mènent leurs pratiques en classe, reproduisant un enseignement dirigé par le paradigme de la visite des œuvres en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie. De plus, nous avons observé la nécessité pour les enseignants d'étudier et de chercher plus d'informations sur les concepts abordés et sur la place de leurs praxéologies dans le bloc, avec peu de justifications théoriques.

Mots-clés: Micro-parcours, Formation continue, Pratiques pédagogiques, Contenus géométriques.

Micropercursos no estudo de Simetria: condições e restrições em uma formação continuada com professores de Matemática

Como pesquisadores na área de Educação Matemática e integrantes do Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat), atentamos para a importância das pesquisas e dos estudos em torno da formação continuada de professores (Santos; Freitas, 2013). Partindo desses contextos formativos e mediante as mudanças educacionais, sociais e políticas nos tempos atuais, compreendemos, em consonância com Pais (2002), que a Didática da Matemática (DM) vem ao encontro das aspirações de formação dos professores de matemática, uma vez que esta é, nas palavras do autor:

> Uma das tendências da grande área da educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (Pais, 2002, p. 11).

No campo da DM, o aporte teórico da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (Chevallard, 1992, 1994, 1998, 2001, 2002, 2003, 2007, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e, 2009f, 2009g, 2012) tem possibilitado analisar, investigar e refletir sobre o ensino de matemática por meio do estudo de situações presentes na sala de aula e em seu entorno – escola, pedagogia, sociedade - bem como a análise de práticas pedagógicas. Diante do exposto, as reflexões remetem ao questionamento: como desenvolver uma formação continuada de professores de matemática a partir do desenvolvimento de micropercursos de modo a provocar mudanças na prática pedagógica?

Com base em relatos individuais de alguns professores sobre dificuldades dos alunos em aprender, assim como trabalharem com conteúdo de geometria, bem como em pesquisas sobre praxeologias geométricas em livros didáticos (Andrade, 2012; Correia e Lobo, 2011), fizemos essa escolha em afetar, de algum modo, a prática dos professores, sem que trate-se de uma formação que "indique receitas para a sala de aula" ou algo alheio à situação real da vivência escolar, como uma formação mecânica e somente teórica. Ao contrário, é preciso que, a partir do diálogo e inquietações dos próprios professores participantes, a formação desenvolva-se, possibilitando estudos e reflexões sobre suas práticas por meio da troca de experiências. Assim, desenvolver uma formação continuada com professores de matemática que se interessam por discussões sobre tópicos de Geometria tornou-se objeto de estudo da investigação a ser relatada.

Conforme a TAD, toda atividade humana pode ser descrita por meio de praxeologia, significando a indissociabilidade entre o saber-fazer e o saber. Seguindo esse princípio, em uma sala de aula, por meio dessa teoria, podemos investigar a matemática ensinada – Organização Matemática (OM) – e como essa matemática é ensinada – Organização Didática (OD).

Para tanto, baseamo-nos nos estudos desenvolvidos por Chevallard (2012), nos quais o autor instiga a uma quebra de paradigmas. Ele destaca dois paradigmas denominados visitas às obras e questionamento do mundo. Segundo Chevallard (2012), visitas às obras é o paradigma em que você observa a situação com pouco protagonismo e, no novo paradigma questionamento do mundo, você observa, analisa e questiona a situação, sendo uma pessoa ativa no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Amparado neste último paradigma, Chevallard (2009a) tem desenvolvido a metodologia denominada Percurso de Estudos e Pesquisas (PEP), com a intenção de desencadear práticas pedagógicas que levem os alunos e professores a questionarem, a conjecturar, à autonomia, a parecerem um pesquisador, a serem, de fato, construtores de seus próprios conhecimentos. Logo, temos como hipótese que podemos promover mudanças nas praxeologias do professor de matemática da Educação Básica relacionadas aos conteúdos geométricos na execução de PEP.

Na proposta do PEP, ao formar um grupo de estudos em torno de um determinado tipo de problema, constitui-se uma relação didática entre os envolvidos no estudo. Essa relação considerada "aberta" consiste no desenvolvimento de uma proposta formativa, na qual os estudantes não terão de antemão conhecimento dos problemas a serem respondidos ao longo do estudo e o orientador desse estudo não terá como prever todas as discussões ou dificuldades que poderão surgir no processo de estudo, como afirmam os autores: "O ensino, como meio do processo didático, não deve pretender controlar de maneira absoluta o desenvolvimento desse processo. A relação didática é uma relação 'aberta'" (Chevallard; Bosch; Gascón, 2001, p. 201).

Considerada nesses fundamentos, esta pesquisa foi desenvolvida por meio de vários micro-PEP, em que o orientador do estudo, papel desenvolvido pela pesquisadora, em conjunto com professores de matemática que estavam na posição de estudantes, realizaram estudos de questões que continham conteúdos de Geometria, orientados pelo paradigma questionamento do mundo.

No desenvolvimento dos micro-PEP, realizamos estudos de diferentes praxeologias com os professores de matemática relativas a conteúdos geométricos, permeadas pelas trocas de experiências, e buscamos compreender possibilidades em produzir PEP na formação de professores, pois, para Chevallard (2009a), trabalhar coletivamente sobre praxeologias permite aos professores discutirem como acontece o processo de ensino e aprendizagem de um determinado conceito e é a ferramenta essencial para combater o ensino rotineiro em sala de aula. Para o presente artigo, realizamos um recorte da pesquisa de doutorado, no qual traremos uma análise dos micropercursos desenvolvidos em torno do conteúdo de Simetria.

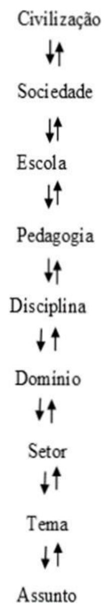
Aporte teórico e metodológico

Na pesquisa realizada por Santos e Freitas (2013), identificamos, ao analisar a prática pedagógica *in loco*, que existe uma diversidade de fatores que não estão somente presentes na sala de aula ou na escola, mas em um meio mais amplo, como na Sociedade, e que interferem diretamente no contexto em sala de aula e, principalmente, na prática pedagógica. Nesse viés, a TAD, por meio dos níveis de codeterminação, propicia entender esses fatores (sejam didáticos ou não) que perpassam o âmbito escolar.

As concepções de praxeologia na TAD permitem afirmar que "a didática se dedica a estudar as condições e restrições sob as quais as praxeologias começam a viver, migrar, mudar, operar, perecer, desaparecer, renascer etc. dentro dos grupos humanos", isto é, nas instituições sociais" (Chevallard, 2007, p. 14). Para estabelecer uma praxeologia relacionada ao saber matemático, esse saber deve estar associado a uma escala hierárquica, na qual cada nível corresponde a uma realidade e determina os hábitats[4] e nichos[5] da Organização Matemática (OM) e da Organização Didática (OD), conforme aponta Chevallard (2009a, p. 12):

Figura 1.

Níveis de Codeterminação, Chevallard (2009a, p. 12)



[4] Para Chevallard (1994): O hábitat de um objeto matemático refere-se à instituição na qual se encontra o saber, o lugar seu endereço.

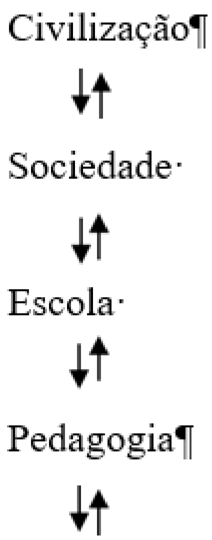
[5] O nicho corresponde à relação do saber com o objeto de estudo, determinando a função do saber, ou seja, seu nicho. (CHEVALLARD, 1994)

Nesse contexto, o saber matemático está relacionado à escala hierárquica (figura 1), no qual se refere à didática, que segundo Chevallard (2009b, p. 1): “A didática é a ciência das condições e restrições de difusão social das praxeologias”. Faz-se, então, necessário entender o significado das palavras “condições e restrições”. Ao ensinar algo para alguma pessoa, existem algumas condições que, como o próprio Chevallard menciona, “no princípio tudo é condição” (2009a, p. 12), o momento que essa condição não pode ser modificada, pela pessoa ou instituição, a condição passa a ser uma restrição. Entendendo de forma direta o exposto: o professor não deve atribuir aos seus alunos estudos independentes dos conteúdos sem considerar a realidade que vivencia seu aluno.

Assim, podemos compreender os níveis de codeterminação subdivididos em dois subníveis, conforme Chevallard (2002): níveis superiores (Civilização, Sociedade, Escola e Pedagogia) e níveis inferiores (Disciplina, Domínio, Setor, Tema e Objeto), em que, nessa escala, a seta dupla representa que a criação ou modificação de uma condição em um determinado nível pode fazer a diferença nos demais níveis. Para os níveis superiores, temos a seguinte escala:

Figura 2.

