

Uma organização do ensino-aprendizagem de sistema de equações lineares no ensino médio, na perspectiva desenvolvimental: um experimento didático-formativo

An organization of teaching-learning systems of linear equations in high school, from a developmental perspective: a didactic-training experiment

Una organización de Sistema de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones lineales en una escuela secundaria, perspectiva del desarrollo: un experimento didáctico-formativo

Une organisation de l'enseignement-apprentissage des systèmes d'équations linéaires au lycée, dans une perspective développementale : une expérience didactique-formation

Júlio Henrique da Cunha Neto¹
Universidade de Uberaba
Doutorado em Educação

<https://orcid.org/0000-0003-0090-6913>

Marilene Ribeiro Resende²
Universidade de Uberaba
Doutorado em Educação Matemática

<https://orcid.org/0000-0002-6740-1787>

Resumo

Ao considerar o cenário da educação brasileira, no início do Século XXI, marcado pelo valor utilitário dos conteúdos escolares, e, levando-se em conta a necessidade de definir uma Matemática específica da ação do professor, apresenta-se a questão de pesquisa realizada: Como organizar o ensino-aprendizagem de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio, na perspectiva desenvolvimental, a partir de princípios da Teoria Histórico-Cultural (Vigotski, 1896-1934) e da Teoria de Atividade de Estudo (Davidov, 1930-1968), visando criar condições para o desenvolvimento do pensamento teórico do aluno? Para tanto, apresenta-se neste artigo discussões sobre a concepção e a realização de uma Tarefa, que compôs uma proposta didática, no contexto de um experimento didático-formativo, com o objetivo de propor uma organização do

¹ jhdcneto@gmail.com

² marilene.resende@uniubr.com

processo de ensino-aprendizagem de Sistema de Equações Lineares, com alunos da 2ª série do Ensino Médio, visando ao desenvolvimento do pensamento teórico. Foram elaboradas três Tarefas de Estudo, que se constituem na unidade básica (célula) da Atividade de Estudo. Conclui-se que: 1) a organização do ensino exigiu do professor conhecimentos consistentes dos pressupostos teóricos da Teoria da Atividade de Estudo e dos aspectos lógicos e históricos de Sistema de Equações Lineares, teorizações férteis para discutir o conhecimento matemático para o ensino; 2) o professor tem papel fundamental no processo, como organizador do ensino e como responsável pela mediação, atuando na Zona de Desenvolvimento Próximo – ZDP, o que exige conhecimentos matemáticos próprios para o ensino; 3) a preocupação com o desenvolvimento do pensamento teórico pode conduzir à apropriação de conceitos, em sua essência.

palavras-chave: Teoria da atividade de estudo, Experimento didático-formativo, Teoria histórico-cultural, Sistema de equações lineares, Conhecimento matemático do professor.

Abstract

When considering the scenario of Brazilian education, at the beginning of the 21st Century, marked by the utilitarian value of school content, and, taking into account the need to define a specific mathematics of teacher action, the research question presented is: How to organize the teaching-learning of Systems of Linear Equations in High School, from a developmental perspective, based on principles of the Historical-Cultural Theory (Vygotsky, 1896-1934) and Study Activity Theory (Davydov, 1930-1968), so as to create conditions for the development of students' theoretical thinking? To this end, this article presents discussions on the conception and execution of a Task, which comprised a didactic proposal, in the context of a didactic-training experiment, with the objective of proposing an organization of the teaching-learning process of Systems of Linear equations, with 2nd year high school students, aiming to develop theoretical thinking. Three Study Tasks were created, which constitute the basic unit (cell) of the Study Activity. It is concluded that: 1) the organization of teaching required consistent knowledge of the theoretical assumptions of the Study Activity Theory and the logical and historical aspects of Systems of Linear Equations, fertile theorizations to discuss mathematical knowledge for teaching; 2) the teacher plays a fundamental role in the process as an organizer of teaching and as being responsible for mediation, working in the Zone of Proximal Development – ZDP, which requires teaching-specific

mathematical knowledge ; 3) concern with the development of theoretical thinking can lead to the appropriation of concepts, in essence.

Keywords: Theory of study activity, Didactic-formative experiment, Historical-cultural theory, System of linear equations, Teacher's mathematical knowledge.

Resumen

Al considerar el escenario de la educación brasileña, en el inicio del siglo XXI, marcado por el valor utilitario de los contenidos escolares, y teniendo en cuenta la necesidad de definir una Matemática específica de la acción docente, la pregunta de investigación que se presenta es: ¿Cómo organizar la enseñanza-aprendizaje de Sistema de Ecuaciones Lineales en la Escuela Secundaria, desde una perspectiva evolutiva, basada en principios de la Teoría Histórico-Cultural (Vygotsky, 1896-1934) y la Teoría de la Actividad de Estudio (Davidov, 1930-1968), apuntando a crear condiciones para el desarrollo del pensamiento teórico del estudiante? Para ello, este artículo presenta discusiones sobre la concepción y ejecución de una Tarea, que constituyó una propuesta didáctica, en el contexto de un experimento didáctico-formativo, con el objetivo de proponer una organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de Sistema de Información. Ecuaciones Lineales, con estudiantes de 2do año de secundaria, con el objetivo de desarrollar el pensamiento teórico. Se crearon tres Tareas de Estudio, que constituyen la unidad básica (célula) de la Actividad de Estudio. Se concluye que: 1) la organización de la enseñanza requirió el conocimiento consistente de los supuestos teóricos de la Teoría de la Actividad de Estudio y los aspectos lógicos e históricos de los Sistema de Ecuaciones Lineales, teorizaciones fértiles para discutir el conocimiento matemático para la enseñanza; 2) el docente juega un papel fundamental en el proceso, como organizador de la enseñanza y como responsable de la mediación, actuando en la Zona de Desarrollo Próximo – ZDP, lo que requiere conocimientos matemáticos propios de la enseñanza; 3) la preocupación por el desarrollo del pensamiento teórico puede conducir a la apropiación de conceptos, en esencia.

Palabras clave: Actividad teórica de estudio, Experimento didáctico-formativo, Teoría histórico-cultural, Sistema de ecuaciones lineales, Conocimientos matemáticos del profesor.

Résumé

En considérant le scénario de l'éducation brésilienne, au début du XXIe siècle, marqué par la valeur utilitaire du contenu scolaire, et en tenant compte de la nécessité de

définir une mathématique spécifique de l'action de l'enseignant, la question de recherche présentée est la suivante : Comment organiser l'enseignement-apprentissage des systèmes d'équations linéaires au lycée, dans une perspective développementale, basé sur les principes de la théorie historique et culturelle (Vygotsky, 1896-1934) et de la théorie de l'activité d'étude (Davidov, 1930-1968), visant à créer les conditions d'un le développement de la pensée théorique de l'étudiant ? À cette fin, cet article présente des discussions sur la conception et l'exécution d'une tâche, qui comprenait une proposition didactique, dans le contexte d'une expérience didactique-formation, dans le but de proposer une organisation du processus d'enseignement-apprentissage des systèmes d'information. Equations Linéaires, auprès de lycéens de 2ème année, visant à développer la réflexion théorique. Trois tâches d'étude ont été créées, qui constituent l'unité de base (cellule) de l'activité d'étude. On conclut que : 1) l'organisation de l'enseignement exigeait une connaissance cohérente des hypothèses théoriques de la théorie des activités d'étude et des aspects logiques et historiques des systèmes d'équations linéaires, des théorisations fertiles pour discuter des connaissances mathématiques pour l'enseignement ; 2) l'enseignant joue un rôle fondamental dans le processus, en tant qu'organisateur de l'enseignement et en tant que responsable de la médiation, travaillant dans la Zone de Développement Proximal – ZDP, qui nécessite des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement ; 3) le souci du développement de la pensée théorique peut conduire, pour l'essentiel, à l'appropriation de concepts.

Mots-clés : Théorie de l'activité d'étude, Expérience didactique et formative, Théorie historico-culturelle, Système d'équations linéaires, Connaissances mathématiques de l'enseignant.

Uma organização do ensino-aprendizagem de Sistema de equações lineares no Ensino Médio, na perspectiva desenvolvimental: um experimento didático-formativo

Introdução

Este artigo resulta de uma tese de doutorado, cuja pesquisa está incluída no projeto intitulado “Conteúdos algébricos no ensino médio: discussões e propostas na perspectiva da teoria histórico cultural”, aprovado pela FAPEMIG, em 2017, APQ-01914-17, coordenado pela professora Dra. Marilene Ribeiro Resende, cujo objetivo é desenvolver na prática escolar do Ensino Médio uma organização do processo de ensino-aprendizagem de Sistema de Equações Lineares, potencializando o desenvolvimento do pensamento teórico, necessário à formação humana.

Considerando que a organização do ensino-aprendizagem requer conhecimentos e saberes matemáticos voltados para tal, elaborados, aplicados e discutidos à luz de referenciais teóricos consistentes, neste artigo, trazemos as contribuições da Teoria Histórico-Cultural, proposta por L. S. Vigotski e seus colaboradores, na antiga União Soviética, no século passado, e de Teorias dela advindas, como a Teoria da Atividade de Estudo de V. V. Davidov, numa perspectiva do que se tem chamado de Didática Desenvolvimental. Apresentamos alguns aspectos dessas teorias e uma parte de um experimento didático-formativo realizado com alunos de Ensino Médio, considerando o conteúdo Sistema de Equações Lineares, que, geralmente, é trabalhado neste nível de escolaridade.

O ensino-aprendizagem de Sistema de Equações Lineares, assim como o de outros conteúdos escolares, carrega consigo um conhecimento historicamente e socialmente produzido, a partir de uma diversidade social e cultural, de necessidades, de movimentos de avanços, contradições e retrocessos. Assim, esse ensino com base em seu movimento lógico e histórico, pode proporcionar o desenvolvimento do pensamento teórico e a formação integral do homem.

Trazer essa contribuição para o contexto do Ensino Médio brasileiro, cada vez mais direcionado para uma formação técnica e utilitária, é importante para pesquisadores, professores e alunos. O ensino da álgebra e, dentro dele, o de Sistema de Equações Lineares, para este nível escolar não pode se restringir ao encontrar o “valor do x ”, ao cumprimento de um componente curricular para a aprovação no ano letivo ou para um exame/vestibular. O processo de ensino-aprendizagem precisa considerar que os jovens do Ensino Médio, quando estão formando sua personalidade,

necessitam de formação humana – que pode ocorrer a partir dos conteúdos escolares, como os relacionados à álgebra, que passam a ser elementos mediadores importantes.

Nessa perspectiva, este artigo visa endossar os estudos sobre o ensino-aprendizagem da álgebra, fundamentados na Teoria Histórico-Cultural e em teorias dela advindas, com a apresentação de pressupostos teóricos dessas teorias e de parte de um experimento didático-formativo.

Assim, o texto está organizado em cinco seções. Na primeira, trazemos alguns aportes das teorias nas quais o estudo se fundamenta; em seguida, considerações acerca do experimento didático-formativo; na terceira, um panorama sintético do movimento lógico-histórico de Sistema de equações lineares; na quarta, a descrição e análise da Tarefa 3 do experimento; e, por fim, as considerações finais.

Aportes da Teoria Histórico-Cultural e da Teoria da Atividade de Estudo

Este estudo se fundamenta na concepção dialético-materialista de pesquisa em educação. Revela uma concepção de mundo, na qual a produção do conhecimento acontece de forma processual, no movimento histórico de uma sociedade, e se concretiza, quando transforma de forma significativa a realidade concreta e histórica (Souza; Magalhães & Silveira, 2014).

O ensino da Matemática orientado por pressupostos da Teoria Histórico-Cultural e de teorias dela advindas, como a Teoria da Atividade de Estudo, conduz para a apropriação histórica dos conceitos e depreende que o movimento está presente na construção desse conhecimento. Considera que o ensino proposto advém da necessidade do ser humano e de sua relação com o mundo. A teoria e a prática se constituem em uma unidade que dá sentido/significado ao conhecimento aprendido (Moura, 2000).

Fundamentar o ensino da álgebra nessa perspectiva pode propiciar ao professor uma nova qualidade de ensino, afirmam Sousa, Panossian & Cedro (2014). De acordo com os autores, o docente, ao entender o movimento lógico e histórico da álgebra, poderá trabalhar não apenas com o seu produto, mas, também, com seu processo. Ressaltam ainda que o ensino da essência dos conceitos algébricos, considerando a totalidade do objeto contribui para o desenvolvimento da humanização pelo conhecimento. Humanização que se desenvolve pela atividade humana e no avanço do pensamento teórico.

