ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p279-302

Modelo epistemológico de referência na teoria antropológica do didático: hipótese e aplicação em problemas didáticos de cálculo diferencial e integral

Epistemological model of reference in anthropological theory of the didactic: hypothesis and application in didactic problems of differential and integral calculus

Modelo epistemológico de referencia en teoría antropológica de lo didáctico: hipótesis y aplicación en problemas didácticos de cálculo diferencial e integral

Modèle épistémologique de référence en théorie anthropologique du didactique : hypothèse et application aux problèmes didactiques de calcul différentiel et intégral

Renato da Silva Ignácio[1]
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)
Doutor em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0003-0448-3241

Valdir Bezerra dos Santos Júnior[2]
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Doutor em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0002-3869-201X

Marlene Alves Dias[3]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
Doutora em Matemática-Didática da Matemática
https://orcid.org/0000-0001-9168-9066

Resumo

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado que investigou os limites e possibilidades da metodologia didática percurso de estudo e pesquisa (PEP), da teoria antropológica do didático (TAD), como alternativa de ensino para a educação básica do Brasil. Iniciamos a pesquisa considerando a pergunta: Como encontrar o menor percurso possível interligando uma origem (O) e um destino (D)? Este problema nos conduziu a considerar a elaboração do que na TAD se denomina modelo epistemológico de referência (MER). O MER é o modelo que precisa ser explicitado toda vez que se deseja formular um autêntico problema didático ou questão geradora de estudo. Este trabalho apresenta, inicialmente um comparativo da modelagem entre a TAD e outras correntes teóricas, e em seguida um exemplo de modelo epistemológico de referência a partir do problema da escolha do caminho mais curto de acesso de um ponto a outro sobre determinadas condições. Consideramos como objetivo deste artigo

[1] renatosignacio@gmail.com
[2] valdir.bezerra@gmail.com
[3] maralvesdias@gmail.com

relacionar, por meio da noção de praxeologia, a possibilidade de uma modelagem sob a luz da TAD. O estudo comparativo nos mostra que a modelagem no escopo da TAD não é um objeto a ser ensinado e nem um meio para aprender e ensinar certos conceitos matemáticos. A principal característica da modelagem na TAD consiste na elaboração e contraste experimental de modelos epistemológicos de matemática com a finalidade de abordar problemas didáticos como uma hipótese provisória, que pode ser modificada durante o processo de desenvolvimento de um PEP.

Palavras-chave: Teoria antropológica do didático, Modelagem, Praxeologia, Percurso de estudo e pesquisa, Modelo epistemológico de referência.

Abstract

This article is an excerpt from doctoral research that investigated the limits and possibilities of the didactic methodology study and research path (SRP), of the anthropological theory of the didactic (ATD), as a teaching alternative for basic education in Brazil. We started the research by considering the following question: How can we find the shortest possible route connecting an origin (O) and a destination (D)? This problem led us to consider the development of what in ATD is called the reference epistemological model (REM). The REM model must be explained whenever you want to formulate an authentic didactic problem or study-generating question. This work initially presents a comparison of the modeling between ATD and other theoretical currents and then an example of an epistemological reference model based on the problem of choosing the shortest access path from one point to another under certain conditions. We consider the objective of this article to relate, through the notion of praxeology, the possibility of modeling in the light of ATD. The comparative study shows us that modeling within the scope of ATD is not an object to be taught nor a means to learn and teach certain mathematical concepts. The main characteristic of modeling in ATD consists of the elaboration and experimental contrast of epistemological mathematics models to approach didactic problems as a provisional hypothesis, which can be modified while developing an SRP.

Keywords: Anthropological theory of the didactic, Modeling, Praxeology, Path of study and research, Epistemological model of reference

Resumen

Este artículo es un extracto de una investigación doctoral que investigó los límites y posibilidades de la metodología didáctica recorrido de estudio e investigación (REI), de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), como alternativa de enseñanza para la educación básica en Brasil. Comenzamos la investigación considerando la pregunta: ¿Cómo encontrar la ruta más corta posible que conecte un origen (O) y un destino (D)? Este problema nos llevó a considerar el desarrollo de lo que en TAD se denomina modelo epistemológico de referencia (MER). El MER es el modelo que hay que explicar cada vez que se quiere formular un auténtico problema didáctico o una pregunta generadora de estudio. Este trabajo presenta inicialmente una comparación de la modelización entre la TAD y otras corrientes teóricas, y luego un ejemplo de modelo epistemológico de referencia basado en el problema de elegir el camino de acceso más corto de un punto a otro bajo ciertas condiciones. Consideramos el objetivo de este artículo relacionar, a través de la noción de praxeología, la posibilidad de modelar a la luz de la TAD. El estudio comparativo nos muestra que la modelización en el ámbito de la TAD no es un objeto a enseñar ni un medio para aprender y enseñar determinados conceptos matemáticos. La principal característica de la modelación en la TAD consiste en la elaboración y contrastación experimental de modelos matemáticos epistemológicos con el propósito de abordar problemas didácticos como una hipótesis provisional, que puede ser modificada durante el proceso de desarrollo de un REI.

Palabras clave: Teoría antropológica de lo didáctico, Modelización, Praxeología, Recorrido de estudio e investigación, Modelo epistemológico de referencia.

Résumé

Cet article est un extrait d'une recherche doctorale qui a étudié les limites et les possibilités de la méthodologie didactique Parcours d'Etude et de Recherche (PER), de la Théorie Anthropologique de la Didactique (TAD), comme alternative pédagogique pour l'éducation de base au Brésil. Nous avons commencé la recherche en considérant la question : Comment trouver l'itinéraire le plus court possible reliant une origine (O) et une destination (D) ? Cette problématique nous a amené à envisager le développement de ce que l'on appelle en TAD le modèle épistémologique de référence (MER). Le MER est le modèle qu'il faut expliquer chaque fois que l'on souhaite formuler un véritable problème pédagogique ou une question génératrice d'étude. Ce travail présente dans un premier temps une comparaison de la modélisation entre TAD et d'autres courants théoriques, puis un exemple de modèle épistémologique de référence basé sur la problématique du choix du chemin d'accès le plus court d'un point à un autre sous certaines conditions. Nous considérons que l'objectif de cet article est de relier, à travers la notion de praxéologie, la possibilité de modélisation à la lumière du TAD. L'étude comparative nous montre que la modélisation dans le cadre de la Théorie Anthropologique de la Didactique n'est pas un objet à enseigner ni un moyen d'apprendre et d'enseigner certains concepts mathématiques. La principale caractéristique de la modélisation en TAD consiste en l'élaboration et le contraste expérimental de modèles épistémologiques des mathématiques dans le but d'aborder les problèmes didactiques comme une hypothèse provisoire pouvant être modifiée au cours du processus d'élaboration d'un PER.