Níveis superiores de codeterminação, Chevallard (2009a, p. 12)



Os níveis superiores correspondem às condições e restrições impostas por situações para além da sala de aula que não foram criadas pelo professor, mas afetam diretamente na execução das suas praxeologias. Nesse cenário, podemos exemplificar diferentes situações. Imaginemos, por exemplo, uma escola na qual a pedagogia fundamenta- se em preparar os alunos para os vestibulares nas maiores Universidades Brasileiras e para o Exame Nacional do Ensino Médio

(ENEM). Para tal instituição, a pedagogia implica que a prática do professor deve ser guiada pelo sistema apostilado (fornecido pela escola) e pelas atividades apresentadas pelos exames anteriores do ENEM e das provas dos vestibulares fornecidas pelas universidades.

Esse modelo determina, diretamente, restrições para a prática do professor, visto que ele não pode deixar de seguir esses procedimentos metodológicos porque, acompanhando o apostilado, ele deve desenvolver todas as atividades das apostilas, assim como a execução de diferentes atividades de vestibulares. São situações que se apresentam como restrições, que não podem ser modificadas.

Isto apresentado, podemos observar que, no ambiente escolar, são diferentes situações correlacionadas aos níveis superiores que implicam diretamente a prática do professor em sala de aula, cabendo aos pesquisadores em didática compreender que são situações a serem indubitavelmente analisadas, mesmo que não possam ser modificadas, como afirma Chevallard (2009a):

> [...] Cabe aos pesquisadores didáticos levarem em conta tanto quanto é possível em um determinado momento todas as condições que eles suspeitam que pesam na difusão praxeológica estudada, embora não tenham capacidade para ter essas condições modificadas de uma maneira eventualmente desejada (Chevallard, 2009a, p. 13).

Os níveis de codeterminação representam, em cada nível, os assujeitamentos de X em relação às Instituições I. Entendemos que a TAD permite compreender as relações pessoais R(X, O) e as institucionais RI(O). Além disso, podemos, por meio dessa teoria, analisar as relações entre o sujeito X e a instituição I, a qual envolve os assujeitamentos de X à I e as condições e restrições de I à X. Nessa vertente, podemos pensar nas relações R[6](X, R(I, O); R(I, R(X, O) e, ainda, analisarmos cada relação dependendo da instituição I. No caso, as relações modificam-se ou se alteram ao assumirmos I= Escola, ou I= Sociedade, I= Classe, ou ainda, I= Y (orientador do estudo), bem como ao assumirmos os diferentes sujeitos X envolvidos nessas relações.

Com relação aos níveis de codeterminação inferiores (Disciplina, Domínio, Setor, Tema e Objeto), temos:

Figura 3.

Níveis inferiores de codeterminação, Chevallard (2002, p. 9)

[6] A relação do sujeito com o resultado da relação instituição e objeto; A Relação Institucional com o resultado da relação sujeito e objeto.

Disciplina·

↓↑

Domínio·

↓↑

Setor·

↓↑

Tema·

↓↑

Assunto¶

Nesse contexto, podemos compreender que na presente pesquisa os níveis inferiores são: Disciplina (Matemática); Domínio (Geometria); Setor (Geometria Plana); Tema: (Isometria); Assunto (Simetria). Chevallard (2002) menciona que estes correspondem ao estudo das praxeologias, mas não necessariamente um estudo de forma fragmentada, localizada em cada nível. Ao contrário, os estudos dos níveis inferiores devem propiciar a motivação para o estudo de diferentes tarefas, como assinala:

> O principal déficit criado pelo atual estado de coisas que prevalece hoje no colégio e no liceu preocupa primeiro as organizações matemáticas realmente implementadas em classes: esse déficit é sentido na ausência de motivação dos tipos T de tarefas estudadas. Muito geralmente, as tarefas 'motivadoras' estão faltando e, no limite, ninguém sabe mais nem onde procurá-las! [...] os tipos de tarefas motivadoras são encontrados em níveis mais altos de determinação de organizações matemáticas - setores e domínios (Chevallard, 2002, p. 4).

Nesse viés, os níveis de codeterminação têm como objetivo desvencilhar-se da matemática de *visita às obras*, trabalhando "silenciosamente em substituir uma tradição secular, em que o aluno espera sem piscar, segundo o imemorial problema de copiar as obras e mimetismo cultural, que o professor ensina - isto é, mostra o que é, como fazê-lo e o porquê de fazê-lo dessa maneira" (Chevallard, 2002, p. 1). Para o autor, a ausência de vínculo (estudo de forma fragmentada) entre os níveis Assunto e Tema com os níveis Setores e Domínio, e ainda o nível de Disciplina, resulta na impossibilidade de pensar em tarefas motivadoras, além disso, a organização do estudo considerando todos os níveis deixou de ser matematicamente viável. No geral, os professores perpassam somente os níveis do Tema e Assunto.

Os níveis inferiores permitem compreender como o saber matemático vive em uma determinada instituição, pois, em cada uma delas existem as condições e restrições que devem ser consideradas para que o saber possa existir nela. Um exemplo dessa situação pode ser esclarecido por Bittar (2017):

> Vamos tomar como exemplo o conceito de área, presente em todos os níveis da escolaridade básica e em muitos cursos universitários de exatas. No 4º ano do ensino fundamental, por exemplo, o cálculo de área de figuras planas é explorado por meio da ideia de pavimentação. Essa ideia aparece, implicitamente, no estudo da multiplicação, no 1º ou 2º ano. Nos anos finais do ensino fundamental esse mesmo conceito é estudado de modo um pouco mais formal com a apresentação de fórmulas para o cálculo da área de polígonos que podem ser justificadas, quase sempre, com congruência de triângulos. Se nos anos iniciais a ideia de área é explorada de forma intuitiva, nos anos finais começa a ter espaço uma ideia mais formal do objeto matemático área de figuras planas e, em um curso de cálculo diferencial e integral, o conceito é expandido ao cálculo de figuras planas quaisquer com a apresentação da integral de Riemann. Em cada uma dessas instituições é necessário realizar adaptações para que a ideia de área possa existir; tais adaptações são consequência das condições e restrições impostas pela própria instituição (Bittar, 2017, p. 367).

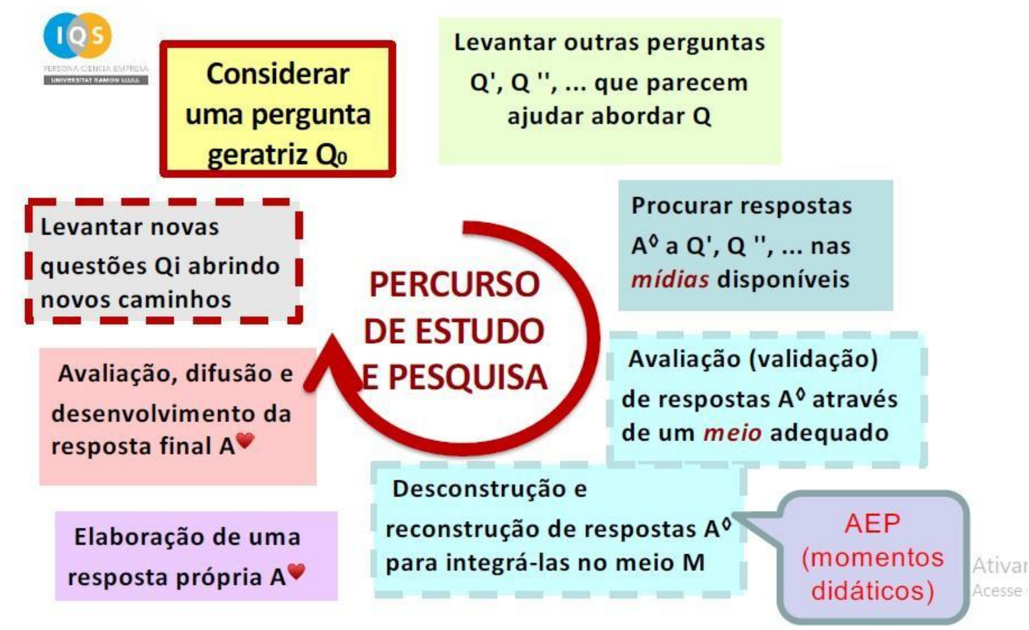
Nesse exemplo, temos as condições e restrições do saber matemático conforme as instituições (níveis de ensino) nas quais ele está inserido. Fica evidente que uma prática pedagógica desenvolvida em sala de aula não está baseada apenas na execução de um estudo feito por professores ou um grupo de professores, as questões didáticas e matemáticas perpassam condições e restrições determinadas pelos níveis de codeterminação.

Segundo Chevallard (2009a), o professor, na qualidade de profissional da educação, deve entender, primeiramente, que a didática evolui. No entanto, somente a evolução da didática não basta, são necessários, no sistema escolar, além das imposições políticas e administrativas, estudos em torno do objeto, para atender as particularidades de cada disciplina. O professor deve buscar esse estudo, identificando as praxeologias úteis e as dispensáveis para o exercício da profissão, praxeologias resultantes das condições e restrições, no caso da disciplina de matemática, que podem ser impostas pelos níveis superiores (escola, pedagogia, sociedade e civilização) e inferiores (tema, assunto, setor, domínio e disciplina).

