EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p327-347

Conexões transpositivas na perspectiva da elaboração de modelos epistemológicos de referência a partir de objetos da matemática escolar

Transpositional connections from the perspective of developing epistemological reference models based on school mathematics objects

Conexiones transposicionales desde la perspectiva del desarrollo de modelos epistemológicos de referencia basados en objetos matemáticos escolares

Les connexions transpositionnelles dans la perspective de l'élaboration de modèles de référence épistémologiques à partir d'objets mathématiques scolaires

José Carlos de Souza Pereira[1]
Universidade Federal do Pará
Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-4797-0023

José Messildo Viana Nunes[2]
Universidade Federal do Pará
Doutor em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0001-9492-4914

Saddo Ag Almouloud[3]
Universidade Federal do Pará
Doutor em Matemática e Aplicações
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Resumo

Nosso objetivo neste artigo é expor ideias vinculadas a alguns objetos da matemática escolar que revelem conexões transpositivas pertinentes à elaboração de modelos epistemológicos de referência, vinculando-os às noções de objetos matemáticos do Cálculo Diferencial e Integral. O aporte teórico centra-se na Transposição Didática e Teoria Antropológica do Didático. Mostramos como alguns objetos da matemática escolar estão no foco das noções dos objetos do Cálculo Diferencial e Integral, além de evidenciarmos conexões transpositivas existente entre a matemática escolar e a matemática do Ensino Superior. Nessas conexões transpositivas residem possibilidades para a elaboração de modelos epistemológicos de referência que tornem mais compreensíveis o ensino dos objetos do Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras-chave: Teoria antropológica do didático, Matemática escolar, Cálculo diferencial e integral, Modelo epistemológico de referência.

[1] jsouzaper@gmail.com
[2] messildo@ufpa.br
[3] saddoag@gmail.com

Abstract

Our aim in this article is to present ideas linked to some objects of school mathematics that reveal transpositional connections pertinent to the development of epistemological reference models, linking them to the notions of mathematical objects of Differential and Integral Calculus. The theoretical framework is centered on Didactic Transposition and the Anthropological Theory of the Didactic. We show how some of the objects of school mathematics are the focus of the notions of the objects of Differential and Integral Calculus, as well as highlighting the transpositional connections between school mathematics and higher education mathematics. In these transpositive connections lie possibilities for the development of epistemological models of reference that make the teaching of the objects of Differential and Integral Calculus more comprehensible.

Keywords: Anthropological theory of the didactic, School mathematics, Differential and integral calculus, Epistemological model of reference.

Resumen

Nuestro objetivo en este artículo es presentar ideas vinculadas a algunos objetos matemáticos escolares que revelan conexiones transposicionales pertinentes para el desarrollo de modelos epistemológicos de referencia, vinculándolos a las nociones de objetos matemáticos en Cálculo Diferencial e Integral. El marco teórico se centra en la Transposición Didáctica y en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Mostramos cómo algunos objetos matemáticos escolares son el foco de las nociones de los objetos del Cálculo Diferencial e Integral, además de destacar las conexiones transpositivas entre las matemáticas escolares y las matemáticas de la enseñanza superior. En estas conexiones transpositivas residen posibilidades para el desarrollo de modelos epistemológicos de referencia que hagan más comprensible la enseñanza de los objetos del Cálculo Diferencial e Integral.

Palabras clave: Teoría antropológica de lo didáctico, Matemáticas escolares, Cálculo diferencial e integral, Modelo epistemológico de referencia.

Résumé

Notre objectif dans cet article est d'exposer les idées liées à certains objets mathématiques scolaires qui révèlent des connexions transpositionnelles pertinentes pour le développement de modèles épistémologiques de référence, en les reliant aux notions d'objets mathématiques du calcul différentiel et intégral. Le cadre théorique est centré sur la transposition didactique et la théorie anthropologique du didactique. Nous montrons comment certains objets des mathématiques scolaires sont au centre des notions d'objets du calcul différentiel et intégral, et nous soulignons les liens transpositifs qui existent entre les mathématiques scolaires et les mathématiques de l'enseignement supérieur. Dans ces connexions transpositives se trouvent des possibilités de développement de modèles épistémologiques de référence qui rendent l'enseignement des objets du calcul différentiel et intégral plus compréhensible.

Mots-clés: Théorie anthropologique du didactique, Mathématiques scolaires, Calcul différentiel et intégral, Modèle épistémologique de référence.

Conexões transpositivas na perspectiva da elaboração de modelos epistemológicos de referência a partir de objetos da matemática escolar

A matemática escolar[4] (Moreira & David, 2003; Valente, 2012) possui aspectos transpositivos em relação ao saber matemático sábio (acadêmico) (Chevallard, 1982, 1991). Acrescente-se a essa ideia o fato de que o ensino dos objetos da matemática escolar passa por modelações matemáticas, espécie de discurso escrito, que se tornam os conteúdos dos livros didáticos ou livros textos direcionados à formação docente inicial ou continuada (Nacarato, 2006; Pereira, 2012, 2017; Valente, 2022).

Podemos considerar que a personalização do saber a ensinar ocorre por intermédio de um fenômeno transpositivo não banal e exige atenção quanto ao princípio da vigilância epistemológica (Chevallard, 1991). Essa vigilância epistemológica serve de espécie de "lupa" para se visualizar texto do saber sábio e o texto de saber reescrito para a matemática escolar ou o próprio texto elaborado pelo professor de matemática, visando o ensino de certo objeto matemático (Almouloud, 2022).

A produção cultural do saber matemático – vamos denominar de modelo epistemológico rústico – associa-se a uma linha temporal da Idade da Pedra (Eves, 2011). O saber matemático vai se modificando conforme as transformações sociais da civilização humana, principalmente, quando se reporta à civilização grega (Eves, 2011; Mendes, 2022). Porém, discutir a evolução histórica da Matemática não é o objetivo deste artigo, mas traçar ideias que dialoguem com a Transposição Didática (Chevallard, 1982, 1991) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD) (Chevallard, 1988, 1992, 1997, 1999, 2002; Bosch & Chevallard, 1999; Gascón, 2011, 2018; Delgado, 2006; Pereira, 2012, 2017).

Assim, nosso objetivo é expor ideias vinculadas a alguns objetos da matemática escolar que revelem conexões transpositivas pertinentes à elaboração de modelos epistemológicos de referência, vinculando-os as noções de objetos matemáticos do Cálculo Diferencial e Integral.