A pesquisa realizada se concentrou no desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, conforme proposto por autores, como V. V. Davidov, que destacam a

importância da aquisição de conhecimento teórico para o desenvolvimento psíquico e intelectual. A Atividade de Estudo, nos pressupostos de Davidov (1988), tem foco no desenvolvimento do conhecimento teórico (combinação unificada da abstração substantiva, generalização e conceitos teóricos) e uma estrutura singular que contribui para o desenvolvimento mental e da personalidade da criança. Para o referido autor, a escola tem um papel preponderante na formação do indivíduo, pois, quando a criança começa a vivenciar esse meio, assimilam-se as formas mais desenvolvidas de *consciência social*, dado que a apropriação dos conhecimentos escolares decorre da atividade de estudo.

O pensamento teórico se constitui com base na dialética entre o concreto real e o concreto pensado, em um movimento de abstração em que o particular engendra o geral, ao mesmo tempo em que o concreto pensado engendra o concreto real. "O pensamento teórico reflete o objeto no aspecto das relações internas e leis do movimento deste, cognoscíveis por meio da elaboração racional dos dados do conhecimento empírico" (Kopnin, 1978, p.152).

Entendemos a formação de conceito como um "*autêntico e complexo ato do pensamento*", que necessita abranger, notadamente, intrincadas formas do pensamento. A formação de conceito não se restringe a uma atividade mental mecânica e automática, não se refere, apenas, a um conjunto de conexões associativas que se assimilam com o auxílio da memória (Vigotski, 1934).

O conceito, de acordo com Davidov (2001), no seu processo de formação, comporta-se como uma atividade mental que reproduz o objeto idealizado e o sistema de suas relações. O conceito atua, simultaneamente, como forma de reflexo do objeto material e como meio de sua reprodução mental, de sua estruturação, isto é, como ação mental especial. "Ter um conceito sobre um objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construí-lo, a ação mental de construção e transformação do objeto constitui o ato de sua compreensão e explicação, o descobrimento de sua essência" (Davidov, 1988, p. 128). No processo de formação de conceitos, são importantes os processos mentais de abstração e de generalização, que partem de um concreto dado, para chegar a um concreto pensado, síntese de generalizações. Esse movimento é dinâmico, pois a cada aproximação do objeto dado, novas sínteses podem ser produzidas.

Na formação dos conceitos, cabe enorme papel à análise enquanto movimento que parte do concreto dado nas sensações, ao abstrato, cabendo também à síntese enquanto movimento do abstrato a um novo concreto, que é o conjunto das definições. O processo analítico é inconcebível sem indução e dedução.

Constituído, o conceito leva implícitos, em forma original, todos os juízos e deduções que se verificaram no processo de sua formação. **O conceito é a confluência, síntese das mais diversas ideias, o resultado de um longo processo de conhecimento** (Kopnin, 1978, p.191, grifo nosso).

No processo de apropriação do conceito científico, Vigotski (2001) chama atenção para a cooperação entre professor e aluno, em que o adulto proporciona à criança, a possibilidade de desenvolver as funções psíquicas superiores. Essas, compreendem um sistema geneticamente distinto e constituído de estruturas heterogêneas, em que as funções se formam com base no desenvolvimento histórico e social.

As funções psíquicas superiores, desde suas formas mais elementares à realidade objetiva e à atividade mediadora - pelo uso das palavras, estão atreladas à formação de conceitos, que não acontece de maneira linear. As formas de pensamentos variam nas suas diferentes fases, num movimento dialético que permite o desenvolvimento do indivíduo e a apropriação do conceito. Com base nesse movimento, o aluno em idade escolar desenvolve a atenção voluntária e memória lógica – funções psíquicas superiores, assim como a abstração, a generalização e o pensamento teórico. A capacidade do aluno em tomar consciência das funções superiores intelectualiza-o, engendrando o seu desenvolvimento.

A colaboração com outras pessoas é a origem do desenvolvimento do indivíduo. Para Vigotski (2001, p. 270), “[...] quando aplicamos o princípio da colaboração para estabelecer a área de quase desenvolvimento, obtemos a possibilidade de investigar diretamente o fator mais determinante da maturação intelectual que culminará nos períodos da próxima e subsequente idade de seu desenvolvimento”.

O ensino e a prática docente têm a característica de potencializar o desenvolvimento do aluno. O professor, ao ensinar e/ou propor uma atividade em grupo – colaborativa, abordando processos imaturos, aqueles que o indivíduo não tem total domínio, mas estão em vias da maturação, está trabalhando na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que é:

[...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (Vigotski, 2001, p.97).

No que tange à colaboração, Vigotski (2008) coloca a mediação como um contributo à transmissão racional e intencional da experiência e do pensamento humano. As mediações permitem a compreensão e a aproximação entre as partes que constituem

uma totalidade – proporciona a maturação dos processos e sua negação ocasiona a produção de um todo fragmentado.

Depreende-se da obra de Vigotski (2001, 2008) que a atividade mediadora se relaciona com a função desempenhada pelo professor no âmbito escolar, no que se refere ao planejamento, à elaboração, à organização, ao desenvolvimento de uma aula, aos atributos da docência, à formação dos conceitos, aos meios de ensino, aos artefatos da cultura material e espiritual, às tecnologias, entre outros aspectos essenciais para promover o desenvolvimento do aluno.

O professor, então, apresenta-se como organizador dos elementos mediadores durante a aprendizagem do aluno, organizando o conteúdo e conduzindo o processo de ensino-aprendizagem. O docente, de modo intencional e consciente, atua na ZDP, potencializando o desenvolvimento dos alunos. Considerando que o ensino se dá de maneira conjunta com a aprendizagem, a atividade mediadora contribui para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. Neste processo de organização, o professor necessita conhecer os conceitos matemáticos em sua essência, para além das representações e dos aspectos externos.

A investigação sobre o ensino-aprendizagem requer uma unidade de análise que expresse/contemple as experiências socioculturais de um indivíduo. Os alunos e os professores, ao adentrarem em uma sala de aula, como seres-humanos, estão carregados de anseios, dúvidas, expectativas, vivenciaram/vivenciam aspectos culturais de um determinado grupo, aos quais pertencem, possuindo uma concepção de mundo. Além disso, a sala de aula já se apresenta como um espaço tipificado socialmente.

As socializações permitem que crianças se apropriem de manifestações empíricas, compreendam regras e condutas. De forma gradativa, observam o concreto, analisam o material, interpreta-o logicamente para iniciar o processo de abstração. A relação entre atividade mediadora, comunicação e as experiências socioculturais de um indivíduo não ocorrem, apenas, no plano biológico e cognitivo. A realidade objetiva presente em uma sociedade influencia a comunicação e, conseqüentemente, também, os processos de ensino-aprendizagem.

Desse modo, fundamentamos este estudo nas discussões referentes aos pressupostos da Teoria da Atividade de Estudo, que estabelece um conjunto de princípios e de ações que direcionam o processo de formação de um conceito, com base nas abstrações e generalizações substantivas. Considera que o conteúdo e suas formas influenciam no processo aprendizagem e no desenvolvimento do pensamento teórico. Ao

se apropriar dos conteúdos, o aluno tende a desenvolver o pensamento teórico, promovendo a reflexão, análise e o experimento mental, afirma Davidov (1988).

O conceito de “atividade” é fundamental na psicologia soviética e tem origem na dialética-materialista, na descoberta de esquemas universais da atividade humana. Assim, precisa ser compreendido de forma mais ampla, pois a “[...] a lógica dialética estuda e descreve as formas historicamente significativas e universais da atividade prática e mental das pessoas, formas que estão na base do desenvolvimento de toda a cultura material e espiritual da sociedade” (Davidov, 1988, p.22, tradução nossa). Esse autor afirma que a atividade pode se manifestar de diferentes formas: comunicação emocional, manipulação objetal, brincadeira, estudo, atividades socialmente úteis – por exemplo, o trabalho.

A Teoria da Atividade de Estudo, inicialmente desenvolvida no século XX, por pedagogos e psicólogos soviéticos, dando continuidade aos pressupostos de Vigotski, Leontiev, Luria e outros colaboradores, coloca em destaque as transformações dos alunos por meio da atividade de estudo. Não só o desenvolvimento mental, que envolve a apropriação de conhecimentos e de habilidades, mas também o seu desenvolvimento moral e pessoal, o que chamamos de desenvolvimento integral.

A essência do conceito de Atividade de Estudo “[...] consiste no desejo de abordar a análise da transição da atividade para seu ‘produto subjetivo’ – na análise de novas formações, mudanças qualitativas na psique da criança, seu desenvolvimento intelectual e moral” (Davidov, 2019, p. 194). Isso envolve o apropriar-se, ou seja, os processos de assimilação, que partem do interpsicológico para o intrapsicológico, segundo nos propõe Vigotski.

A atividade de estudo tem um aparato conceitual, que é comum à psicologia pedagógica soviética, segundo Davidov & Márkova (1987), mas avançaram à medida que os experimentos foram sendo realizados. Assim, para clarificar os pressupostos fundamentais da Atividade de Estudo, cumpre esclarecer a compreensão sobre “assimilação”, “desenvolvimento” e “aprendizagem” nessa teoria.

O conceito de *assimilação* ou *apropriação* é fundamental, pois, segundo ele o aluno reproduz subjetivamente a experiência histórico-social da humanidade. De acordo com Davidov (2019, p. 196)

A assimilação é o processo de reprodução dos modos de ação formados pelo indivíduo durante o processo histórico de transformação dos objetos e da realidade circundante, de seus tipos de relações e o processo de conversão desses padrões sociais em formas de subjetividade individual.

Não se trata, portanto, de uma reprodução passiva, mas, sim, de uma atividade do aluno no sentido de *apropriar-se*, de tornar próprio, pessoal essa experiência, presente na cultura, nas ciências. Essa assimilação não ocorre, apenas, no espaço escolar, mas, também, em outros tipos de atividades. Porém, “pelo visto, só no estudo aparece o objetivo específico de assimilar, enquanto que em outros tipos de atividade a assimilação é um produto derivado” (Davidov & Márkova, 1987, p. 323), porque na atividade de estudo existe essa intencionalidade. Essa busca de assimilar a experiência humana histórico-social, na qual está fixada a atividade genérica humana, a escola propõe aos estudantes atividades adequadas, porém, não idênticas às das ciências. Nesse sentido, podemos dizer, que se faz necessária a organização do ensino, que exige do professor conhecimentos próprios para essa atividade, tanto os específicos, relacionados à disciplina que se ensina, como também os que os tornam ensináveis.

Ao buscar uma correlação entre assimilação e desenvolvimento, Davidov (2019, p. 196) afirma que “[...] o desenvolvimento acontece por meio da assimilação (apropriação) do indivíduo da experiência histórico-social”. Ressalta, ainda, que esses processos não são independentes, no entanto, a assimilação pode não promover, necessariamente, o desenvolvimento. Neste contexto, Davidov (2019) relaciona a aprendizagem desenvolvimental como sendo a maneira de organizar a assimilação nas condições históricas e concretas determinadas pela sociedade. Ademais, ressalta que é, na Atividade de Estudo, que é desenvolvida a assimilação da experiência socialmente elaborada.

Sobre a atividade de estudo e sua estrutura, Elkonin (1961), um dos precursores dessa teoria, afirma que a Tarefa de estudo é sua unidade básica. Segundo esse autor, a Tarefa de estudo modifica o sujeito da atividade, transformando-o e provendo o seu desenvolvimento. Analisa que essa mudança diz respeito aos novos modos de ação com os conhecimentos científicos.

Assim, na pesquisa realizada, envolvendo o ensino-aprendizagem de conhecimentos algébricos, buscamos prover uma a atividade de estudo que fosse além da apropriação de técnicas e procedimentos matemáticos, mas que também gerasse a autotransformação do indivíduo no que tange às suas ações humanas, pois, segundo Davidov (2019, p. 199). “O principal conteúdo da Atividade de Estudo é a assimilação dos modos generalizados de ação na esfera dos conceitos científicos e as mudanças qualitativas no desenvolvimento psíquico [...]”.

A Atividade de estudo tem uma estrutura, que é assim, apresentada por Davidov (2019, p. 199-200):

1. *Compreensão do aluno das Tarefas de estudo.* A Tarefa de Estudo está intimamente relacionada com a generalização substantiva (teórica). Seu propósito é levar o aluno a dominar as relações generalizadas na esfera do conhecimento a estudar, e estimulá-lo a dominar novas formas de ação. A aceitação da Tarefa de estudo, pelo aluno, "para si mesmo" e a sua formulação autônoma está intimamente relacionada com a motivação para aprender, com a transformação da criança em sujeito da atividade.

2. *A realização, pelo estudante, das ações de estudo* – com uma organização correta do processo de aprendizagem, que se orientam pelo objetivo de revelar as relações gerais, os princípios orientadores, as ideias-chave de uma dada esfera do conhecimento, de modelar essas relações de dominar os modos de transição das relações universais para sua concretização e vice-versa, bem como os modos de transição do modelo para o objeto e vice-versa.