Mots-clés : Théorie anthropologique du didactique, Modélisation, Praxéologie, Parcours d'étude et de recherche, Modèle épistémologique de référence.

Modelo epistemológico de referência na TAD: hipótese e aplicação em problemas didáticos de cálculo diferencial e integral

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado que investigou os limites e possibilidades da metodologia didática da teoria antropológica do didático (TAD) chamada percurso de estudo e pesquisa (PEP) como alternativa de ensino para a educação básica do Brasil. Iniciamos a pesquisa considerando a pergunta: Como encontrar o menor percurso possível interligando uma origem (O) e um destino (D)?

As respostas alternativas para esta pergunta serão apresentadas no decorrer deste trabalho. Neste momento, vamos analisar a pergunta em si e de maneira preliminar, podemos afirmar que o problema da escolha do caminho mais curto de acesso de um ponto a outro é um exemplo de situação de nosso cotidiano.

A racionalização de problemas desta natureza surge quando o ser humano se propõe a substituir a visão ingênua da realidade por uma postura crítica. O pensamento racional requer uma linguagem adequada capaz de expressar o fato ou situação real por meio do uso de uma análise científica. Desse modo, a evolução do pensamento humano se manifesta por meio de sua capacidade de gerar novas representações como referências conceituais que geram soluções para os problemas da sociedade.

Portanto, ao tentar refletir, explicar, compreender ou modificar uma porção da realidade, o processo usual de uma análise científica é formalizado por meio de um processo artificial. Essa formalização seleciona, no sistema em estudo, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e o processo é denominado modelo.

A construção de modelos acompanha nossa história desde quando o homem procurou entender fenômenos que ocorriam à sua volta e descrevê-los de maneira mais simples, desde os tempos mais primitivos.

Os artefatos, as máquinas são alguns exemplos de modelos gerados pelo pensamento de seus inventores. Quanto à definição de praxeologia, nos referimos a Chevallard (2011, p. 1): "[...] toda atividade humana consiste em realizar uma tarefa t de determinado tipo T, por meio de uma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ que permite ao mesmo tempo pensá-la, mesmo produzi-la e que é justificável por uma teoria Θ". Assim, estes exemplos são praxeologias construídas para atender às necessidades das pessoas desde tempos remotos e se constituem em modelos criados pelo desenvolvimento tecnológico. Foi devido à necessidade de manejar a água para irrigar a agricultura que povos da Antiguidade fizeram surgir o *shadoof* ou picota como é mais conhecido no Brasil. Nesta máquina simples utilizada para retirar água de poços, podemos encontrar evidências da presença de princípios matemáticos e físicos importantes como o de alavanca.

A necessidade de compreender os processos do mundo real[4] a partir da interação entre múltiplos componentes e prever o que pode acontecer tem sido uma motivação poderosa para o desenvolvimento do conhecimento na sociedade contemporânea.

Podemos citar também como exemplo os estudos da neurociência, cujo interesse central é descrever o sistema cognitivo dos seres vivos, particularmente o do ser humano. Segundo a neurociência, o cérebro age com base na organização de estruturas neuronais; essas configurações explicam processos como a percepção. As entradas para o sistema sensorial ativam configurações existentes, comparando traços e encontrando semelhanças, ao mesmo tempo em que atuam para modificar as estruturas existentes, consolidando sua configuração ou gerando mudanças na estrutura.

O resultado é um modelo mental que representa o mundo de cada indivíduo em momentos específicos. Esses modelos mentais são sistemas que fazem inferências sobre possíveis mudanças no meio ambiente e suas consequências para o indivíduo. O modelo mental pode ter um tipo de réplica de si mesmo em sistemas de símbolos físicos, como um diagrama ou uma fórmula algébrica (Holland et al., 1986). Nesta linha de pensamento, o estudo sobre competência de modelagem vincula a criação de dois modelos: um mental e outro externo, o modelo externo também conhecido como modelo conceitual.

Os autores destacam que é inerente ao ser humano a estratégia de projetar ou transformar o modelo mental em alguma forma de linguagem para torná-lo visível. Eles argumentam, ainda, que é sob sistemas de modelos conceituais que as ciências são construídas e que cumprem uma função comunicativa com a qual as ações colaborativas são entrelaçadas; estes podem ser orientados a atuar sobre o meio ambiente e são a base da regulação dos modelos mentais dos atores de comunicação.

O neurocientista brasileiro Nicolelis (2011) destaca a capacidade do cérebro humano de modelar, projetar e simular cenários da realidade. Em uma entrevista, afirmou que o cérebro é um modelador, um escultor da realidade.

Esta capacidade de modelador da realidade do cérebro humano pode ser observada na ciência contemporânea que também tem recorrido, com mais frequência, à construção de modelos matemáticos para resolver problemas complexos. A ciência da computação e a inteligência artificial são dois exemplos de campos de investigação que têm se dedicado a

[4] Mundo real, em sentido amplo desde a realidade cotidiana até a de outras áreas do conhecimento.

resolver problemas de interesse geral e que, através da construção de modelos, têm apresentado soluções para situações problemáticas sensíveis para a sociedade.

Os exemplos citados acima mostram que o uso cada vez mais crescente de modelos matemáticos provocam uma mudança pendular na matemática, transferindo a ênfase em um tipo de pensamento decorrente de informações completas ou pensamento dedutivo (monótono), para um tipo de pensamento chamado de indutivo (não monótono) caracterizado por dispor de informações incompletas sobre as situações e mais alinhado com a dinâmica da vida diária.

A habilidade de empregar a matemática em outras áreas exige a capacidade de tomar um problema definido em alguma situação prática, transformá-lo em um modelo matemático e procurar uma *solução* que possa ser reinterpretada em termos da situação original.

Os trabalhos de Borroneo (2006) e de Maaß (2006) descrevem e denominam como ciclo da modelagem o processo que transita do mundo real para o mundo matemático. No ciclo de modelagem, os problemas reais são matematizados transferindo-se os objetos, os dados, as informações da realidade para o mundo da matemática. Dessa forma, obtém-se um modelo matemático, e, de posse dele, busca-se uma solução matemática que possa ser interpretada e validada no mundo real (onde o problema surgiu) dando lugar a solução real.