Mesogênese e organizações praxeológicas

Nossa incursão sobre Organizações Praxeológicas tem seu ponto de partida na mesogênese do *milieu*[5] didático. A mesogênese é a "gênese do *milieu* didático, ou seja, do

[4] Vamos assumir, em parte, neste artigo, o descrito por Moreira e David (2003, p. 72): "Assim, a matemática escolar, vista como resultado da prática do professor na escola e não como uma lista de conteúdos a serem ensinados, deve incorporar também essa retradução crítica dos saberes operada pelo professor [...]".

[5] A palavra *milieu*, traduzida para a Língua Portuguesa significa **meio**, mas preferimos, neste artigo, que ela seja grafada no idioma Francês, por possuir um significado mais amplo nesse idioma.

sistema de recursos utilizados no processo de construção praxeológica" (Chevallard, 2009a, p. 3, tradução nossa). Isso significa que a Transposição Didática imerge na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e os fenômenos transpositivos se estruturam a partir dos elementos fundamentais da TAD: Tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias (Chevallard, 1999, 2009a, 2009b). Esses elementos fundamentais se agrupam em dois blocos, o da práxis ou sabe-fazer e o do logos ou do saber.

O bloco da práxis possui ao menos um tipo de tarefas T (tau maiúscula) e uma técnica τ (tau minúscula), denota-se esse boco por: $[T / \tau]$ (Chevallard, 1999; Bosch & Chevallard, 1999). Por extensão, o bloco do logos é formado pela tecnologia θ (teta minúscula) e pela teoria Θ (teta maiúscula), denotando-se por: $[\theta / \Theta]$ (Chevallard, 1999; Bosch & Chevallard, 1999). A junção desses dois blocos constitui a Organização Praxeológica Pontual[6] (OPP) ou Organização Matemática Pontual (OMP), representa-se essa OMP pelo quarteto: $[T / \tau / \theta / \Theta]$[7] (Chevallard, 1999). A essência deste tipo de OMP são as tarefas t pertencentes a T ($t \in T$). As tarefas t requerem uma técnica τ que as solucionem, mas essa mesma técnica precisa de um discurso que a torne inteligível ou racional, ou seja, que mostre como a técnica τ opera para obter as soluções das tarefas t (Chevallard, 1999). Porém, para a tecnologia θ existir, ela precisa de um discurso justificativo e inteligível mais elaborado, a teoria Θ (Chevallard, 1999).

Uma OMP serve de ponto inicial para elaboração de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) (Delgado, 2006; Pereira, 2012). Mas esse MER não se resume a uma OMP, são várias que precisam existir, isso faz surgir as Organizações Matemáticas Locais. Uma OML possui pelo menos duas OMP, ou seja, há mais de um tipo de tarefas T (tipos de tarefas T_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, ..., n), o que exige mais de uma técnica τ para solucionar as t_i (i = 1, 2, 3, 4, ..., n). denota-se uma OML por: $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$ (Chevallard, 1999).

Temos a compreensão que as OMP e as OML são as bases para elaboração de modelos epistemológicos de referência. Abstraímos isso a partir de Gascón (2011, p. 208, tradução nossa) que o MER "[...] tem um caráter *sempre provisório*. Com base no MER, a didática pode *desconstruir* e *reconstruir* as praxeologias cuja difusão intrainstitucional e interinstitucional pretende analisar". Dessa forma, vemos que desconstruir e reconstruir OMP e OML é mais simples e a Transposição Didática perpassa pela mesogênese.

[6] Em uma OMP, a aplicabilidade da técnica se restringe ao conjunto de tarefas do mesmo tipo, ou seja, não se mostra satisfatória para tarefas que requerem outra maneira de resolução.
[7] São letras do alfabeto grego.

A sofisticação de um MER se corporifica a partir da mesogênese das Organizações Matemáticas Regionais, algo que começa a existir quando as OML se ampliam e se agrupam em torno das tecnologias θ_j (j = 1, 2, 3, 4, 5, ..., n). De forma simples, duas OML já indicam a possível existência embrionária de uma Organização Matemática Regional (OMR), mas a consolidação dessa ideia fica explícita quando a análise praxeológica evidencia a existência dos agrupamentos de várias OML e para cada OML há o discurso justificativo para as técnicas τ_{ij}. A representação $[T_{ij} / \tau_{ij} / \theta_j / \Theta]$, denota uma OMR (Chevallard, 1999).

O mais alto grau de uma organização praxeológica ocorre ao nível das Organizações Matemáticas Globais. Para que isso ocorra, várias OMR se agrupam em torno de teorias Θ_k (k = 1, 2, 3, 4, 5, ..., n). Uma Organização Matemática Global (OMG) é denotada por: $[T_{ijk} / \tau_{ijk} / \theta_{jk} / \Theta_k]$ (Chevallard, 1999). As OMG, em geral, estão no Ensino Superior, a exemplo das organizações praxeológicas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Análise Real, entre outras. Se um MER alcançar a estrutura praxeológica de uma OMG, vemos que a mesogênese é altamente sofisticada e a potencialidade desse MER, volta-se para a análise do modelo dominante vigente da Matemática ensinada no Ensino Superior (Matos, 2017).

Organizações praxeológicas e matemática escolar na perspectiva da elaboração de modelos epistemológicos de referência

Trouxemos na seção anterior um discurso que caracteriza os tipos de Organizações Praxeológicas (OP), conforme a teorização da TAD. Além disso, intercalamos ideias que convergem para a elaboração de modelos epistemológicos de referência. Nesta seção, vamos descrever ideias que se conectam ao propósito do objetivo anunciado no texto introdutório, além de complementações do que expomos na seção precedente. Assim, nosso foco nesta seção são alguns objetos da matemática escolar que revelam possibilidades praxeológicas para elaboração de modelos epistemológicos de referência, com certas conexões transpositivas aos objetos do Cálculo Diferencial e Integral.

Nesse pressuposto de conexões transpositivas temos a Aritmética Básica do sistema de numeração posicional de base 10 ou sistema de numeração posicional Hindu-Árabe (vamos adotar neste texto a denominação de Sistema de Numeração Decimal (SND)). Esse sistema de numeração é a base dos objetos matemáticos para os anos iniciais do Ensino Fundamental e, prolonga-se até anos finais dessa mesma etapa da do Ensino Básico (Brasil, 2018). O SND tem vários desdobramentos epistemológicos na matemática escolar (Pereira, 2012) e um Modelo

Epistemológico Dominante (MED)[8] (Gascón, 2011, 2014; Pereira, 2017; Almouloud, 2022) vigente nos livros didáticos de matemática do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), de 2023, para os anos iniciais, vinculado as noções mais simples de números naturais (Giovanni Junior, 2021; Centurión, Teixeira & Rodrigues, 2021).