Nesse contexto, compreendendo que todos os níveis de codeterminação interferem diretamente na prática escolar, cabe nos questionar: como ensinar a Matemática em sala de aula? Logo, amparado no *Paradigma Questionamento do Mundo*, Chevallard (2009g, 2012), visa uma ruptura de práticas que o autor denomina de *Paradigma Visita as Obras*, com o propósito de instigar os professores a desenvolver práticas que visem um currículo gerado por meio de questões que instiguem tanto o aluno quanto o professor a ter uma postura de pesquisador diante do saber ensinado em sala de aula. Para tanto, Chevallard (2009a) tem elucidado um Percurso de Estudos e Pesquisa (PEP), que compreende o ensino por meio de uma questão Q, que é geradora de outras questões, permeando uma prática que estimula uma postura investigativa e questionadora.

Nessa vertente, o PEP está pautado no paradigma questionamento do mundo, proporcionando um olhar mais amplo para o ensino, de modo a considerar condições e restrições que estão externas à sala de aula e que interferem diretamente na prática pedagógica. Para Bosch (2018), podemos visualizar uma estrutura do PEP da seguinte maneira:

Figura 4: *Descrição do PEP. Fonte: Slides palestra Bosch (2018)*



De acordo com Bosch (2018), durante o percurso, teremos situações nas quais será necessário trabalhar com os momentos didáticos (AEP). Entre eles, o trabalho com a técnica, que, por sua vez, direciona o estudo para um desenvolvimento mais tecnicista (Gascón, 2003). Certamente, tais estudos são necessários para construir uma praxeologia da resposta almejada e permitem compreender que podemos ter situações durante o percurso que não serão, necessariamente, orientadas pelo paradigma *questionamento do mundo*.

Para Ruiz (2015), a estrutura de um PEP está sempre aberta e indeterminada em seu início, uma vez que é o processo em si que irá delinear as formas possíveis para o percurso (com muitos contratempos, desvios e atalhos, conforme necessário) e, ainda, ao longo do PEP, a questão geradora Q evolui e transforma-se em uma ou mais questões novas. Para essa autora, a noção de PEP surge da necessidade de existirem organizações educacionais, como a escola ou qualquer outra instituição, em uma epistemologia verdadeiramente funcional, que apareçam como máquinas de produção de conhecimento útil para a criação de respostas R a perguntas Q.

Para Andrade (2012, p. 36), o PEP:

> [...] se constitui em um Percurso de Formação de Professores, na formação inicial e continuada, à medida que vem constituir processos de estudos para o enfrentamento do problema praxeológico da instituição docente, de questões que emanam das e nas práticas docentes, das

> condições e restrições impostas a essas problemáticas, eliminando riscos de se querer formar professores a partir de um EP imutável que se deixaria sob a responsabilidade do professor para mobilizá-lo em situações concretas.

Assumimos, assim, curtos ou micro-PEP[7], com o propósito de investigar e analisar suas contribuições e limitações enquanto proposta metodológica para a formação continuada de professores de matemática. Trabalhamos com um grupo de doze professores, todos atuantes no ensino público dos anos finais do Ensino Fundamental, de modo a levar esses professores a estudar e a repensar o modo como conduziam as suas aulas referentes aos conteúdos geométricos, amparados no paradigma questionamento do mundo. É importante ressaltar que o desenvolvimento do PEP não é basicamente reunir os professores e apresentar uma atividade. Isso implica, anteriormente, um momento de planejamento das atividades, com muito estudo, para que se caracterizassem como PEP, como relataremos no decorrer das análises.

Assim, os procedimentos metodológicos do Percurso de Estudos e Pesquisas (PEP) parecem viáveis no trabalho com a formação continuada, pois o desenvolvimento de sistemas didáticos, norteados pelo paradigma questionamento do mundo, possibilita um estudo mais amplo de condições e restrições que surgem a partir dos níveis superiores de codeterminação, direcionando todo o âmbito escolar, sejam as práticas escolares, a coordenação, o currículo, entre outros.

Análise dos Micropercursos

Todas as formações foram norteadas por vários Sistemas Didáticos (SD), representados por $S_i = \{x_i, Y, Q_i\}$, no qual os elementos x_i representam os professores participantes da formação (que varia conforme a disponibilidade dos mesmos), Y o professor orientador do estudo (pesquisador) e Q_i as questões geradoras que conduziram o estudo do objeto matemático na formação continuada. Para o presente artigo, apresentaremos a análise de dois sistemas didáticos norteados pela questão Q_4 = Como ensinar simetria? Denominados PEP - S_7 e PEP – S_9. Na sessão Micro PEP - S_7, tínhamos o seguinte sistema didático: $S_7 = \{(x_1, x_2, x_{12}), Y, Q_4\}$, no qual a professora x_{12} estava participando pela primeira vez. Amparada no *paradigma questionamento do mundo*, a orientadora do estudo (Y) começou a dialogar com foco na questão Q_4 para o princípio do estudo:

---

[7] Assumimos como curtos ou micropercursos, pois, na formação continuada realizada, não tínhamos um fluxo contínuo de participação dos professores devido a diferentes condições e restrições. Nesse sentido, assumimos que cada sessão de formação seria um momento de estudo, um micropercurso.

> [...] quando trabalhamos geometria, a gente pode utilizar, na sala de aula, alguns instrumentos de construções geométricas, por isso, que eu trouxe régua e compasso, porque pode ser uma oportunidade também quando for trabalhar esse conteúdo de simetria, trabalhar um pouco das construções, trabalhar com régua, esquadro (Y)
> Eles têm dificuldade de trabalhar (alunos) (x_2)
> Aí seria uma oportunidade, se eles têm dificuldade até para começarem a manusear (Y)
> Que eles mostram, assim professora, como que chama esse? Esse daqui é qual? Para que que usa isso? Eles têm muita dificuldade. Sinceramente, eu não dou muito valor a esse conteúdo aqui, passo superficialmente por ele (x_2)
> É o que eu falei, a gente apenas passa assim por esse conteúdo [...] aí nós pensamos nessa sequência de simetria (x_1)
> Sabe o que acontece, as questões que livro didático traz, elas não promovem ou demonstram alguma dificuldade para o aluno e, aí quando o aluno faz, eles questionam o professor, isso daqui é para nós? Isso daqui não dá para dificultar, dá? (x_2)
> Depende né? Dá, dá sim (Y)
> Por que os que vêm no livro são de nível de dificuldade bem baixo (x_2)?
> Então vamos resolvendo aqui, e podemos ir discutindo sobre (Y)
> Se eu bem te conheço, esse daqui vai surgir dúvida, vai dar problema para mim de novo (x_2)

Ao iniciar o estudo, a professora x_2 já expressou a sua OD em torno do conteúdo de simetria e respondeu $R_{4.1}$: *“eu não dou muito valor a esse conteúdo aqui, passo superficialmente por ele* (x_2)”, e ainda complementou que o fato de o livro didático só apresentar atividades triviais faz com que até mesmo os alunos questionem se as atividades são para eles. Certamente, o conteúdo de simetria é ensinado pela professora seguindo a organização didática exposta no livro didático e, nesse início do estudo, ela comentou que não possui nenhuma dificuldade em relação ao conteúdo. No entanto, as professoras têm escolhido esse conteúdo, pois iriam trabalhar em sala de aula, e viram na formação continuada uma oportunidade de preparar essas aulas, por meio da metodologia do PEP.

Durante todas as sessões, tentamos fazer com que os professores participassem ativamente e que o estudo contribuísse para a sua prática em sala de aula. Como a professora vem participando assiduamente das formações, os percursos desenvolvidos têm desestabilizado as suas certezas. Ela refere: “Se eu bem te conheço, esse daqui vai surgir dúvida, vai dar problema para mim de novo (x_2)”. Logo, quando começam a participar de uma nova sessão dos micro-PEP, as professoras já esperam situações que propiciam repensar sobre as suas OD e OM em torno dos conteúdos geométricos. Por tudo isso, iniciamos o nosso estudo retomando o significado de transformações geométricas:

> [...] essa palavra vem agora no livro do sexto ano não sei o de vocês? Homotetia, o livro didático já vem mais ou menos por aí [...] tem, no nono ano, no sétimo ano, tem alguma coisa de congruência, não tem? Ah, não! No oitavo ano, tem os casos de congruência [...] E é pura decoreba, eu vou falar pura decoreba que o aluno faz [...] Que, na OBMEP, vem muito, vem muito contexto sobre isso, né, tem que dominar na OBMEP essa parte pega, aí pega essa parte [...] Por isso que tem que passar o bê-á-bá em si ou vice-versa para depois relacionar, mas aí também você tem aquela disponibilidade de tempo também, pois até o aluno assimilar, ou você

começa lá pelo contexto, até chegar lá você tem que falar parte técnica também, você tem que apontar dentro do conteúdo várias coisas também, você não pode só ficar na historinha, né? Você tem que mostrar a parte técnica da coisa, né, da teoria, eu acho muito extenso o conteúdo e eu gostaria que tivesse somente um, dois ou três conteúdos, aí talvez a gente conseguisse abrir a mente do aluno para outras coisas (x_2)

Porque, na verdade, a gente, querendo ou não, acaba fazendo algumas escolhas, acaba priorizando alguns conteúdos do que outros (Y)