No Brasil, encontramos diversos autores que concebem a modelagem matemática de diferentes formas e que recorrem aos termos: situação real, problematização e investigação para defini-la. Podemos citar inicialmente D'Ambrosio (2002), considera que as origens das ideias centrais da matemática resultam de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas ideias e sua organização intelectual ocorrem a partir de elaboração sobre representações do real, sendo, para este autor, a modelagem matemática a matemática por excelência.

Na sequência apresentamos outras definições da modelagem matemática: a) A modelagem transforma problemas da realidade em problemas matemáticos para resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (Bassanezi, 2002) ; b) A modelagem matemática é o processo de obtenção de um modelo, e modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir de alguma forma um fenômeno em questão ou problema de situação real (Biembengut & Hein, 2003); c) A modelagem matemática é uma estratégia alternativa para o ensino matemático num ambiente e representa uma perspectiva que inclui as vivências sócio escolares, construção e consolidação do conhecimento e aprendizagens significativas (Scheffer, 1999).

Em uma classificação aproximada poderíamos dizer que há três vertentes de interpretação de modelagem matemática: um objeto de aprendizagem, como metodologia de ensino, método de investigação.

A Tabela 1, apresentada por Villa-Ochoa (2007), sintetiza e apresenta alguns aspectos que diferenciam o processo de modelagem matemática como atividade científica e como ferramenta para construir conceitos matemáticos em sala de aula.

Tabela 1.

Aspectos do processo de modelagem (Villa-Ochoa, 2007, p. 52)

Critério	Como atividade científica	Como ferramenta didática
Propósito do modelo.	O modelo é construído a partir da análise de algumas situações, mediante as quais se busca explicar fenômenos e solucionar problemas.	O modelo é elaborado com a finalidade de construir conceito matemático dotado de significado e com a intenção de despertar a motivação e o interesse pelas matemáticas devido a seu caráter aplicativo em uma teoria ou ciência.
Conceitos Matemáticos	Emergem por meio de um processo de abstração e simplificação do fenômeno.	Devem ser considerados, a priori, com base na preparação e seleção do contexto por parte do professor e de acordo com os propósitos da turma.
Contextos	Obedecem a problemas que comumente não são abordados ou se abordam de uma maneira diferente no interior da ciência.	Devem obedecer a problemas abordados previamente pelo professor com o objetivo de avaliar a pertinência com os propósitos educativos.
Outros fatores	Apresentam-se, geralmente, em ambiente próprio da ciência na qual se aplica e geralmente externo a fatores educativos.	Apresentam-se, regularmente, na sala de aula sob uma motivação própria de contextos cotidianos e de outras ciências.

No entanto, no Brasil, a experiência com modelagem permaneceu durante muitos anos confinada à aplicação de conhecimentos matemáticos previamente introduzidos, simulando situações reais como uma estratégia de motivação para aprender.

A modelagem matemática se propõe, portanto, a envolver os estudantes em práticas científicas autênticas, em contraposição a rotinas nas quais são apenas consumidores de produtos do conhecimento científico. A modelagem não ajuda apenas a entender as ideias centrais das distintas disciplinas científicas, mas também a aquisição de conhecimento epistemológico.

Após essa breve reflexão sobre a importância da utilização de modelos matemáticos, em particular no desenvolvimento de sequências de estudo centradas na modelagem matemática, consideramos elementos que nos levaram a relacionar por meio da noção de praxeologia a possibilidade de uma modelagem sob a luz da teoria antropológica do didático (TAD), uma vez que, durante o desenvolvimento de um processo de estudo e pesquisa, cabe aos participantes da atividade (alunos) colocar novas questões e procurar respostas por meio da pesquisa, orientados pelo professor.

Modelagem sob a luz da teoria antropológica do didático

A modelagem, considerada por meio de uma praxeologia pontual, tem como ponto de partida um sistema isolado que serve apenas como pretexto para que o aluno construa um modelo que o represente. Uma vez construído o modelo, o sistema perde sua importância e é abandonado, pois o objetivo parece estar restrito a ponderar que o modelo faça parte apenas do patrimônio matemático do aluno.

Para Chevallard, Bosch e Gascón (1997), esses modelos circunscritos a conceitos, técnicas e problemas isolados ignoram a presença das questões em torno dos sistemas que motivaram sua construção.

A modelagem matemática (MM) é para a teoria antropológica do didático uma espécie de coração da atividade matemática. Os autores Chevallard, Bosch & Gascón (1997) colocam a MM nos seguintes termos:

> Um aspecto essencial da atividade matemática consiste em construir um modelo (matemático) da realidade que queremos estudar, trabalhar, com esse modelo e interpretar os resultados obtidos neste trabalho para responder as questões levantadas inicialmente. Portanto, grande parte da atividade matemática pode ser identificada como uma atividade de modelagem matemática. (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997, p. 51, tradução nossa)

A estrutura praxeológica amplia as noções de sistema e modelo, pois os componentes de uma praxeologia estão inter-relacionados e essa característica não permite considerar a modelagem de um elemento (tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria) independente dos demais.

De acordo com a TAD, podemos descrever qualquer atividade matemática por meio da inter-relação entre sistemas[5] e modelos, pois, nessa teoria, qualquer parcela da realidade que possa ser isolada dela é um sistema que pode ser modelado matematicamente. Isto significa que

[5] A teoria antropológica do didático considera que qualquer parcela da realidade que dela possa ser isolada é um sistema que pode ser modelado matematicamente.

podemos identificar, em torno de qualquer sistema, questões problemáticas na origem da construção do modelo.

Sendo assim, a TAD descreve os processos de modelagem como processos de reconstrução e articulação de praxeologias de complexidade crescente: pontuais→locais→regionais→globais, geradas a partir do questionamento sobre o sentido ou razão de ser do fenômeno estudado.

Segundo Chevallard (1989, 1992) a modelagem à luz da TAD atende alguns requisitos inerentes a ela, a saber: a) um modelo é uma construção artificial que estabelece relação adequada com o real, refutando a ilusão representacionista, ou seja, a ideia de modelo como cópia do mundo real. Sua principal função não é "assemelhar-se" ao sistema que modela, mas fornecer conhecimento de maneira mais econômica e eficaz possível; b) um modelo deve ser proficiente para permitir a construção de conhecimentos que seriam mais difíceis de obter se utilizássemos outro modelo; c) modelar não para simplesmente construir praxeologias, mas para responder questões problemáticas; d) a matemática tem o papel de ferramenta na construção de modelos.