Nesse discurso, uma questão se impõe: qual a relação do SND com o ensino de Cálculo Diferencial e Integral? Para responder essa pergunta não precisamos nos aprofundar na historicidade epistemológica do SND, mas entender que esse sistema de numeração possui um *habitus*[9] da prática (Bourdieu, 2013) com certa Transposição Didática na própria matemática escolar. Queremos dizer com isso que desde os anos iniciais se estimula o desenvolvimento da capacidade cognitiva do estudante de aprender a calcular, então, espera-se que ele ao chegar no Ensino Superior consiga realizar cálculos bem mais complexos, porém os ingressantes no Ensino Superior não expressam essa expectativa e possuem dificuldade de aprendizagem matemática (Masola & Allevato, 2016).

Entenda-se que a prática de cálculos na matemática escolar é bem diferente que o Cálculo como ramo da Matemática no Ensino Superior. Na matemática escolar vive-se uma prática de organizações praxeológicas, muitas vezes, associadas as operações aritméticas e resoluções de equações, enquanto no Ensino Superior o Cálculo transcende para organizações praxeológicas complexas que requerem estudo analítico de funções, Álgebra Linear, Geometria Analítica, Geometria Diferencial, entre outras. Porém, vemos que as ideias básicas da matemática escolar são pertinentes quando se ensina cálculo de Limites, Derivadas e Integral, a exemplo do SND.

O SND quando visto em um MER sofisticado, consegue-se ter a noção da potencialidade epistemológica para outros objetos matemáticos, entre estes, os polinômios de uma variável (Pereira, 2012; Pereira & Nunes, 2017). Os polinômios são essenciais à aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, principalmente, no estudo de funções (Meneghetti, Rodriguez & Pofffal, 2017). Para ilustrarmos as ideias de um MER a partir do SND, citamos o que escrevem Pereira e Nunes (2017, p. 262, grifos dos autores):

> Tomemos o número inteiro – 456. Se dele quiséssemos gerar um polinômio, primeiro teríamos que reescrevê-lo assim: **(–1) (456)**. Dessa escrita surgem então outras

[8] [...] o *modelo epistemológico dominante* de certo ramo do saber matemático ensinado (em uma determinada instituição) condiciona fortemente não apenas o tipo de atividades matemáticas que será possível realizar nessa instituição em torno do ramo matemático em questão, mas também as atividades didáticas correspondentes que se materializam em um modelo docente [...] (Gascón, 2014, p. 108, tradução nossa, grifo do autor).

[9] [...] sistemas de disposições duráveis e transponíveis, estruturas estruturadas predispostas a funcionar como estruturas estruturantes, ou seja, como princípios geradores e organizadores de práticas e representações [...] (Bourdieu, 2013, p. 87).

representações: **(–1) (400 + 50 + 6) = (–1) (4 ·10² + 5 · 10 + 6) = – 4 ·10² –5 · 10 – 6**. Substituindo 10 por x, temos então: $-4x^2 - 5x - 6$. A tecnologia θ_k para representar um número inteiro N_k (k = 1, 2, 3, ..., n), na escrita polinomial de potência de base dez é: $N_k = (\pm 1)(a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + ... + a_n \cdot 10^n)$, $0 \leq a_i < 10$, i = 0, 1, 2, ..., n. Nessa tecnologia, os números naturais estão contemplados, pois o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$). Compreenda-se que no polinômio $4x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 8x - 2$, a tecnologia θ_k permite pensar esse polinômio como resultado de: $(4x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 0x + 0) + (0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 8x - 2) = (4 + 0)x^4 + (-6 + 0)x^3 + (5 + 0)x^2 + (0 - 8)x + (0 - 2)$.

Ao trazermos o SND para as praxeologias do Cálculo Diferencial e Integral, podemos pensar na situação de termos a função de lei de formação $f(x) = x^4 + 1$, e queiramos a derivada primeira dessa função. Se associarmos a tecnologia de N_k, mais completa, ao polinômio da função definida por $f(x)$, ou seja, $N_k = (\pm 1)(a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + ... + a_n \cdot 10^n)$, $0 \leq a_i < 10$, i = 0, 1, 2, ..., n; obtemos $f(x) = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot x^4$, de forma resumida, têm-se $f(x) = 1 \cdot x^0 + 1 \cdot x^4$. Aplicando-se a notação de Lagrange (1806) e a técnica prática para obtenção da derivada primeira, temos: $f'(x) = (0 \cdot 1) \cdot x^{0-1} + (4 \cdot 1) \cdot x^{4-1} = 0 \cdot x^{-1} + 4 \cdot x^3 = 0 + 4x^3 = 4x^3$. Portanto, $f'(x) = 4x^3$. Nessa modelação praxeológica, explicita-se o porquê da derivada de uma constante ser igual a zero: $f(x) = c = cx^0$, que faz surgir $f'(x) = 0$.

Evoluindo as ideias, saímos do SND para o MED dos polinômios na matemática escolar, ou seja, o MED que está nos livros didáticos e ensinado nas instituições escolares. O primeiro modelo praxeológico que se ensina é relativo às expressões algébricas com polinômios de primeiro grau (Bianchini, 2022). Em geral, as tarefas são de cálculo de valor numérico ou redução de termos semelhantes para se chegar à forma reduzida $ax + b$ e depois vem os tipos de tarefas com equações polinomiais de primeiro grau (Bianchini, 2022).

A elaboração de Modelos Epistemológicos de Referência (MER) que trate do objeto equação polinomial do primeiro grau, a exemplo do que fez Almeida (2017), tem potencialidade praxeológica diversas, tanto para o ensino de objetos da matemática escolar quanto ao ensino de objetos do Cálculo Diferencial e Integral. O MER a que nos referimos está amparado na Teoria Antropológica do Didático e nas percepções de Gascón (2014, p. 106, tradução nossa, grifo do autor):

> [...] os modelos epistemológicos de referência (doravante, MER) produzidos no âmbito do TAD podem ser considerados como tipos ideais que têm permitido a emancipação da didática da matemática em relação aos modelos epistemológicos dominantes nas diversas instituições que fazem parte de seu objeto de estudo e, graças à sua função fenomenotécnica[10], os MER têm tornado visíveis novos fenômenos didáticos.

