ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p348-374

A noção de número real de Conway e o princípio de complementaridade, algumas contribuições para o desenvolvimento de modelos epistemológicos de referência

Conway's notion of real number and the principle of complementarity, some contributions to the development of epistemological reference models

La noción de número real de Conway y el principio de complementariedad, algunos aportes al desarrollo de modelos epistemológicos de referencia

La notion de nombre réel de Conway et le principe de complémentarité, quelques contributions au développement de modèles épistémologiques de référence

Rogério Ferreira da Fonseca[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Doutorado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0003-1634-9090

Sonia Barbosa Camargo Igliori[2]
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Doutorado em Matemática
https://orcid.org/0000-0002-6354-3032

Resumo

O objetivo deste artigo é destacar potencialidades da teoria de Conway em ralação ao conceito clássico de número, com vistas a contribuir com o desenvolvimento de Modelos Epistemológicos de Referência para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. A busca de resposta única para a questão epistemológica acerca do que é número tem mobilizado epistemólogos da Matemática por séculos, a teoria de John Horton Conway é considerada essencial para a fundamentação desse conceito. Trata-se de um matemático inglês da Universidade de Princeton que se dedicou a pesquisar essa questão e obteve como resultado uma teoria apresentada na década de 1970. Neste artigo serão apresentados elementos sobre essa teoria, bem como as contribuições dos estudos de Conway para a evolução da fundamentação do conceito de número. A definição de Conway para número atende à *complementaridade* dos aspectos intensional e extensional desse conceito trazendo vantagens para a didática da Matemática. Investigações científicas e resultados de práticas docentes no âmbito da didática têm fomentado questionamentos sobre a importância do papel que o conceito de número real tem para a aprendizagem do Cálculo e da Análise Real. Acrescenta-se a essa pergunta, e para a Matemática de um modo geral, e para a formação de um pensamento

[1] rffonseca@ifsp.edu.br
[2] sigliori@pucsp.br

analítico, e para o pensamento matemático? As reflexões realizadas nesse artigo têm por pretensão levantar aspectos epistemológicos e cognitivos sobre a construção clássica de número, buscando repercutir sobre a epistemologia vigente.

Palavras-chave: Número real, Complementaridade, Número de Conway, Modelo epistemológico de referência.

Abstract

The objective of this article is to highlight the potential of Conway's theory compared to the classical concept of number with a view to contributing to the development of Epistemological Reference Models for teaching Differential and Integral Calculus. The search for a single answer to the epistemological question “What is a number?” has mobilized Mathematics epistemologists for centuries, considered essential for the foundation of this concept. John Horton Conway, an English mathematician from Princeton University, dedicated himself to researching this issue and resulted in a theory presented in the 1970s. In this article we bring elements about this theory highlighting its contributions to the evolution of the foundation of the concept of number. Conway's definition of number meets the complementarity of the intensional and extensional aspects of this concept, bringing advantages to Mathematics teaching. Scientific investigations and results of teaching practices in the field of teaching have encouraged questions about the importance of the role that the concept of real numbers has for learning Calculus and Real Analysis. Add to this question, and for Mathematics in general, and for the formation of analytical thinking, and for mathematical thinking? The reflections carried out in this article aim to raise epistemological and cognitive aspects about the classical construction of number, seeking to have an impact on current epistemology.

Keywords: Real number, Complementarity, Conway number, Epistemological reference model.

Resumen

El objetivo de este artículo es resaltar el potencial de la teoría de Conway frente al concepto clásico de número con miras a contribuir al desarrollo de Modelos de Referencia Epistemológicos para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral. La búsqueda de una respuesta única a la pregunta epistemológica “¿Qué es un número?” ha movilizado durante siglos a los epistemólogos matemáticos, considerados esenciales para la fundación de este concepto. John Horton Conway, matemático inglés de la Universidad de Princeton, se dedicó a investigar este tema y dio como resultado una teoría presentada en la década de 1970. En este artículo traemos elementos sobre esta teoría destacando sus aportes a la evolución de la fundamentación del concepto de número. . La definición de número de Conway cumple con la complementariedad de los aspectos intensional y extensional de este concepto, aportando ventajas a la enseñanza de las Matemáticas. Las investigaciones científicas y los resultados de las prácticas docentes en el campo de la enseñanza han fomentado cuestionamientos sobre la importancia del papel que tiene el concepto de números reales para el aprendizaje del Cálculo y Análisis Real. ¿Agregar a esta pregunta, y para las Matemáticas en general, y para la formación del pensamiento analítico, y para el pensamiento matemático? Las reflexiones realizadas en este artículo pretenden plantear aspectos epistemológicos y cognitivos sobre la construcción clásica del número, buscando incidir en la epistemología actual.