É importante ressaltar que a TAD não considera a modelagem como um objeto a ser ensinado e nem um meio para aprender e ensinar certos conceitos matemáticos. Sendo assim, a noção de modelo epistemológico de referência (MER) surge na TAD como um modelo que precisa ser explicitado toda vez que se deseja formular um autêntico problema didático.

Para Fonseca, Gascón e Lucas (2014), a formulação de um problema didático, em didática da matemática, contém, mais ou menos explicitamente, uma interpretação da atividade que será utilizada, ou ainda, um modelo de tal atividade, mesmo que não seja muito preciso, mas que acompanhará esta noção, no âmbito da matemática escolar em uma determinada instituição.

Gascón (2011) aponta que tal explicação corresponde à dimensão epistemológica do problema, o que corresponde a uma dimensão básica do problema didático e que se materializa por meio de um modelo denominado pelo pesquisador de modelo epistemológico de referência (MER).

A estrutura do MER, segundo Fonseca, Gascón e Lucas (2014), é constituída por uma rede de praxeologias matemáticas, cuja dinâmica admite ampliações e complementações progressivas e fundamenta um percurso de estudo e pesquisa (PEP). Portanto, um MER precisa ser considerado como uma hipótese provisória a constatar experimentalmente, podendo ser modificado constantemente.

Segundo esses autores, a TAD interpreta que a atividade matemática é uma prática humana institucionalizada; ou seja, um MER e a questão geradora que tentará respondê-lo são elaborados em torno de uma instituição. No entanto, as instituições não são compartimentos estanques e as questões problemáticas se desenvolvem à medida que vão sendo estudadas, por isso é possível conceber um MER que possa sustentar processos de estudo situados parcialmente em duas ou mais instituições e em dois ou mais níveis educativos.

A TAD ainda nos mostra, segundo Bosch e Gascón (2010), que é preciso elaborar um modelo epistemológico que para servir de referência, tanto para a análise das epistemologias espontâneas presentes nas instituições observadas, como para a elaboração de novas propostas de organizações praxeológicas didáticas.

Podemos considerar como exemplo a pesquisa de Jovignot-Candy (2018), cujo objetivo foi o desenvolvimento de um MER que explicita os diferentes caminhos realizados para o estudo da transposição didática do conceito de ideal**,** o que pode ser útil para a construção de um MER para outros conceitos. Em uma apresentação sobre sua tese: "Le Modèle épistémologique de référence: un outil pour l'étude de la transposition didactique du concept d'idéal" (O modelo epistemológico de referência: uma ferramenta da transposição didática do conceito de ideal), a pesquisadora exibe os diferentes caminhos realizados no estudo para a constituição do MER proposto.

Na metodologia de sua pesquisa, Jovignot-Candy (2018, s/n) realiza diferentes estudos, a saber: "Estudo da epistemologia histórica. Estudo histórico diacrônico por meio de livros didáticos (através do tempo). Estudo das apostilas, material de trabalho dirigido e exercícios corrigidos. Estudo epistemológico contemporâneo: questionário aos pesquisadores. Estudo de livros didáticos sincrônico".

Ressaltamos ainda que a modelagem permite a elaboração e contraste experimental de modelos epistemológicos de matemática com a finalidade de abordar problemas didáticos. Essa característica está em sintonia com os trabalhos de Guy Brousseau, que considerou inicialmente a didática da matemática como uma epistemologia experimental (Brousseau, 1986).

Após esse breve destaque sobre a importância do MER para a construção, desenvolvimento e análise de um PEP, avaliamos a seguir as condições e o tipo de relação que o ato de educar por meio de percursos de estudo e de pesquisa pode encontrar na legislação brasileira. Nos referimos mais particularmente às diretrizes e bases da educação brasileira e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018).

Percurso de ensino e pesquisa como ferramenta de ensino e aprendizagem na educação brasileira

Segundo Chevallard (2009), um PEP corresponde a uma investigação codisciplinar na qual um professor ou um grupo de professores e um grupo de estudantes aceitam o desafio de estudar e pesquisar uma questão Q_0.

Florensa et al. (2020) observam que muitos problemas de ensino estão relacionados à ausência de ferramentas epistemológicas para conceber, gerir e avaliar os processos de estudo. Isto os conduziu a propor como ferramenta os mapas de perguntas e respostas, que são uma representação parcial de um modelo epistemológico de referência, como veremos a seguir.

Dependendo da instituição onde a Q_0 é abordada, haverá um percurso de estudo e uma pesquisa peculiar. Apresentamos como exemplo o PEP idealizado, que procuramos restringir a deslocamentos de pessoas e objetos.

Iniciamente, revisitaremos a análise das condições e restrições de propor a questão Q_0 apresentadas em Ignácio et al. (2020, p.804), que buscam responder se a Q_0 proposta tem essa capacidade de gerar novas questões. Q_0: Como encontrar o menor percurso possível interligando uma origem (O) e um destino (D)?

Identificamos por meio de uma análise *a priori* da questão inicial que o elemento problemático de Q_0 consiste em explicitar o máximo de variações de trajetórias a serem percorridas entre *O* e *D*. Podemos tomar os aspectos incertos como questões que precisam ser respondidas para apresentar uma "boa" resposta a Q_0. É preciso responder perguntas como: 1. O percurso ocorre no plano euclidiano? 2. A origem e o destino da trajetória são previamente definidos ou apenas o ponto de partida é informado? 3. O percurso entre a origem (O) e o destino (D) é direto sem paradas ou desvios ou não? 4. A quantidade de caminhos possíveis e as respectivas distâncias que interligam (O) até (D) são previamente definidas ou não? 5. A forma que tem (O) e (D) deve ser considerada para efeitos de busca do menor percurso ou não? 6. O menor percurso é aquele que ocorre em: menor distância absoluta, menor tempo ou menor custo de viagem?

Em nossa análise a *priori* estabelecemos as seguintes restrições: a. Elegemos o plano euclidiano bidimensional ou simbolicamente o R^2 mesmo cientes de que o trajeto procurado possa ocorrer em espaço de outras dimensões; b. Optamos por utilizar elementos da geometria tais como: ponto, reta, circunferência para representar a origem, o destino e suas interconexões.

Em nossas simulações de trajetórias vamos considerar percursos diretos de (O) até (D) bem como caminhos que precisam realizar paradas ou interconexões (I) antes de chegar ao destino. Por isso, é importante lembrar que os elementos geométricos aqui considerados são modelos matemáticos que representam as possíveis origens, interconexões e destino. Portanto, na hipótese do menor percurso envolvendo uma circunferência c e um ponto P do plano, os elementos estarão sempre sob a seguinte condição: $P \notin c$. Significa dizer que P é exterior a c.

