

Conhecimento matemático para o ensino: limites e possibilidades para pesquisas brasileiras

Mathematical knowledge for teaching: limits and possibilities for brazilian research

Conocimiento matemático para la enseñanza: límites y posibilidades de la investigación brasileña

Connaissances mathématiques pour l'enseignement: limites et possibilités de la recherche brésilienne

Henrique Rizek Elias¹

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática

<https://orcid.org/0000-0002-9660-7303>

Sabrina Bobsin Salazar²

Universidade Federal de Pelotas – UFPel

Doutorado em Educational Studies - Mathematics Education

<https://orcid.org/0000-0003-0832-3288>

Vania Batista Flose Jardim³

Instituto Federal de São Paulo - IFSP

Doutorado em Ensino e História das Ciências e da Matemática

<https://orcid.org/0000-0001-7325-267X>

Resumo

O modelo teórico *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) proposto por Deborah Ball e colaboradores é um referencial teórico bastante difundido no Brasil. Assim, faz-se necessário investigar e discutir como as pesquisas o estão utilizando. O artigo objetiva realizar uma análise crítica a respeito do modelo MKT, com foco no uso que tem sido feito desse modelo em pesquisas no Brasil. Para tanto, foi realizada uma pesquisa de natureza teórica e especulativa cujo *corpus* foi constituído por: (i) artigo *Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?* de Ball e sua equipe, principal texto utilizado em pesquisas brasileiras para apresentar o MKT; (ii) artigos publicados em periódicos Qualis A1 e A2 (quadriênio 2017-2020) e que fizeram uso do MKT em suas análises; (iii) artigos de autores que produziram outros modelos teóricos sobre o conhecimento matemático do professor após o MKT; e (iv) trabalhos recentes da pesquisadora Deborah Ball e pesquisadores ligados a ela, indicando perspectivas atuais

¹ henriqueelias@utfpr.edu.br

² sabrina.salazar@ufpel.edu.br

³ vaniaflose@ifsp.edu.br

emergentes do seu grupo para o conhecimento do professor. Com base na interpretação e na argumentação, a partir desses materiais, foi possível concluir, entre outros aspectos, que pesquisas precisam superar o mero uso dos subdomínios do MKT como categorias assumidas *a priori*, passando a considerá-las como categorias a serem investigadas, questionadas, ampliadas e reformuladas, levando em consideração o contexto brasileiro. Desse modo, busca-se incluir o contexto brasileiro no conjunto de investigações sobre o modelo MKT, evitando que as pesquisas feitas no país sejam somente uma reprodução de referenciais teóricos elaborados em contextos socioculturais tão distintos.

Palavras-chave: Conhecimento matemático para o ensino, Pesquisa teórica e especulativa, Limites e possibilidades, Contexto brasileiro.

Abstract

The mathematical knowledge for teaching (MKT) proposed by Deborah Ball and collaborators is a widespread theoretical framework in Brazil. Therefore, it is necessary to investigate and discuss how it is being used in research. This article aims to carry out a critical analysis of the MKT framework presented by Ball et al. (2008), focusing on how it has been used in research in Brazil. To achieve such goal, a theoretical and speculative study was carried out, the corpus of which consisted of (i) Ball et al.'s (2008) article, which is the main text used in Brazilian research to present the MKT; (ii) articles published in Qualis A1 and A2 journals and which used MKT in their analyses; (iii) articles by authors who produced other theoretical models about teachers' mathematical knowledge after MKT; and (iv) recent works by researcher Deborah Ball and researchers linked to her, which indicate current perspectives emerging from her group for teacher knowledge. Based on the interpretation and argumentation based on these materials, it was possible to conclude, among other aspects, that research needs to overcome the mere use of MKT subdomains as *a priori* assumed categories and needs to start to consider them as categories to be investigated, questioned, expanded and reformulated considering the Brazilian context. Thus, we advocate including the Brazilian context in the set of inquiries on the MKT model to prevent research carried out in the country from being merely a reproduction of theoretical references elaborated in such different sociocultural contexts.

Keywords: Mathematical knowledge for teaching, Theoretical and speculative research, Limits and possibilities, Brazilian context.

Resumen

El modelo teórico *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) propuesto por Deborah Ball y colaboradores es un marco teórico muy difundido en Brasil. Teniendo esto en cuenta, es necesario investigar y discutir cómo las investigaciones lo están utilizando. El artículo tiene como objetivo realizar un análisis crítico del modelo MKT, centrándose en el uso que se ha hecho de este modelo en la investigación en Brasil. Para ello, se llevó a cabo una investigación teórica y especulativa cuyo *corpus* consistió en: (i) artículo *Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?* de Ball y su equipo, el principal texto utilizado en la investigación brasileña para presentar el MKT; (ii) artículos publicados en los periódicos Qualis A1 y A2 (cuadriénio 2017-2020) y que usaron el MKT en sus análisis; (iii) artículos de autores que produjeron otros modelos teóricos sobre el conocimiento matemático del profesor después del MKT; y (iv) trabajos recientes de la investigadora Deborah Ball e investigadores vinculados a ella, indicando perspectivas actuales emergentes de su grupo para el conocimiento del profesor. A partir de la interpretación y argumentación, basada en estos materiales, fue posible concluir, entre otros aspectos, que las investigaciones necesitan superar el mero uso de los subdominios de MKT como categorías asumidas *a priori*, considerándolas como categorías a investigar, cuestionar, ampliar y reformular, teniendo en cuenta el contexto brasileño. Por lo tanto, buscamos incluir el contexto brasileño en el conjunto de investigaciones sobre el modelo MKT, evitando que las investigaciones realizadas en el país sean solo una reproducción de referencias teóricas elaboradas en contextos socioculturales tan diferentes.

Palabras clave: Conocimiento matemático para la enseñanza, Investigación teórica y especulativa, Límites y posibilidades, Contexto brasileño.

Résumé

Le modèle théorique *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) proposé par Deborah Ball et collègues est un référentiel théorique beaucoup répandu au Brésil. En considérant cela, il est nécessaire d'examiner et de discuter la manière dont les recherches scientifiques l'utilisent. Cet article a pour but une analyse critique du modèle MKT, visant sur son utilisation courante par les recherches menées au Brésil. Pour ce faire, une enquête théorique et spéculative fut menée auprès d'un *corpus* composé par : (i) l'article *Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?* de Ball et son équipe, le texte le plus utilisés par les recherches Brésiliennes pour présenter le MKT; (ii) articles publiés par des revues Qualis A1 et A2 (période 2017-2020) et qui ont utilisé le MKT dans leurs analyses; (iii) articles dont les auteurs ont créé d'autres

modèles théoriques sur les connaissances mathématiques des enseignants post-MKT; et (iv) les travaux plus récents de la chercheuse Deborah Ball et des chercheurs liés à elle, indiquant les perspectives émergentes actuelles du groupe pour les connaissances des enseignants. En interprétant ces données et en discutant après elles, il est possible de conclure que, parmi d'autres aspects, les recherches scientifiques doivent surmonter la simple utilisation des sous-domaines du MKT autant que catégories assumées *a priori*, désormais les considérant comme des catégories à étudier, contester, amplifier et reformuler, en tenant compte du contexte Brésilien. Ainsi, l'intention est d'insérer ce contexte Brésilien dans l'ensemble d'enquêtes à propos du modèle MKT, en évitant que les recherches menées dans le pays ne soient qu'une reproduction de références théoriques élaborées chez d'autres contextes socioculturels si divers.

Mots-clés: Connaissances mathématiques pour l'enseignement, Recherche théorique et spéculative, Limites et possibilités, Contexte brésilien.

Conhecimento Matemático para o Ensino: limites e possibilidades para pesquisas brasileiras

A presente pesquisa está inserida no contexto de uma investigação mais ampla que vem sendo desenvolvida por membros do Grupo de Trabalho (GT) 07 – Formação de Professores que Ensinam Matemática, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), dedicados a investigar a matemática específica da/nhação do professor⁴. Visando contribuir com o número especial intitulado “Referenciais teóricos para discutir conhecimentos e saberes matemáticos mobilizados e produzidos por professores que ensinam matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio”, busca-se, aqui, apresentar uma discussão a respeito de um referencial teórico difundido no Brasil, o Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching - MKT*) de Deborah Ball e colaboradores.

A relevância do modelo teórico do MKT para as discussões sobre o conhecimento matemático do professor é inegável, o que pode ser observado, por exemplo, pela quantidade de teses e dissertações encontradas no levantamento feito por Patrono e Ferreira (2021). Considerando os trabalhos defendidos após 2008 (ano de publicação do artigo Ball et al., 2008) até 2019, os autores encontraram 33 pesquisas, sendo 19 dissertações e 14 teses, que fizeram uso do modelo MKT. De maneira semelhante, Sousa e Oliveira (2023) realizaram um levantamento de artigos científicos em periódicos brasileiros entre os anos de 2008 e 2022 computando um total de 49 artigos relacionados ao MKT. A quantidade de publicações sobre o MKT, no Brasil, indica sua relevância para as pesquisas nacionais e, principalmente, a necessidade de se investigar e discutir tal modelo teórico.