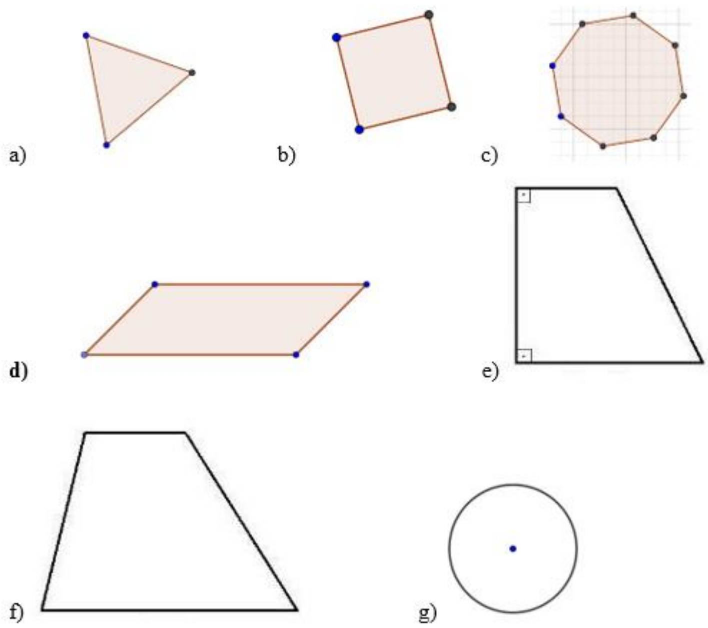
Ou tem professor que acaba pincelando tudo e passa por tudo. Quando eu digo pincelar, você vê, mas não vê o ideal, o ideal seria você parar para estudar a fundo, como você está falando, aí talvez até a própria simetria que eu estou considerando, um conteúdo mais fácil que a gente passa, tenha algo para gente ver mais (x_2)

Nesse fragmento, a professora ressalta novamente a sua OD, que ensina o conteúdo com foco na técnica, visto que não possui condições 'tempo' para trabalhar toda a OM na sua complexidade. Essas condições, em ter que cumprir a ementa seguindo o referencial curricular do estado, não foram criadas pelos professores, mas afetam diretamente as suas praxeologias em sala de aula e acabam se tornando restrições para a sua prática. O professor acaba fazendo algumas escolhas, pois, em uma sala com 40 alunos , com diferentes tempos de aprendizagem, fica difícil, segundo a professora, trabalhar com bloco tecnológico-teórico. Após essas reflexões, as professoras passaram a resolver a seguinte atividade:

Figura 5.

Atividades adaptadas a partir da tese de Silva (2015)

1) Em cada caso, indique o número de eixos de simetria de cada figura:



a) O que realizou para encontrar os eixos de simetria das figuras?

b) A direção do eixo de simetria (horizontal, vertical, oblíqua) pode ser uma variável que intervém na sua identificação?

c) As figuras dispostas no papel em branco ou no papel quadriculado podem

facilitar ou dificultar a identificação dos eixos de simetria?
d) O que é a simetria?

Ao apresentar a atividade, iniciamos o estudo:

Vamos indicar os eixos de simetria (Y)
Na G, tem infinitos? (x_2)
Por quê? (Y)
Na G, tem infinitos? Porque toda vez que eu risco vai ter, aqui passando pelo centro, não? Ou eu estou equivocada, gente, por favor, me ajudem, você acaba esquecendo, sabe o que acontece quando você é professor, e você está perto de outros professores da área, né, você fica com medo de falar alguma coisa, de falar e, de repente, o outro vai falar assim, aí ela vai me chamar de burra. (x_2)
Que nada, pode falar. (x_1)
[ ] A nossa formação não dá conta. Às vezes você não sabe por que você não viu, ou, às vezes também porque você não lembra, né? (x_2)
Por exemplo, tanto tempo que você não trabalha com o nono ano, cinco anos, você tem que voltar a dar uma olhada no conteúdo, planejar. É assim que funciona retomar. Eu trabalhava em uma escola particular, lá na escola particular era assim, você pegava o nono, era só nono que você ministrava aula. (x_1)

A professora x_2 pontua o quanto é difícil expressar-se num grupo de professores e, principalmente, assumir as dificuldades que possui frente ao conteúdo ensinado. Temos visto que a sua participação mais ativa nos percursos possibilita ter mais liberdade e confiabilidade no orientador do estudo (Y) para expor suas dificuldades. Essa é uma característica importante no Percurso de Estudo e Pesquisa – Formação de Professores (PEP–FP), visto que os professores devem assumir-se como 'estudantes da questão' e torna-se um desafio para o orientador do estudo encaminhar os percursos de modo que os professores tenham essa responsabilidade e que exponham as suas praxeologias desenvolvidas em sala de aula.

Portanto, uma das limitações nos PEP–FP composto por professores de matemática que já possuem graduação na área é a dificuldade em assumir para os demais profissionais que não compreendem determinado conteúdo, o que é totalmente diferente de lidar com professores na formação inicial que ainda estão, portanto, em processo de formação. Não estamos querendo dizer que o professor é o profissional que já compreende tudo em torno do ambiente escolar. Ao contrário, acreditamos que, conforme Gatti (2016), as formações continuadas são justamente para dar continuidade ao processo formativo. O importante é que as professoras buscam, na formação, uma oportunidade de estudar os conceitos que vão trabalhar futuramente em sala de aula. Continuamos a discussão em torno da atividade:

O eixo não precisa ser necessariamente de vértice a vértice, né? É só você riscar, né, partir igual. (x_2)
É o espelho, igual o espelho. (x_1)
Uma técnica que a gente pode pensar dobrando a figura se eu consigo dobrar. (Y)

E ficar igual. (x_2)
Uma parte sobreposta sobre a outra igualmente, então eu consigo encontrar. (Y)
Eu queria falar o seguinte, né, para ficar certinho. Aqui tem dois, você consegue dividir aqui, ó, aí você consegue, tem que ficar certinho mesmo tamanho, entendeu? Então, por exemplo, se eu dividir o triângulo ao meio, encaixar duas partes é o eixo, tem que encaixar duas partes, não é isso? (x_1)
Isso (Y)
Então dobra aqui, não aqui, já não deu, não deu (x_2)
Tem que ser simétrico igual espelho, né? (x_1)
Aqui não dá, estou dobrando aqui não dá, então está errado (x_2)
Então, vamos começar aqui (Y)
Agora aqui dá (x_2)
Vamos começar na letra, na letra ‘a’ (Y)
Na letra ‘a’ (x_1)
Quantos eixos de simetria tem? (Y)
São dois (x_1)
São três (x_2)
[...] na letra ‘a’ vocês encontraram quantos? Quantos eixos de simetria? (Y)
Se você perguntou mais de uma vez é porque o meu está errado (x_2)
Então, para encontrar três, vocês estão considerando esse triângulo o quê? (Y)
Equilátero (x_1)
Para mim, ele é equilátero, não está não? (x_2)
Porque aí, no caso (Y)
Se ele fosse isósceles, a gente não encontra isso, porque o isósceles é só um eixo (x_1)
Não daria, aí teria menos eixos, não é isso? (x_2)
Quantos eixos a gente poderia pensar, se fosse isósceles quantos eixos de simetria poderíamos pensar? (Y)
Só um, só esse do meio, não é? Não é? Só ia dobrar aqui, não ia dobrar aqui, não ia dobrar lá, agora esse, porque ele é equilátero, ele tem três. (x_2)
Por isso que eu estou medindo aqui, tem que medir certinho, né, escaleno não tem, né? Se for, se for medir, né? (x_1)
Escaleno não tem, nenhum. (x_1)

A professora mencionou logo no início do PEP – S_7 que se tratava de um conteúdo fácil. No entanto, quando começa a resolver a atividade, já levantou a questão: $Q_{4.1}$: *Ao traçar o eixo, não precisa ser necessariamente de vértice a vértice?* Conforme vão se desenvolvendo os estudos, percebemos que essa compreensão de ser um conteúdo ‘fácil’ já vai mudando. Ao resolver a atividade com as figuras do retângulo, quadrado, paralelogramo, as professoras não tiveram dificuldade em resolver, mas ao tentar resolver a situação para o polígono de oito lados tiveram dúvidas sobre as suas certezas:

Na letra C? (Y)
Na letra C eu não estou visualizando muito. (x_1)
Oito lados. (Y)
Não, não, na letra c, a letra c é essa, né, ela é um octógono, eu consegui quatro também, não foi isso? (x_2)
Deixa eu ver 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. (x_1)
1, 2, 3, 4 são quatro, não é isso? (x_2)
São quatro? (Y)