[10] [...] no sentido de “fabricar” objetos de conhecimento [...] (Silva, 2017, p. 125).

A forma reduzida $ax + b$ serve para compor a equação polinomial $ax + b = c$ (a, b e c $\in \mathbb{R}$; $a \neq 0$) (Briant, 2013). Essa equação, no MED da matemática escolar é modelada, fazendo-se c = 0, que resulta $ax + b = 0$ (a, $b \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$). Assim, surge a pergunta: qual o modelo mais adequado, em um MER, para articulá-lo ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral? Nossa percepção para essa pergunta recai sob o ostensivo[11] $ax + b = c$ e suas variações algébricas, porque b e c podem assumir não só valores numéricos, mas de outros polinômios, por exemplo, os ostensivos $b = dx + e$ e $c = fx + g$. Assim,

$ax + b = c \Rightarrow ax + (dx + e) = fx + g \Leftrightarrow ax + dx - fx = g - e \Leftrightarrow x\,(a + d - f) = (g - e) \Leftrightarrow x = \frac{(g-e)}{(a+d-f)}$.

Na manipulação ostensiva $ax + (dx + e) = fx + g$, tivemos que recorrer a um dos casos de fatoração polinomial – fatoração por fator comum. A fatoração polinomial da matemática escolar pode auxiliar em tipos de tarefas de cálculo de limites de funções. Para ilustra isso, vejamos uma tarefa de cálculo de limites no infinito, exibida na Figura 1.

$$\boxed{\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}.}$$

Figura 1.

Exemplo 11 (Stewart, Clegg & Watson, 2022, p. 121)

A tarefa da Figura 1 possui objetos ostensivos e não ostensivos[12] Chevallard, 1994) que precisam ser bem compreendidos no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, mas nossa percepção é que a base inicia na matemática escolar, porque $x^2 + x$ é um polinômio do segundo grau fatorável por fator comum: $x\,(x + 1)$. Isso significa que na Figura 1 temos a representação ostensiva da função polinomial quadrática $f(x) = x^2 + x = x\,(x + 1)$. Além disso, o polinômio do primeiro grau, $3 - x = -x + 3$, é da forma $ax + b$ do Modelo Epistemológico Dominante (Almouloud, 2022) da matemática escolar. Assim, na Figura 1, temos também a função polinomial do primeiro grau $g(x) = 3 - x = -x + 3$. Esses dois tipos de funções polinomiais constituem organizações praxeológicas (Chevallard, 1999), que as vemos como necessárias

[11] Denominam-se ostensivos os objetos que têm para nós uma forma material, sensível, qualquer que seja. Um objeto material (uma caneta, um compasso etc.) é um ostensivo [...]. A característica dos ostensivos é de poderem ser *manipulados*. Esta palavra deve ser entendida em um sentido amplo: manipulação no sentido estrito (a do compasso, ou da caneta), mas também pela voz, o olhar etc. (Chevallard, 1994, p. 4-5, tradução nossa).

[12] [...] os *não ostensivos* – o que é usualmente chamado de noção, conceito, ideia etc. – não podem, estritamente falando, ser manipulados: eles somente podem ser evocados, por meio dos ostensivos associados. Assim, ao dizermos que, para resolver a equação $2^x = 10$ "toma-se o logaritmo dos dois membros", é conveniente que o *não ostensivo*, conceito de logaritmo exista [...] (Chevallard, 1994, p. 5, tradução nossa, grifos dos autores).

para o ensino de matemática no Ensino Superior, a partir de aspectos da Transposição Didática, ou seja, dos "*'Objets de Savoir' et Autres Objets*" (Chevallard, 1991, p. 49).

A tarefa da Figura 1 motiva a elaboração de modelos epistemológicos de referência que tratem dos objetos relacionados ao estudo de funções polinomiais, exemplo do que mostram Almeida (2017) e Figueiredo et al. (2023).

Vejamos outra tarefa de Cálculo de Diferencial e Integral, extraída de Anton, Bivens e Davis (2014), mostrada na Figura 2.

$$\boxed{\text{Encontre } \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.}$$

Figura 2.

Exemplo 10 (Anton, Bivens & Davis, 2014, p. 85)

A tarefa exibida na Figura 2 parece ser simples, mas possui certos objetos não ostensivos (Chevallard, 1994, Bosch & Chevallard, 1999) integrantes da técnica e da tecnologia que permite solucionar tal tarefa. Talvez, pense-se que é só fazer $x = 1$ e calcular o valor em $x - 1$ e $\sqrt{x} - 1$. Por conseguinte, procede-se a divisão ou simplificação do valor numérico obtido de $x - 1$ pelo valor numérico de $\sqrt{x} - 1$. Porém, usando-se a ostensividade e a não ostensividade do cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica, que é ensinado na matemática escolar, tem-se: $x - 1 = 1 - 1 = 0$ e $\sqrt{x} - 1 = \sqrt{1} - 1 = 1 - 1 = 0$. Dessa forma, qual o resultado de $\frac{0}{0}$? A respeitos disso, Anton, Bivens e Davis (2014, p. 85, grifos dos autores) escrevem:

> Um quociente $f(x)/g(x)$ em que o numerador e o denominador têm ambos um limite zero quando $x \to a$ é denominado ***forma indeterminada do tipo* 0/0**. O problema com esses limites é que é difícil dizer por inspeção se o limite existe e, se existir, é difícil dizer seu valor. Dito informalmente, isso ocorre porque há duas influências conflitantes em jogo: o valor de $f(x)/g(x)$ tenderia a zero quando $f(x)$ tendesse a 0 se $g(x)$ permanecesse fixado em algum valor não nulo, enquanto o valor desse quociente tenderia a crescer ou decrescer sem cota quando $g(x)$ tendesse a 0 se $f(x)$ permanecesse fixado em algum valor não nulo. No entanto, com $f(x)$ e $g(x)$ tendendo a zero, o comportamento desse quociente depende de precisamente como essas tendências conflitantes se cancelam uma à outra para as particulares funções f e g sob consideração.