Desta forma, este artigo se propõe a realizar uma análise crítica a respeito do modelo MKT, com foco no uso que tem sido feito desse modelo em pesquisas no Brasil. Tal análise é feita na perspectiva de pesquisa teórica e especulativa, buscando compreender como o referido modelo pode ser explorado em pesquisas no Brasil e em que pontos ele apresenta limitações que precisam ser adaptadas ou complementadas.

⁴ Atualmente, pesquisadores de diferentes universidades no Brasil integram essa iniciativa. A pesquisa é coordenada pelas pesquisadoras Dr.^a Flávia Cristina de Macêdo Santana (Universidade Estadual de Feira de Santana, Uefs) e Dr.^a Roberta D'Angela Menduni Bortoloti (Universidade do Sudoeste da Bahia - Uesb) e pelo pesquisador Dr. Victor Augusto Giraldo (Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ) e integram a equipe: Dr.^a Eliana Matesco Cristovao (Universidade Federal de Itajubá, Unifei), Dr. Enio Fernandes de Paula (Instituto Federal de São Paulo, IFSP), Dr. Henrique Rizek Elias (Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR), Dr.^a Lya Raquel Oliveira dos Santos (Universidade Federal do Piauí, UFPI), Marta Élid Amorim (Universidade Federal de Sergipe, UFS), Me. Mayara de Miranda Santos (Instituto Federal do Piauí, IFPI), Dr.^a Sabrina Bobsin Salazar (Universidade Federal de Pelotas, UFPel), Me. Silvânia da Silva Costa (UFS), Dr.^a Vania Batista Flose Jardim (IFSP), Me. Lana Thaís Santos Silva (Universidade Federal de Sergipe, UFS, Escola Municipal Dr. Lourival Baptista) e Dr.^a Vânia Cristina da Silva Rodrigues (Universidade Federal do Triângulo Mineiro, UFTM).

Metodologia

A discussão sobre o MKT, realizada neste texto, caracteriza-se como uma pesquisa de natureza teórica e especulativa, de acordo com Van Der Maren (2004) e Martineau et al. (2001). A pesquisa especulativa visa à teorização e o faz sem a utilização de dados empíricos, como acontece com uma pesquisa empírica (Van Der Maren, 2004). Esse tipo de pesquisa envolve um trabalho mental de produção de enunciados teóricos a partir de outros enunciados teóricos, em que o pesquisador, a partir do estudo e da reflexão sobre o tema escolhido, tem como objetivo construir, por meio da escrita, declarações teóricas (Van Der Maren, 2004). Segundo Passos (2015):

Uma das questões centrais de uma pesquisa narrativa especulativa é a capacidade de produzir uma nova questão, de propor uma nova análise a partir da interpretação dos textos anteriores e argumentos rigorosos. De certa forma é uma maneira de contar uma história a respeito do tema pesquisado. (Passos, 2015, p. 32)

O exercício de construir declarações teóricas com base em outras declarações teóricas requer, além de ações como interpretar e argumentar, contar uma história a respeito do tema pesquisado (Martineau et al., 2001). Esses são os três eixos principais em que se apoia essa modalidade de pesquisa: o interpretar, o argumentar e o contar.

Assim, a teorização não pode ser feita a partir do nada, isto é, a pesquisa especulativa necessita de material, de outras afirmações teóricas produzidas anteriormente (Van Der Maren, 2004). O *corpus* de afirmações teóricas já produzidas anteriormente pode ser constituído de três formas: *corpus* único, *corpus* intertextual e *corpus* de contraste. O *corpus* único é utilizado quando o propósito for discutir um tema ou um conceito a partir de um mesmo autor e sob uma mesma perspectiva. O *corpus* intertextual é utilizado quando o propósito for discutir um tema ou um conceito a partir de diferentes autores, cuja interação das informações seja convergente, ou a partir de um mesmo autor que produz a informação sobre o mesmo tema só que de diferentes perspectivas (por exemplo, abordar um mesmo tema sob a perspectiva de aluno e de professor). Já o *corpus* de contraste é composto por depoimentos de autores que têm diferentes pontos de vista sobre um conceito ou um evento, havendo divergências nas informações (Van Der Maren, 2004).

A presente pesquisa faz uso do *corpus* de contraste, pois o foco está em interpretar diferentes fontes (autores) que utilizaram o MKT ou que produziram diferentes declarações teóricas a partir do MKT, indicando possíveis divergências nas informações. O *corpus* de contraste a ser considerado nesta pesquisa é constituído por: (i) o artigo Ball et al. (2008),

principal texto utilizado em pesquisas brasileiras para apresentar o MKT; (ii) artigos publicados em periódicos Qualis A1 e A2 e que fizeram uso do MKT em suas análises; (iii) artigos de autores que apresentaram outros modelos e tipos de conhecimentos posteriores ao MKT; e (iv) trabalhos recentes da pesquisadora Deborah Ball e pesquisadores ligados a ela, indicando perspectivas atuais emergentes do seu grupo para o conhecimento do professor. Assim, esta pesquisa tem por objetivo realizar uma análise crítica a respeito do modelo MKT, apresentado por Debora Ball e sua equipe, com foco no uso que tem sido feito desse modelo em pesquisas no Brasil. Tal análise crítica configura-se em um texto constituído a partir das interpretações e argumentações feitas ao longo da investigação, contando uma história (Martineau et al., 2001) acerca do modelo MKT em pesquisas publicadas no Brasil. Na próxima seção, discute-se a primeira fonte do corpus de contraste, isto é, o modelo do MKT segundo Ball et al. (2008).

O modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino

O modelo MKT para descrever o conhecimento necessário para ensinar matemática emerge da noção de *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), uma das sete categorias⁵ propostas por Shulman (1987) para o conhecimento base para o ensino. O PCK, conforme apresenta Shulman (1987), é uma espécie de amálgama entre conteúdo e pedagogia que é exclusivo ao professor, sua forma específica de conhecer a disciplina, diferente do Conhecimento do Conteúdo (CK).

Lee Shulman foi professor em Michigan State University e suas pesquisas na área de ensino, pedagogia e formação de professores se tornaram bastante influentes no mundo, em parte, pela atuação de seus colegas e seus orientandos, futuros pesquisadores da área. Deborah Ball vem desse grupo de pesquisa e, a partir de seu próprio grupo formado, então, na Universidade de Michigan, ela elabora e refina o PCK especificamente para o ensino de Matemática.

No texto seminal que define o modelo MKT, Ball et al. (2008) reconhecem duas contribuições importantes dos trabalhos de Shulman. A primeira delas foi relacionar o trabalho dos professores, a tarefa de ensinar, com o conteúdo a ser ensinado, pois, na época, as pesquisas acerca de ensino e docência eram bastante generalistas. A segunda, e mais importante para o modelo MKT, foi a de perceber que era necessário um tipo de conhecimento sobre o conteúdo

⁵ As sete categorias ou domínios conhecimento base para o ensino, segundo Shulman, são: Conhecimento Conteúdo, Conhecimento Pedagógico Geral, Conhecimento Curricular, Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, Conhecimento das características cognitivas dos seus alunos, Conhecimento do contexto educacional, Conhecimento dos fins gerais da educação escolar, seus propósitos, valores e seus fundamentos filosóficos e históricos.

a ser ensinado que era diferente de um conhecimento mais usual, ou comum, sobre este conteúdo. Ou seja, é a partir dos trabalhos de Shulman que o trabalho docente começa a ser investigado vinculado ao conteúdo a ser ensinado e que, para ensinar este conteúdo, não basta conhecê-lo a fundo, é preciso conhecê-lo de uma forma especial que está relacionada à atividade prática de ensinar.

Apesar dessas importantes contribuições, o PCK, como teorizado por Shulman e apropriado pela comunidade científica, ainda era amplo e carecia de clareza em sua definição, permitindo seu uso com uma grande variedade de significados. Dessa forma, o grupo de Deborah Ball, ao refinar o modelo para a área da Matemática, apresentou categorias e definições mais precisas e buscou validar o modelo empiricamente.

Na perspectiva do modelo MKT, para ensinar matemática é necessário que o professor tenha tanto CK, como o PCK. Apesar de Shulman e colegas reconhecerem diferentes tipos de conhecimentos necessários para a prática docente, o foco do modelo PCK era o conhecimento pedagógico do conteúdo. E, quando Ball e colegas refinam o modelo de Shulman, a união de ambos os conhecimentos, CK e PCK, passa a ser relevantes e significativa para o trabalho do professor.