Ah, o meu eu encontrei mais, será que eu estou errada? Deixa eu fazer um maior aqui, um ... (x_1)
Um, dois ... só tem quatro. (x_2)
Dois, três e quatro, que eu fiz aqui, ó (x_1)
Não, Y! Estou errada, olha aqui, Y, tem uma montoeira, que tem 4, 5 no meu vai ter infinitos também. (x_2)
Infinitos? (Y)
Olha aqui, ó, se riscar do lado desse outro, não, não, não, não, não, espera aí, se aqui deu 5, 6, 7, 8, deu oito, de oito então quer dizer o número de lados é o número de eixos? É? (x_2)
Gente, estou pensando, 4, 5, 6, oito. (x_1)
Mas você não riscou aqui. (x_2)
Estou pensando para riscar, espera. (x_1)
Será que quando a gente senta para resolver esses exercícios a gente tem a mesma dificuldade que o aluno teria? Depois que a gente estuda e passa para eles a gente quer que eles aprendam rapidinho, né, e nós somos alunos grandes, né? (x_2)
Isso que eu falei para outra professora, a gente cobra demais dos nossos alunos. (x_1)
É, tadinhos, esse daqui eu não encontrei (x_2)
[...] Eu posso, então, afirmar que, no polígono regular, o número de eixos de simetria é igual número de lados? (Y)
Com esses três exemplos, eu já bato o cartão, já falo que é. (x_2)
Eu já ia falar que sim, Y. (x_1)
Posso afirmar? não? (x_1)
Eu não sei (Y)
Calma vamos analisar (x_2)

Ao analisar as resoluções das atividades, as professoras perceberam que o número de eixos de simetria das figuras era igual ao número de lados dos polígonos regulares. Sendo assim, já surgiu outro questionamento feito pelas professoras. $Q_{4.2}$: *O número de lados do polígono regular é igual ao número de eixos de simetria?* No levantamento dessas questões, continuamos o estudo de modo a encontrar as respostas e vimos que as professoras traçaram os eixos de simetria, mas não conseguiram justificar suas resoluções:

Mas aí, no caso, quando vocês traçam o eixo de simetria na figura, vocês estão passando de vértice a vértice? (Y)
Essa foi minha pergunta inicial. (x_2)
Não. (x_1)
Vamos olhar aqui, por exemplo, vamos olhar aqui, ó, no caso do octógono. (Y)
Quando ele é regular, você passa de vértice a vértice. (x_2)
O que aconteceu no caso do quadrado? (Y)
Aqui você não passou todos os vértices, aqui não é vértice. (x_2)
No caso aqui é um caso que foi o vértice. (Y)
Verdade, Y. (x_2)
Então, nesses três casos aqui, vocês traçaram uma só reta que passa pelos vértices? (Y)
Não. (x_2)
Vocês traçaram também. (Y)
Lado a lado, metade, vértice a vértice, metade, ponto médio, pelo ponto médio de cada lado, cada lado, exato. (x_2)
Então, assim vocês, no caso, têm duas opções, no caso aqui é a mesma regra no triângulo? (Y)
Vértice, a vértice foi. (x_2)
Triângulo foi de vértice a vértice? Olha que o quadrilátero, o quadrado octógono, vocês partiram, que é de vértice a vértice. (Y)

É aqui não, no triângulo ponto médio (x_1)
Então, olha foi isso, aqui foi de ponto médio, a ponto médio do lado oposto. (Y)
Aqui foi de vértice a ponto médio. (x_1)
Aqui foi de vértice a ponto médio. (Y)
Aqui já é diferente, concorda? (Y)
Concordo. (x_1)
Aqui é vértice a vértice, aqui ponto médio a ponto médio. (Y)
Mesma coisa aqui. (x_2)
Aonde você quer chegar? (x_1)
Está vendo vértice a vértice? Então, aí eu pergunto para vocês assim: se eu considerar um polígono regular, eu posso colocar que todos vão ter um número de eixos de simetria com a mesma quantidade de lados? (Y)
Sim? (x_2)
Isso ficou claro. (x_1)

Conduzimos o percurso para que as professoras conseguissem responder à questão $Q_{4.2}$ e chegassem às respostas $R_{4.2}$: *No polígono regular, o número de eixos de simetria é igual à quantidade de lados do polígono*. Durante o estudo, as professoras começaram a perceber algumas diferenças no modo como se encontram os eixos de simetria nos polígonos de lado par e lado ímpar. A orientadora questionou:

Mas e aí, os eixos de simetria para encontrar, vamos dizer assim, os polígonos de lados pares, é algo igual para você encontrar os eixos de simetria dos polígonos de lado ímpar? (Y)
Manda um polígono de lado ímpar então para gente ver. (x_1)
Então, vamos desenhar, por exemplo, um pentágono, um pentágono regular. (Y)
Vai ser difícil agora para mim desenhar um pentágono. (x_1)
Então, vamos pensar no eixo de simetria. (Y)
[...] Não está regular, é difícil desenhar à mão livre. (x_1)
Se eu dobrar, também não vai dar, Y. (x_2)
Não dá? Vamos pensar aqui ó, desse vértice, é o desenho que não está. (Y)
Vamos fazer o desenho correto. (x_1)
Não dá, Y (x_2)
Um pentágono regular. (x_1)
Então, faz um tempo que eu não desenho um pentágono, mas a gente pode tentar assim, vamos supor aqui, de lado cinco, lado cinco, aí. (Y)
Então, vamos pensar assim, vamos fazer outro formato para ele. (x_2)
Lado cinco. (Y)
Vamos tentar outro formato para ele então, Y. (x_2)
Então, aqui a gente pode desenhar cinco, aqui também, né (Y), não vai dar pentágono. (x_1)
Vai dar uma figura monstruosa. (x_2)
Regular professora, não estou conseguindo entender um regular aí. (risos) (x_1)
Não vai dar regular. (x_2)

As professoras não conseguiram desenhar um pentágono. Ao tentarem desenhar o polígono, elas consideraram apenas os lados, mas não os ângulos. Vale observar que a professora x_1 tinha participado do percurso sobre ladrilhamento e discutimos sobre o pentágono regular. Contudo, no momento, ela não pontuou nada. Continuamos, então, a discussão:

Não dá, vamos pegar no celular? (x_2)

Professora, pode usar o celular? (risos) (x_1) (pega o celular)
[...] será que o problema não pode estar no nosso desenho? (Y)
Mas esse é um pentágono regular. (x_2)
É um pentágono, só que, para ser regular, eles têm que ter o quê? (Y)
Ah do vértice ao centro tem que ter a mesma medida do lado. (x_2)
Quando nós falamos em polígonos regulares aqui, o que nós estamos considerando apenas? (Y)
Só lado. (x_2).
Só lado? (Y)
Está errado, o nosso desenho. (x_2)
O que está errado aqui? Este aqui é um polígono regular? Olhando aqui, eu estou apenas considerando os lados, mas o polígono regular, ele tem os lados iguais e os ângulos, então aqui, por exemplo, aqui tem um ângulo de 90 ... aqui vai ter um pouco maior que 90 aqui, essa figura não é regular. (Y)
Mas o pentágono pode ser regular? (x_2)
Sim. (Y)
Vamos colocar na internet. (x_2)
Tem pentágono regular, não tem? Ou não? (Y)
Tenho minhas dúvidas. (x_2) (Nesse momento, a professora pesquisa na internet com o auxílio do celular.)
Sim! Tem? (Y)
Eu estava achando que tinha, mas agora não sei mais, mediante esse desenho aqui eu não sei mais, professora, até agora eu estava achando que tinha. (x_1)

Nesse fragmento, fica explícito que as professoras não sabem o que é polígono regular, tendo levantado a questão $Q_{4.3}$: *Mas o pentágono pode ser regular?* No decorrer do percurso, vamos percebendo que admitimos que os professores já sabiam alguns conceitos geométricos, condições necessárias para o desenvolvimento das atividades. No entanto, conforme vamos executando os estudos, temos fortes indícios de que os conceitos básicos da Geometria não são compreendidos pelos professores, sendo que eles precisam recorrer à internet (mídia) para entender o conteúdo. A professora x_2 assim expressou-se:

Meu Deus! Tem. Não é no formato da nossa casinha e vai ter os ângulos e os lados, olha aqui ó. (x_2)
Os ângulos aqui têm que ser todos iguais, e aqui o que acontece, estamos considerando somente o lado, num polígono regular de cinco lados, os ângulos internos deles é 108°. (Y)
É a soma é 540º, né? (x_2)
[...] E se assemelha com um triângulo, será que vai se assemelhar com o heptágono também? Vou pesquisar na internet (x_1). A professora começa a pesquisar na internet. O heptágono, ele tem sete lados, é um polígono com lados ímpares, né, a partir do desenho da internet começa a contar os eixos de simetria. (x_1)
Um, dois, três, quatro, cinco, seis e sete, sempre no vértice ao ponto médio e, então, as características permanecem sempre para os polígonos regulares, as características permanecem também para os polígonos de lados pares e de lados ímpares também (x_2)
O que acontece, nos polígonos regulares, a gente pode afirmar que a quantidade de lados é a quantidade dos eixos de simetria, porém, o modo como encontro os eixos de simetria de um polígono de lado par são diferentes do modo como encontro os eixos de simetria de um polígono de lado ímpar? (Y)
Nos pares, é de vértice a vértice e ponto médio a ponto médio, é isso? (x_2)
Vértice a vértice e ponto médio a ponto médio. E no polígono de lado ímpar? (Y)
Só de vértice a ponto médio. (x_2)

De vértice a ponto médio. (Y)

Nesse trecho, após as professoras pesquisarem na internet (mídia), conseguimos institucionalizar algumas particularidades da simetria que foram recorrentes nas atividades desenvolvidas, tendo obtido as seguintes respostas $R_{4.3}$: *Nos polígonos regulares de lados pares, os eixos de simetria são traçados de vértice a vértice e ponto médio a ponto médio* e $R_{4.4}$: *Nos polígonos regulares de lado ímpar, os eixos de simetria são traçados de vértice a ponto médio.*