Não vamos nos alongar nas discussões matemáticas do Ensino Superior pertinentes à tarefa da Figura 2, mas ao que é possível vincular a um possível MER sobre racionalização de denominadores e cálculo de limites, que revele objetos ostensivos e não ostensivos da matemática escolar. Nesse ponto, podemos pensar na racionalização de denominadores de uma fração no conjunto dos números reais. Dito isso, podemos pensar em uma organização praxeológica que discuta operações com radicais na forma de fração, por exemplo, "[...] quando se deve escrever sob a forma $u + v\sqrt{e}$ uma expressão do tipo $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$ (onde a, b, c, d, u, $v \in \mathbb{Q}$ e onde $e \in \mathbb{N}$ é um inteiro não quadrado perfeito) [...] (Chevallard, 1998, p. 27, tradução nossa). Para simplificar a ideia de Chevallard, podemos pensar no tipo de tarefas T: Racionalizar o denominador de $\frac{a}{\sqrt{b}-c}$. Esse tipo de tarefas tem uma técnica τ subjugada a uma tecnologia θ associada ao caso de fatoração da matemática escolar, denominado produto da soma pela diferença: $(\sqrt{b}+c)(\sqrt{b}-c) = (\sqrt{b})^2 - c^2 = b - c^2$. Entretanto, essa é apenas uma das partes da técnica que soluciona o tipo de tarefas T. Ela completa é descrita assim: $\frac{a}{\sqrt{b}-c} \rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}-c} \cdot \frac{\sqrt{b}+c}{\sqrt{b}+c} = \frac{a(\sqrt{b}+c)}{(\sqrt{b}-c)(\sqrt{b}+c)} = \frac{a(\sqrt{b}+c)}{b-c^2}$. Dessa forma, a fração $\frac{a}{\sqrt{b}-c}$ tem seu denominado racionalizado na representação $\frac{a(\sqrt{b}+c)}{b-c^2}$. Aplicando-se a técnica de racionalizar denominadores podemos entender a resolução da tarefa da Figura 2 e uma das formas que se usa para eliminar a indeterminação $\frac{0}{0}$, no cálculo de limites: $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = = \frac{(x-1)}{(x-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{1} = 1 \cdot (\sqrt{x}+1) = \sqrt{x}+1$. Na Figura 3 temos a parte final da solução da tarefa da Figura 2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \sqrt{x} + 1 = 2$$

Figura 3.

Parte final da resolução do Exemplo 10 (Anton, Bivens & Davis, 2014, p. 86)

O que mostramos a partir da tarefa da Figura 2, no caso, parte mínima da Transposição Didática do assunto de radiciação proveniente da matemática escolar, que está no currículo da Educação Básica (Brasil, 2018), serve para instigar ideias à elaboração de modelos epistemológicos de referência para esse assunto, por exemplo, sobre potenciação e radiciação no conjunto dos Números Reais, funções racionais e irracionais, entre outros.

Vejamos algumas ideias do estudo de Integrais, conectas a objetos da matemática escolar. Nossa lente recai sobre o cálculo de Integral definida, mais especificamente sobre as ideias associadas ao Teorema Fundamental do Cálculo, mostrado a Parte I na Figura 4.

5.6.1 TEOREMA (***Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1***) *Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

Figura 4.

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte I (Anton, Bivens & Davis, 2014, p. 363)

O Teorema da Figura 4 parece um enigma para quem não estudou Cálculo Diferencial e Integral, mas esse Teorema tem muitas noções matemáticas ostensivas da matemática escolar, principalmente, no Ensino Médio.

Quando se diz que a função *f* é contínua no intervalo [*a*, *b*], isso significa que os valores de *a* e *b* estão no gráfico dessa função. No Ensino Médio, esses intervalos aparecem no assunto de Intervalos Reais (Bonjorno, Giovanni Junior & Sousa, 2020). Na notação [*a*, *b*], em que $a < b$, temos a noção não ostensiva de extremo inferior e extremo superior, que significa que os valores atribuídos para *a* serão extremos inferiores e os valores para *b*, extremos superiores. Se tivermos o intervalo [2, 3], no conjunto dos Números Reais, então $a = 2$ e $b = 3$. O desdobramento da dialética entre objetos ostensivos e não ostensivos (Bosch & Chevallard, 1999) recai sobre o estudo elementar de funções que inicia na Educação Básica e se sofistica no Ensino Superior, a exemplo do Teorema Fundamental do Cálculo.

Para ilustrar a dialética entre ostensivos e não ostensivos, da Figura 4, na matemática escolar, tomemos a função quadrática definida por $f\,(x) = x^2$, com domínio no conjunto dos Números Reais. Dessa forma, *x* pode assumir qualquer valor no intervalo [2, 3], inclusos os extremos. Procedendo-se os cálculos de f(2) e f(3): $f(2) = 2^2 = 4$ e $f(3) = 3^2 = 9$. Se quisermos aproximar o cálculo de F(a) – F(b), sem considerar a teoria matemática do Teorema Fundamental do Cálculo, fazemos f(b) – f(a), que resulta: 9 – 4 = 5. Na Figura 5 exibimos parte do gráfico da função de lei de formação $f(x) = x^2$.

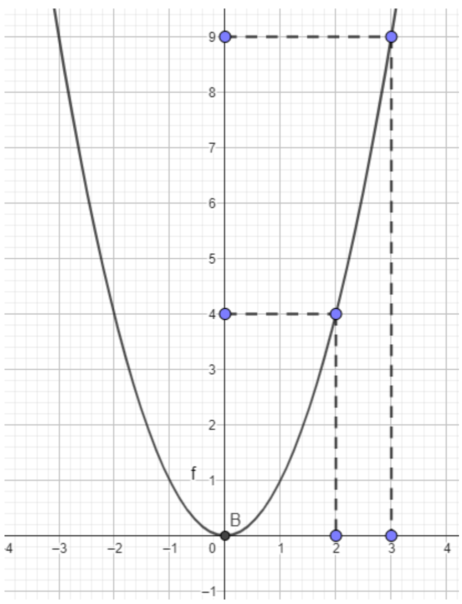

Figura 5.

Recorte de parte do gráfico da função definida por f(x) = x^2 gerado no Geogebra (Autores, 2024)

Observa-se na Figura 5 a continuidade do gráfico da função de lei de formação *f(x)* = x^2, no intervalo [a, b] = [2, 3]. Uma pergunta plausível: O gráfico da função definida por *f(x)* = x^2 é o mesmo da antiderivada *F(x)*? Nessa pergunta, existe certa complexidade relativa às tecnologias θ que justificam as técnicas que se aplicam aos tipos de tarefas de Integrais Definidas. Porém, vamos nos ater à tarefa t: Calcular $\int_2^3 x^2\,dx$. A técnica τ para se obter a antiderivada *F(x)* de *f(x)* = x^2 é: *F(x)* = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Assim: $\int_2^3 x^2\,dx \;\to F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$. Calculando-se *F(b) – F(a) = F(3) – F(2)*: $\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{27-8}{3} = \frac{19}{3}$.