A Figura 1 corresponde a um mapa de perguntas e respostas, conforme proposta de Florensa et al. (2020), o qual sintetiza o percurso que tentamos buscar enquanto possíveis respostas para Q_0.

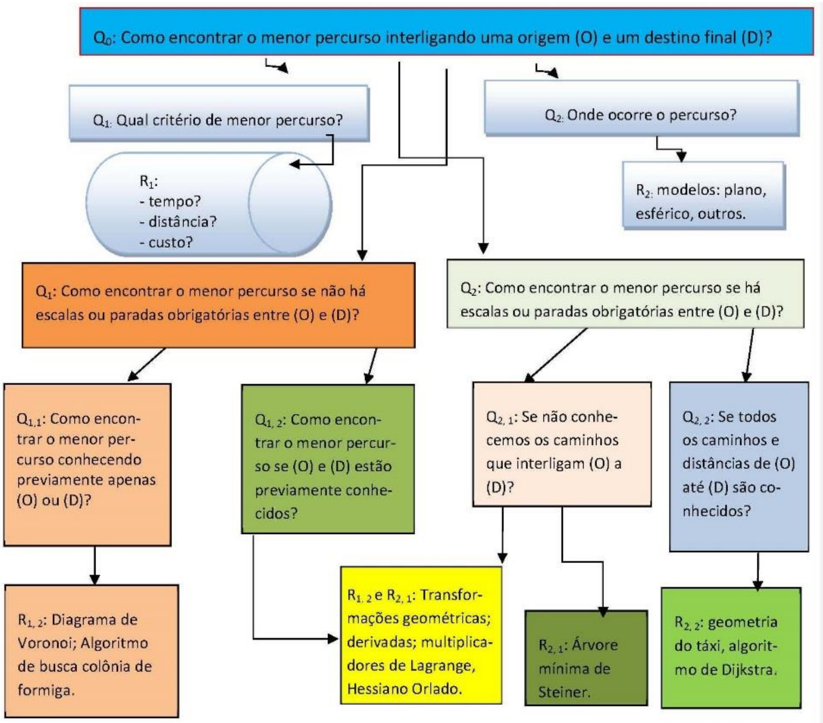

Figura 1.

Mapa de possíveis caminhos para o estudo de Q_0 (Ignácio, Bosch & Dias, p. 808, 2020).

As hipóteses do percurso proposto são situações problemáticas que podem ser enunciadas genericamente: encontrar o menor percurso para objetos do plano, cada um podendo ser: pontos, retas ou circunferências.

Abordamos algumas variações de percurso entre os objetos geométricos. As soluções, como as que mostraremos na sequência, podem emergir de qualquer domínio da matemática. Os exemplos de situações hipotéticas de percursos que analisamos, fizeram emergir uma rede de praxeologias matemáticas do campo de estudo do cálculo diferencial e integral. Apresentamos abaixo a descrição dessa rede praxeológica gerada a partir das variações de percursos entre os objetos geométricos considerados.

Menor percurso (direto) entre uma origem O e o destino D

Vamos responder inicialmente à situação hipotética projetando cenários de menor percurso possível. Para cada uma das hipóteses de percurso, um ou mais modelos se apresentam como uma possível resposta para as situações hipotéticas projetadas.

Essas situações são enunciadas em forma de tarefas problemáticas e utilizamos as ferramentas que a matemática nos proporciona para resolvê-las. Algumas hipóteses de percurso podem ocorrer se utilizarmos esses modelos (ponto, reta e circunferência) de representação da origem O e do destino D. Serão objetos de estudo três hipóteses (H) de percurso:

a. $H_{1.1}$: menor percurso entre dois pontos;
b. $H_{1.2}$: menor percurso entre um ponto e uma reta;
c. $H_{1.3}$: menor percurso entre duas retas.

$H_{1.1}$: O menor percurso entre dois pontos.

Qual o menor percurso entre dois pontos?

Estamos considerando como critério de otimização, ou seja, como menor percurso, aquele que percorre a menor distância. Por meio da geometria euclidiana a solução para a questão acima é o segmento de reta que liga a origem O até o destino D.

Os elementos primitivos na geometria euclidiana (ponto, reta e plano) não precisam de definição. Mas não nos impede de aceitarmos a definição de reta utilizada por Markushevich (1977) como um caso particular de curva. Segundo Markushevich, a curva ou a linha curva é o rastro de um ponto móvel. Desse modo, a reta será a solução para nossa questão Q0, sabendo que: “[...] um ponto móvel descreve efetivamente uma reta se passa de uma posição qualquer a outra pelo caminho mais curto (Markushevich, 1977, p. 3)”.

Sendo um plano euclidiano, esta é a circunstância mais simples, uma vez que a geometria euclidiana define o segmento de reta que liga os dois pontos como a medida de menor distância entre eles.

O modelo analítico parte da premissa que cada ponto no plano euclidiano pode ser designado como um par ordenado de números reais. O modelo de representação mais comum utiliza duas retas $x\ e\ y$ perpendiculares entre si que são usadas como eixos, criando um sistema de coordenadas cartesianas para associar cada número real ao ponto de interseção destes eixos, que designamos par ordenado $(0, 0)$, e aos demais pontos designamos os pares ordenados como na figura abaixo. Denotamos as coordenadas de um ponto $P = (x_1, y_1)$.

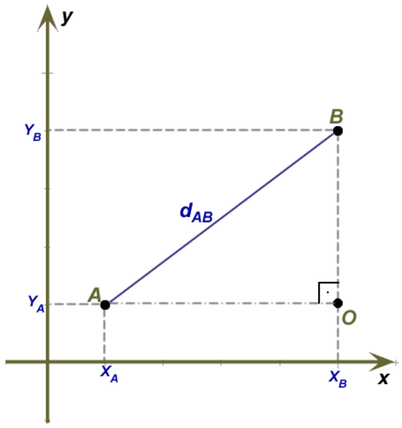

Figura 2.

Menor distância entre dois pontos no plano cartesiano (Ignácio, 2018, p. 170).

Utilizamos a métrica[6] euclidiana para calcular distância e assim sendo a menor distância entre os pontos A e B é a medida do segmento que tem os dois pontos de extremidade. O modelo de representação dos pontos é definido por pares $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ e a menor distância dentre esses dois por $d_e\ (A, B)$. Se o segmento que liga um ponto A a um ponto B for paralelo ao eixo O_x a $d_e(A, B) = \|x_b - x_a\|$ e se o segmento for paralelo ao eixo O_y, então $d_e(A, B) = \|y_b - y_a\|$. Se não estiver paralela a nenhum dos dois eixos, podemos representar esta possibilidade geometricamente de maneira genérica pela Figura 2.