Apesar das dificuldades, é importante ressaltar que a todo o momento as professoras x_1 e x_2 vão anotando tudo. Como elas mesmo expressaram, é um momento de estudo, mas a professora x_{12} só fica olhando, talvez por ser a primeira vez em que participa. Em continuidade, segue o estudo, quando a orientadora apresenta alguns conceitos de ortogonalidade sobre a mediatriz enquanto lugar geométrico, pois as professoras, quando questionadas sobre esses conceitos, não lembravam. Após a compreensão do conteúdo, as professoras avaliaram as possibilidades de desenvolver essas atividades em sala de aula (OD) e retomaram a discussão sobre o estudo:

> Essa atividade no laboratório ficaria legal. Você distribui para o grupo, você pode distribuir para o grupo as questionáveis, né, por exemplo, um polígono com lado par, um que não tem eixo de simetria. (x_2)
> Casos que não tenham eixos, casos que tenham, tipo os polígonos pares e ímpares. (Y)
> E a partir daí começar a questionar, a fazer as perguntas para que eles possam responder. Dá para ser uma aula legal de laboratório, né. (x_2)
> O Y, aquela figura que eu falei no começo, que tem infinitos eixos de simetria, eu ainda continuo batendo nessa tecla e tem finitos eixo simetria vai ficar ‘n’ retas passando pelo centro, e vai ficar dividido. (x_2)
> Vai ficar dividido igualmente, então o caso da circunferência aí, ela tem infinitos eixos de simetria, quando passa pelo centro e toca dois pontos da circunferência. Na verdade, eu estou trabalhando com o (Y)
> Raio, o diâmetro. (x_2)
> Isso, com o diâmetro. (Y)
> Já dá para puxar também que tem o conteúdo, todo de circunferência em algum ano aí, acho que é no nono, não vai ter? No oitavo também, no ano passado eu me lembro, e daí fica legal também já puxar o gancho para isso. (x_2)
> Então, aí você já pode trabalhar, e aí eu trouxe até umas perguntas em complementos dessas, aí a gente pode até pensar para ser questionado para os alunos, ou, às vezes, a gente nem precisa. Necessariamente, vou aplicar a definição, eixo de simetria é isso, isso, isso, aí vocês podem falar a partir dessas figuras, vamos dobrar, o conceito de sobrepor sobre o outro, aí eles vão descobrindo que esses são os eixos de simetria. (Y)
> Eles vão formar a própria teoria deles, como vocês querem escrever? Eixo de simetria é o quê? Cada um vai falar uma coisa. (x_2)
> Aí, na verdade, é o que eu consigo dividir a figura. (Y)
> Em duas partes sobrepostas. (x_2)
> Iguais, quando você sobrepõe, é exatamente igual, então, assim, você pode fazer até uma atividade a partir disso e perguntar para os alunos, o que realizou para encontrar os eixos de simetria das figuras? (Y)

> Não dá para falar que é dividir a figura em duas partes iguais, senão o paralelogramo entra, né, eu tenho que falar algo mais, né, partes iguais que se sobrepõem. (x_2)
> Em duas partes simétricas. (Y)
> Pode por outra coisa em lugar de simétrico, talvez eles entendam melhor, eu não posso falar em duas partes iguais, se não vou levar ao erro. (x_2)
> O caso do paralelogramo, é justamente ele que induz a esse erro, então, seriam duas partes iguais que se sobrepõem. (Y)
> Igualmente. (x_2)
> Igualmente. (Y)

Por certo, na fala das professoras, o conceito que elas expressavam que era “fácil” já muda. No decorrer do estudo, verificamos que as professoras compreenderam muito mais o conteúdo e passaram a pensar em uma OD para ser desenvolvida em sala de aula. Na continuidade do estudo do conteúdo, propusemos uma discussão sobre alguns erros conceituais apresentados em livros didáticos relacionados à simetria. Um dos erros mais graves que a atividade menciona é o conceito de eixo de simetria em seres tridimensionais. Assim, tentamos estudar que em objetos tridimensionais são planos de simetria e não eixos de simetria. Assim posto, pontuamos:

> [...] o que ele coloca com mais ênfase que eu estou falando aqui, eixos de simetria, nós estamos trabalhando com o quê, com figuras. (Y)
> Planas, ele coloca com figuras tridimensionais. (x_2)
> Isso. Então, por exemplo, o corpo humano, ele não é plano, então, eu não posso falar em eixo. (Y)
> Mas a sombra dele, geralmente, vem a sombra (x_2)
> Se for a sombra no plano, eu posso falar isso de simetria, mas quando menciono sobre uma figura tridimensional, eu falo o quê? (Y)
> Não recebe mais esse nome, é simetria de reflexão, esse é o nome? (x_2)
> [...] Simetria de reflexão e simetria axial é a mesma coisa, só que aí o que acontece quando eu trabalho com três dimensões não existe o eixo de simetria, existe o plano de simetria, eu vou falar dos planos de simetria de reflexão, por isso que ele fala assim, que o livro conduz ao erro, porque quando o trabalho, por exemplo, um prédio. O prédio, ele é uma figura tridimensional então, não vai existir um eixo, não vai existir um eixo de simetria, vai existir um plano de simetria. (Y)
> Acho que o livro quis contextualizar e acabou errando (x_2)
> Na verdade, não existem eixos no caso de figuras tridimensionais, e pensa no objeto de três dimensões, vamos supor ali, se eu pensar em dividir esse objeto. (Y)
> Eu teria um plano, eu passo uma sua folha no meio, não uma reta. (x_2)
> Isso. (Y)
> Passo uma folha no meio que é um plano. (x_2)
> Isso que é o plano que vai dividir em duas partes iguais e sobrepostas. (Y)
> Como se fosse uma parede. (x_2)

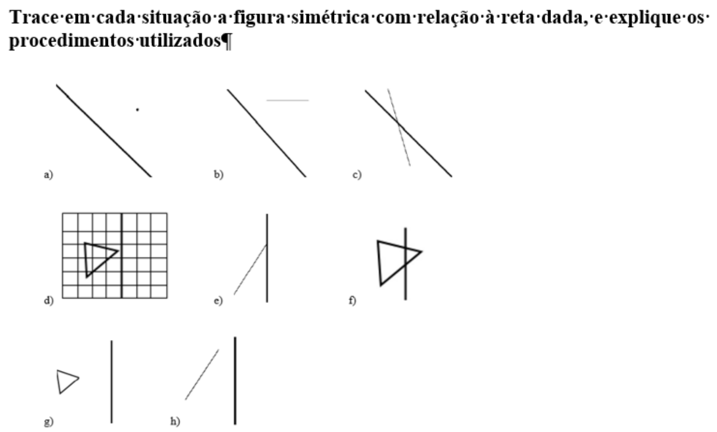
Com a apresentação da atividade sobre os erros conceituais no livro didático em torno do estudo de simetria, encerramos o PEP-S_7 e, nesse momento, temos percebido que por conta das dificuldades em relação ao conteúdo, as professoras quase não questionam. Bosch e Gascón (2010) argumentam que os percursos devem conduzir a uma ampliação das praxeologias.

Observamos que, no decorrer do estudo dessa sessão, as praxeologias das professoras em torno do conceito de simetria ampliaram-se, visto que, segundo relato, elas ensinavam somente a traçar os eixos de simetria. Por certo, no final dessa sessão, já não acham um conteúdo simples a ser ensinado e as suas praxeologias ficaram mais completas após o estudo. O percurso foi sendo composto pelo seguinte sistema: [$S_7 = \{(x_1, x_2, x_{12}), Y, Q_4\} \rightarrow M = \{R_{4.1}, R_{4.2}, R_{4.3}, R_{4.4}; Q_{4.1}, Q_{4.2}, Q_{4.3}\}$].

No término dessas atividades, as professoras solicitaram a continuidade de estudo sobre a Simetria Assim, foi proposto fazê-lo na próxima sessão. Em suma, estamos compreendendo que haveria muito o que fazer para o estudo de Geometria com esses professores, porém as suas relações com os conteúdos geométricos não serão as mesmas após os micropercursos.

Como algumas professoras que solicitaram o estudo da questão Q_4 não estavam presentes no PEP–S_7, retomamos a discussão do estudo de simetria no PEP–S_9. O estudo começou a partir da atividade: Trace, em cada situação, a figura simétrica com relação à reta dada e explique os procedimentos utilizados, conforme figura 6.