Dentro do domínio CK, Ball e colegas definiram os seguintes subdomínios: o Conhecimento Comum do Conteúdo (*Common Content Knowledge* - CCK), como o conhecimento e práticas matemáticos usados em áreas que não o seu ensino; o Conhecimento Especializado do Conteúdo (*Specialized Content Knowledge* - SCK), que consiste em um conhecimento de natureza matemática que é apenas necessário na tarefa de ensinar matemática; e o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (*Horizon Content Knowledge* - HCK), que consiste em um conhecimento de natureza matemática que permite ao professor ter uma consciência de como os temas estão relacionados ao longo da matemática incluída no currículo.

Dentro do domínio PCK, Ball e colegas trouxeram a ideia original de Shulman como um "amálgama do conteúdo e pedagogia", sendo dividido nos subdomínios: Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (*Knowledge of Content and Students* - KCS), que é o conhecimento que combina saber sobre os estudantes e saber sobre matemática; Conhecimento do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (*Knowledge of Content and Teaching* - KCT), que é o conhecimento que combina saber sobre o ensino e saber sobre matemática.; e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (*Knowledge of Content and Curriculum* - KCC), que consiste no conhecimento sobre a maneira como a matemática está organizada ao longo do currículo. A Figura 1 apresenta o modelo MKT e seus subdomínios conforme Ball et al. (2008):

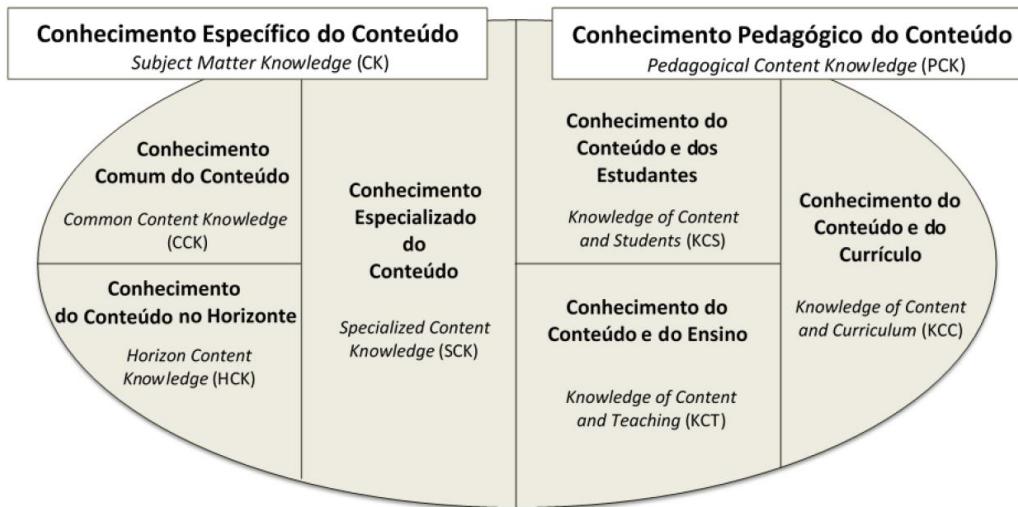


Figura 1.

Adaptado de Ball et al. (2008)

Desde seus trabalhos iniciais, o grupo de Deborah Ball investe na validação do modelo teórico, seja a partir de uma definição mais precisa (Ball et al., 2008), como também a partir de estudos empíricos. Na próxima seção, discute-se a segunda fonte do corpus de contraste, isto é, pesquisas publicadas no Brasil que utilizam o MKT.

Como pesquisas científicas publicadas no Brasil utilizam o modelo MKT

Foram incluídos no levantamento os periódicos: Boletim de Educação Matemática (Bolema), Educação Matemática Pesquisa (EMP), *Acta Scientiae*, Perspectivas da Educação Matemática, Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM), Zetetiké e Educação Matemática em Revista (EMR). Tais periódicos foram selecionados por serem Qualis A1 ou A2 na área de Ensino da Capes, o que indica a relevância de cada um. Como o propósito do levantamento era obter um panorama de como pesquisas fazem uso do Modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino de Ball et al. (2008), a escolha por tais periódicos foi suficiente, uma vez que esses são espaços significativos de produção e difusão de perspectivas teóricas na área da Educação Matemática no Brasil.

Para a seleção dos artigos, foi considerado um recorte temporal, restringindo o levantamento às publicações realizadas nos anos de 2019 a 2023. No campo “Busca” dos periódicos mencionados, foram considerados os seguintes disparadores: Conhecimento AND Matemática; Conhecimento AND Profissional AND Matemática; Estudo do Conceito AND Matemática; e Saberes AND Matemática. Os artigos obtidos, a partir desta busca, foram, então, avaliados sob os seguintes critérios:

- 1) Os artigos devem ter foco no ensino (e não exclusivamente na aprendizagem por parte de estudantes da escola básica);
- 2) Os artigos devem ter como tema de pesquisa ou como sujeitos professores que lecionam nos anos finais do Ensino Fundamental ou no Ensino Médio (e não nos anos iniciais do Ensino Fundamental).
- 3) Os artigos devem abordar, de alguma forma, conhecimentos/saberes de conteúdo matemático para o ensino (com suas diferentes denominações, dependendo do referencial teórico).

A partir dessa análise, foram selecionados 63 artigos que contemplavam os critérios supracitados. Em seguida, um novo refinamento foi feito, acrescentando um quarto critério: 4) O artigo deve abordar o modelo MKT. Com esse novo critério, chegou-se a 12 artigos, focos de análise nesta seção.

Tabela 1.

Artigos pré-selecionados (Dados da pesquisa)

Artigo	Título	Objetivo
Armas (2020)	Evaluación de la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico Matemático de Futuros Profesores de Matemáticas en el Desarrollo de una Clase Utilizando Funciones	Evaluar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación al hacer transformaciones de las representaciones de una función.
Amorim, Pietropaolo, Galvão e Silva (2020)	Uma Sequência de Atividades para o Ensino de Equações Diofantinas: Possibilidade para Ampliar a Base de Conhecimentos de Futuros Professores de Matemática	Analisar, à luz dos pressupostos estabelecidos por Ball, Thames e Phelps, a base de conhecimentos para o ensino de Equações Diofantinas de um grupo de futuros professores de Matemática, participantes de uma formação.
Wanderley e Souza (2020)	<i>Lesson Study</i> como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática sobre o Conceito de Volume	Descrever, analisar e discutir resultados de uma investigação do tipo observação participante sobre o conceito de volume e de seu ensino defendidos pela comunidade científica da Educação Matemática, mobilizados em uma formação de professores à luz do <i>Lesson Study</i> .
Moreira e Ferreira (2021)	A Formação Matemática do Professor da Educação Básica: das Concepções Historicamente Dominantes às Possibilidades Alternativas Atuais	Contar uma história abreviada das ideias que influenciaram os desenhos curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil desde 1930, e também daquelas que influenciaram as visões teóricas alternativas que foram se desenvolvendo ao longo desse período.
Silva, Silva e Julio (2021)	Contribuições para a Formação Inicial de Professores de	Compreender as contribuições para a formação inicial de professores de