3. *A realização, pelo próprio estudante, das ações de controle e avaliação.*
(grifos nossos)

Assim, a atividade de estudo se estrutura em Tarefas de estudo, que exigem do estudante determinadas ações, que se realizam por meio de operações. Durante a Tarefa escolar, os alunos precisam identificar a essência do objeto, com base na abstração visando a apropriação dos conhecimentos teóricos. As Tarefas consideram a análise de situações particulares, propiciando a evidência da característica geral nas situações específicas. Precisam oferecer autonomia aos alunos, fazendo com que eles desenvolvam as ações no sentido da formação do conceito.

Um dos componentes significativos da Atividade de Estudo é o sistema de ações particulares para a solução das Tarefas. Desse modo, a aprendizagem é produzida a partir da realização das seguintes ações: 1) transformação dos dados da Tarefa de aprendizagem, com a finalidade de descobrir a relação universal do objeto, que deverá ser refletida no correspondente conceito teórico; 2) modelação da relação universal em forma objetal, gráfica ou com letras; 3) transformação do modelo com a finalidade de estudar a propriedade da relação universal que foi identificada no objeto; 4) construção do sistema de Tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral; 5) Controle da realização das ações anteriores; 6) avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da Tarefa de aprendizagem dada (Davidov, 1988, p. 174).

A organização do conteúdo, a forma como ele vai ser ensinado, tem fundamental importância no processo do desenvolvimento da aprendizagem do aluno. Se, na escola, as Tarefas propostas pelos docentes versarem, apenas, sobre conteúdos e exercícios que os alunos já sabem e sem organização adequada, quais novos conceitos serão formados, efetivamente, por esses alunos? É preciso que os professores desafiem seus alunos, pautando-se na organização adequada do conteúdo, promovendo motivos que incitem a

necessidade de aprendizagem de novos conceitos, atuando na zona de desenvolvimento proximal.

Na organização da assimilação dos conteúdos científicos, necessita-se conhecer sua essência, ou seja, conhecer sua história. Vigotski (1934/2001) ressalta, ainda, que o desenvolvimento de um conceito não pode ocorrer com base na assimilação de algo pronto, acabado, vazio de sentido e significado. Assim é importante conhecer e dominar o conteúdo a ser ensinado, o seu movimento lógico-histórico, uma vez que a busca de sua essência deverá nortear a organização do ensino.

As ações de ensino e aprendizagem projetam o caminho para a formação do conceito. Consideram o primeiro contato com o objeto em pauta, identificando suas características gerais, enaltecendo suas semelhanças e diferenças. Seguidamente, tem-se a modelação como ação que possibilita entender o objeto para além de sua aparência, analisando suas características internas e estabelecendo relações entre suas partes. O modelo proporciona a investigação do objeto na sua forma “pura”, com a abstração substantiva, a dedução e a generalização. A identificação do geral permite a resolução da Tarefa.

Por exemplo, no estudo de Sistema de Equações Lineares, considera-se a resolução das equações (incógnitas) como a relação geral principal desse assunto, o aluno, ao conhecer os métodos para resolver um sistema de equações está desenvolvendo sua abstração substantiva, ao identificar que a solução do sistema é também válida para cada uma das equações que compõem o sistema, instaura-se a generalização substantiva. Ou seja, para entender um sistema de equações – que é o todo, é necessária a generalização do resultado para as equações, que são as partes, advinda da abstração substantiva. Isso expressa a essência de um sistema, a simultaneidade da solução das equações que o compõem. A solução do sistema é também solução para cada uma das equações, se ela existir. Desse modo, vislumbramos a fluência de movimento do geral para o particular – sistema para as equações, e do particular para o geral – equações para o sistema - que tem como nexos internos, a presença de incógnitas que têm que satisfazer a determinadas condições, presentes nas equações, cuja solução deve satisfazer de modo simultâneo a todas elas.

Nesse processo, o professor precisa monitorar as ações dos alunos, mediando-as com o intuito de potencializar suas aprendizagens e dirimir suas dificuldades. A avaliação configura-se como ação preponderante para o sucesso da Tarefa proposta. Ela constata não apenas se o conceito foi assimilado, mas evidencia o processo como um todo, os erros e os acertos. Possibilita ao docente refletir sobre as Tarefas, a forma como foi

organizada, suas intervenções. Avaliação permite que o docente reveja os processos de ensino-aprendizagem e aprimore seus próximos planejamento e ações.

Experimento didático-formativo: uma proposta para a pesquisa e para o ensino

A *Atividade de Estudo* utiliza como método principal o experimento formativo, que é o mais adequado na psicologia do desenvolvimento e na pedagogia, conforme Davidov & Márkova (1987). De acordo com esses autores, esse método tem origens nas ideias do método genético-experimental de L.Vigotski, e foram ampliadas pelos trabalhos de A. Leóntiev, A. Luria, P. Galperin, A. Zaporózhets, D. Elkonin. A essência desse método está na criação de condições para que ocorram as transformações psíquicas daquele que aprende, assim como o seu desenvolvimento. Foi utilizado em programas escolares experimentais, na ex-União Soviética, na segunda metade do século passado.

Em pesquisas, no campo da didática desenvolvimental, no Brasil, o experimento didático-formativo vem sendo utilizado por pesquisadores, não nos moldes em que eram realizados pelos precursores na União Soviética, com longa duração, contando com equipes multidisciplinares. Aqui, são propostos experimentos dentro das condições possíveis da nossa realidade educacional, visando a introdução de novas metodologias e recursos, mas, principalmente buscando verificar em que medida uma organização do ensino com bases nos pressupostos dessas teorias pode conduzir à apropriação de conceitos e procedimentos de ação dentro de uma dada disciplina escolar, tendo em vista o desenvolvimento integral do aluno. Trata-se de um método de investigação didática e psicológica. Assim, podemos afirmar que a realização de um experimento didático-formativo, a partir dos pressupostos da Teoria da Atividade de Estudo, exige do professor conhecimentos do conteúdo que ensina nos seus aspectos lógicos e históricos, mas também conhecimentos dos aspectos pedagógicos e didáticos que envolvem a organização do ensino, numa concepção que se baseia nos nexos internos dos conceitos e, não apenas, em seus nexos externos.

Aquino (2017) reforça que, nas pesquisas que estão sendo realizadas em nosso país, o experimento didático-formativo está orientado para potencializar a aprendizagem e o desenvolvimento intelectual, físico e emocional dos alunos e propõe as seguintes etapas para a sua realização: 1ª) Revisão da literatura e diagnóstico da realidade; 2ª) Elaboração do sistema didático experimental; 3ª) Desenvolvimento do experimento didático-formativo; 4ª) Análise dos dados e elaboração do relatório.

A pesquisa³ que desenvolvemos, um experimento didático-formativo sobre o ensino de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio, com base nos pressupostos da Teoria da Atividade de Estudo de Davidov, foi realizado em um colégio privado da cidade de Uberaba – Minas Gerais, no contraturno do ensino regular, com alunos da 2ª série do Ensino Médio, uma vez que o aprendizado de Sistema de Equações Lineares ocorre no referido ano escolar e teve a duração de, aproximadamente, dois meses.

Ressaltamos que seis alunos participaram integralmente do experimento. Nos diálogos os alunos estão identificados pelos pseudônimos: Amanda, Nathália, Beatriz, Gabriel, Miguel e César.

Para a elaboração do experimento didático-formativo, foram desenvolvidas Tarefas de estudo elaboradas, considerando o movimento lógico-histórico do conteúdo *Sistema de Equações Lineares*, a pesquisa bibliográfica e as análises documentais que foram realizadas neste estudo, envolvendo, também, contribuições dos professores do Ensino Médio da escola participante deste trabalho.

O experimento foi organizado em três Tarefas de Estudo, cada uma delas visava o desenvolvimento de ações e operações essenciais para a formação do conceito de Sistema de Equações Lineares. As três Tarefas propostas no experimento didático formativo são: Tarefa 1: Introduz a comparação como uma ação necessária ao humano, que acaba conduzindo à relação de igualdade e de desigualdade; Tarefa 2: Trata o conceito de equação e seus juízos; Tarefa 3: Visa contribuir para a formação do conceito de Sistema de Equações Lineares.

Cada Tarefa constitui-se como uma unidade de análise. Neste artigo, discutimos os resultados da Tarefa 3, observando os seguintes aspectos: 1) transformação dos dados da Tarefa na condução da identificação do princípio geral do conceito de Sistema de Equações Lineares; 2) da modelação à transformação de um modelo para o conceito de equações lineares; 3) a apropriação do conceito de Sistema de Equações Lineares como ferramenta do pensamento teórico – controle e avaliação.

Antes de passarmos à análise da Tarefa 3, apresentamos um panorama sintético do desenvolvimento lógico-histórico do conteúdo a ser trabalhado - Sistema de Equações Lineares, pois isso é fundamental, quando trabalhamos com a formação de conceitos nesta perspectiva.

³ O projeto foi submetido ao CEP, no dia 13 de dezembro de 2017, e aprovado no dia 21 do mesmo mês. *Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 28, p. 01-44, 2026, e66779*

Sistema de equações lineares e o seu movimento lógico-histórico: um panorama

Ao analisarmos o movimento histórico da álgebra, verificamos que as equações constituem um componente de estudo fundamental dessa área da Matemática. Em relação ao nosso objeto de estudo, o Sistema de Equações Lineares, em alguns livros didáticos encontramos a seguinte definição de Iezzi & Hazzan (1985, p.116): “É um conjunto de m ($m \geq 1$) equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ”. Assim, o sistema é linear, se for do tipo:

[illegible]

Chamamos a atenção para essa definição de Sistema de Equações Lineares, que é a forma como é expressa atualmente, resultado de um processo histórico e lógico em que se desenvolveu o conhecimento matemático – mesmo que isso não esteja explícito para o aluno, ao se deparar com essa definição, que poderá não ter qualquer significado para ele.

O conhecimento sobre Sistema de Equações Lineares, juntamente com a Álgebra Linear, teve seus primeiros registros de desenvolvimento, na Babilônia, com problemas com duas equações e duas incógnitas há 4 000 anos. O avanço dessa sociedade – região explorada pela agricultura, comércio, entre outros, contribuiu, também para o aprimoramento dos modos de resolverem problemas matemáticos. Os babilônicos, utilizando tábulas de calcular, resolviam equações quadráticas, cúbicas e biquadradas (Eves, 2011).

De acordo com Santos e Zuin (2017), as resoluções dos babilônicos apresentavam uma linguagem algébrica retórica. Muitos problemas retratavam a vida cotidiana, sendo resolvidos pelos atuais chamados Sistema de duas equações e duas incógnitas – equações lineares, pelos métodos, hoje conhecidos como substituição e mudanças de variáveis. A denominada álgebra retórica foi estruturada por uma linguagem comum atrelada ao número, no entanto, observa-se a dificuldade de utilizar as palavras – sem símbolos, para representar quantidades desconhecidas (Panossian, 2008).

Os chineses, também, propiciaram significativas contribuições no que tange ao desenvolvimento de Sistema de Equações Lineares. Cerca de 200 a.C., eles resolviam

Sistema de Equações Lineares de ordem dois e três, sendo a forma de resolução utilizada, referência para o desenvolvimento do método de eliminação de Gauss. Esse método, também conhecido como método de escalonamento é elementar e consagrado pelo seu uso secular e, ao mesmo tempo, atual. O escalonamento é um método extremamente eficiente para resolver o sistema linear, baseia-se no fato de que todo o sistema é *equivalente* a um sistema escalonado, sendo que:

[...] chega-se a um sistema escalonado equivalente por meio de uma sequência de operações elementares, que são as seguintes: (1) Trocar a ordem de equações do sistema; (2) Substituir uma equação do sistema por sua soma com um múltiplo de outras equações do mesmo sistema (Lima et al, 2006, p.135).

Assim, ao submeter um sistema a um conjunto de operações elementares, obtém-se um sistema equivalente. O método de resolução também se aproximava ao processo de eliminação por adição (Boyer, 2003).

Os indianos apresentavam um método retórico para a resolução de Sistema de equações – várias equações e várias incógnitas. O método de resolução poderia ser classificado como *Eliminação* (Eves, 2004). Já na Grécia foram identificados problemas lineares geométricos em que o seu processo de resolução requeria o uso de Sistema de Equações Lineares (Eves, 2004).

Como já discutido, a Matemática árabe proporcionou muitas contribuições para a álgebra. Nesse contexto, Eves (2004) pondera que nesse período foram trabalhados métodos de resolução de problemas por Sistema de equações, com diferentes incógnitas e podendo chegar a uma resolução indeterminada.

Já o estudo moderno de Sistema de Equações Lineares pode ter se originado com o alemão Leibniz, no período de 1693, com a noção de determinante como um contributo à resolução de Sistema de Equações Lineares. Isso nos remete a pensarmos sobre a organização do conhecimento para o processo de ensino-aprendizagem, visto que, não necessariamente, a forma mais eficiente de ensinar um conteúdo converge com sua evolução histórica.

Sobre o ensino de Sistema de Equações Lineares na Educação Básica, verificamos poucas pesquisas que avaliaram a situação da realidade do ensino desse conteúdo escolar. Além disso, na observação das aulas sobre esse conteúdo ficou evidenciada a ênfase no método de resolução.