Quando se observa os cálculos realizados na obtenção da antiderivada *F(x)* e em F(b) – F(a), percebe-se as conexões praxeológicas elementares das organizações matemáticas pertencentes à matemática escolar (potenciação, expressões algébricas, funções polinomiais, operações com frações etc.) com as do Cálculo Diferencial e Integral. Para tornar mais explícita essas conexões transpositivas, exibimos o gráfico da função definida por *F(x)* = $\frac{x^3}{3}$, exibido na Figura 6.

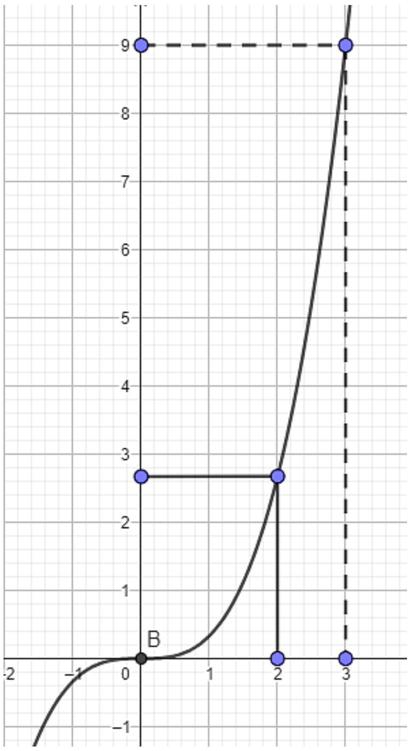

Figura 6.

Recorte de parte do gráfico da função de lei de formação F(x) = $\frac{x^3}{3}$ gerado no Geogebra (Autores, 2024)

O gráfico da Figura 6 mostra as caraterísticas da função definida por $F(x) = \frac{x^3}{3}$, no intervalo [2, 3]. Isso porque o gráfico é um objeto ostensivo (Chevallard, 1994) que exibe o comportamento da curva, no eixo coordenado das abscissas e ordenadas. Esse eixo é assunto da matemática escolar sob a denominação de plano cartesiano (Bonjorno, Giovanni Junior & Sousa, 2020). Temos assim, mais uma evidência de conexões transpositivas para a elaboração de modelos epistemológicos de referência, que mostrem como as organizações praxeológicas da matemática escolar podem dialogar com objetos matemáticos do Cálculo Diferencial e Integral. A Figura 7 mostra um resumo esquemático de organizações praxeológicas da matemática escolar e as possíveis conexões transpositivas entre essas organizações matemáticas na perspectiva de modelação de Modelos Epistemológicos de Referência.

Cada organização praxeológica da matemática escolar da Figura 7 possui vários objetos ostensivos e não ostensivos (Bosch & Chevallard, 1999) importantes para as técnicas τ que solucionam certos tipos de tarefas T das organizações praxeológicas do Cálculo Diferencial e Integral.

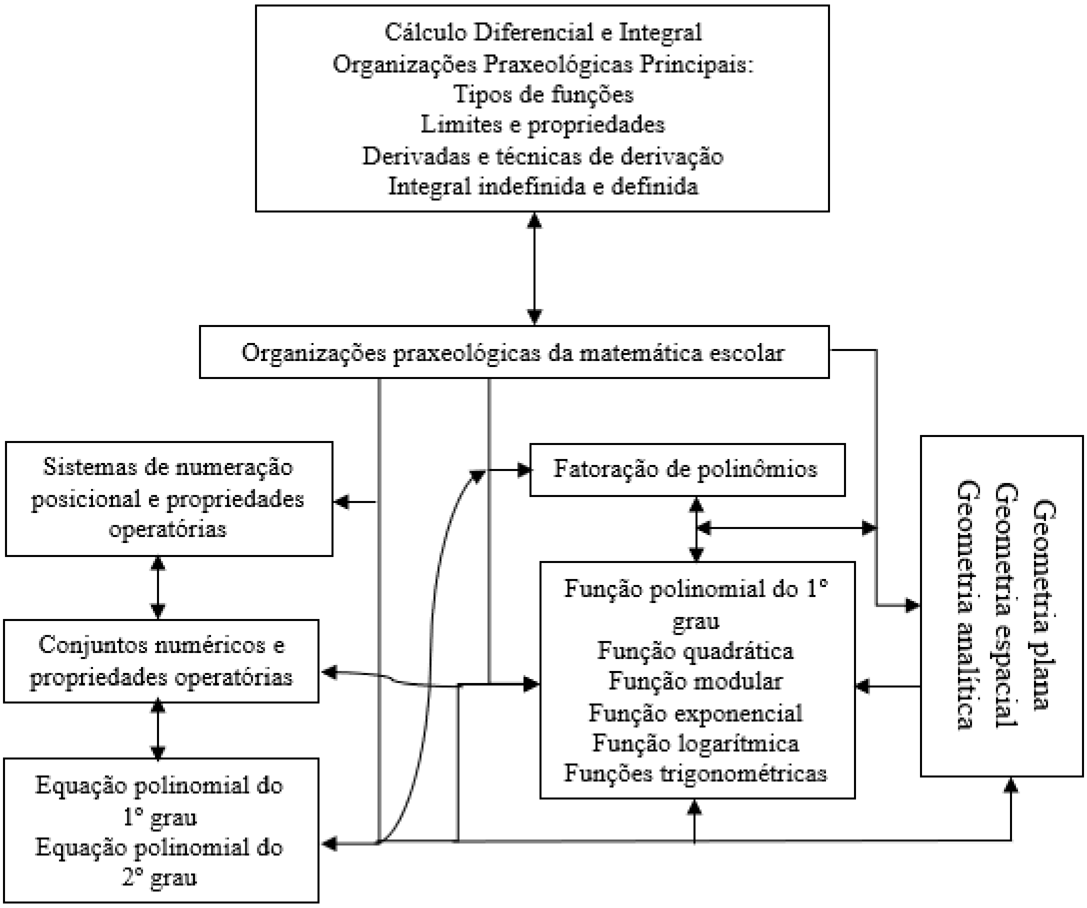

Figura 7.