Artigo	Título	Objetivo
	Matemática a partir de seu Envolvimento em um Projeto Extensionista Direcionado ao Público Idoso	Matemática quando envolvidos em um projeto de extensão universitária, direcionado ao público idoso.
Aguiar, Ponte e Ribeiro (2021)	Conhecimento Matemático e Didático de Professores da Escola Básica acerca de Padrões e Regularidades em um Processo Formativo Ancorado na Prática	Investigar o conhecimento matemático e didático mobilizado e aprofundado por professores de Matemática ao preparar, desenvolver e analisar coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades em uma turma do Ensino Médio
Marins, Teixeira e Savioli (2021)	Práticas de Ensino Exploratório de Matemática e a Mobilização/Desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino por Participantes do PIBID	Investigar conhecimentos profissionais que são mobilizados/desenvolvidos por participantes do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), quando inseridos em um processo formativo apoiado na perspectiva de ensino Exploratório.
Biza, Kayali, Moustapha-Corrêa, Nardi e Thoma (2021)	Afinando o Foco em Matemática: Desenho, Implementação e Avaliação de Atividades MathTASK para a Formação de Professores de Matemática	Introduzir algumas <i>mathtasks</i> e apresentar os princípios gerais do desenho e uso de <i>mathtasks</i> para fins de pesquisa e formação de professores.
Martins e Curi (2022)	Conhecimentos e crenças manifestados por professores que ensinam Matemática e fazem uso de materiais manipuláveis em suas práticas	Evidenciar os conhecimentos e crenças manifestados por professores que ensinam Matemática no Ciclo Interdisciplinar ao fazer uso de recursos manipuláveis, em suas interações com os documentos e materiais curriculares da Rede Municipal de São Paulo.
Fonçatti e Morelatti (2023)	<i>Lesson Study</i> no Programa de Residência Pedagógica: desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo de futuros professores de matemática	Analizar as implicações do uso do <i>Lesson Study</i> , contexto formativo baseado na colaboração e reflexão de professores, para a promoção do desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo dos futuros professores de matemática, bolsistas do Programa de Residência Pedagógica (RP) da CAPES, vinculados à FCT/UNESP
Gross, Trevisan, Araman e Trevisolli (2023)	Uma Proposta para Elaboração e Análise de Tarefas de Aprendizagem Profissional	Apresentar uma proposta para Elaboração e Análise de Tarefas de Aprendizagem Profissional com o intuito de subsidiar a identificação de conhecimentos matemáticos e pedagógicos que são revelados nas reflexões ocorridas em um contexto formativo
Jardim, Aguiar e Ribeiro (2023)	Tarefas de aprendizagem profissional e o conhecimento matemático envolvendo a estrutura algébrica de Grupos: uma experiência na licenciatura em Matemática	Compreender como tarefas de aprendizagem profissional são realizadas em aulas de uma disciplina de Álgebra na licenciatura em Matemática

Vale ressaltar que excluímos da seleção (Tabela 1) artigos que, apesar constarem na busca e de mencionarem trabalhos da pesquisadora Deborah Ball e colaboradores, não

apresentam o modelo MKT⁶. Dos 12 trabalhos que permaneceram no levantamento (Tabela 1), há diferentes menções ao modelo MKT. Moreira e Ferreira (2021) apresentam um artigo teórico, discutindo diferentes abordagens sobre o conhecimento matemático específico para o ensino escolar, sendo uma delas o MKT. Biza et al. (2021) mencionam o MKT, especialmente o Conhecimento de Horizonte de Conteúdo (HCK), mas não aprofundam esse tópico e não desenvolveram as análises dos dados sob essa perspectiva, colocando o foco nas chamadas *MathTasks*, tarefas matemáticas. De forma semelhante, o artigo de Aguiar et al. (2021) também menciona o modelo MKT, mas não faz uso dele nas análises, utilizando as noções de conhecimento didático e de conhecimento matemático propostas por Ponte (1999). Com os nove artigos restantes da Tabela 1, construímos a Tabela 2.

Tabela 2.

Artigos selecionados (Dados da pesquisa)

Artigo	Contexto	Conteúdo Matemático abordado	Subdomínios do MKT considerados/evidenciados nas análises dos dados
Armas (2020)	Formação inicial de professores de Matemática	Função	Conhecimento Comum do Conteúdo, Conhecimento o Conteúdo no Horizonte e Conhecimento Especializado do Conteúdo.
Amorim; Pietropao; Galvão e Silva (2020)	Formação inicial de professores de Matemática	Equações Diofantinas	Conhecimento do Conteúdo Comum, Conhecimento Especializado do Conteúdo, Conhecimento do Conteúdo no Horizonte; Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes; Conhecimento do Conteúdo e do Ensino; e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo
Wanderley e Souza (2020)	Formação continuada de professores de Matemática	Volume	Conhecimento Especializado do Conteúdo; Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes; Conhecimento do Conteúdo e do Currículo; Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.
Silva; Silva e Julio (2021)	Formação Inicial de Professores de Matemática	Não tinha um conteúdo específico	Conhecimento do Conteúdo e do Estudante e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.
Marins; Teixeira e Savioli (2021)	Formação inicial de professores de Matemática	Probabilidade	Conhecimento Especializado do Conteúdo; Conhecimento de Conteúdo e dos Estudantes e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.

⁶ Por exemplo, o trabalho de Molina e Samper (2019).

Artigo	Contexto	Conteúdo Matemático abordado	Subdomínios do MKT considerados/evidenciados nas análises dos dados
Martins e Curi (2022)	Formação continuada de professores que ensinam Matemática	Números (para o 4º ano) Geometria (para o 5º ano) Números (para o 6º ano)	Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.
Fonçatti e Morelatti (2023)	Formação inicial de professores de Matemática	Equações Lineares com duas incógnitas; o estudo das Funções	Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.
Gross; Trevisan; Araman e Trevisolli (2023)	Formação continuada de professores que ensinam Matemática	Pensamento funcional	Conhecimento do Conteúdo e do Currículo; Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.
Jardim; Aguiar e Ribeiro (2023)	Formação inicial de professores de Matemática	Números Racionais, Matrizes e Função	Conhecimento Comum do Conteúdo e Conhecimento Especializado do Conteúdo.

Da Tabela 2, percebe-se que seis pesquisas foram realizadas no contexto da formação inicial de professores de Matemática e três foram realizadas no contexto de uma formação continuada. Nenhuma pesquisa foi realizada fora do contexto de uma formação de professores, por exemplo, no cotidiano de uma sala de aula sem estar atrelada a um espaço formal de formação. Entre as abordagens formativas, destaca-se que três artigos (Wanderley & Souza, 2020; Martins & Curi, 2022; e Morelatti, 2023) fizeram uso da *Lesson Study* enquanto um processo colaborativo de desenvolvimento profissional, enquanto dois artigos (Gross et al., 2023; e Jardim et al.; 2023) fizeram uso das Tarefas de Aprendizagem Profissional como artefatos para a formação de professores de Matemática. Sobre o conteúdo matemático abordado, nota-se que há variedade de temas, sendo Função o tema mais explorado. No caso do artigo Silva et al. (2021), pelo fato de sua pesquisa ser realizada no contexto de um projeto de extensão voltado para o público idoso, não havia um conteúdo matemático específico sendo investigado, pois, de acordo com os autores:

Algumas atividades trabalharam com processos investigativos articulados com a História da Matemática, outras relacionaram a Matemática com a arte, houve aquelas que trabalharam com a Matemática utilizada pelas idosas em seu cotidiano, como também as que se voltaram para a confecção de materiais, com o intuito de discutir conteúdos matemáticos” (Silva et al., 2021, p. 772).

A respeito dos subdomínios do MKT, na Tabela 2, considerou-se somente aqueles subdomínios que: (i) foram explicitamente selecionados pelos autores com aqueles a serem considerados para as análises dos dados - por exemplo, Armas (2020) utilizou somente os

subdomínios relacionados ao Conhecimento Específico do Conteúdo, a saber: Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK) e o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK); ou (ii) foram explicitamente mencionados⁷ durante as análises feitas pelos pesquisadores - por exemplo, Marins et al. (2021) comentam que os subdomínios Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK) e o Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC) não foram identificados nas análises dos dados. Nota-se que dois dos subdomínios relacionados ao domínio Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Shulman, 1986, 1987) foram os mais evidenciados nas pesquisas, em especial o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino. Já o subdomínio Conhecimento do Conteúdo no Horizonte foi o menos mencionado nas análises dos artigos. O único trabalho que abordou todos os subdomínios em suas análises foi Amorim et al. (2020). No entanto, os próprios autores mencionam que alguns subdomínios podem ter mais destaque, são eles: Conhecimento Especializado do Conteúdo, ao Conhecimento do Conteúdo e do Ensino e ao Conhecimento do Conteúdo e do Currículo.

Essa constatação de que a maioria (ou, talvez, a totalidade) das pesquisas não abarca todos os subdomínios do MKT vai ao encontro do resultado apresentado por Patrono e Ferreira (2021). As autoras realizaram um levantamento bibliográfico considerando somente dissertações e teses e concluíram que, em todos os trabalhos analisados na pesquisa, nenhum indicou “[...] o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos para o ensino de um tema matemático de forma que abarcasse todas as categorias do MKT, ou seja, que proporcionasse discussões de todos os conhecimentos necessários para realizar o trabalho de ensinar Matemática” (Patrono & Ferreira, 2021, p. 18).