Figura 6. Simetria em relação a uma reta dada



Fonte: *Atividades adaptadas a partir da tese de Silva (2015)*

As professoras, de início, resolveram a atividade por meio da técnica que conhecem, τ: *dobrar as figuras ao meio de modo que uma parte sobrepõe a outra.*

> Você vai dobrar em cima do eixo? (x_1)
> Eu dobro aqui, eu coloco a sombra e pronto, eu consigo a figura igual [...] uma maneira mais fácil e mais certeira, é isso, é? Tem que dobrar e sobrepor (x_2)
> Existe só essa maneira? O que significa esse eixo quando eu dobro a figura, esse eixo fica sendo o que da figura? (Y)
> A base, quando dobrei, ele ficou aqui, né. [...] ele está sendo o ponto médio (x_2)
> [...] qual o segmento que passa pelo ponto médio aqui, ele tem um nome, vocês lembram? (Y)
> É a mediatriz (x_2)
> Então, o eixo de simetria, ele passa ser a mediatriz de todas as figuras (x_2)
> Isso, ele é a mediatriz das figuras (Y)

Como as professoras já tinham participado do PEP-S_7 sobre o estudo de simetria, elas apropriaram-se da técnica $\tau_{1.9}$. No entanto, nas próximas atividades, começamos a instigá-las a pensarem em uma outra técnica para resolver a atividade: Como eu vou construir esse ponto do outro lado sem ser pela sobreposição? Sem ser utilizando a técnica da dobradura? (Y)
E sem ser medindo também? Com a régua? (x_2)
Mesmo medindo, você pode desviar para lá, para cá, e não necessariamente ele fica sobreposto. (Y)
E tem que ficar para ser simétrico. (x_2)
Como fazer isso? (Y)
Eu não sei como fazer. (x_2)

As professoras teriam que reproduzir um ponto simétrico em relação ao eixo dado e, para o desenvolvimento dessa atividade, uma técnica que se faz por meio do desenho, reproduzir o ponto com o auxílio do compasso. As professoras realmente não compreendiam como fazer e o estudo acabou sendo direcionado por (Y), ensinando alguns procedimentos de desenho para reproduzir as figuras simétricas em relação ao eixo. Diante disso, a professora x_2 também expressou as dificuldades dos alunos em trabalhar com o compasso e o transferidor:

[...] O simples fato deles manusearem isso daqui (compasso) já é uma evolução. Eles têm extrema dificuldade com isso. Quando fui trabalhar o gráfico de setores com eles, depois eles ficaram entendendo mais, mas o transferidor foi um caos para eles [...] esse que mandaram do governo, ele é muito ruim (x_2)

A professora expressa a dificuldade em trabalhar com os instrumentos de desenho com alunos e que eles são utilizados em outros conteúdos da matemática (gráfico de setores) e não para os conteúdos geométricos. Talvez pela própria dificuldade da professora em lembrar os procedimentos dos desenhos geométricos seja um impasse para trabalhar com seus alunos. Dado o constatado e aqui relatado, explicamos para as professoras como se faz a construção do ponto simétrico em relação ao eixo dado com o auxílio do compasso e da régua e, na sequência, foram resolvidas situações que teriam que reproduzir a figura simétrica do triângulo, sendo que elas não tiveram dificuldade em realizar, visto que bastava reproduzir os três vértices. Na continuação das atividades, questionamos as professoras quanto às figuras que interceptavam o eixo de simetria, um caso diferente dos que elas haviam resolvido até então:

[...] e nesses casos que o eixo de simetria intercepta a figura, como fica? (Y)
Você vai ter que mandar ao contrário, né? Esse daqui você vai mandar para lá e esse para cá. Você pega esse ponto, manda para lá, esse para lá e esse você manda para cá, é isso? (x_2)
É isso mesmo. (Y)
Mas assim é trabalhoso fazer com isso (compasso). (x_2)
Um dos focos do ensino da Geometria é você trabalhar com as construções geométricas. Por conseguinte, trabalhar com os instrumentos compasso e régua. (Y)
Se for por dobradura, passo para lá, risco aqui, passo para lá, risco aqui. (x_2)
No caso da técnica de dobradura, eu uso como referência o eixo [...] mas e, nesse caso, em que o eixo corta a figura? [...] Nesse caso aqui, é conveniente a técnica da dobradura ou da construção? (Y)

> Acho que o que chega mais próximo do ideal, do exato, é esse, né, pelo que estou vendo, mas eu o acho trabalhoso e se não estudar vai se embananar tudo aqui, dá para fazer esse? (x_2)
> Vamos tentar? (Y)

As professoras tentam resolver e não conseguem reproduzir utilizando a mediatriz, elas sabem a técnica de reproduzir os três pontos do triângulo e, depois, traçar os seus segmentos ligando os pontos, mas ao desenhar utilizando o compasso não conseguem, mesmo a orientadora fazendo os procedimentos minutos antes:

> Por que que nós não construímos o ponto certo? Nossa, complicado, hein? O aluno não vai gostar, não. (x_2)

As professoras vão construindo, conforme a orientadora (Y) explica os procedimentos para encontrar os pontos simétricos com o auxílio do compasso, e vão realizando a atividade. Mas, mesmo com a orientação, as professoras não conseguiram reproduzir a figura. Uma delas expressou que esse tipo de atividade para trabalhar em sala de aula é inviável, pois demanda muito tempo da aula.

> [...] Eu penso o seguinte, coloca um bem elementar e um desse já é o suficiente para aprender a técnica [...], porque senão, você não dispõe de muito tempo na aula, aí você pode colocar situações, qual maneira que você pode reproduzir do outro lado, aí eles vão falar a técnica de dobrar, esses eles não vão falar nunca. (x_2)

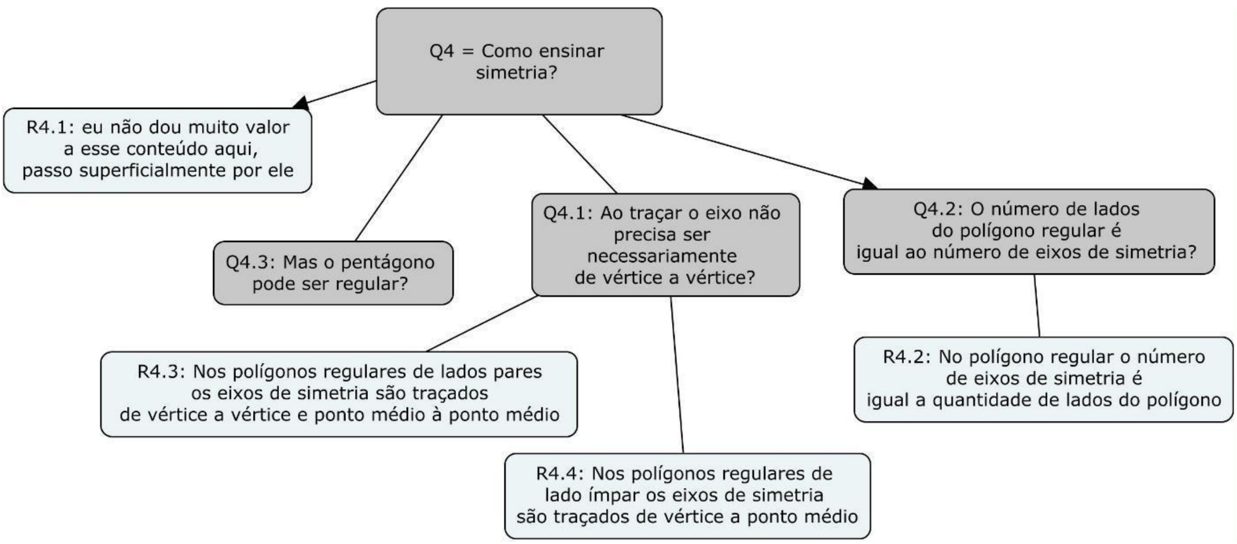
Por certo, durante o PEP – S_9, continuação do PEP – S_7, ficou claro que as professoras ensinam o conteúdo de simetria 'superficial', trabalham apenas com a técnica da dobradura e encerram o conteúdo, como se o ensino de simetria se resumisse a isso. Além disso, não trabalham com os outros tipos de simetria, como rotação e translação. De fato, como a professora x_2 disse no início do PEP – S_7: "[...] eu não dou muito valor a esse conteúdo aqui, passo superficialmente por ele (x_2)", ponderando que não existia dificuldade alguma nesse conteúdo para ensinar e nem os alunos em aprender, mas, no final dos micropercursos, pontuou:

> [...] você reparou também que pra todos os conteúdos me parecem que a gente fica no elementar, que se você pensar, como eu disse para você no primeiro encontro, eu falei que não dava muita importância para o conteúdo de simetria, que ele me parecia muito fácil e eu passava pincelando nele e olha quanta coisa que eu não sabia, você está entendendo? Então parece que o livro, ao mesmo tempo que ele te ajuda, ele te trava também, você tinha que parar para estudar, e se você for pensar bem a aula, bem elaborada para cada conteúdo que você entra, você tinha que estudar, tinha que ralar bastante [...] porque a gente abre página do livro e dá uma lida, acontece com todo mundo, você vai dar uma passada com os alunos e você não elaborou aquela aula de acordo, você aceita o que está ali, é verdade, você concorda com tudo e se você for olhar, por de trás os questionamentos são longos. (x_2)

Nessa fala, temos que a professora assume que as suas organizações didáticas estão assujeitadas ao livro didático e, ao preparar as suas aulas de acordo com o conteúdo exposto no livro didático, não apresenta qualquer dificuldade, pois reproduz como está no papel. No entanto, o percurso fez com que percebesse a importância de estudar e o quanto não estuda o suficiente para ministrar uma aula com toda a organização matemática necessária para a compreensão do aluno. Os professores ensinam os conteúdos geométricos em torno apenas de técnicas, que são condições que acabam restringindo as suas práticas.