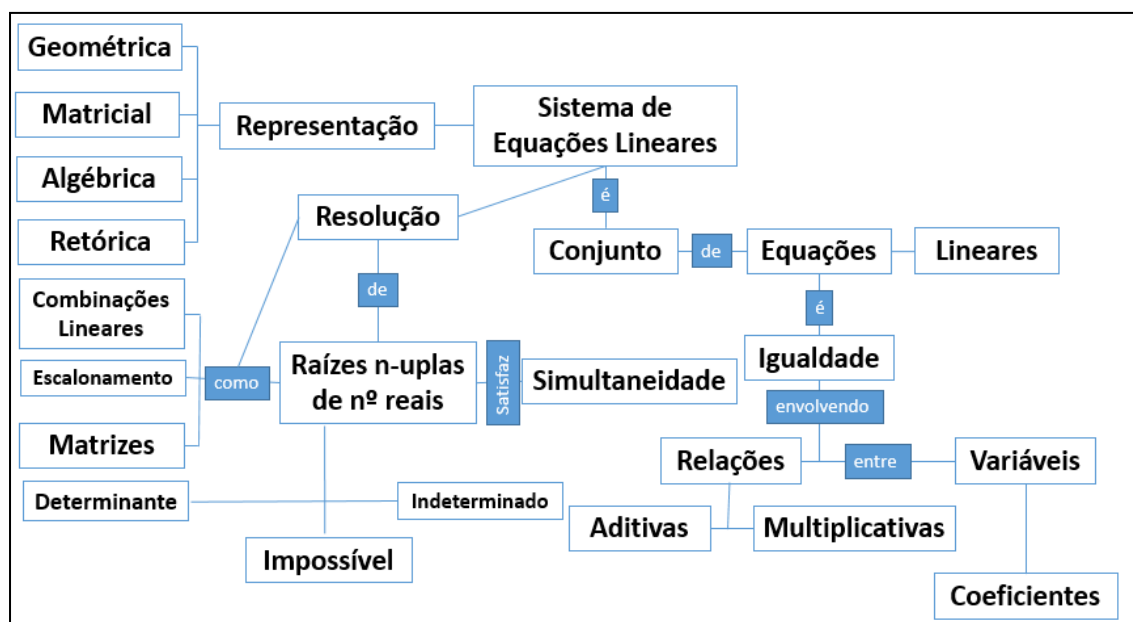
O conteúdo de Sistema de Equações Lineares caracteriza-se como um tópico de interesse prático. Essa característica endossa o proposto nos documentos curriculares,

que defendem a necessidade de os conteúdos escolares apresentarem relevância para a vida cotidiana dos alunos.

A análise do movimento histórico de Sistema de Equações Lineares e sua definição lógica, nos permitem evidenciar a relação dos elementos apresentados na Figura a seguir.

Figura 1

Elementos e/ou palavras que caracterizam Sistema de Equações Lineares (Dados da pesquisa).



O conceito de Sistema de Equações Lineares está intimamente relacionado com o conceito de equação, que é a sua essência. Nos processos de ensino-aprendizagem, bem como no movimento histórico desse conhecimento, a sistematização e/ou o método de resolução de um sistema linear são evidenciado parecendo ser sua característica principal.

Entendemos que o processo de resolução de um sistema e, notadamente, o uso de algoritmos para encontrar o valor de determinada incógnita não traduz a essência do conceito de Sistema de Equações Lineares. Para compreendermos a essência desse conhecimento precisaríamos identificar e clarificar quais são os direcionamentos e/ou propriedades que são consideradas no processo de resolução de Sistema de Equações Lineares.

Na Figura apresentada, evidenciamos que um conjunto de equações e o inter-relacionamento entre elas constituem um sistema. E o processo de resolução de um sistema, necessita considerar que o valor de cada incógnita a ser encontrada deve

satisfazer, simultaneamente, as “condições” de todas as equações que constituem o sistema.

Desse modo, a apropriação do conceito de Sistema de Equações Lineares pressupõe a assimilação do conceito de equações e tem como característica um método de resolução que permite encontrar soluções, simultâneas, de um conjunto de equações. Logo, um sistema linear pode ter uma única solução – determinado; uma infinidade de soluções – indeterminado; ou nenhuma solução – impossível. Um sistema é classificado como impossível, quando as informações fornecidas para encontrarmos os valores das incógnitas são incompatíveis.

Determinadas situações que envolvem Sistema de Equações Lineares podem, ainda, ser interpretadas graficamente/geometricamente. Por exemplo, um sistema de duas equações, tem como solução para cada uma delas as coordenadas (x,y) dos pontos de uma reta, sendo que o sistema é indeterminado, impossível ou determinado, caso as retas representadas pelas equações, coincidam, sejam paralelas ou sejam concorrentes, respectivamente.

Desse modo, no movimento necessário para a apropriação do conceito de Sistema de Equações Lineares é essencial, também, o estudo sobre equações e seu movimento lógico-histórico

Sistema de equações lineares: realizando o experimento

A Tarefa 3, que escolhemos para apresentar, visava o desenvolvimento dos juízos e conceitos relacionados a Sistema de Equações Lineares. Considerando as Tarefas sobre comparações e equações, na perspectiva da Teoria da Atividade de Estudo – já realizadas, esperávamos de antemão melhor desenvolvimento dos alunos.

Organizamos esta Tarefa, conforme apresentado na Tabela 1 a seguir, abrangendo a necessidade de estudar Sistema de Equações Lineares – estabelecendo uma relação com o cotidiano dos alunos; discussões sobre a definição de Sistema de Equações Lineares – seus juízos e conceitos; desenvolvimento das modelagens algébricas e geométricas do conteúdo – com o uso de vídeos e tecnologias digitais; estudo sobre Sistema equivalentes e suas propriedades; e a discussão, classificação e resolução de situações-problema de Sistema de Equações Lineares.

Desse modo, a Tarefa proposta exigiu dos alunos o desenvolvimento de diferentes tipos de ações que influenciaram a formação do conceito em estudo, pautando-se no pensamento teórico. Tais Tarefas, assim, diferenciam-se das abordagens presentes nas

salas de aulas - que evidenciam os métodos de resolução, em detrimento das discussões sobre os conceitos envolvidos.

Tabela 1

Organização das Tarefas sobre os juízos e o conceito de Sistema de Equações Lineares (Dados da pesquisa).

O estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio Tarefa 3: Desenvolvendo o conceito de sistema de equações		
Tarefa	Ações	Objetivo
3.1, 3.2 e 3.3: Qual a futura profissão que você pensa em exercer? Introdução da ideia de Sistema de Equações Lineares.	Encontrar um "valor (valores)" desconhecido(s), que atenda a determinadas condições, visando a resolução de problemas	Introduzir o "conceito" de Sistema de Equações Lineares, como um conhecimento que possibilita ao aluno resolver um problema cuja solução tem como essência responder simultaneamente a condições dadas. Verificar a Transformação dos dados da Tarefa de estudo com a finalidade de descobrir a relação universal do objeto, que deverá ser refletida no correspondente conceito teórico.
3.4: Dando significado ao conceito/definição de Sistema de Equações Lineares	Estabelecer as relações gerais – e a essência, dos juízos e conceitos relacionados a um Sistema de Equações Lineares.	Traduzir o significado de Sistema de Equações Lineares e o sentido dos elementos que constituem a sua definição.
3.5: Resolução algébrica de Sistema de Equações Lineares	Modelar algebricamente situações-problema por Sistema de Equações Lineares.	Verificar a capacidade de utilizar a linguagem algébrica para representar situações do cotidiano. Verificar como os alunos resolvem um Sistema de Equações Lineares, dando sentido às operações realizadas e verificando possíveis dificuldades.
3.6, 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10: Sistema Equivalentes	Compreender as propriedades presentes no processo de resolução de Sistema de Equações Lineares.	Desenvolver o pensamento teórico dos alunos no processo de resolução de Sistema de Equações Lineares.
3.11 e 3.12 Interpretação Geométrica dos Sistema de Equações Lineares	Interpretar Sistema de Equações Lineares representados geometricamente.	Verificar a capacidade do aluno em interpretar algebricamente uma representação geométrica.
3.13, 3.14 e 3.15 - Discussão de Sistema de Equações Lineares	Compreender as classificações e as propriedades de Sistema de Equações	Verificar se os alunos conseguem aplicar o conceito estudado – sua relação geral, em situações/problemas particulares

	Lineares considerando suas diferentes formas de representação.	
3.16, 3.17 e 3.18 Situação-problema envolvendo Sistema de Equações Lineares	Mobilizar os juízos e o conceito de Sistema de Equações Lineares para resolver uma determinada situação-problema.	Verificar se os alunos conseguem aplicar o conceito estudado – sua relação geral, em situações/problemas particulares

Fonte: Elaborado pelo autor

Iniciamos a primeira Tarefa sobre Sistema de Equações Lineares, propondo aos alunos a leitura de uma reportagem⁴ sobre como escolher a futura profissão. Os alunos, no Ensino Médio, em processo de formação de sua personalidade, têm dúvidas frequentes sobre qual “carreira”, seguir após a conclusão da Educação Básica. A referida reportagem proporcionou discussões sobre quais critérios e condições eles precisariam considerar para “escolher” sua futura profissão, de modo que ficassem satisfeitos.

Esta Tarefa demonstra a possibilidade de promover nas aulas de Matemática discussões que vão além do uso da Matemática pela Matemática, da memorização e aplicação de fórmulas. A função social do professor – que ensina diferentes conteúdos, dentre eles, a Matemática, compreende a humanização pelo ensino dos conteúdos escolares.

Destarte, as discussões com os alunos sobre qual profissão escolher foi muito enriquecedora, uma vez que eles expuseram seus gostos, as expectativas familiares, a influência das amizades, entre outros. Alguns alunos não conheciam todos os cursos que as Universidades e Faculdades - nas regiões em que eles moravam, ofereciam. Outros não conheciam as atribuições de uma determinada profissão, as formas de ingresso ao ensino superior, entre outros aspectos.

⁴ Reportagem disponível em: <https://guiadoestudante.abril.com.br/orientacao-profissional/como-escolher-o-curso-que-melhor-se-encaixa-em-seu-perfil/>. Acesso: 13 de fev. de 2020.

Figura 2

Tarefa 3.1, com registros da aluna Beatriz (Dados da pesquisa).

Tarefa 3 – Sistemas de Equações Lineares

1. Qual a futura profissão que você pensa em exercer? **ARQUITETURA**
 Leia a reportagem em anexo e discuta com os colegas sobre as questões propostas.

Link da Reportagem: <https://guiadoestudante.abril.com.br/orientacao-profissional/como-escolher-o-curso-que-melhor-se-encaixa-em-seu-perfil/>

A escolha da futura profissão não é simples. Para se dar bem é necessário colocar na balança um série de fatores, como afinidades, habilidades, bem estar, retorno financeiro, entre outros. Com base na reportagem, elaboramos o esquema a seguir para ajudá-los a pensar sobre a sua futura profissão. Para encontrar a profissão “ideal” é importante que “a resposta” atenda à todas condições apresentadas.

SOBRE A PROFISSÃO QUE VOCÊ PENSA EM FAZER:

- Quais áreas de conhecimento eu mais gosto de estudar?
- Em quais profissões poderei usar as habilidades que já tenho?
- Quais Universidades eu pretendo estudar? Quais cursos ela oferece?
- Em que locais, empresas e cargos poderei aplicar os conhecimentos adquiridos na faculdade?

}

Profissão

SOBRE A PROFISSÃO QUE VOCÊ PENSA EM FAZER:

- Condição 1
- Condição 2
- Condição 3
- Condição 4

}

Solução

Desse modo, responda:

- a) Qual profissão você pretende exercer? Quais as condições possibilitaram você decidir por ela?

ARQUITETURA

- b) Considerando suas respostas às condições do problema inicial, dentre as possíveis soluções apresentadas a seguir, qual seria a profissão mais adequada? Justifique.

Profissões
Advogado(a)
Médico(a)
Engenheiro(a)

→ **Talvez**

- c) Nathalia pretende escolher sua profissão orientando-se pela reportagem do guia do estudante

Cursos
Medicina
Enfermagem
Fisioterapia
Terapia Ocupacional
Odontologia

Todos

d) Já Gabriel gosta das ciências exatas e tem facilidade na linguagem dos computadores, quer estudar na mesma Universidade que a Nathália. Nessas condições, qual destes cursos atende a esses interesses? Justifique.

Cursos
Medicina
Enfermagem
Fisioterapia
Terapia Ocupacional
Odontologia

Sobre os diálogos dos alunos quanto à Tarefa, verificamos que alguns deles tinham a certeza do caminho que queriam seguir no ensino superior. A Beatriz gostaria de fazer Arquitetura, Amanda e Nathalia Medicina, Miguel queria fazer alguma Engenharia, mas, ainda, não sabia qual delas era sua preferência, César e Gabriel estavam mais indecisos. Nessa discussão, houve muita integração entre os alunos, em que argumentavam o porquê gostariam de exercer determinada profissão no futuro. Também, buscavam esclarecer dúvidas sobre as Universidades e cursos com o professor.