Talvez pelo fato de as nove investigações aqui consideradas terem sido realizadas no contexto de espaços formais de formação de professores, percebe-se que as principais conclusões tiradas nas pesquisas se referem a avaliar se o processo formativo oportunizou o desenvolvimento (ou avanços ou mobilização ou modificação) do conhecimento matemático do professor. Por exemplo, Amorim et al. (2020, p. 224, destaque nosso) concluem que “(...) os futuros professores de Matemática ampliaram sua base de conhecimentos (...) sobretudo em relação ao Conhecimento Especializado do Conteúdo, ao Conhecimento do Conteúdo e do Ensino e ao Conhecimento do Conteúdo e do Currículo”. Wanderley e Souza (2020, p. 1,

⁷ Essa escolha foi feita, pois alguns artigos apresentam o modelo MKT na íntegra na seção de fundamentação teórica, mas nem sempre explicita seus subdomínios nas análises dos dados. Por isso, não se considerou suficiente que o artigo mencionasse os subdomínios na fundamentação teórica, mas, pelo contrário, que eles fossem evidenciados nos dados analisados.

destaque nosso) apontam que “Os principais resultados mostraram que os professores ampliaram e aprofundaram seus conhecimentos de volume, antes limitados a fórmulas (...). Fonçatti e Morelatti (2023, p. 16, destaque nosso) afirmam que “(...) este contexto formativo se mostra como um caminho possível para proporcionar aprendizagens necessárias à docência e desenvolver o conhecimento pedagógico do conteúdo ainda na formação inicial (...).” Marins et al. (2021, p. 340, destaque nosso) concluem que “podemos inferir que a participação nesse processo formativo promoveu aos integrantes da pesquisa uma *mobilização/desenvolvimento de SCK, KCS e KCT* conforme a proposta de Ball et al. (2008) (...).” Já Silva et al. (2021, p. 784, destaque nosso) concluíram que “(...) o envolvimento das futuras professoras no projeto de extensão e o seu trabalho pedagógico com o público idoso *contribuíram em seu conhecimento pedagógico do conteúdo* (...).” Jardim et al. (2023) concluem que os futuros professores

(...) apresentaram conhecimentos prévios sobre procedimentos e conceitos (CCK), mas conforme se envolveram com a TAP e foram indagados nas diferentes fases do Ensino Exploratório (Canavarro et al., 2012), mobilizaram conhecimentos do conteúdo relacionados à escola, o SRCK (Dreher et al., 2018) (...). Ao final, seus conhecimentos são modificados e estes podem ser utilizados em prol do ensino, o que estaria ligado ao SCK. (Jardim et al., 2023, p. 18)

A pesquisa de Armas (2020) apresentou conclusões em uma direção um pouco diferente das demais, uma vez que usou os subdomínios do MKT para indicar fragilidades no conhecimento matemático do professor. Segundo o autor:

O estado de desenvolvimento da faceta epistêmica do conhecimento didático-matemático deste grupo de professores em formação sobre funções evidencia algumas deficiências de formação: enquanto o conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento do conteúdo no horizonte apresentam um bom estado de desenvolvimento, o seu conhecimento especializado do conteúdo apresenta sérias limitações. (Armas, 2020, p. 127, tradução nossa)

Por fim, uma última constatação que pode ser feita a partir dos trabalhos analisados diz respeito às lacunas percebidas pelos autores no modelo do MKT. Uma lacuna percebida foi no artigo de Martins e Curi (2022) que discute, além dos conhecimentos matemáticos, as crenças manifestadas por professores que ensinam matemática. Para abordar as crenças, as autoras buscam se fundamentar em outros trabalhos – por exemplo, Gómez-Chacón (2003) e Gómez-Chacón et al. (2006) –, pois o modelo MKT não aborda questões a respeito da crença do professor sobre a matemática e seus processos de ensino e de aprendizagem.

Outra lacuna percebida veio do trabalho de Jardim et al. (2023). Os autores se baseiam em Speer et al. (2015) para afirmar que “(...) os seis domínios do MKT não esclarecem a relação entre a matemática acadêmica e a escolar, uma vez que os estudos que originaram esses domínios observaram professores atuando em contextos correspondentes aos anos iniciais e finais do ensino fundamental brasileiro” (Jardim et al., 2023, p. 3. Ou seja, os subdomínios do MKT foram propostos a partir de estudos que não contemplavam, por exemplo, a matemática trabalhada no Ensino Médio e possíveis relações com a matemática acadêmica. Por esse motivo, Jardim et al. (2023) complementam sua fundamentação teórica com o conhecimento matemático do professor, o Conhecimento do Conteúdo Relacionado à Escola (*School-Related Content Knowledge* – SRCK) apresentado por Dreher et al. (2018). Tais lacunas serão aprofundadas na próxima seção, na qual se discute a terceira fonte do corpus de contraste, isto é, alguns modelos e tipos de conhecimentos posteriores ao MKT.

Alguns modelos e tipos de conhecimentos posteriores ao MKT

A maior parte das pesquisas que examinam o conhecimento do conteúdo dos professores e seu papel na prática é conduzida por meio de uma perspectiva teórica cognitiva, em que o conhecimento é considerado um dos vários fatores que influenciam as tomadas de decisão em sala de aula. Considerando que o MKT une o conhecimento, a prática de ensino e aprendizagem dos alunos, divididos em dois domínios, Speer et al. (2015) exploraram como as diferenças entre os contextos equivalentes ao Ensino Fundamental, Médio⁸ e Superior brasileiro, podem levar à uma caracterização diferente do MKT. Estas autoras apontaram que nos Ensino Fundamental e Médio as tarefas⁹ de ensino são semelhantes, sugerindo que os processos cognitivos funcionarão de maneira similar. No entanto, as abordagens de ensino variam entre os anos escolares e as práticas dos professores podem ser mais diversificadas nos anos escolares mais avançados do que no Ensino Fundamental e Médio. No ensino médio, certos tipos de conhecimento matemático são mais relevantes do que outros, e definições precisas são necessárias, o que se reflete na formação dos professores para atuar nessa fase de ensino, como a necessidade de justificar alguns procedimentos e utilizar algumas demonstrações cabíveis ao ano escolar.

⁸ Utilizaremos os termos ensino fundamental e ensino médio ao invés de elementar e secundário, apresentados pelos diferentes autores abordados neste artigo, devido à equivalência ao contexto brasileiro no qual se deu este estudo.

⁹ Tarefa é compreendida como um segmento de atividades da sala de aula dedicado ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular (Stein & Smith, 2009).

Tanto para os anos finais do Ensino Fundamental, quanto para o Ensino Médio, as pesquisas têm pressuposto que o MKT é mobilizado de forma semelhante, sem questionar as diferenças entre CCK e SCK nos diferentes níveis de ensino em questão. A maioria dos estudos focados em professores que lecionam para o ensino médio buscam identificar elementos do conhecimento ao descompactar o conteúdo de uma ideia ou tarefa matemática. Tudo isso é baseado no conhecimento possuído por aqueles que descompactam, geralmente, com um conhecimento substancial – conhecimentos que emergem da matemática. Um exemplo disso é a interpretação da resposta de um aluno com base em um conteúdo relacionado ao CCK, uma habilidade necessária ao professor.

Em relação ao nível universitário, Speer et al. (2015) notaram que os alunos desenvolveram ideias e formas de pensar que não eram familiares ao matemático, que precisava realizar um trabalho para dar sentido e determinar a validade das contribuições dos alunos (caracterizado como SCK). Isto é exemplificado pelo trabalho do matemático ao dar sentido às ideias matemáticas e ao raciocínio apresentando por outra pessoa e determinar se esse raciocínio está correto (trabalho de pesquisa), o que pode ser caracterizado como SCK.

A distinção entre CCK e SCK para os matemáticos não parece estar explícita. Speer et al. (2015) sugerem analisar essas distinções ao abordar o raciocínio dos alunos para a tomada de decisões e o conhecimento matemático envolvido. Para isso, são necessários mais estudos sobre os tipos de conhecimentos envolvidos no ensino médio e na graduação, semelhante ao que o grupo de Debora Ball realizou. Isso ajudaria a construir a teoria, desenvolvendo instrumentos práticos para avaliar como as várias oportunidades proporcionadas pelos professores favorecem a aprendizagem dos alunos. A generalização do enquadramento teórico atual pode levar à perda de um melhor entendimento da natureza do conhecimento do ensino de forma mais geral, melhorando o aprendizado do professor para apoiar o aprendizado de seus alunos.

Ainda segundo Speer et al. (2015), esse tipo de conhecimento para o ensino pode ser incorporado em cursos já existentes, que se baseiam na sabedoria da prática e não apenas em resultados teóricos ou empíricos. As maneiras pelas quais os professores de matemática utilizam seu conhecimento no ensino secundário podem ter implicações para ajudar os professores e influenciar o modo como ele pode ser avaliado.

A distinção entre CCK e SCK, definida por Ball et al. (2008), pode não ser suficiente para abordar o conhecimento mobilizado por professores de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Sendo assim, a partir da discussão apresentada por Speer et al. (2015) acerca das diferenças entre os conhecimentos mobilizados por professores

de matemática em diferentes níveis de ensino, Dreher et al. (2018) apontam que o MKT carece foco em uma dimensão que vai além da distinção entre comum e especializado, concentrando-se na relação não trivial entre a matemática acadêmica e a escolar.