Dado que consideramos a ortogonalidade entre os eixos coordenados do plano cartesiano, podemos indicar o ponto O e os pontos A e B como vértices de um triângulo retângulo nas condições que mostramos na Figura 2.

O modelo para o cálculo da distância entre dois pontos é a aplicação do teorema de Pitágoras, uma vez que o segmento AB é a hipotenusa do triângulo AOB, e a medida de AB corresponde à distância entre esses dois pontos. Por se tratar de um triângulo retângulo, podemos aplicar:

$$d_E(A, B)^2 = d_e(A, O)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

---

[6]Uma métrica M é uma forma de medir distância em um conjunto diferente de Ø que no plano cartesiano associa a cada par ordenado de elementos de M em função de um número real $d(x, y)$ de modo a atender as seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z \in M$.

1. $d(x, y) = 0$
2. $d(x, y) > 0\ se\ \neq y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq\ d(x, y) + d(y, z)$

Portanto, a expressão fica da seguinte forma:

$$d_{E(A,B)} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B^2 - y_A)^2}$$

H1.2: A menor distância entre um ponto e uma reta.

Qual a menor distância entre uma reta r e um ponto A fora da reta?

Seja r de equação geral $ax + by + c = 0$, com $a\ e\ b$ não simultaneamente nulos, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e seja $A(x_0, y_0)$.

A distância entre um ponto $P(x, y)$ pertence à reta r e o ponto A é dada por:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Notemos que a função distância depende de duas variáveis $x\ e\ y$. Esse fator nos leva a tomar $y = mx + n$, com $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$ $, com\ b \neq 0$, já que $P \in r$.

Desta forma, substituindo y em d, obteremos:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (mx + n - y_0)^2}$$

Agora temos uma função apenas de uma variável x. Vamos minimizar $f(x) = d^2$, que é bem mais fácil para trabalhar e encontramos o mesmo resultado quando usamos d.

$$f(x) = (x - x_0)^2 + (mx + n - y_0)^2$$

Um ponto máximo ou mínimo de uma função ocorre em um número crítico que por sua vez é um número no domínio da função onde a derivada se anula ou não existe.

$$f'(x) = 2(x - x_0) + 2(mx + n - y_0)m$$

$$= 2x - 2x_0 + 2m^2x + 2mn - 2my_0$$

Como $f'(x)$ existe para todo número real, basta fazer $f'(x) = 0 \Longrightarrow x(2 + 2m^2) = 2x_0 + 2my_0 - 2mn$

$$\Longrightarrow x = \frac{2x_0 + 2my_0 - 2mn}{2 + 2m^2}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{x_0 + my_0 - mn}{1 + m^2}$$

Sendo este o único número crítico, o mínimo da função f nele.

Para justificar tal afirmação, usamos o teste da derivada segunda para extremos locais.

O teste garante que sendo c um número crítico:

$$(i) f'(c) = 0\ e\ f"(c) < 0 \Longrightarrow f(c) \text{ é } máximo\ local$$

$$(ii) f'(0) = 0\ e\ f"(0) > 0 \Longrightarrow f(c) \text{ é } mínimo\ local$$

Temos $f"(x) = 2 + 2m^2 > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, em particular $f"(x) > 0$, para o número crítico encontrado. Com $y = mx + n, teremos\ y = m\left(\frac{x_0 + my_0 - mn}{1 + m^2}\right) + n$

$$\Rightarrow y = \frac{mx_0 + m^2y_0 - m^2n + n + \ m^2n}{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{m^2y_0 + mx_0 + \ n}{1 + m^2}$$

Assim, o ponto da reta r mais próximo ao ponto A dado é:

$$P\left(\frac{x_0 + my_0 - mn}{1 + m^2}, \frac{m^2y_0 + mx_0 + n}{1 + m^2}\right)$$

Com $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}, b \neq 0,$ temos:

$$P\left(\frac{x_0 + \left(-\frac{a}{b}y_0\right) - \left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{c}{b}\right)}{1 + \left(-\frac{a}{b^2}^2\right)}, \frac{\left(-\frac{a}{b}\right)^2\ y_0 + \left(-\frac{a}{b}x_0 + \left(-\frac{c}{b}\right)\right)}{1 +\ \left(-\frac{a^2}{b^2}\right)}\right), \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2}\right)$$

Portanto, a menor distância entre a reta r e o ponto A é:

$$d = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\left(\frac{b^2x_0 - ab - ac}{a^2 + b^2} - x_0\right)^2 + \ \left(\frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2} - y_0\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{a^2x_0 + aby_0 + ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \ \left(\frac{b^2y_0 + abx_0 + bc}{a^2 + b^2} - y_0\right)^2} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

É importante a definição de função utilizada aqui, a saber:

Dados os conjuntos X e Y, uma função f: é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento de X um elemento de Y. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in$ X, o elemento $f(x) \in$ Y chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto x.

Usando método dos multiplicadores de Lagrange: Sejam r uma reta de equação $ax + by + c = 0$, com $a, b, c\ \in\ \mathbb{R}$, sendo a e b não simultaneamente nulos e $A(x_0, y_0)$ um ponto dado não pertencente a r. Considere $P(x, y)$ um ponto qualquer de r, vamos encontrar suas coordenadas de modo que este seja o ponto de r mais próximo a A.