De fato, o micropercurso desenvolvido em torno do sistema S_9 ficou em torno de um estudo mais local do conteúdo de simetria, o desenvolvimento do sistema $S_9 = \{x_1$ e x_2, Y, Q4$\}$ não possibilitou mais levantamento de questões. Nesse percurso, as professoras expressaram-se bastante. No entanto, vimos que as questões surgem a partir de algum conhecimento que a pessoa possui sobre o conteúdo a ser estudado. Nesse caso, percebemos que as professoras tinham um conhecimento superficial sobre o conteúdo de simetria e não podiam questionar sobre algo que desconheciam. Portanto, os PEP – S_7 e S_9 tiveram os seguintes direcionamentos:

Figura 6. Questões e respostas sobre como simetria



Fonte: *Percursos S_7 e S_9, elaborado pela pesquisadora*

Na pesquisa de Barquero, Bosch e Gáscon (2011), temos que, no desenvolvimento do PEP, para superar algumas limitações dos percursos (passividade dos alunos, direção do percurso totalmente guiada pelo orientador), os professores propuseram que, no final de cada sessão, cada aluno levaria uma questão a ser estudada e, no início da próxima sessão, todos iriam discutir em conjunto. Acreditamos que, durante os percursos desenvolvidos, faltou um momento para que os professores pudessem estudar e pesquisar sobre os conteúdos estudados. Talvez se tivéssemos orientado mais, para um tempo dedicado a um estudo individual, os percursos teriam outros direcionamentos.

Certamente, durante o desenvolvimento dos micro-PEP–FP, verificamos que o estudo praxeológico não se desenvolveu como almejávamos. Primeiramente, não tivemos uma participação contínua e ativa dos professores. Como já mencionamos anteriormente, o PEP–FP necessita que o professor assuma o ‘papel de estudante da questão’, que exponha as suas dúvidas e certezas. Todavia, a descontinuidade na participação dos micropercursos fez com que os professores não criassem uma confiança no grupo, que permitissem uma discussão mais detalhada de suas praxeologias com os pares. Ao contrário, as professoras, como x_1 e x_2, que tiveram uma participação mais contínua nos micropercursos, permitiram-se questionar e expor as suas praxeologias em torno dos conteúdos geométricos.

Durante os planejamentos dos micropercursos, estes têm sido norteados pelo paradigma questionamento do mundo, porém, nas suas execuções, identificamos que há algumas características desse paradigma, mas, no geral, os sistemas didáticos, principalmente os estudos dos conteúdos geométricos em que as professoras possuíam mais dificuldade, centraram-se em percursos totalmente guiados pelo orientador do estudo, o que não condiz com o paradigma proposto.

No desenvolvimento dos percursos tem-se propiciado momentos de reflexão sobre a formação inicial dos professores, o quanto um ensino totalmente direcionado que receberam durante a graduação repercute na sua prática escolar, tratando-se, pois, de condições que refletem no exercício da profissão. Avaliou-se, ainda o quanto é difícil trabalhar no paradigma questionamento do mundo, pois estamos enraizados com práticas nas quais o professor direciona todo o estudo desenvolvido.

Considerações finais

No estudo dos conteúdos geométricos, verificamos o quanto é necessário desenvolver mais momentos de formação com os professores de matemática em torno desses conceitos e como o campo de números e operações prevalece no ensino de matemática, restringindo o ensino da Geometria. Certamente, diante dos diversos sistemas didáticos, percebemos a dificuldade dos professores ao expor as suas OM, que, na sua maioria, são embasadas em reproduções de técnicas sem justificativas teóricas. No geral, eles expõem o bloco ‘fazer’ dissociável com o bloco ‘saber-fazer’.

Ainda temos visto o quanto os livros didáticos estão presentes nas OD dos professores. De um modo geral, as organizações didáticas dos professores da pesquisa com relação aos conteúdos geométricos estão em torno das OD dos livros didáticos, que reproduzem tal qual como o livro apresenta.

No desenvolvimento dos micropercursos fica explícito que alguns professores estão habituados a participar de formações em que apenas 'escutam' e, no final, recebem um certificado. São formações que não atendem às áreas específicas, como menciona a professora sobre a necessidade de "promover maior número de formações continuadas específicas por área de conhecimento" (x_1). A execução de micropercursos possibilitou uma ruptura com esses tipos de formações, os professores foram instigados a participarem o tempo todo e, mais que isso, foram os protagonistas das formações que direcionavam quais conteúdos estudar e como ensinar.

Podemos inferir que os micropercursos desestabilizaram as OM e OD dos participantes e, além disso, possibilitaram refletir sobre o sistema escolar e as condições e restrições que são impostas aos professores, como uma extensa lista de conteúdos a cumprir, a falta de diálogo entre os professores de mesma área de conhecimento, a ausência de apoio da coordenação para o trabalho em sala de aula, limitações da formação inicial e os desafios diários da prática escolar. Os micropercursos propiciaram que os professores dialogassem não somente em torno dos conteúdos geométricos, mas também sobre as suas inquietações em torno do ambiente escolar.

Observamos, contudo, que no desenvolvimento dos micropercursos da pesquisa ocorreram aproximações com o aporte teórico/metodológico e que a constituição dos sujeitos envolvidos possibilitou dialogar com a teoria diante de uma realidade de formação continuada brasileira.

Referências

Andrade, R. C. D. (2012). *A Noção de Tarefa Fundamental Como Dispositivo Didático Para Um Percurso De Formação De Professores: o caso da Geometria Analítica.* Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Tese. Belém.

Barquero, B.; Bosch, M.; Gascón, J. (2011*). Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación.* En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.), Un panorama de la TAD (pp. 553-577). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Bittar, M. (2017). *A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos*. Zetetiké, Campinas, SP, v.25, n. 3, set./dez, p.364-387.

Bosch, M. (2018). *Modelos epistemológicos e didáticos no paradigma do questionamento do mundo.* Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática. Agosto, Brasil.

Bosch, M.; Gascón, J. (2010). *Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los 'talleres de práticas matemáticas' a los 'recorridos de estudio e investigación'*. CITAD-II-2010.

Correia, G.; Lobo, R. (2011) *Teorema de Thales: uma análise dos livros didáticos.* XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife- Brasil.

Chevallard, Y. (2009a). *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder*; Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009. http://yves.chevallard.free.fr.

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L´approche antropologique.* In Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1998. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/.

Chevallard, Y. (2003). *Didactique et formation des enseignants*, p.1-14, 2003. http://yves.chevallard.free.fr.

Chevallard, Y. (2009b). *Didactique et formation des enseignants*, p. 1-20, 2009b. http://yves.chevallard.free.fr.

Chevallard, Y. (1992). *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 12, nº 1, pp. 73-112.

Chevallard, Y. (2012). *Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm*. Texto publicado nos anais do ICMI 12 p. 173-187.

Chevallard, Y. (2009c). *La TAD face au professeur de mathématiques*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162.

Chevallard, Y. (2002) *Recherches en didactique et pratiques de formation d'enseignants.* Notes pour un exposé fait à Namur, dans le cadre des Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, le 5 février, 2002. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Recherches_en_didactique_et_formati o n.pdf.

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134.

Chevallard, Y. Bosch, M.; Gascón, J. (2001). *Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed.

Chevallard, Y. (2009d). *À propos des PER*. In: Journal du Seminaire TAD/IDD – 1; pp. 7-23, 2009d. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009- 20010-1.

Chevallard, Y. (2009e) *Le fait de la recherche ». In: Journal du Seminaire TAD/IDD* – 3; pp. 1-8, C. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad- idd-2009-2010-3.pdf .

Chevallard, Y. Cirade, G., (2009f). *Pour une formation professionnelle d'université. Recherche et Formation pour les professions de l'éducation*, 60, 51-62. http://rechercheformation.revues.org/584.

Chevallard, Y.(2009g) *Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER.* 2009g. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=155.

Chevallard, Y. (1994). *Les processus de transposition didactique et leur théorisation*, 1994. Contribution à l'ouvrage dirigé par G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand, Andrée Tiberghien (éds), La transposition didactique à l'épreuve, La Pensée sauvage, Grenoble, p. 135-180.

Gascón, J. (2003) La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v.5, n.2, pp. 11-37.

Gatti, B. A. (2016). *Formação de Professores: Condições e Problemas.* Atuais. Revista Internacional de Formação de Professores. V.1, n. 2.

Santos, C. M. (2013). *Análise da prática pedagógica de uma professora indígena voltada para a Geometria no Ensino Médio.* Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Silva, C. V. (2015). *A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da Simetria Ortogonal*. Tese (Doutorado) –Doutorado em Educação Matemática- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SP.

Pais, L. C. (2002) *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.* 2º ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

Ruiz, A. O. (2015). *La Formación Matemático-Didáctica Del Profesorado De Secundaria. De Las Matemáticas Por Enseñar A Las Matemáticas Para La Enseñanza.* Universidad Autonoma de Madrid. Facultad de Formación de Profesorado Y Educación Departamento de Didácticas Específicas. Madrid, 2015.