Neste sentido, o Conhecimento do Conteúdo Relacionado à Escola (*School-Related Content Knowledge* - SRCK), proposto por Dreher et al. (2018), apresenta-se como um conhecimento do conteúdo matemático específico da profissão do professor de matemática, considera as inter-relações não triviais entre a matemática acadêmica e a matemática escolar, o que não é explícito no modelo MKT. O tipo de conhecimento abordado pelo SRCK não se mistura com o conhecimento pedagógico, mas compartilha conhecimentos com os matemáticos ao considerar o conhecimento do conteúdo acadêmico, indo além do conhecimento do conteúdo da matemática escolar, embora o SRCK dependa da estrutura da matemática acadêmica, pois não possui uma estrutura sistemática própria. Este tipo de conhecimento engloba três facetas que envolvem a estrutura curricular e ideias matemáticas fundamentais relacionadas à escola e relações entre a matemática acadêmica e escolar, considerando seus dois sentidos.

Embora os trabalhos de Speer et al. (2015) e Dreher et al. (2018) não apresentem um modelo de conhecimento, suas ideias são relevantes para o aprofundamento acerca da matemática para o ensino que é mobilizada em diferentes níveis de ensino, em especial, quando o foco está na aproximação entre a matemática acadêmica e a matemática escolar, um conhecimento necessário à prática do professor de matemática (Moreira & David, 2008).

Um modelo que mencionamos aqui é o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (*Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* – MTSK). De acordo com Flores-Medrano et al. (2014), o MTSK surge como resposta às dificuldades detectadas no MKT e baseia-se nas potencialidades deste e de outros modelos que caracterizam o conhecimento do professor de matemática.

Uma dessas dificuldades detectadas refere-se justamente ao CCK e ao SCK (passando, também, pelo HCK). Para Flores-Medrano et al. (2014), o MKT reconhece que existem, pelo menos, duas formas em que o docente conhece a matemática que irá ensinar, o CCK e o SCK (o HCK seria, segundo os autores, uma terceira forma), mas não fica claro o grau de associação com o conhecimento que ensinam aos estudantes. Assim, os autores apontam alguns problemas dessa forma de definir os subdomínios por meio da complementaridade entre eles. Para fins analíticos, este tipo de definição exige o estabelecimento de critérios de diferenciação cujo grau de subjetividade pode provocar a consideração de aspectos não equivalentes em diferentes países, sistemas escolares ou outros (Flores-Medrano et al., 2014).

O MTSK considera o caráter especializado do conhecimento do professor de maneira integral em todos seus subdomínios e evita fazer alusão a referentes externos (como os conhecimentos de outras profissões (Flores-Medrano et al., 2014). Assim, como alternativa para descrever o que e como o professor de matemática conhece os temas que vai ensinar, superando as dificuldades detectadas no modelo MKT sobre o CCK e o SCK, os autores do MTSK consideram o subdomínio conhecimento dos temas matemáticos (KoT), que envolve conhecer os conteúdos matemáticos e seus significados de forma bem fundamentada. O KoT integra o conteúdo que se espera que o aluno aprenda e permite a consideração de conhecimentos com um nível de profundidade superior ao esperado para os alunos (Flores-Medrano et al., 2014).

Outro aspecto que diferencia o modelo MTSK do modelo MKT diz respeito às crenças. Enquanto o MKT não menciona o papel das crenças que os professores possuem, o modelo MTSK considera o impacto dessas crenças na prática docente. Assim, o MTSK considera as crenças como um componente que permite ao pesquisador investigar a relação entre as concepções que os professores têm a respeito da Matemática e dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, e o conhecimento matemático do professor, tanto aquele que possui quanto aquele de que lança mão em sua prática (Climent et al. 2014).

Podemos observar nos trabalhos citados nesta seção que o MKT, apesar de ser precursor sobre o conhecimento necessário para ensinar matemática, não foi o único modelo, assim como não apresenta subdomínios suficientes para caracterizar o que é mobilizado pelo professor ao ensinar. Nesse sentido, o modelo nunca se apresentou finalizado em suas propostas e, ao levantar como este tem sido utilizado pelos pesquisadores, podemos avançar no entendimento sobre a complexidade do conhecimento matemático para o ensino, partindo das crenças, das conexões entre a matemática acadêmica e escolar em prol do ensino e das diferentes relações entre os subdomínios previstos pelo modelo MKT apresentado em 2008. Na próxima seção, discute-se a última fonte do corpus de contraste, isto é, trabalhos recentes do grupo da pesquisadora Deborah Ball.

Trabalhos recentes de pesquisadores emergentes do grupo da pesquisadora Deborah Ball

Nesta seção, seguimos a evolução do modelo MKT analisando o trabalho dos pesquisadores emergentes do grupo da pesquisadora Deborah Ball. Foram selecionados artigos cujos autores tiveram relação com este grupo de pesquisa e seu trabalho estuda o modelo MKT de alguma forma, permitindo, assim, contar a história da evolução do modelo MKT por seus autores originais.

Mesmo antes da divulgação do modelo completo do MKT em Ball et al. (2008), o grupo da Universidade de Michigan já investia em testes empíricos para validação do modelo, que consistiam na criação de itens de múltipla escolha e na aplicação desses itens em testes de larga escala. O desenvolvimento desses itens é descrito em Hill et al. (2004) e a correlação do Conhecimento Matemático para o Ensino, conforme proposto no modelo MKT, foi validada por meio de testes descritos em Hill et al. (2005). Os métodos descritos em ambos os trabalhos são robustos e colaboraram para a confiabilidade e disseminação mundial do modelo MKT.

Recentemente, o trabalho na elaboração de testes fez alguns avanços, tanto para corroborar ainda mais o modelo quanto para permitir a compreensão de suas limitações. Howell et al. (2016) mostram que os princípios que sustentam a criação de itens para os anos iniciais do Ensino Fundamental podem ser estendidos para os anos finais e Ensino Médio, no sentido que as respostas se alinham com o conhecimento dos professores que se quer mensurar e que tal conhecimento é diferente do conhecimento matemático comum. Já Charalambous et al. (2020) verificaram que MKT está correlacionado ao desempenho matemático dos estudantes, mas não conseguiram discernir entre as categorias CCK, SCK e KCT. Embora reconheçam que isso pode ser uma limitação do modelo MKT em si, sugerindo que os domínios não sejam, de fato, diferentes, os autores argumentam que há uma fragilidade no método da pesquisa, já que testes de múltipla escolha podem não ser a melhor metodologia para capturar o conhecimento dos professores em seu uso na prática, sendo mais apropriados para capturar aspectos estáticos da ação do professor.

Essa tendência a investigar os aspectos mais estáticos da prática também foi percebida na área da educação matemática como um todo, conforme o levantamento apresentado em Thanheiser et al. (2014). Eles investigaram 112 pesquisas realizadas entre 1978 e 2012 e observaram que a maioria dos estudos sobre o conhecimento do conteúdo de futuros professores centrava-se em “estudos estáticos do conhecimento” e não na forma como esse conhecimento se desenvolve. Assim, Thanheiser et al. (2014) sugeriram que mais pesquisas se concentrassem na caracterização do conhecimento de conteúdo dos futuros professores e investigassem como esse conhecimento se desenvolve.

Em relação ao MKT, em particular, um dos desafios mencionados é a dificuldade de avanços devido à falta de uma metodologia visivelmente compreendida e praticável para o estudo e desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino (Hoover et al., 2016). Os autores também refletem sobre duas abordagens metodológicas que têm sido utilizadas nos esforços para estudar a natureza e a composição do conhecimento matemático para o ensino: estudos de entrevistas e observação da prática.

Hoover et al. (2016) afirmam que, desde as décadas de 1980 e 1990, estudos começaram a usar entrevistas com professores para investigar seus conhecimentos. No entanto, as entrevistas apresentavam duas limitações: primeiro, tendiam a concentrar-se na identificação de falhas no conhecimento matemático dos professores, em vez de elucidar os requisitos de conhecimento matemático para o ensino; segundo, embora as entrevistas direcionassem para a importância do conhecimento especializado do professor, não forneciam informações adicionais de alta qualidade sobre esse conhecimento (Hoover et al., 2016). Portanto, para Hoover et al. (2016), os pontos fracos dessas pesquisas baseadas em entrevistas residiam no fato de centrarem a conversa na falta de conhecimento dos professores, ao mesmo tempo que proporcionavam poucas informações sobre como corrigir essas deficiências.

Sobre os estudos de observação da prática, os autores mencionam que, devido às limitações percebidas na abordagem via entrevistas com professores, o grupo de investigação da Universidade de Michigan desenvolveu uma abordagem baseada na prática para o estudo de registros de vídeo de instrução. No entanto, trata-se de uma abordagem demorada e dispendiosa, demandando, simultaneamente, conceituar o trabalho de ensino e as demandas matemáticas desse trabalho (Hoover et al., 2016).