A distância entre A e P é dada por:

$$d(A, P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

A solução se torna mais simples se minimizarmos o quadrado desta distância:

$$d^2 = f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Com a restrição, o ponto (x, y) pertence à reta, ou seja:

$$g(x, y) = ax + by + c = 0$$

De acordo com o teorema de Lagrange, os extremantes surgem do sistema abaixo, dado por uma equação vetorial e uma equação escalar:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Em que:

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2x_0, 2y - 2y_0)$$
$$\nabla g(x, y) = (a, b)$$

Assim:

$$\begin{cases} 2x - 2x_0 = \lambda a \\ 2y - 2y_0 = \lambda b \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

A partir do sistema, podemos concluir que $x = \frac{2x_0 + \lambda a}{2}$ e $y = \frac{2y_0 + \lambda b}{2}$

Substituindo esses valores na terceira equação, segue que

$$a\left(\frac{2x_0 + \lambda a}{2}\right) + b\left(\frac{2y_0 + \lambda b}{2}\right) + c = 0$$

$$2ax_0 + \lambda a^2 + 2by_0 + \lambda b^2 + 2c = 0$$

$$\lambda = \frac{-2c - 2ax_0 - 2by_0}{a^2 + b^2}$$

Agora, substituindo λ em x e y

$$x = x_0 + \frac{a}{2}\lambda = x_0 + \frac{a}{2}\left(\frac{-2c - 2ax_0 - 2by_0}{a^2 + b^2}\right)$$

$$x = \frac{b^2 x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}$$

$$y = y_0 + \frac{b}{2}\lambda = y_0 + \frac{b}{2}\left(\frac{-2c - 2ax_0 - 2by_0}{a^2 + b^2}\right)$$

$$\Longrightarrow y = y_0 - \frac{bc + abx_0 + b^2 y_0}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 y_0 + b^2 y_0 - bc - abx_0 - b^2 y_0}{a^2 + b^2}$$

$$y = \frac{a^2 y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

Logo, o ponto de mínimo é $P = \left(\frac{b^2 x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2}\right)$

E a menor distância entre A e a reta r é $d = \sqrt{f(P)} = d(P, A)$

$$d(P,A) = \sqrt{\left(x_0 - \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$d(P,A) = \sqrt{\left(\frac{a^2x_0 + aby_0 + ac}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{b^2y_0 + abx_0 + bc}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}} \Rightarrow d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$H_{1.3}$: A menor distância entre duas retas.

Qual a menor distância entre duas retas?

Definimos a distância entre duas retas $r\ e\ r'$ como sendo a menor distância entre um ponto de r e um ponto de r'.

Isto é, $d(r;\ r') = min\,\{d(P;\ P')|P\epsilon\ r\ e\ P'\epsilon\ r'\}$. Então $d(r;\ r') = 0\ se\ r\ e\ r'$são coincidentes ou concorrentes.

Sejam r e r' retas paralelas. Sabemos que, dado $P \in\ r$, existe um único ponto $P^* \in\ r'$, pé da perpendicular a r'traçada por P, tal que $d(P;\ P') \geq d(P;P^*)$,para todo $P' \in r'$.

Como $r \parallel r'$, temos $d(Q;\ Q^*) = d(P;\ P^*)$, quaisquer que sejam $P;\ Q \in r$, já que QPP^*Q^*é um retângulo. Então $d(Q;\ Q') \geq d(Q;Q^*) = d(P;P^*) = d(P;\ r')$, quaisquer que sejam $Q \in\ r\ e\ Q' \in\ r'$.

Logo, $d(r;\ r') = d(P;\ r')$; qualquer que seja $P\ \in\ r$.

Como consequência do teorema, temos o seguinte corolário:

Corolário: *Sejam* $r{:}\,ax + by = c\ e\ r'{:}\,ax + by = c'$ *retas paralelas* $(c \neq c')$ *ou coincidentes* $(c = c')$. Então,$d(r\ ;\ r') = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Prova: Seja $P = (x_0;\ y_0)$ um ponto da reta r. Então $d(r;\ r') = d(P;\ r') = \frac{|ax_0+by_0-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Como $ax_0 + by_0 = c$, obtemos, $d(r;\ r') = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

As três hipóteses de percurso são apenas ilustrativas, tendo como finalidade explicitar que a construção dos modelos matemáticos surge como uma resposta às perguntas que podem aparecer ao longo do processo de estudo. Há mais hipóteses de menor percurso e que não foram exploradas neste trabalho.

Algumas considerações

As pesquisas conduzidas no âmbito da educação matemática sobre modelagem matemática apontam aspectos promissores para o uso da modelagem em sala de aula como uma alternativa que possibilita estabelecer relações entre o cotidiano e outras áreas do conhecimento.

Este artigo procurou evidenciar que a modelagem matemática se apresenta, em uma classificação aproximada, em três vertentes de interpretação: como objeto de aprendizagem, como metodologia de ensino, e como método de investigação.

Uma característica comum em entre estas vertentes é a de reconhecer que a modelagem matemática se propõe, portanto, a envolver os estudantes em práticas científicas autênticas, em contraposição a rotinas nas quais são apenas consumidores de produtos do conhecimento científico. A modelagem não ajuda apenas a entender as ideias centrais das distintas disciplinas científicas, mas também a aquisição de conhecimento epistemológico.

Os pesquisadores da teoria antropológica do didático observam que nas vertentes acima, a modelagem é considerada por meio de uma praxeologia pontual e tem como ponto de partida um sistema isolado que serve apenas como pretexto para que o aluno construa um modelo que o represente. Sendo assim, uma vez construído esse modelo, o sistema perde sua importância e é abandonado em seguida, pois o objetivo parece estar restrito a ponderar que o modelo faça parte apenas do patrimônio matemático do aluno.

A estrutura praxeológica da TAD, no entanto, amplia as noções de sistema e modelo, pois os componentes de uma praxeologia estão inter-relacionados, e essa característica não permite considerar a modelagem de um elemento (tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria) independente dos demais.

Um modelo para teoria antropológica é uma construção artificial que estabelece relação adequada com o real, refutando a ilusão representacionista, ou seja, a ideia de modelo como cópia do mundo real. Sua principal função não é “assemelhar-se” ao sistema que modela, mas fornecer conhecimento de maneira mais econômica e eficaz possível. Ele deve ser proficiente para permitir a construção de conhecimentos que seriam mais difíceis de obter se utilizássemos outro modelo.

Dizemos modelar não como uma mera forma de construir praxeologias, mas para responder questões problemáticas, em um processo de reconstrução e articulação de praxeologias de complexidade crescente: (pontuais→locais→regionais→globais), geradas a partir do questionamento sobre o sentido ou razão de ser do fenômeno estudado.

No exemplo de construção de um modelo epistemológico de referência descrito neste artigo, partimos de uma questão problemática: Q_0: Como encontrar o menor percurso possível interligando uma origem (O) e um destino (D)?

Observamos que dependendo da instituição onde a Q_0 é abordada haverá um percurso de estudo e uma pesquisa peculiar. Na análise *a priori* da questão inicial, vemos que o elemento problemático de Q_0 consiste em explicitar o máximo de variações de trajetórias a serem percorridas entre O e D. Para apresentar uma “boa” resposta a Q_0, precisamos considerar aspectos incertos, tais como: 1. O percurso ocorre no plano euclidiano? 2. A origem e o destino da trajetória são previamente definidos ou apenas o ponto de partida é informado? 3. O percurso entre a origem (O) e o destino (D) é direto sem paradas ou desvios ou não? 4. A quantidade de caminhos possíveis e as respectivas distâncias que interligam (O) até (D) são previamente definidas ou não? 5. A forma que tem (O) e (D) deve ser considerada para efeitos de busca do menor percurso ou não? 6. O menor percurso é aquele que ocorre em: menor distância absoluta, menor tempo ou menor custo de viagem?