Resumo esquemático para pensar elaborações de Modelos Epistemológicos de Referência na perspectiva de conexões transpositivas da matemática escolar com o ensino de Cálculo Diferencial e Integral (Autores, 2024)

As ideias contidas na Figura 7 podem ser contempladas na fenomenotécnica da elaboração do MER (Gascón, 2014; Silva, 2017), porque as organizações praxeológicas exibidas nessa figura são do MED das instituições escolares e estão na base praxeológica dos professores de matemática do Ensino Básico.

Considerações Finais

As possibilidades que vemos na elaboração de modelos epistemológicos de referência, que conecte a matemática escolar ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral são múltiplas. Isso está refletido nos tipos de organizações praxeológicas, matemáticas e didáticas, sejam elas pontuais, locais, regionais ou globais. Ou seja, se a ideia de um MER é compreender a funcionalidade dos casos de fatoração polinomial da matemática escolar, no cálculo de limites, então, o trabalho de produção desse MER perpassa por etapas que se iniciam com organizações praxeológicas pontuais (tipo de tarefas T de fatoração por fator comum) e, tenta-se atingir uma organização praxeológica regional $[T_{ij} / \tau_{ij} / \theta_j / \Theta]$, onde as tecnologias θ_j devem conter justificativas das técnicas τ_{ij}, aplicadas na resolução de tipos tarefas T_{ij} de cálculo de limites bem mais complexas, conforme a que consta na Figura 2.

É perceptível as conexões transpositivas que existem entre vários objetos da matemática escolar com os do Cálculo Diferencial e Integral, conforme mostramos nas ideias do Sistema de Numeração Decimal (SND), no estudo de polinômios, equações e tipos de funções, principalmente, as funções polinomiais do primeiro grau e quadrática. Com ideias do SND, mostramos de forma simples o porquê de a derivada de uma função constante ser nula.

Na tarefa da Figura 1, vimos a existência de dois objetos da matemática escolar, função polinomial do 1º grau e função polinomial do 2º grau ou função quadrática. Esses dois objetos fazem parte do currículo de matemática do Ensino Fundamental dos anos finais e Ensino Médio. São objetos que possuem uma praxeológica transversalidade, indo do Ensino Básico ao Ensino Superior. Além disso, o objeto equação polinomial do primeiro grau está modelada na função polinomial do primeiro grau e possui uma representação geométrica necessária (reta tangente a uma curva) para a compreensão da relação que há entre o cálculo de derivadas e de limites.

Vimos em algumas tarefas de Cálculo Diferencial e Integral, os objetos ostensivos e não ostensivos que auxiliam nas resoluções dessas tarefas. Dessa forma, transparece a coerência transpositiva entre o ensino dos objetos da matemática escolar e vários objetos da matemática do Ensino Superior. Vemos essa coerência na tarefa da Figura 1, em que temos o cálculo de limites que relaciona duas funções na forma de quociente entre estas, ou seja, $\frac{f(x)}{g(x)}\,(g(x) \neq 0)$. A função f possui a lei de formação $f(x) = x^2 + x$ e a função g é definhada por $g(x) = 3 - x$. Esses dois objetos, função quadrática e função polinomial do 1º grau, estão nas organizações praxeológicas da matemática escolar.

Ressalte-se que o estudo das organizações praxeológicas do Cálculo Diferencial e Integral potencializam as perspectivas para a elaboração de modelos epistemológicos de referência, que evidenciem a Transposição Didática nos objetos da matemática escolar. Essa nossa percepção está ilustrada na técnica subjacente ao Teorema Fundamental do Cálculo para Integral Definida, que foi aplicada no cálculo da integral definida $\int_2^3 x^2\,dx$. O processo de obtenção da antiderivada revela objetos ostensivos pertinentes à matemática escolar (potenciação, operações com números racionais, construção do gráfico da função quadrática de lei de formação $f(x) = x^2$ etc.).

Frisamos que as organizações matemáticas do Cálculo Diferencial e Integral são do tipo Regionais e Globais. Esses dois tipos de organizações praxeológicas possuem abstrações bem acentuadas que compõem demonstrações refinadas de tecnologias θ_j e teorias Θ_k, que sustentam a base matemática do Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, o Teorema do Confronto, Teorema das funções contínuas, demonstrações das regras de derivação, cálculo de áreas de curvas, Teorema Fundamental do Cálculo, entre outras. Porém, nessas organizações praxeológicas há conexões elementares de objetos ostensivos e não ostensivos que carecem das versões transpositivas das organizações matemáticas Pontuais, Locais e Regionais da matemática escolar. Além disso, esses três tipos de organizações matemáticas escolares, principalmente as Pontuais e Locais, demanda reelaborações transpositivas, algo que pode ser realizado durante a elaboração de um Modelo Epistemológico de Referência (MER).

É palpável conjecturamos que os objetos do Cálculo Diferencial e Integral carecem de modelos epistemológicos de referência, elaborados a partir de estudos dos objetos da matemática escolar, algo que mostramos nas tarefas das Figuras 1, 2 e 3, as quais trazem o cálculo de limites de funções.

Nas tarefas das Figuras 5 e 6, que perpassam pela Integral Definida e o Teorema Fundamental do Cálculo, mostram que a base preliminar está na matemática escolar, no estudo do conjunto dos Números Reais. Acrescente-se a esse estudo o ostensivo gráfico para mostrar a continuidade de uma função num intervalo fechado. Outros objetos ostensivos e não ostensivos estão na técnica da obtenção da antiderivada e aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo e suas extensões mais refinadas.

Assim, acreditamos ter atingido nosso objetivo de expor ideias vinculadas a alguns objetos da matemática escolar que revelem conexões transpositivas pertinentes à elaboração de modelos epistemológicos de referência, vinculando-os as noções de objetos matemáticos do Cálculo Diferencial e Integral.

Referências

Almeida, M. S. L. (2017). *Resolução de equações do 1º grau: um modelo epistemológico de referência* [Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas – Concentração em Educação Matemática, Universidade Federal do Pará]. https://www.repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/13345

Almouloud, S. A. (2022). *Fundamentos da Didática da Matemática*. 2ª. ed. Revisada e ampliada, Editora da UFPR.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2014). *Cálculo*, volume I. tradução: Claus Ivo Doering. 10. ed. Bookman.

Bianchini, W. (2022). *Matemática Bianchini:* 7º ano. 10. ed. Moderna.

Bianchini, W. (2022). *Matemática Bianchini:* 8º ano. 10. ed. Moderna.