A partir dessas limitações dos métodos mencionados (entrevistas e observações), Hoover et al. (2016) sugerem direções para potenciais inovações. Eles discutem algumas das maneiras pelas quais começaram a explorar abordagens metodológicas para o estudo do conhecimento matemático para o ensino. Uma abordagem considerada promissora pelos autores é a de utilizar locais onde deliberações sobre o ensino estão ocorrendo como sendo locais em que se pode pesquisar produtivamente o trabalho de ensino e suas demandas matemáticas. Como exemplo, Hoover et al. (2016) citam o trabalho de Kim (2016), que, para investigar o trabalho envolvido no fornecimento de *feedback* por escrito aos alunos, pede aos entrevistados que expliquem a justificativa para o *feedback*. Em vez de gravar em vídeo a instrução em sala de aula e analisar as exigências matemáticas do ensino, Kim (2016) analisa essas exigências à medida que se desenrolam em uma parte restrita do trabalho matemático do ensino. Trata-se, portanto, da utilização de locais de deliberação profissional sobre o ensino como locais de investigação para estudar o ensino.

No que diz respeito aos avanços na direção de desenvolver formas de medir o conhecimento matemático para o ensino, Selling et al. (2016) apresentam o *Mathematical Work of Teaching* (MWT), um *framework* construído com base nas tarefas matemáticas de ensino (Ball et al., 2008), cujo objetivo principal é o de informar e auxiliar o desenvolvimento de instrumentos para avaliar e medir o MKT. O *framework* tem como foco o trabalho matemático

para o ensino, indo além do CCK, mas sem adentrar nas escolhas pedagógicas do professor (Selling et al., 2016). Ou seja, o *framework* é destinado mais ao domínio CK do que ao PCK. Selling et al. (2016) reconhecem que a distinção entre o SCK e o CCK pode não estar bem definida e, por isso, ao construírem o *framework*, levaram em consideração as dificuldades que avaliadores do MKT poderiam encontrar não apenas na compreensão das diferenças entre esses dois subdomínios, mas, também nas maneiras de identificar e instigar o SCK dos professores. Assim, o discernimento dos domínios do modelo MKT é difícil, também, dentro do *framework* apresentado por Selling et al. (2016).

Desta forma, a partir dos trabalhos dos pesquisadores emergentes do grupo de pesquisa de Deborah Ball, nota-se que os testes empíricos foram muito importantes para validar o modelo, e assim continuam sendo, mas são ineficazes para discernir entre os subdomínios do modelo, bem como para capturar momentos dinâmicos da prática. Algumas outras metodologias foram sugeridas para superar estas limitações, como entrevistas, análises de registros de vídeos e utilização de locais de deliberação profissional, todas com vantagens e desvantagens. Finalmente, deste grupo, também houve tentativas de refinamento do modelo, também com vantagens e desvantagens. Na próxima seção, apresentaremos uma análise crítica, comparando as quatro fontes que compõe o corpus de contraste.

Análise crítica: contando uma história acerca do modelo MKT a partir de pesquisas no Brasil

Esta pesquisa de perspectiva teórica e especulativa teve como objetivo realizar uma análise crítica a respeito do modelo MKT, com foco no uso que tem sido feito desse modelo em pesquisas no Brasil. O MKT é um modelo em movimento, que foi e continua sendo constituído teoricamente a partir de pesquisas a respeito da prática docente. Ele surgiu da necessidade de especificar, para o contexto da Matemática, os domínios do conhecimento base para o ensino propostos por Shulman (1986, 1987), fomentando a proposição de outros modelos (como os mencionados SRCK e MTSK, mas existem outros). Continua em constante revisão ou avaliação, tanto da divisão e caracterização de seus subdomínios quanto em aspectos metodológicos, para efetivar sua natureza como um modelo que envolve os conhecimentos matemáticos necessários para que o professor possa exercer seu papel de ensinar matemática.

As pesquisas que apareceram no levantamento e que assumem o MKT como referencial teórico parecem não fazer parte desse movimento de avaliação do modelo e de verificação de suas potencialidades ou fragilidades no contexto específico em que a investigação é realizada. Predominam pesquisas que visam perceber se os processos formativos propostos oportunizaram

o desenvolvimento (ou avanços, mobilização ou modificação) do conhecimento matemático do professor, mas pouco se fala sobre a natureza desse conhecimento ou como ele se desenvolveu. Muitas vezes, as conclusões a que chegam as pesquisas são baseadas na identificação dos subdomínios do MKT, principalmente aqueles relacionados ao PCK. Em outras palavras, muitas pesquisas parecem se concentrar no que Thanheiser et al. (2014) chamaram de “estudos estáticos do conhecimento” e não na forma como esse conhecimento se desenvolve.

Dizer isso não significa que as pesquisas identificadas no levantamento não revelem fragilidades no modelo MKT. Algumas pesquisas utilizaram outros referenciais teóricos para superar lacunas deixadas pelo MKT, como, por exemplo, a questão das crenças (sobre a matemática ou sobre seus processos de ensino e de aprendizagem), a ausência de uma discussão sobre a relação entre a matemática acadêmica e a escolar, e a percepção de que alguns subdomínios podem não estar bem estabelecidos, especialmente no que se refere à distinção entre o CCK e o SCK. Tais constatações, como mencionadas, estão sendo contornadas nos artigos com o uso de outros modelos teóricos sobre o conhecimento matemático do professor.

No entanto, destaca-se que as preocupações apresentadas nos trabalhos mais recentes da pesquisadora Deborah Ball e de seus colaboradores - por exemplo, Hoover et al. (2016), Selling et al. (2016) e Charalambous et al. (2020) - não foram percebidas nos trabalhos levantados no Brasil. Assim, se por um lado, há uma grande quantidade de publicações sobre o MKT no Brasil (como citado na introdução deste artigo), sugerindo que essa temática possa, de algum modo, estar saturada no país, por outro, fica evidente que há avanços a serem feitos no sentido de melhor compreender a natureza e o desenvolvimento do MKT dos professores no contexto brasileiro.

Sendo o MKT um modelo em movimento, que se conecta com a prática e, portanto, se desenvolve a partir de pesquisas em diferentes contextos, é necessário que pesquisas no contexto brasileiro superem o mero uso dos subdomínios do MKT como categorias assumidas *a priori*. É fundamental que essas categorias sejam investigadas, questionadas, ampliadas e, eventualmente, reformuladas, considerando contexto específico. Um exemplo dessa característica do MKT ser um modelo dinâmico pode ser notado em Ball et al. (2008), quando apresentam a conhecida figura que ilustra os subdomínios (aqui traduzida na Figura 1). Os autores chamam a figura de um diagrama para representar as hipóteses atuais que tinham a respeito do conhecimento matemático do professor e complementam informando que os subdomínios KCC e HCK estão provisoriamente alocados, respectivamente, nos domínios PCK e CK. Esse caráter provisório abre espaço tanto para que outros modelos semelhantes sejam propostos, quanto para que o próprio MKT seja rediscutido.

Nesse sentido, surgem questionamentos e possibilidades futuras de pesquisas que proponham ir além de tomar os subdomínios do MKT como categorias *a priori*, visando refinar o modelo para o contexto brasileiro. Considerando a formação inicial de professores no Brasil, como se dá o desenvolvimento do MKT? Considerando a realidade das escolas no contexto brasileiro, como se dá o desenvolvimento do MKT? Como se desenvolve o MKT na prática docente, levando em conta os diferentes níveis de ensino? Como promover o desenvolvimento do SCK de professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, que geralmente possuem formação em Licenciatura em Pedagogia? Em que medida aspectos socioculturais interferem no desenvolvimento do MKT e, consequentemente, na caracterização dos subdomínios? Como propor instrumentos que auxiliem na avaliação do MKT, considerando o contexto brasileiro?

Esses são alguns questionamentos que emergem das interpretações e argumentações realizadas a partir do *corpus* deste trabalho e que indicam possibilidades futuras de pesquisa, buscando incluir o contexto brasileiro no conjunto de investigações sobre o modelo MKT e evitando que as pesquisas brasileiras sejam apenas uma reprodução de referenciais teóricos elaborados em contextos socioculturais tão distintos.

Por exemplo, considerando que a formação inicial de professores de Matemática nos Estados Unidos da América - EUA (país em que o modelo MKT teve origem) possui características distintas dos processos formativos no Brasil, investigar como a matemática escolar é abordada na formação de professores em ambos os contextos – buscando compreender como isso impacta no conhecimento matemático do professor antes de iniciar sua carreira ou durante os primeiros anos dela – pode aprofundar discussões a respeito de como o professor desenvolve os subdomínios relacionados ao Conhecimento Específico do Conteúdo.