A *priori*, não se estabeleceu em qual instituição, etapa da educação ou ano de escolaridade que esta pergunta seria objeto de estudo. Os caminhos possíveis vislumbrados pelos autores estão no mapa da Figura 1. Ao explorar as hipóteses de percursos, apresentamos apenas três possíveis situações.

Para este artigo, estabelecemos as seguintes restrições: a. Elegemos o plano euclidiano bidimensional ou simbolicamente o R^2, mesmo cientes de que o trajeto procurado possa ocorrer em espaço de outras dimensões; b. Optamos por utilizar elementos da geometria tais como: ponto, reta, circunferência para representar a origem, o destino e suas interconexões.

Cabe por fim destacar o encontro fortuito desta pergunta com conceitos estudados no cálculo diferencial e integral, em particular o método dos multiplicadores de Lagrange na determinação do ponto ótimo global para um problema sujeito a uma restrição de igualdade que possibilitou uma fundamentação teórico-matemática sobre funções reais de várias variáveis e extremos condicionados que pode ser maximizada ou minimizada, bem como conceitos básicos sobre otimização e métodos para determinar pontos ótimos locais ou globais com os multiplicadores de Lagrange.

Agradecimento

Agradecemos à CAPES pelo financiamento de bolsa de doutorado sanduíche, que ajudou no desenvolvimento da pesquisa, realizado na Universidade Ramon Lull, Barcelona-Espanha, sob a supervisão da Profª. Drª Marianna Bosch.

Referências

Barquero, B., Bosch, M. & Gascon, J. (2011) Los recorridos de estúdio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), (pp. 339-352).

Bassanezzi, R. C (2002). *Ensino – aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Editora Contexto.

Biembengut, M. S; Hein, N. (2003) *Modelagem Matemática no Ensino*. 3ª ed. São Paulo: Contexto.

Blum, W. et al. (Eds.). (1989). Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics. Chichester: Ellis Horwood. deLange, J. et al. (Eds.). (1993). *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*. Chichester: Ellis Horwood.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Aplications, and Links to Other Subjects-State, Trends and Issues in Mathematics Instructions, *Educational Studies in Mathematics*, nº 23, (pp. 37-68).

Bolea, P. (2003). *Los procesos de algebrización de las Organizaciones Matemáticas Escolares*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza; Zaragoza, España.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 86-95.

Bosch, M.; & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y.Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.): *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 1-10). Montpellier: Université de Montpellier.

Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC.2018.

Brasil (2004). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2004.

Brousseau, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 33-115.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie: Perspectives curriculaires: la notion de modelisation. *Petit X*, 19, (pp. 45-75).

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12/1. (pp. 73-112).

Chevallard, Y. (2007) *Le développement actuel de la TAD: pistes et jalons*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=150

Chevallard, Yves (2011). Organiser l'étude 1. Structures & Fonctions. In: *Actes de la XI école d'été*. (pp.1-19) http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_1.pdf

Chevallard, Y., Bosch, M & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemática:* El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. ICE/Horsori, Barcelona.

D'Ambrósio, U. (2002). Prefácio. In. BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática:* uma nova estratégia. São Paulo: Contexto. (pp. 11-12).

Florensa, I., Bosch, M., & Gascon, J. (2020). Reference epistemological model: what form and function in school institutions?. *Educação Matemática Pesquisa. Revista Do Programa De Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática*, 22(4), 240–249. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p240-249

Fonseca Bon, Cecilio, Gascón Pérez, Josep & Oliveira Lucas, Catarina. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(3), 289-318. https://doi.org/10.12802/relime.13.1732

García, F. J.; Higueras, L. R. (2011). Modifying Teachers' Practices: the case of a European Training Course on Modelling and Applications. In: KAISER, G. et al. (Org.). *Trends in teaching and learning of Mathematical Modelling: international perspectives on the teaching and learning of Mathematical Modelling*. London: Ed. Springer, p. 569-578.

Gascón, Josep (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 14(2), 203-231.

Holland, John H., Keith J. Holyoak, Richard E. Nisbett and Paul R. Thagard, (1986) Induction: Processes of Inference, *Learning, and Discovery*, Cambridge: M.I.T. Press.

Ignácio, R. (2018). *Percurso de estudo e pesquisa na educação básica: limites e possibilidades*. (tese de doutorado). Universidade Anhanguera de São Paulo.

Ignácio, R., Bosch, M., & Dias, M. A. (2020). Parcours d'étude et de recherche : une étude sur les chemins minimaux. *Educação Matemática Pesquisa Revista Do Programa De Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática*, 22(4), 801–808. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p801-808

Jovignot-Candy, J. (2018). *Le Modèle épistémologique de référence un outil pour l'étude de la transposition didactique du concept d'idéal*. https://www.academia.edu/37207013/Le_Mod%C3%A8le_%C3%A9pist%C3%A9mologique_de_r%C3%A9f%C3%A9rence_un_outil_pour_l%C3%A9tude_de_la_transposition_didactique_du_concept_did%C3%A9al

Lucas, C. O. (2015). *Una Posible "Razão de Ser" del Cálculo Diferencial Elemental en el Ámbito de la Modelización Funcional*. Tesis de doctorado. Universidade de Vigo.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142.

Nicolelis, Miguel (2011). *Muito além do nosso eu: a nova neurociência que une cérebro e máquinas — e como ela pode mudar nossas vidas*. São Paulo: Companhia das Letras.

Ruiz-Munzón, N.; Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. En M. Bosch et al (Eds.), *Un panorama de la TAD* (Vol. 10, p. 743-765). Barcelona, España: Centre de Recerca Matemàtica.

Scheffer, Nilce Fátima (1999). Modelagem matemática: uma abordagem para o ensino aprendizagem da matemática. *Educação Matemática em Revista*, n. 1, p. 11-16.

Sierra, T. A (2006). *Lo Matemático em el Diseño y Analisis de Organizaciones Didácticas: los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes*. Tesis del Doctorado. Universidad Complutense de Madrid.

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, (19) pp.51-81.

Revisora: Maria Isabel de Castro Lima