Analisavam e levantavam determinadas condições para a escolha da profissão, como mudar ou não de cidade, cursar uma instituição pública ou privada, consideravam, por exemplo, que os estudantes que gostavam de Matemática tenderiam fazer alguma engenharia; já os que gostavam de biologia realizariam um curso da área de saúde.

No registro de Beatriz, no item da Tarefa 3.1, dentre as opções de curso apresentada, o único que talvez ela realizaria era o de Engenharia, visto que ela gosta da área de exatas.

No item (c), na situação-problema apresentada, os alunos indicaram que todos os cursos poderiam ser escolhidos, considerando as condições dadas. Nesse contexto, o professor questionou se poderiam estabelecer uma relação daquela situação com Sistema de Equações Lineares. Os alunos ficaram com dúvida, e o professor conduziu os alunos a pensarem sobre as possíveis soluções de um Sistema Linear. Amanda, então, analisou que a situação-problema apresentada poderia ter mais de uma solução, assim como os Sistema de Equações Lineares que podem ter infinitas soluções determinadas.

Já, no item (d), os alunos não tiveram dificuldades em identificar que o problema não teria solução. Prontamente, Gabriel já fez a relação com os Sistema de Equações Lineares – também podem não ter solução e, assim, são classificados como “impossível”.

Figura 3

Tarefa 3.2 (Dados da pesquisa).

2. Discuta com os colegas:

- a) Qual a característica geral desse problema?
- b) Qual a relação do problema anterior com o conteúdo de sistemas de equações lineares?

A Tarefa 3.2 manteve as discussões sobre a situação problema apresentada e os Sistema de Equações Lineares. Com o auxílio do professor, a turma conseguiu relacionar a discussão sobre qual profissão pretendiam exercer, como uma situação-problema a ser resolvida – como, por exemplo, um Sistema de Equações Lineares. Os alunos ponderaram que para resolver o problema, precisariam analisar determinadas condições que influenciariam no resultado. Para tanto, precisariam encontrar uma resposta que satisfizesse, de forma simultânea, as condições expostas.

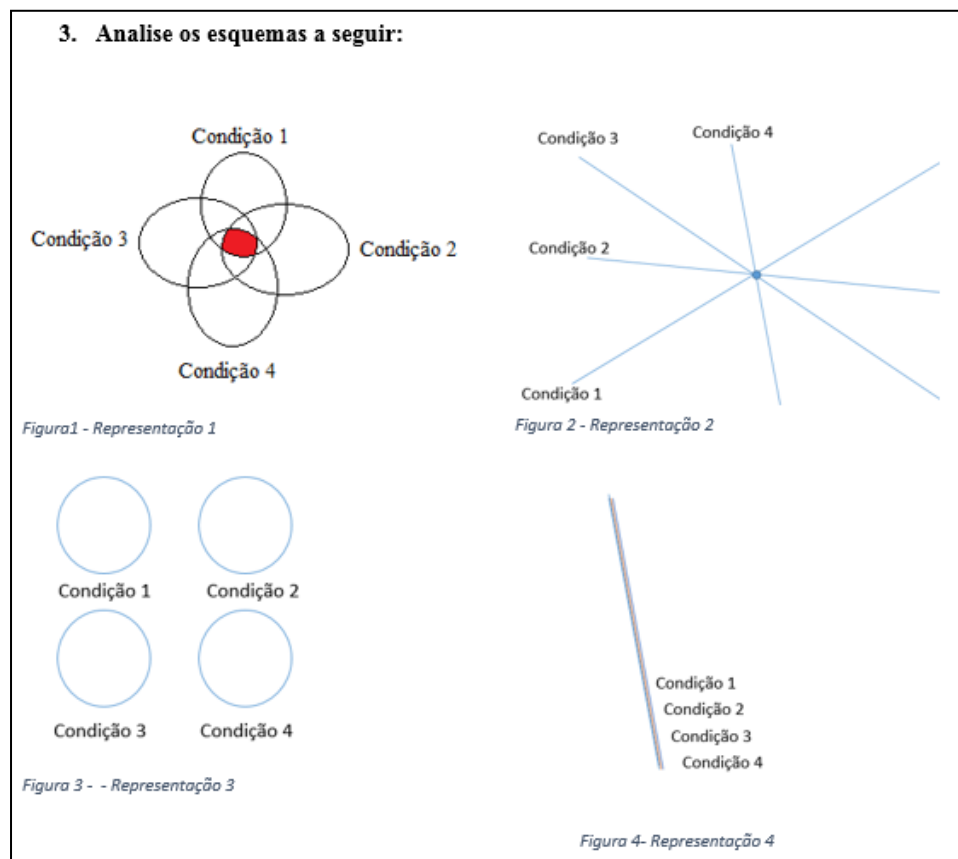
Por exemplo, a convergência das respostas sobre as perguntas: “Qual área de conhecimento quer estudar?”; “Em quais profissões utilizarei as habilidades que possuo?”; “Quais Universidades eu pretendo estudar?”; e “Quais locais e empresas poderei trabalhar?”; indicaria uma profissão a ser seguida. Miguel comentou: “Eu quero fazer um curso da área de exatas, gosto de Matemática, posso sair da cidade, quero trabalhar numa grande empresa; essas são as minhas condições [...] a solução do meu problema é fazer engenharia, mas ainda não sei qual delas”. Amanda observou que a relação geral seria achar uma “resposta” em comum para todas as perguntas (condições). Gabriel comentou: “por que não aprendemos assim antes?”

O professor questionou: “Qual a relação de Sistema de Equações Lineares com essa discussão?” Os alunos responderam que a situação se aproxima de Sistema de Equações Lineares, porque as condições da situação se assemelham a uma equação, e um conjunto de condições representaria um Sistema de Equações. Para resolver a situação-problema apresentada e o Sistema de Equações Lineares, precisaram achar uma solução comum para todas as condições/equações. Nathalia analisou: “como na Tarefa que fizemos, os Sistema podem ter mais de uma solução, uma única solução ou não ter nenhuma solução, essa é a relação de Sistema com o problema”.

Os alunos a pedido do professor iniciaram a Tarefa 3.3. Na Figura 4, apresentamos essa Tarefa que ilustra a relação das condições de um problema em diagramas. Em seguida, propusemos que os alunos relacionassem, para padronizar a pessoa em que o artigo está sendo escrito.

Figura 4

Tarefa 3.3 (Dados da pesquisa).



Responda:

- Quais as relações que se estabelecer entre essas figuras, isto é, o que é geral e o que é específico?
- Qual a relação entre elas e os problemas da questão 1? Justifique.
- Estabeleça relações entre essas figuras com os sistemas de equações lineares. Quais as suas semelhanças? E o que caracteriza essas relações? Justifique.

Dando continuidade à Tarefa, os alunos não apresentaram dificuldades para interpretar os diagramas e relacioná-los com Sistema de Equações Lineares. Nas Figuras 1 e 2 (da Tarefa) observaram que as representações tinham apenas um ponto em comum e relacionaram com uma única solução, no entanto, não lembraram como classificaria – *possível determinado*. Na Figura 3 (da Tarefa), verificaram que as “condições” não apresentavam relação, e poderiam indicar um sistema sem solução – os alunos lembraram que ele é classificado como “impossível”. Já, na Figura 4 (da Tarefa), os alunos observaram que as retas se sobrepunham, indicando que poderia representar um sistema com muitas soluções – também não recordaram que o Sistema poderia ser classificado como *possível e indeterminado*.

Analizamos que essas Tarefas, com diferentes questionamentos, análises e reflexões, permitiram entender que as representações e a linguagem – nesse caso a

Professor: O que esta atividade tem a ver com as anteriormente trabalhadas?

César: cada condição é uma equação e dentro dessa condição pode ter diversas variáveis, sendo que todas as condições formam a solução.

Professor: Imaginem aquele problema das profissões como um sistema, agora é possível?

Miguel: Cada pergunta seria uma equação/condição do sistema.

Professor: Somente com a definição conseguiriam estabelecer relação com o problema?

Miguel: Não, após a atividade das profissões foi mais fácil.
(Dados da pesquisa).

Assim, o professor explicou aos alunos que a definição representava a forma geral, formalizada, de Sistema de Equações Lineares. A definição geral poderia ser utilizada para construir um Sistema com duas equações e duas incógnitas e, até infinitas equações e incógnitas.

Sobre a definição de Sistema de Equações Lineares, continuaram as discussões:

Professor: E quais os significados de n e m ?

Gabriel: n é a quantidade de variáveis e o m é a quantidade de coeficientes.

Professor: Tem quantas equações nesse sistema?

Gabriel: tem n equações, porque são muitas as equações.

Professor: Porque o x_1 se repete em todas as linhas?

Miguel: Porque a incógnita tem que ser a mesma.

Professor: Quando não tem a incógnita o coeficiente vale quanto?

Miguel: Zero

(Dados da pesquisa).

Além disso, César entendeu que " a_{11}, a_{12}, a_{13} e a_{1n} " representavam os valores dos coeficientes que multiplicavam as incógnitas e que poderiam ser diferentes.

César: O a é o número que está multiplicando o x , que é a incógnita, e o b é o resultado da equação.

Miguel: Uma dúvida, por que é representado a_{11}, a_{12}, a_{13} , e não pode ser somente a_1, a_2, a_3 ?

Professor: Porque é uma representação que pode ocorrer em forma de uma matriz, por exemplo - primeira linha; primeira coluna [...].

(Dados da pesquisa).

O professor ainda perguntou se os valores (a_{11}, a_{12}, a_{13} e a_{1n}) não poderiam ser iguais. Miguel disse: "acho que sim, tipo $2x + 2y$ ".

Nesse processo, observamos o desenvolvimento da abstração e generalização substantivas, fundamentais para o desenvolvimento do pensamento teórico, "[...] a Tarefa é uma unidade entre a meta (objetivo) e as condições para seu alcance" (Davidov, 2019, p. 293).

Sobre as semelhanças e as diferenças entre a definição geral de sistema e o apresentado no item (f) - $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$, Beatriz respondeu: “uma (a definição geral) representa n condições e a outra (exemplo do item f) aponta somente duas”. Continuaram, assim, o diálogo e discussões sobre as Tarefas e a definição de Sistema de Equações Lineares.

Professor: Vocês acham que a aula está repetitiva?

Miguel: Um pouco. Porque parece que são as mesmas perguntas.

Professor: Sim. Mas antes estávamos tratando de qual assunto?

César: Comparações e Equações

Professor: São as mesmas perguntas de equações? O mesmo conteúdo? Se não, porque é repetitivo?

Alunos: Porque o sistema é um conjunto de equações.

Professor: Assim, se você entende bem equações, a chance de entender bem sistema é grande, por isso equações vem antes de sistema.

(Alunos: Concordaram)

Professor: O que cada equação expressa em um sistema?

Beatriz: Uma condição.

Professor: Qual a relação das equações com a solução do sistema?

Amanda: Que elas possuem um resultado simultâneo.

Professor: Por que é importante entender a fórmula mais geral?

Amanda: Porque é dela que sai as mais específicas.

(Dados da pesquisa).

Analisamos que as Tarefas promovidas até este momento de discussões começaram a contribuir com o desenvolvimento do pensamento teórico. De acordo com Aquino e Rodrigues (2019, p.256), fundamentados em Engels⁵ (1974), “[...] o pensamento teórico é uma capacidade que se cultiva por meio das abstrações teóricas que expressam a síntese do conhecimento da realidade da vida”.

Nesse sentido, ponderamos que esta discussão sobre os juízos e o conceito de Sistema de Equações Lineares, que partiu da análise do concreto real– com as comparações, e, agora, está avançando para as representações sintetizadas, sugerem que o desenvolvimento dos conceitos científicos é fundamental para a formação do pensamento.

Davídov (1988, p. 164) chama a atenção para o fundamento que diz respeito à assimilação dos conhecimentos científicos,

⁵ ENGEL, F. Viejo prólogo para el [Anti-]Dühring. Sobre la dialéctica. In: **Carlos Marx y Federico Engels. Obras Escogidas (en tres tomos)**. T. III, Moscú: Progreso, 1974, p. 57-65).

[..] ao assimilar estes conhecimentos a pessoa já não lida com a realidade que imediatamente o circunda, pois o “objeto de cognição” está mediatizado pela ciência como formação social, pela sua história e pela experiência. Nesse objeto de distintos aspectos, apresentados ao indivíduo em forma de conteúdo generalizado, abstrato, de seu pensamento.

Assim, corroboramos com Aquino e Rodrigues (2019), quando analisam que o conhecimento científico é a forma universal de expressão do pensamento teórico e se desenvolve na atividade objetual-sensorial, dando sentido aos juízos e conceitos.