Assim, os questionamentos elencados acima, sugerindo investigações no contexto brasileiro, podem colaborar com o movimento de avaliação do modelo e de verificação de suas potencialidades ou fragilidades, trazendo novos elementos para discussões sobre cada subdomínio do MKT.

Dedicatória

Dedicamos este trabalho a Marlova Estela Caldatto (UTFPR), que veio a falecer no dia 28 de novembro de 2022, antes da conclusão da pesquisa. Suas contribuições fizeram a diferença. Obrigada por toda a dedicação à Educação Matemática!

Referências

- Armas, T. A. D. (2020). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de matemáticas en el desarrollo de una clase utilizando funciones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34, 110-131. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a06>
- Aguiar, M., Ponte, J. P. D., & Ribeiro, A. J. (2021). Conhecimento Matemático e Didático de Professores da Escola Básica acerca de Padrões e Regularidades em um Processo Formativo Ancorado na Prática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35, 794-814. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a12>
- Amorim, M. E., Pietropaolo R. C., Galvão, M. E. E. L. & Silva, A. F. G. Uma Sequência de Atividades para o Ensino de Equações Diofantinas: Possibilidade para Ampliar a Base de Conhecimentos de Futuros Professores de Matemática. *Acta Scientiae*, 22(5), 207-226. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6080>
- Ball, D. L., Thamés, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Biza, I., Kayali, L., Moustapha-Corrêa, B., Nardi, E., & Thoma, A. (2021). Afinando o Foco em Matemática: Desenho, Implementação e Avaliação de Atividades MathTASK para a Formação de Professores de Matemática. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(35), 1-41. <https://doi.org/10.46312/pem.v14i35.13407>
- Canavarro, A. P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2012) Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In L. Santos (Ed.). *Investigação em educação matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-266). SPIEM.
- Charalambous, C. Y., Hill, H. C., Chin, M. J., & McGinn, D. (2019) Mathematical content knowledge and knowledge for teaching: exploring their distinguishability and contribution to student learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, 579-613. <https://doi.org/10.1007/s10857-019-09443-2>
- Climent, N., Escudero-Ávila, D., Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C., & Sosa, L. (2014). El conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática. In J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, & M. Á. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 35-55). Universidad de Huelva Publicaciones.
- Dreher, A., Lindmeier, A., Heinze, A., & Niemand, C. (2018). What kind of content knowledge do secondary mathematics teachers need? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 2(39), 319-341. <https://link.springer.com/article/10.1007/s13138-018-0127-2>
- Flores-Medrano, E., Ávila, D. I. E., Navarro, M. Á. M., González, Á. A., & Yañez, J. C. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. In *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Universidad de Huelva Publicaciones. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=833695>
- Fonçatti, M. C., & Miotto Morelatti, M. R. (2023). Lesson Study no Programa de Residência Pedagógica: desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo de futuros professores de matemática. *Perspectivas da Educação Matemática*, 16(44), 1-20. <https://doi.org/10.46312/pem.v16i44.19178>

- Gómez-Chacón, I. M., Op't Eynde, P., & De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 24(3), 309-324. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/76029>
- Gómes Chacón, I. M. (2003). *Matemática emocional: os afetos na aprendizagem matemática* *Criatividade compartilhada em matemática: do ato isolado ao ato solidário*. Tradução de D. V. Moraes & K. C. S. Smole. Artmed.
- Gross, G. F. S., Trevisan, A. L., Araman, E. M. de O., & Trevisolli, R. F. L. (2023). Uma Proposta para Elaboração e Análise de Tarefas de Aprendizagem Profissional. *Perspectivas da Educação Matemática*, 16(42), 1-21. <https://doi.org/10.46312/pem.v16i42.17982>
- Hill, H. C., & Chin, M. (2018). Connections between teachers' knowledge of students, instruction, and achievement outcomes. *American Educational Research Journal*, 55(5), 1076-1112. <https://doi.org/10.3102/0002831218769614>
- Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *The Elementary School Journal*, 105(1), 11-30. <https://doi.org/10.1086/428763>
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal*, 42(2), 371-406. <https://doi.org/10.3102/00028312042002371>
- Hoover, M., Mosvold, R., Ball, D. L., & Lai, Y. (2016). Making Progress on Mathematical Knowledge for Teaching. *The Mathematics Enthusiast*, 13(1-2), 3-34. <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol13/iss1/3/>
- Howell, H., Lai, Y., Phelps, G. & Croft, A. (2016). *Assessing Mathematical Knowledge for Teaching Beyond Conventional Mathematical Knowledge: Do Elementary Models Extend?* 10.13140/RG.2.2.14058.31680.
- Jardim, V. B. F., Aguiar, M., & Ribeiro, A. J. (2023). Professional learning tasks and mathematical knowledge involving the algebraic structure of Groups: an experience in the degree in Mathematics teaching. *Revista Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática*, 13(4), 1-21. <https://doi.org/10.37001/ripem.v13i4.3621>
- Kim, Y. (2016). Interview Prompts to Uncover Mathematical Knowledge for Teaching: Focus on Providing Written Feedback. *The Mathematics Enthusiast*, 13(1-2), 71-92. <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol13/iss1/6/>
- Marins, A. S., Teixeira, B. R., & Savioli, A. M. P. D. D. (2021). Práticas de ensino exploratório de matemática e a mobilização/desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino por participantes do PIBID. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35, 314-342. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a15>
- Martins, P. B., & Curi, E. (2022). Conhecimentos e crenças manifestados por professores que ensinam Matemática e fazem uso de materiais manipuláveis em suas práticas. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 12(4), 1-16. <https://doi.org/10.37001/ripem.v12i4.3231>
- Martineau, S., Simard, D., & Gauthier, C. (2001). Recherches théoriques et spéculatives: considérations méthodologiques et épistémologiques. *Recherches qualitatives*, 22, 3-32. <https://id.erudit.org/iderudit/1085607ar>

- Molina, O. & Samper, C. (2019). Tipos de Problemas que Provocan la Generación de Argumentos Inductivos, Abductivos y Deductivos. *Bolema*, 33(63), 109-134. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/VrdNcyTZKH8t8pkv6btbrpP/?format=pdf&lang=es>
- Moreira, P. C. & David, M. M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 23-40. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9057-5>
- Moreira, P. C., & Ferreira, A. C. (2021). A Formação Matemática do Professor da Educação Básica: das Concepções Historicamente Dominantes às Possibilidades Alternativas Atuais. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(35), 1-30. <https://doi.org/10.46312/pem.v14i35.13262>
- Passos, A. Q. (2015). *Van Hiele, educação matemática realística e GEPEMA: algumas aproximações* [Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina]. <https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2021/08/PASSOS-Adriana-Quimentao.pdf>
- Patrônio, R. M., & Ferreira, A. C. (2021). Levantamento de pesquisas brasileiras sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino e Formação de Professores. *Revemop*, 3, e202102. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202102>
- Ponte, J. P. D. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In *IV Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (pp. 59-72). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Selling, S. K., Garcia, N., & Ball, D. L. What Does it Take to Develop Assessments of Mathematical Knowledge for Teaching? Unpacking the Mathematical Work of Teaching. *The Mathematics Enthusiast*, 13(1-2), 35-51. <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol13/iss1/4/>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.
- Silva, N. D., Silva, G. H. G. D., & Julio, R. S. (2021). Contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática a partir de seu Envolvimento em um Projeto Extensionista Direcionado ao Público Idoso. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(70), 766-793. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a11>
- Sousa, B. F., & Oliveira, V. C. A. (2023). Conhecimento Matemático para o Ensino e MTSK: uma revisão de literatura. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, 6(1), 185–209. <https://doi.org/10.30612/tangram.v6i1.16921>
- Speer, N. M., King, K. D., & Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: Using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18, 105-122. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-014-9277-4>
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Educação e Matemática*, 105(5), 22-28.
- Thanheiser, E., Browning, C., Edson, A. J., Lo, J.-J., Whitacre, I., Olanoff, D., & Morton, C. (2014). Prospective Elementary Mathematics Teacher Content Knowledge: What Do We Know, What Do We Not Know, and Where Do We Go? *The Mathematics Enthusiast*, 11(2), 433–448. <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol11/iss2/9/>

Van der Maren, J. M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Presses de l'Université de Montréal et de Boeck.

Wanderley, R. A. J., & Souza, M. A. V. F. (2020). Lesson Study como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática sobre o conceito de volume. *Perspectivas da Educação Matemática*, 13(33), 1-20. <https://doi.org/10.46312/pem.v13i33.10302>