Bonjorno, J. R., Giovanni Júnior, J. R., & Sousa, P. R. C. (2020). *Prisma matemática*: conjuntos e funções, ensino médio. Editora FTD.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19* (1), p. 77-124. https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

Bourdieu, P. (2013). *O senso prático*. Trad. Maria Ferreira; rev. trad. Odaci Luiz Coradini. 3. ed. Vozes Editora.

Brasil (2018). Ministério da Educação (MEC). *Base Nacional Comum Curricular*. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Briant, N. (2013). *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français* [Thèse pour obtenir le grade de Docteur - Délivré par UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2]. https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00920506/document

Centurión, M. R., Teixeira, J. S., & Rodrigues, A. B. (2021). *Portais da matemática:* 1º do ano ensino fundamental, anos iniciais. Editora FTD.

Centurión, M. R., Teixeira, J. S., & Rodrigues, A. B. (2021). *Portais da matemática:* 1º do ano ensino fundamental, anos iniciais. Editora FTD.

Centurión, M. R., Teixeira, J. S., & Rodrigues, A. B. (2021). *Portais da matemática:* 2º do ano ensino fundamental, anos iniciais. Editora FTD.

Centurión, M. R., Teixeira, J. S., & Rodrigues, A. B. (2021). *Portais da matemática:* 3º do ano ensino fundamental, anos iniciais. Editora FTD.

Chevallard, Y. (1982). *Pourquoi la transposition didactique?* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=61

Chevallard, Y. (1988). *Esquisse d'une théorie formelle du didactique.* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=101

Chevallard, Y. (1991). *La Transposition Didactique:* du savoir savant au savoir enseigné. Edition La pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), p. 73-112 https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125

Chevallard, Y. (1997). *Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique.* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=30

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), p. 221-266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Chevallard, Y. (2002). *Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=62

Chevallard, Y. (2009a). « Le fait de la recherche ». In: Y. Chevallard, *Journal du Seminaire TAD/IDD*, 6, p. 1-20. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2008-2009-6.pdf

Chevallard, Y. (2009b). *La TAD face au professeur de mathématiques*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162

Delgado, T. A. S. (2006). *Lo Matemático en el Diseño y Analisis de Organizaciones Didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* [Memoria para optar al Grado de Doctor, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar]. https://docta.ucm.es/entities/publication/f10e389e-85d1-4cb0-a252-a73f82bec3b8

Eves, H. (2011). *Introdução à História da Matemática*. tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Editora da Unicamp.

Figueiredo, T. S., Rodrigues, R. F., Cavalcante, J. L., & Santos, F. A. C. (2023). Análise da Conformidade de um Modelo Epistemológico de Referência: a Função Quadrática e um Percurso de Estudo e Pesquisa. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 16 (2), p. 250-261. https://jieem.pgsscogna.com.br/jieem/article/view/10509

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: el caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), p. 203-231. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362011000200004

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Revista Educación Matemática*, Especial 25 años, p. 99-123. https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Esp-1-5.pdf

Gascón, J. (2018). Os modelos epistemológicos de referência como instrumentos de emancipação da didática e da história da matemática. In S. A. Almouloud, L. M. S. Farias & A. Henriques (orgs.), *A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos* (pp. 51-76). Editora CRV.

Giovanni Júnior, J. R. (2021). *A Conquista matemática:* 1º do ano ensino fundamental, anos iniciais. Editora FTD.

Giovanni Júnior, J. R. (2021). *A Conquista matemática:* 2º do ano ensino fundamental, anos iniciais. Editora FTD.

Giovanni Júnior, J. R. (2021). *A Conquista matemática:* 3º do ano ensino fundamental, anos iniciais. Editora FTD.

Lagrange, J. L. (1806). *Leçons sur le calcul des fonctions*. Nouvelle Édition. Impres. Libraire pour les Mathématiques. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k86261t

Masola, W. J., & Allevato, N. S. G. (2016). Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, *2*(1), p. 64-74. https://seer.atitus.edu.br/index.php/REBES/article/view/1267

Matos, F. C. de (2017). *Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais: o caso da álgebra linear* [Tese de doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas – Concentração em Educação Matemática, Universidade Federal do Pará]. https://www.repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/13233

Mendes, I. A. (2022). *Uso da História dá no Ensino de Matemática: reflexões teóricas e experiências*. 3. ed. Livraria da Física.

Meneghetti, C. M. S., Rodriguez, B. D. A. & Pofffal, C. A. (2017). Gráfico de função polinomial: uma discussão sobre dificuldades de aprendizagem no Ensino Superior. *Revista Ciência e Natura*, *9*(1), p. 156-169. : https://doi.org/10.5902/2179460X23191

Moreira, P. C., & David, M. M. M. S. (2003). Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké*, *11*(75), p. 57-80. https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646950

Nacarato, A. M. (2006). A Formação do Professor de Matemática: pesquisa x políticas públicas. *Revista Contexto e Educação*, *21*(75), p. 131-153. https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/contextoeducacao/article/view/1114

Pereira, J. C. S. (2012). *Análise Praxeológica de Conexões entre Aritmética e Álgebra no Contexto do Desenvolvimento Profissional do Professor de Matemática* [Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas – Concentração em Educação Matemática, Universidade Federal do Pará]. https://www.repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/3812.

Pereira, J. C. S. (2017). *Alterações e recombinações praxeológicas reveladas por professores de matemática do ensino básico em formação continuada: a partir de um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar* [Tese de doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas – Concentração em Educação Matemática, Universidade Federal do Pará]. https://www.repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/13230.

Pereira, J. C. S., & Nunes, J. M. V. (2017). Ensino de operações polinomiais intermediado pela aritmética no sistema de numeração posicional decimal. *Revista Educação Matemática e Pesquisa, 19*(1), p. 251-271. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i1p251-271

Silva, E. R. (2017). *Uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica* [Tese de doutorado em EducaçãoMatemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. https://tede.pucsp.br/bitstream/handle/20789/2/Edson%20Rodrigues%20da%20Silva.pdf.

Stewart, J., Clegg D., & Watson, S. (2022). *Cálculo*, volume I. Tradução Técnica: Francisco Magalhães Gomes. 6. ed. Cengage Learning.

Valente, W. R. (2012). O que é número? As mudanças na história de um conceito da matemática escolar. *BOLETIM GEPEM*, *61*, p. 29-43. http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2014.012

Valente, W. R. (2022). História da formação do professor que ensina matemática: etapas de constituição da matemática para ensinar. *Boletim online de Educação Matemática*, *10*(19), p. 10-24. https://doi.org/10.5965/2357724X10192022010