Na Tarefa 3.5, propusemos que os alunos resolvessem algebricamente dois Sistemas de Equações Lineares com duas incógnitas. Os alunos não tiveram dificuldades em resolver os Sistemas – como o exemplo apresentado na Figura s seguir, todos os alunos utilizaram o método da adição para resolvê-lo.

Figura 5

Tarefa resolvida por Miguel (Dados da pesquisa).

5. Resolva algebricamente os dois sistemas a seguir:

I) $\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

II) $\begin{cases} 6x + 4y = 10 (-2) \\ 2x + 8y = 0 (4) \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 30 \quad \underline{112} \\ 60 \quad \underline{2} \end{array}$$

a) Quais foram os resultados encontrados?

b) Com base nos resultados, compare os sistemas. Quais suas semelhança? Justifique.

c) Qual a relação pode ser estabelecida entre as equações que compõem cada sistema?

d) Chamar esses sistemas de “equivalentes” seria uma boa denominação?

$$\begin{array}{l} x + 8y = -20 \\ x + 4y = 0 \\ \hline 40y = -20 \\ y = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + 8 \cdot -\frac{1}{2} = 0 \\ 2x + 4 \cdot -1 = 0 \\ 2x - 1 = 4 \quad x = 2 \\ 2x = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -3x - 12y = 0 \\ 3x + 3y = 5 \\ \hline -20y = 5 \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{array}$$

Após os alunos encontrarem as soluções dos dois Sistemas, eles discutiram a Tarefa com o professor. Beatriz foi a primeira a encontrar os resultados e já comentou que as soluções eram iguais. Conforme indicado no item (b) da Tarefa, o professor orientou que os alunos analisassem as equações e os Sistemas evidenciando se teriam alguma relação. Gabriel identificou que, na primeira equação do *Sistema II* ($6x + 4y = 10$), os coeficientes eram duas vezes os valores dos coeficientes da segunda equação do *Sistema I* ($3x + 2y = 5$). Assim como a equação $2x + 8y = 0$ era igual a $-x - 4y = 0$

multiplicado por (-2). Assim Gabriel comentou: “as equações do sistema I são parecidas com a do sistema 2, basta multiplicarmos cada uma por um valor que elas ficam iguais”.

Desse modo o professor, então, perguntou se poderiam “classificar” a relação desses Sistemas como equivalentes e se conheciam esse termo. Os alunos concordaram com o professor em poder denominar os Sistemas como equivalentes, mas não recordavam desse termo. Desse contexto, o professor deu início as Tarefas sobre Sistemas Equivalentes.

A Tarefa apresentada na Figura 6, foi iniciada com a definição de Sistemas Equivalentes, em que o professor pediu para que os alunos fizessem uma leitura. Em seguida, foi apresentado um vídeo⁶ que explicava como identificar quando dois Sistemas eram equivalentes.

Figura 6

Orientações da Tarefa sobre Sistemas Equivalentes (Dados da pesquisa).

Sistemas Equivalentes – Definição Dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução. Por exemplo, dados os sistemas: $S_1 = \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ Verificamos que o par ordenado $(x, y) = (1, 2)$ satisfaz ambos e é único. Logo, S_1 e S_2 são equivalentes: $S_1 \sim S_2$. Exemplo de como identificar Sistemas Equivalentes: https://www.youtube.com/watch?v=cpwBxz-vw5A

Após a leitura da definição de Sistemas Equivalentes e a análise do vídeo, os professores e alunos discutiram:

Professor: O vídeo apresentado abordou os Sistemas equivalentes O que ele tem a ver com a resolução de Sistema de Equações Lineares?

César e Miguel: Quando os Sistemas são equivalentes, a mesma solução que encontrar para um sistema será equivalente para outro sistema.

Professor: Quando, por exemplo, se multiplicam as equações de um sistema, uma por -2 ou e a outra por 6, resultará num sistema equivalente?

Miguel: Escalonamento é a mesma coisa?

Professor: O escalonamento e método da adição, por exemplo, são constituídos com essa propriedade (Sistemas equivalentes). Buscamos um sistema equivalente “mais fácil” de ser resolvido (Dados da pesquisa).

As Tarefas 3.6 e 3.7, 3.8 e 3.9, desse modo, visaram promover a assimilação dos alunos sobre as ações e propriedades necessárias para o desenvolvimento de Sistemas

⁶ Vídeo disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=cpwBxz-vw5A>. Acessado em 14 fev. de 2020

Equivalentes. Trata-se de uma ação de uma série de Tarefas práticas concretas particulares, que se resolvem a partir do modo de ação geral.

Ressaltamos as Tarefas 3.8 e 3.9, em que continuamos a trabalhar com Sistemas Equivalentes, porém, acrescentamos mais uma incógnita, ou seja, começamos a estudar Sistema de Equações Lineares com três equações e três incógnitas. Além disso, foram incluídos os teoremas que traduzem a ação geral para a obtenção de Sistemas equivalentes, conforme apresentado a seguir.

Figura 7

Tarefa 3.8 e 3.9 (Dados da pesquisa).

8. Análise os sistemas equivalentes:

$$\text{I)} \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 18 \\ 2x + y - z = 2 \\ -3x + y + 2z = 4 \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} 4x + 2y - 2z = 4 \\ 6x - 2y - 4z = -8 \\ x + 2y + z = 9 \end{cases}$$

a) Quais as características desses sistemas equivalentes?

b) Com base no sistema apresentado e nas atividades realizadas, explique este teorema:

Teorema I: Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S por um número $K \neq 0$, o novo sistema S' obtido será equivalente a S.

9. Análise os sistemas equivalentes:

$$\text{I)} \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases} \quad \text{II)} \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -4y - 2z = -2 \\ -12y - 6z = -20 \end{cases}$$

a) Por que esses sistemas são equivalentes? Justifique

b) Com base no sistema apresentado e nas atividades realizadas, explique este teorema:

Teorema II: Se substituirmos uma equação de um sistema linear S pela soma, membro a membro, dela com uma outra, o novo sistema obtido S', será equivalente a S.

Mesmo nas ações envolvendo Sistema com três equações e incógnitas - Sistema 3×3 , os alunos não tiveram dificuldades em identificar e justificar o porquê de os Sistema serem equivalentes, conforme a Figura a seguir. Verificamos nos registros que eles estabeleceram as relações entre as equações que se configuravam como equivalentes – indicando a operação que precisariam exercer sobre a equação.

Figura 8

Registro de Beatriz em relação a Tarefa 3.8 (Dados da pesquisa).

$$\begin{array}{l} \text{I)} \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 18 \\ 2x + y - z = 2 \\ -3x + y + 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4x + 2y - 2z = 4 \\ 6x - 2y - 4z = -8 \\ x + 2y + z = 9 \end{cases} \\ \text{II)} \begin{cases} 4x + 2y - 2z = 4 \\ 6x - 2y - 4z = -8 \\ x + 2y + z = 9 \end{cases} \xrightarrow{\times -2} \begin{cases} -4x - 2y + 2z = -2 \\ -6x + 2y + 4z = 16 \\ -x - 2y - z = -18 \end{cases} \end{array}$$

Em relação aos teoremas apresentados, os alunos entenderam que eles revelaram uma maneira formal das ações que eles estavam desenvolvendo. Sobre o Teorema I, Gabriel comentou: “Professor, quando multiplicamos toda a equação por um número e montamos um sistema, estamos fazendo isso”. Beatriz analisou: “Quando resolvemos um sistema por escalonamento, utilizamos esses teoremas”. César observou que não lembra de ter estudado esses teoremas, analisou que só resolvia os Sistemas sem pensar em nada, mas que agora entende o que faz e tem sentido. Isso mostra que há um movimento entre o geral e o particular e que o pensamento teórico se desenvolve quando ocorre o movimento, as contradições e novas sínteses.

Assim, na Tarefa 3.10 foi proposto que os alunos utilizassem Sistemas Equivalentes para resolverem os Sistemas de Equações Lineares apresentados.

Figura 9

Tarefa 3.10 (Dados da pesquisa).

10. Utilizando sistemas equivalentes, resolva:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 4z = 10 \\ 3x + 3y + 6z = 14 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 5 \\ 3x - 2y + 7z = 9 \end{cases}$
---	---

César, ao resolver esses Sistemas, falou que “não estava dando certo”. O professor, então, perguntou por que ele estava com dificuldade e, nesse contexto, lembrou aos alunos que os Sistemas poderiam ter uma única, infinitas ou nenhuma solução. Os demais alunos não apresentaram dificuldades em resolvê-los, ressaltamos que eles estudaram esse conteúdo nos meses de março e abril, e realizaram a Tarefa em outubro e novembro do mesmo ano.

Figura 10

Registro de Amanda na Tarefa 3.10 (Dados da pesquisa).

(a)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 4z = 10 \\ 3x + 3y + 6z = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y - 4z = -10 \\ 2x + 2y + 4z = 10 \\ \hline 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 3y - 6z = -15 \\ 3x + 3y + 6z = 14 \\ \hline 0 = -1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 5 \\ 3x - 2y + 7z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 6z = 8 \\ 3x - 2y + 7z = 9 \\ \hline 5x + 13z = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y - 6z = -8 \\ 2x - 3y + 4z = 5 \\ \hline -5y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y + 9z = 12 \\ 2x - 3y + 4z = 5 \\ \hline 5x + 13z = 17 \end{cases}$$

$$5x + 13z = 17$$

$$x = \frac{17 - 13z}{5}$$

$$5 \cdot \left(\frac{17 - 13z}{5} \right) + 13z = 17$$

$$17 - 13z + 13z = 17$$

$$17 = 17$$

$$x + y + 2z = 5$$

$$\frac{17 - 13z}{5} + y + 2z = 5$$

$$5 = \left\{ \frac{17 - 13z}{5}, -3 + 2z + 5y, z \right\}$$

Nos registros de Amanda, verificamos que ela utilizou o método de escalonamento – com as propriedades de Sistemas equivalentes. Ela conclui que o resultado do sistema, no item (a), é impossível, e, no item (b), possível e indeterminado; porém, não registra essas classificações. Além disso, ela comete um erro, no item (b), no final da resolução, ao colocar y em função de z , não realizando uma operação de divisão de forma correta.

O erro apresentado, embora impacte no resultado final do sistema, não indicou que a aluna não estava desenvolvendo os juízos e o conceito de Sistema de Equações Lineares; representa uma falta de atenção e concentração no processo de resolução.

Nas Tarefas 3.11 e 3.12, os alunos precisariam representar e interpretar geometricamente os Sistemas de Equações Lineares. Para isso, propusemos que eles utilizassem um recurso tecnológico – o GeoGebra⁷.

⁷ O GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única interface – sua distribuição é livre.

Figura 11

Tarefas 3.11 e 3.12 (Dados da pesquisa).

Utilizando o GeoGebra como Recurso
11. No Geogebra, construa os gráficos destes sistemas:
I) $\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ II) $\begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ 2x + 8y = 0 \end{cases}$
a) O que esses gráficos tem em comum?
b) Como sistemas equivalentes são representados graficamente?
12. Com o auxílio do Geogebra resolva estes sistemas.
a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + y + z = 6 \\ 5x + 2y + 3z = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$
Discute com os colegas:
a) É possível resolver por esse método? Quais foram as dificuldades encontradas?
b) O que tem em comum entre esse método de resolução com o escalonamento?

Nesse contexto, ponderamos que, de acordo com Davidov (1991/2019), um dos problemas não resolvidos na Teoria da Atividade de Estudo está relacionado à utilização de computadores. O autor critica o uso das tecnologias computacionais como um método tradicional, no entanto, reconhece a importância de buscar integrar essas tecnologias aos processos de ensino-aprendizagem de modo que seu uso esteja pautado por uma necessidade.

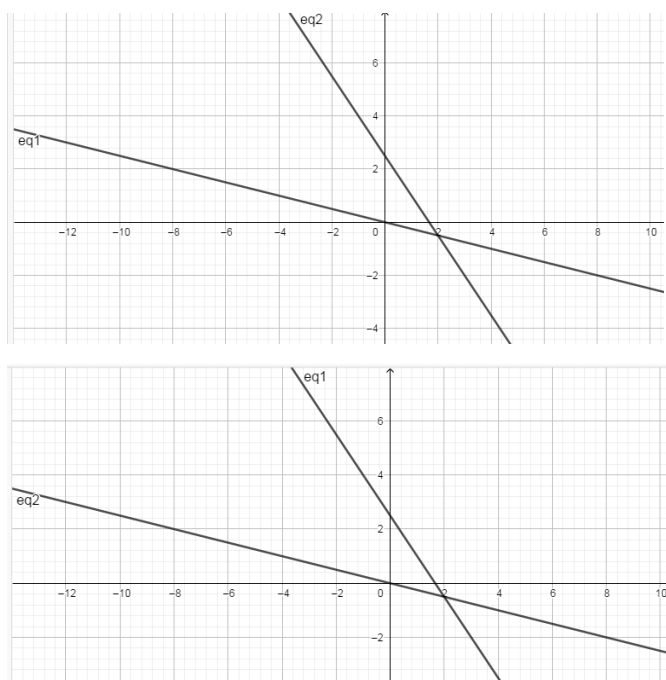
Considerando a dificuldade de representar geometricamente Sistemas de Equações Lineares com três equações e três incógnitas, evidenciamos a necessidade do uso do GeoGebra como uma alternativa de o aluno explorar e compreender as representações geométricas dos Sistemas de Equações Lineares.