Palabras clave: Número real, Complementariedad, Número de Conway, Modelo de referencia epistemológica.

Résumé

L'objectif de cet article est de mettre en évidence le potentiel de la théorie de Conway par rapport au concept classique de nombre en vue de contribuer au développement de modèles épistémologiques de référence pour l'enseignement du calcul différentiel et intégral. La recherche d'une réponse unique à la question épistémologique « Qu'est-ce qu'un nombre ? a mobilisé les épistémologues mathématiques pendant des siècles, considéré comme essentiel pour le fondement de ce concept. John Horton Conway, un mathématicien anglais de l'Université de Princeton, s'est consacré à des recherches sur cette question et a abouti à une théorie présentée dans les années 1970. Dans cet article, nous apportons des éléments sur cette théorie soulignant ses contributions à l'évolution du fondement du concept de nombre. . La définition du nombre de Conway répond à la complémentarité des aspects intensionnels et extensionnels de ce concept, apportant des avantages à l'enseignement des mathématiques. Les recherches scientifiques et les résultats des pratiques pédagogiques dans le domaine de l'enseignement ont suscité des interrogations sur l'importance du rôle que joue le concept de nombres réels dans l'apprentissage du calcul et de l'analyse réelle. Ajouter à cette question, et pour les mathématiques en général, et pour la formation de la pensée analytique, et pour la pensée mathématique ? Les réflexions menées dans cet article visent à soulever les aspects épistémologiques et cognitifs de la construction classique du nombre, cherchant à avoir un impact sur l'épistémologie actuelle.

Mots-clés : Nombre réel, Complémentarité, Numéro Conway, Modèle de référence épistémologique.

A noção de número real de Conway e o princípio de *complementaridade*, algumas contribuições para o desenvolvimento de modelos epistemológicos de referência

O termo *complementaridade*, de Niels Bohr, tem sido utilizado por vários autores para capturar os aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistêmico dos conceitos matemáticos e científicos. Michael Otte (2003, p. 205) concebe *complementaridade* segundo a noção dual de *extensão* e *intensão* de termos matemáticos.

A noção de *intensão* de termos matemáticos é caracterizada por descrever as relações entre classes de objetos matemáticos, assim como suas relações estruturais, no entanto ela não descreve o objeto matemático em si, ou seja, os sistemas axiomáticos no sentido de Peano e Hilbert ou uma abordagem axiomática dos números reais não descrevem o termo matemático número, por isso é importante buscar a *extensão* desse conceito. A *extensão* de termos matemáticos, por sua vez, caracteriza-se por fornecer a descrição dos objetos matemáticos, assim como a interpretação e as possíveis aplicações dos sistemas axiomáticos.

O debate sobre a relação entre as visões *intensional* e *extensional* de matemática atinge particularmente e de forma intensa o conceito de número. A visão *intensional*, que implica ordinalidade e descrições axiomáticas, aparece em primeiro lugar e recebe severas críticas dos que privilegiam as aplicações matemáticas.

A dualidade entre essas duas visões é revelada por Russell em sua obra, *Filosofia da Matemática*, publicada em 1919, que trata dos números e tudo que se relaciona ao número.

A abordagem de Peano é insuficiente para dar base adequada para a aritmética, uma vez que não somos capazes de saber se existe algum conjunto de termos verificando os axiomas de Peano, bem como desejamos nossos números para contar objetos comuns, o que requer que nossos números tenham um significado definitivo, não meramente que eles tenham certas propriedades formais. (Russell, 2007, p. 10)

De acordo com Russell, para se conceituar um número com alguma extensão que é real, é necessário entender "números como um número de quantidades" e dar uma aplicação para o conceito então definido, demonstrando a existência de conjuntos de cardinalidade arbitrária, obviamente, isso só pode ser feito de maneira axiomática. Ao fazer isso, entretanto, a noção de axioma não deve ser entendida de acordo com o senso Peano-Hilbertiano, instrumentalmente; o termo deve ser preferencialmente concebido de acordo com a tradição euclidiana, isto é, como uma verdade intuitivamente evidente e como uma pré-condição de matemática, é por essa razão que Russell introduz o "axioma do infinito". Conforme Russell, é necessário averiguar ou tornar plausível que existam de fato coleções ou conjuntos infinitos no mundo para ser possível encontrar números (2007, p. 77). Na forma de pensar de Russell, intuição aritmética deve ser substituída por intuição da teoria dos conjuntos. Isso pode parecer estranho, como a axiomatização da aritmética tem sido causada pela sensibilidade de que somos incapazes de entender totalmente número e mais ainda de estabelecer leis formais que os números satisfazem.