Na Figura 12, apresentamos a resolução do César realizada no GeoGebra. Os alunos não conheciam essa ferramenta, assim, o professor teve que explicar como ela funcionava – como construir os gráficos, entre outros. Os alunos rapidamente entenderam o funcionamento e construíram primeiro a representação dos Sistemas de Equações Lineares (Item I e II da Tarefa 11).

Figura 12

Resoluções de César no Geogebra dos Sistema I) $\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ II) $\begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ 2x + 8y = 0 \end{cases}$,

respectivamente (Dados da pesquisa).



Ao visualizarem os gráficos, os alunos verificaram, primeiro, que o ponto de intersecção das retas, em ambas as representações, era o mesmo. Em seguida, observaram também que a disposição das retas eram as mesmas, ou seja, os gráficos eram iguais. Assim, concluíram que os Sistemas equivalentes têm a mesma representação geométrica.

Salientamos, ainda, sobre essa Tarefa, que César e Miguel resolveram os Sistemas algebricamente para verificar se a intersecção das retas realmente era a solução. Eles gostaram muito do GeoGebra e comentaram que com ele fica muito mais fácil encontrar a solução de Sistema e entendê-las.

Na Tarefa 12 também era necessário o uso do GeoGebra, no entanto, nos itens *b* e *c*, os alunos teriam que representar Sistema 3x3. Ao construírem o gráfico – como realizado por Miguel, na Figura a seguir, tiveram uma reação de estranheza.

O professor, então explicou que, usualmente, embora os Sistema 3x3 sejam muito trabalhados em sala de aula, pouco se discute sobre sua representação geométrica. Assim, debateu com os alunos:

Professor: de que forma cada equação foi representada?

César: Por um plano?!

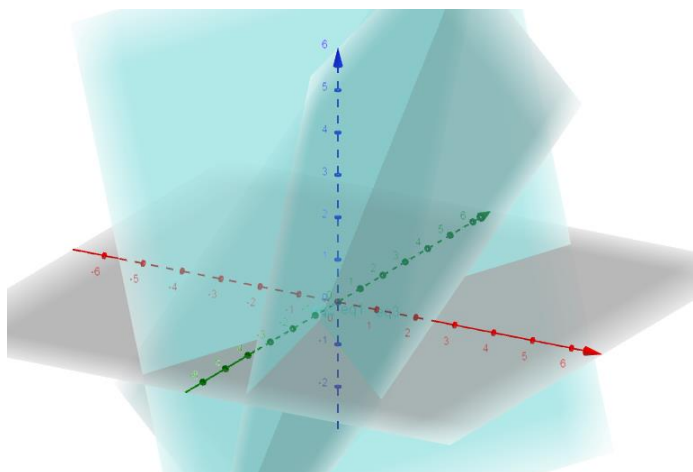
Professor: e existe alguma relação entre esses planos?

César: Parece que sim! (Dados da pesquisa).

Assim, os alunos, no GeoGebra, exploraram a representação – com rotações e zoom, e verificaram que os pontos de intersecção dos planos eram a solução do sistema. Eles constataram, ainda, ao realizarem as representações das demais Tarefas, que quando os planos são paralelos, não tem uma solução; e, quando os planos se sobrepõem, tem-se infinitas soluções. Comentaram que o geral que fundamentava a análise dos Sistema 2x2 era o mesmo para o sistema 3x3, a diferença na representação geométrica ocorria pelo uso das retas e dos planos, respectivamente.

Figura 13

Registro de Miguel - item c - Tarefa 3.12 (Dados da pesquisa).



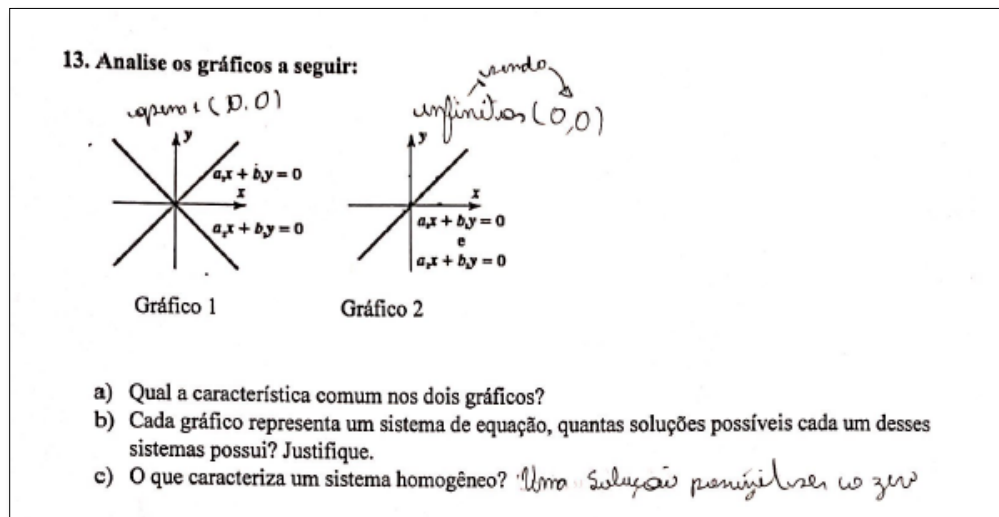
Nas Tarefas 3.13, 3.14 e 3.15, a intenção foi promover a discussão de Sistema de Equações Lineares - possível determinado, possível indeterminado e impossível, e a compreensão de um sistema homogêneo, considerando as diferentes formas de representação.

Na Tarefa 3.13, apresentamos dois gráficos juntamente com suas representações algébricas – na forma geral. Os alunos observaram que as retas de ambos os gráficos passavam pela coordenada $(0,0)$. Indicaram, sem dificuldades, que, no Gráfico 1, tinha apenas uma solução $(0,0)$, e, no Gráfico 2, teria infinitas soluções.

O professor, então, questionou os alunos: “Dentre as infinitas soluções do sistema representado pelo Gráfico 2 vocês conseguem me dizer pelo menos uma?”. Os alunos não conseguiram responder, o professor orientou que eles analisassem a representação algébrica, sugerindo substituir x e y por 0. Após os alunos identificarem que $(0,0)$ poderia ser uma das infinitas soluções do sistema representado pelo Gráfico 2 – conforme Figura 14, o professor definiu e explicou as características de um sistema homogêneo.

Figura 14

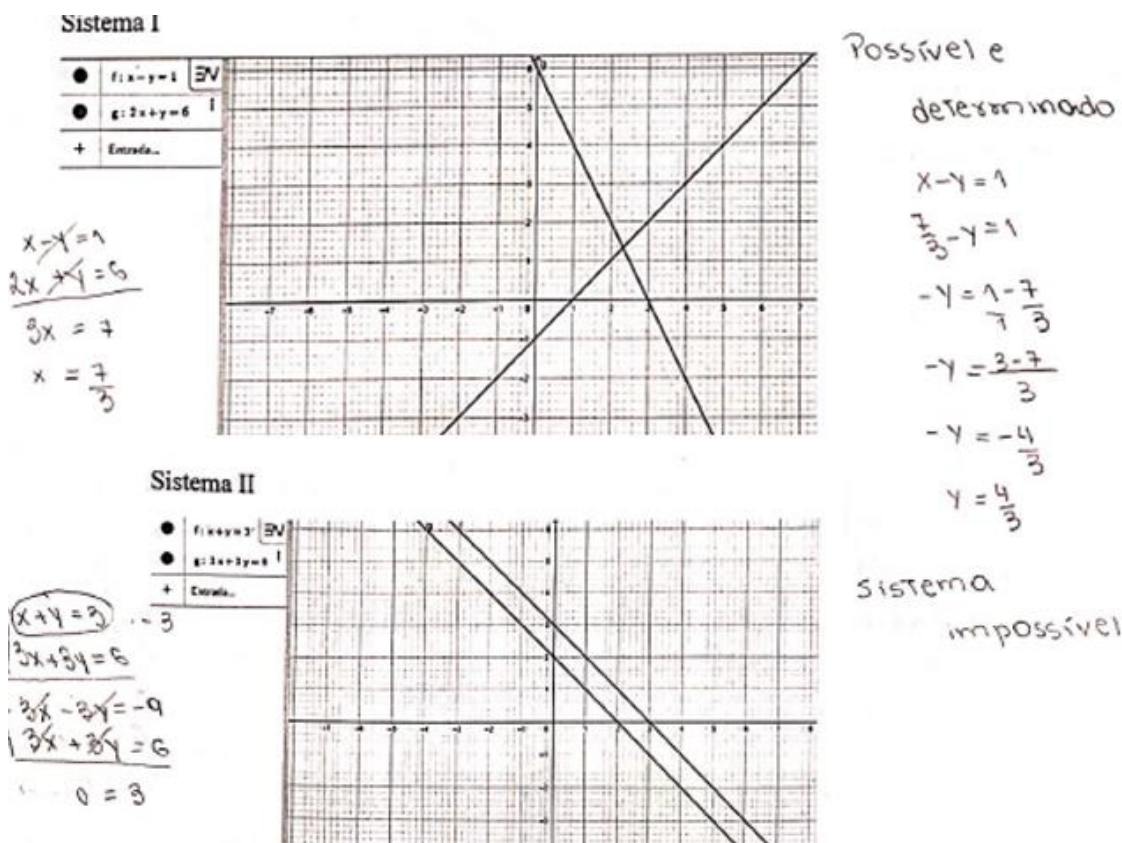
Registro do aluno Gabriel (Dados da pesquisa).



Nas Tarefas 3.14 e 3.15, os alunos analisaram os Sistemas de Equações Lineares, relacionando suas representações algébricas e geométricas. Na Figura 15, apresentamos os registros de Beatriz sobre os Sistemas I e II da Tarefa 3.14. Ela resolveu algebricamente e conferiu a representação geométrica, posteriormente, classificou os Sistemas em possível determinado e impossível.

Figura 15

Registros da Beatriz (Dados da pesquisa).



Nesse contexto, as discussões sobre as Tarefas 3.14 e 3.15 reforçaram às apropriações sobre os diferentes tipos de representações de Sistema de Equações Lineares. Os alunos relataram que, quando estudaram esse conteúdo, não lembravam de ter tido uma explicação e/ou feito um “exercício” que envolvia a representação geométrica de Sistema de Equações Lineares.

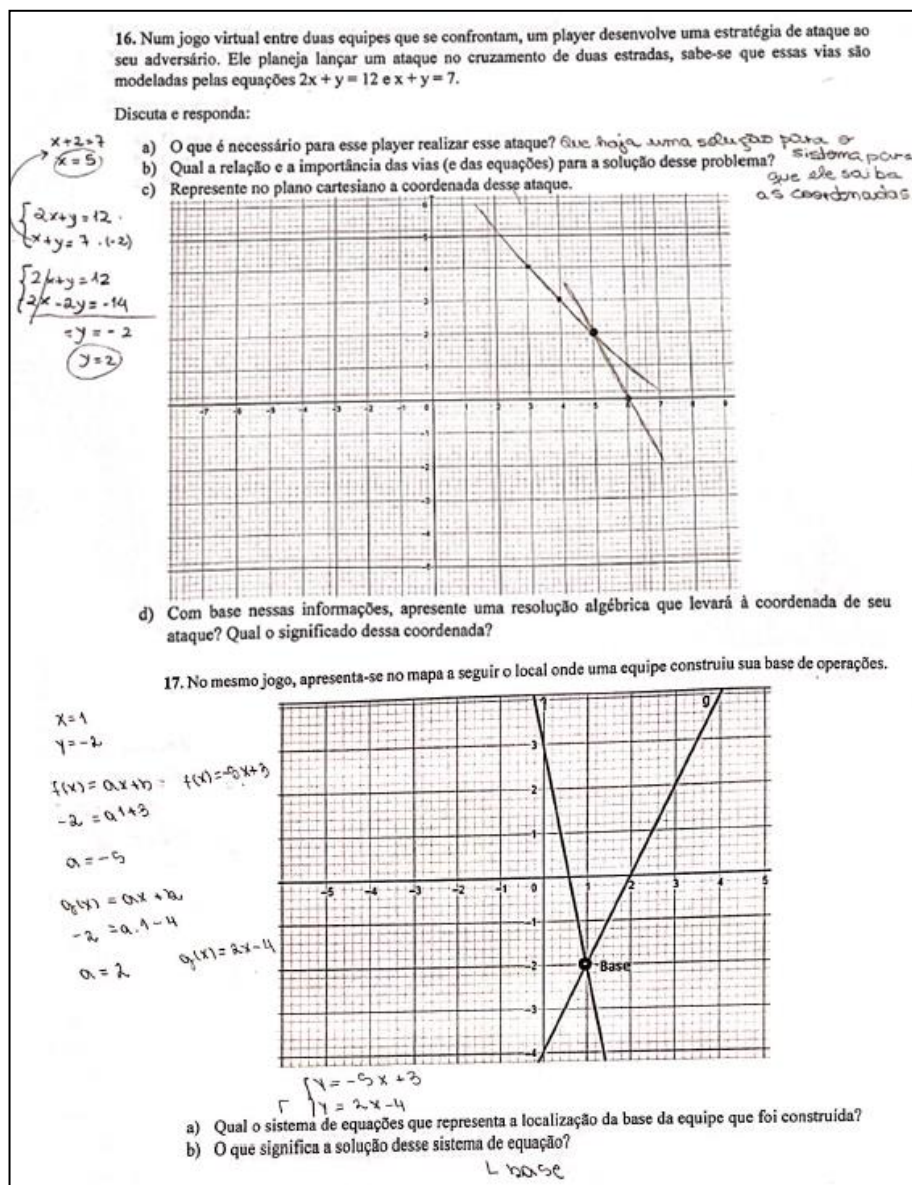
Comentaram que as aulas de Sistema de Equações Lineares eram focadas em resoluções, e a participação neste experimento estava contribuindo com seus estudos – no esclarecimento de “dúvidas que tinham ficado”, em novos aprendizados, de forma relacionada com outros conteúdos, como funções.

Nas Tarefas 3.16, 3.17 e 3.18, os alunos precisariam mobilizar os juízos e o conceito de Sistema de Equações Lineares para resolver uma determinada situação-problema.

Discutimos que nas Tarefas 3.16, 3.17, as situações-problema exigiam o conhecimento das modelagens algébrica e geométrica. Percebemos, conforme o registro de Amanda (Figura 16), que os alunos não tiveram dificuldade de interpretar o problema e resolvê-lo. Consideremos que o desenvolvimento do pensamento teórico favorecido pelas Tarefas foi fundamental para que os alunos interpretassem a situação apresentada conscientes dos conhecimentos teóricos que precisariam mobilizar para resolvê-la.

Figura 16

Registros de Amanda nas Tarefas 3.16 e 3.17 (Dados da pesquisa).



Com estas Tarefas, concluímos o desenvolvimento desta proposta de organização do ensino de Sistema de Equações Lineares, com base na Teoria da Atividade de Estudo.

As Tarefas, que tiveram como foco os Sistema de Equações Lineares, relacionaram o conhecimento teórico com situações concretas do cotidiano, permitiram discutir os juízos e o conceito de Sistema de Equações Lineares, evidenciaram os processos de resolução – presentes no movimento histórico da álgebra, articularam as formas de representação algébrica e geométrica – incluindo o uso das tecnologias digitais, debateram Sistema equivalentes e propuseram diferentes situações-problema para serem resolvidos, num movimento dialético: do abstrato ao concreto, do geral ao particular, das diferentes representações semióticas de um mesmo objeto.

Considerações finais

Avaliamos que o conjunto de Tarefas foi desenvolvido de forma efetiva, mostrando que os alunos se “ambientaram” com uma organização de ensino pautada na Teoria da Atividade de Estudo. Para tanto, consideramos que as Tarefas 1 e 2 foram fundamentais para que os alunos apropriassem de relações gerais presentes em uma rede de juízos e conceitos que se relacionam com Sistema de Equações Lineares, bem como para entenderem uma organização de ensino diferente da qual estavam habituados, a qual discute juízos e conceitos, procurando desvelar a sua essência, e que não apenas reproduz, promove a repetição e a memorização de conteúdo.

Em relação à **transformação dos dados da Tarefa**, analisamos que nas Tarefas sobre Sistema de Equações Lineares, os alunos conseguiram estabelecer a relação geral desse conhecimento. A aproximação da Tarefa que abordou uma situação-problema de que profissão escolher com a definição de Sistema de Equações Lineares – Tarefas particulares, induziu o aluno a desenvolver a abstração substantiva que desvela a essência do objeto, que, posteriormente se deduzirá nos casos particulares.

A mediação do professor, atuando na Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos, e as situações apresentadas, com constantes momentos de reflexões, permitiram que os alunos evidenciassem que a *simultaneidade* constituía a essência do conceito de Sistema de Equações Lineares. Os alunos observaram que as equações se inter-relacionavam e cada uma delas configura-se como uma “condição” a ser satisfeita.

No entanto, não bastava encontrar, de forma independente, o resultado de apenas uma equação, a solução do sistema precisaria responder, simultaneamente, às “condições”, de todas as equações. *“Nota-se que o estudante não inventa a abstração substancial, mas por intermédio das ações mentais realizadas na solução de Tarefas desenvolve o conteúdo da relação essencial que deve ser refletido no conceito teórico”* (Souza; Ferola & Coelho, 2019, p.382).

Com a orientação do professor o aluno reproduziu “[...] o movimento historicamente realizado de redução do concreto ao abstrato, que resultou na elaboração científica da relação essencial, conteúdo do conceito teórico (Souza; Ferola & Coelho, 2019, p.382-383).

Sobre a **modelação da relação universal**, observamos que ela está diretamente relacionada com a transformação dos dados da Tarefa, visto que nela sintetiza-se a essência do conceito que compõe o modelo. Deste modo, após os alunos terem identificado a relação geral do objeto estudado e relacioná-la com sua definição na forma mais elaborada, realizamos reflexões – discutindo e dando sentido aos elementos, às representações, às classificações e ao comportamento do Sistema de Equações Lineares, de modo que os alunos assimilassem suas características internas, engendrando o desenvolvimento do pensamento teórico. Também, esteve presente a preocupação com a modelagem em diferentes linguagens: gráfica/geométrica, algébrica e retórica.

O pensamento teórico, que ocorre pelas abstrações substantivas, requer a investigação integral do objeto para evidenciar a sua relação geral. Nesse processo, gradativamente, o experimento vai adquirindo caráter cognoscitivo, podendo ser realizado mentalmente. Assim, “a Tarefa do pensamento teórico consiste em elaborar os dados da contemplação e da representação em forma de conceito e com ele reproduzir omnilateralmente o sistema de conexões internas que originam o concreto dado, descobrir sua essência” (Davidov, 1988, p.143).

Por conseguinte, o desenvolvimento do pensamento teórico está ancorado nas ações de análise e síntese. As Tarefas estimularam esses aspectos do pensamento, incluindo os estudos que tiveram como foco as comparações e equações e que, posteriormente, foram transpostos nas Tarefas sobre Sistema de Equações Lineares.

No que tange ao **Controle e avaliação como resultado da Tarefa de aprendizagem**, observamos a autonomia que os alunos desenvolveram no decorrer das Tarefas. Nas primeiras, estavam muito dependentes do professor e, posteriormente, trabalhando em duplas, verificavam com os colegas “qual era o resultado” e, se necessário, observavam o que tinham errado e/ou como foi desenvolvida a resolução, para, em seguida, realizar as devidas correções.

Os alunos consideraram que as Tarefas realizadas ampliaram a “visão” que tinham sobre a Matemática, que era concebida numa perspectiva mais “mecânica” e procedimental. O compromisso dos alunos em participar de todas as Tarefas durante dois meses, de forma voluntária e com entusiasmo, indica que as Tarefas de estudo

estavam proporcionando seu desenvolvimento humano e a apropriação de conteúdos algébricos.

Consideramos que o conjunto de Tarefas de estudo que abordou o Sistema de Equações Lineares nas suas formas específicas, contextualizada e problematizada; com suas características internas e externas, com ações procedimentais e reflexivas; e com abordagens clássicas e tradicionais; promoveu um processo de ensino-aprendizagem que contribuiu para a formação humana dos alunos.

No que tange à formação do conceito de Sistema de Equações Lineares, verificamos a importância de os alunos se apropriarem das representações algébricas – juízos e conceitos, nas suas formas mais gerais – incógnitas, variáveis, coeficientes etc. Há indícios de que o domínio desses conhecimentos científicos contribuiu para a formação do pensamento teórico sobre Sistema de Equações Lineares – que se revela por uma rede conceitual.

A organização do processo ensino-aprendizagem, que desenvolvemos na prática escolar do Ensino Médio criou condições para o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, notadamente, sobre Sistema de Equações Lineares, a partir dos resultados apresentados e analisados neste texto. Os indícios de desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos estão presentes nos diálogos entre alunos e professor e nos registros presentes nas Tarefas – resoluções, comentários e observações. Neles foram expressas as inter-relações dos juízos e conceitos que revelam a essência dos Sistema de Equações Lineares.

Desse modo, esta pesquisa apresentou uma possibilidade de ressignificar a organização do ensino da álgebra/ Sistema de Equações Lineares, no Ensino Médio, indicando aos professores e à comunidade acadêmica um caminho possível para ser realizado, debatido e aprimorado. Traz, ao Ensino Médio, a possibilidade de adequar os princípios da Teoria da Atividade de Estudo aos processos de ensino-aprendizagem e aguarda novos estudos e contribuições que almejam transformar a realidade educacional brasileira.

Referências

Aquino, O. F.& Rodrigues, A. (2019). A formação do pensamento na escola: uma discussão na interseção entre a filosofia, a psicologia e a didática. In R. Valdés

- Puentes & A. M. Longarezi (Eds.), Ensino Desenvolvimental: sistema Elkonin, Davidov, Repkin (p. xx-xx). Campinas: Mercado de Letras.
- Aquino, O. F. (2017). O experimento didático-formativo: contribuições de L. S. Vigotski, L. V. Zankov e V. V. Davidov. In A. M. Longarezi & R. V. Puentes (Orgs.), Fundamentos Psicológicos e Didáticos do Ensino Desenvolvimental (pp. xx-xx). Uberlândia, MG: EDUFU
- Boyer, C. B. (2003). História da Matemática. São Paulo: Edgard BencherLtda.
- Davidov, V. V. (1982). Tipos de generalización em la enseñanza. Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Davidov, V. V. (1986). Problemas do ensino desenvolvimental - A Experiência da Pesquisa Teórica e Experimental na Psicologia. *Revista Soviet Education*, 30(8).
- Davidov, V. V. (1987). Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In La Psicología Evolutiva y Pedagógica en la URSS. Antología. Moscú: Progreso.
- Davidov, V. V. (1988). La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico – Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Editorial Progreso.
- Davidov, V. V. (1999). O que é a atividade de estudo. Revista “Escola inicial”, 7.
- Davídov, V. V. (2019). Desenvolvimento psíquico da criança. In R. Valdés Puentes, C. G. Coelho Cardoso, & P. A. P. Amorim (Orgs.), Teoria da aprendizagem desenvolvimental: contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin (Vol. 10, pp. 175-120). Curitiba: CRV.
- Davidov, V.& Márkova, A. (1987). La concepción de la actividad de estudio de los escolares. In.: La psicología evolutiva y pedagogica en a URSS – Antología. Moscu: Editorial Progreso.
- Elkonin, D. B. (1961). Desarrollo Psíquico de los Escolares. In A. A. Smirnov (Ed.), Psicología (p. 553-559). Cuba: Imprensa Nacional de Cuba.
- Eves, H. (2004). Introdução à História da Matemática. Campinas, SP: Editora da Unicamp.
- Eves, H. (2011). Introdução à história da Matemática. Campinas, SP: Editora da Unicamp.
- Iezzi, G. & Hazzan (1985). Fundamentos De Matemática Elementar - Volume 4. São Paulo: Atual Editora.
- Kopnin, P. V. (1978). A dialética como lógica e teoria do conhecimento. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.
- Lima, E. L., et al. (2006). A Matemática do Ensino Médio (Vol. 3). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.
- Moura, M. (2000). O educador matemático na coletividade da formação: Uma experiência com a escola pública. Tese de Livre Docência, Faculdade Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Panossian, M. L. (2008). Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino. Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Souza, R. C. C. R., Magalhães, S. M. O., & Silveira, M. J. (2014). A tradição do materialismo histórico-dialético na produção acadêmica sobre professores. In C.

- Cunha, J. V. Sousa, & M. A. Silva (Orgs.), O Método Dialético na Pesquisa em Educação (pp. xx-xx). Campinas, SP: Autores Associados.
- Sousa, M. C. De, Panossian, M. L., & Cedro, W. L. (2014). Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos. Campinas, SP: Mercado de Letras. (Série Educação Matemática).
- Santos, C. M., & Zuin, E. S. L. (2017). Sistema de equações lineares em livros didáticos (1930-1970): apontamentos para a formação inicial e continuada de professores de Matemática e áreas afins. Material didático ou instrucional - Material didático.
- Vygotski, L. S. (2001). Pensamiento y lenguaje. In Obras Escogidas (Vol. III, 2ª ed., pp. xx-xx). Madrid: Visor.
- Vigotski, L. S. (2008). Pensamento e linguagem. São Paulo: Martins Fontes.