Russell aparentemente troca o número pelo conceito intuitivo de conjunto como um fundamento dessas leis formais. Quase meio século depois, a educação matemática mundial tentou repetir esse feito, mas com pouco sucesso. Matemática não é uma ciência quase empírica, que estabelece seus métodos pelos significados das propriedades de seus objetos, antes disso, os objetos têm que ser construídos simultaneamente com as regras e métodos da razão.

Dedekind, por sua vez, não estava pronto para imaginar uma definição axiomática de número, depois de reconhecer as características essências de tal sistema, ele ainda questionou: se "existe tal sistema na realidade de nossas ideias" (*Dedekind in his letter to Keferstein in 1890*). Dedeking considerou uma totalidade infinita de coisas atribuindo a nós, sujeitos humanos, a habilidade para repetir infinitamente certas ideias ou ações mentais, tal como se as adicionássemos uma a outra. Para isso, ele considerou sua experiência de pensamento como uma prova da sua existência lógica, sem se preocupar com o significado dos símbolos individuais de número como Russell. Em contraste a Dedekind, Russell pensava que alguém nunca pode atingir totalidades infinitas por mera enumeração e considerava isso um fato empírico "que a mente não é capaz de repetir o mesmo ato infinitamente". Uma aproximação complementarista é induzida pela impossibilidade de definir a realidade matemática independente da própria atividade cognitiva.

Para Thom (1972 *apud* Otte, 2003, p. 203) "o verdadeiro problema com o qual é confrontado o ensino da matemática não é o rigor, mas sim um problema de desenvolver um 'significado' da 'existência' dos objetos matemáticos". Para Otte, uma moderna teoria axiomática tornou-se, de certa forma, uma teoria dual, no sentido de que esse conjunto de axiomas e postulados não determina somente a *intensão* dos termos teóricos, mas constitua também as extensões ou referências e aplicabilidades dessa teoria.

Por exemplo, os objetos da geometria euclidiana parecem ser dados pela intuição, sendo, de certa forma, independentes da teoria. Na geometria de Hilbert, a situação é completamente diferente, pois, para responder às seguintes questões: o que é um ponto, ou o que é um número, é necessária uma descrição axiomática de relações ou de leis com o qual se governam esses entes.

Essa *complementaridade* torna-se visível e distinguível da mera dualidade, apenas de uma perspectiva genética, que se concentra no caráter matemático de nosso conhecimento. Apenas dessa perspectiva a relação entre a matéria e o objeto, além do objeto em si, é focada.

Segundo Otte (2003), a noção da *complementaridade é* relevante, em particular, para qualquer estudo das fundamentações epistemológicas da educação matemática.

A conceituação de número proposta por Conway garante essa *complementariedade,* pois se trata de uma teoria formalmente rigorosa e pode ser interpretada por várias classes de jogos.

São essas reflexões acerca da noção de número, em especial de número real, que nos interessam neste artigo. Os aspectos históricos e epistemológicos da definição de números reverberam na proposta de Conway, por isso apresentam vantagens em relação às reflexões clássicas. É esperado que, com esse potencial, sejam apresentados elementos essenciais para a construção de Modelos Epistemológicos de Referência (MER), visando ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

A noção de número real é um dos pilares essenciais da Análise Matemática, assim como do Cálculo Diferencial e Integral. O ensino e aprendizagem dessas áreas da Matemática requerem o tratamento e estudo de propriedades dos números reais, como a densidade, a ordem e a completude, imprescindíveis para a demonstração rigorosa de teoremas necessários para a compreensão de conceitos, por exemplo, limite, continuidade e derivada.

Consideramos que Modelos Epistemológicos de Referência para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral podem desempenhar um papel fundamental para a aprendizagem, pois eles fornecem estruturas conceituais e metodológicas que guiam a abordagem pedagógica e auxiliam na vigilância e questionamento do conhecimento instituído. Isso ocorre porque, como Gascón (2014), admitimos que um dos papéis importantes da Didática da Matemática é questionar o conhecimento matemático, por isso focamos nesse artigo o questionamento do conceito de número real instituído classicamente.

Tal questionamento toma como fundamento o princípio de *complementaridade*, conforme apresentado por Otte (2003), uma vez que ele possibilita analisar aspectos epistemológicos e cognitivos relacionados a objetos matemáticos, além de contribuir com o desenvolvimento de Modelos Epistemológicos de Referência, principalmente por favorecer questionamento e vigilância epistemológica do conhecimento matemático instituído. Admitimos como Gascón (2014, p. 100) que:

> [...] para tomar os **processos de transposição didática como objeto de estudo**, o didata precisa analisar criticamente os modelos epistemológicos da matemática dominantes nas instituições envolvidas e, assim, libertar-se da suposição acrítica de tais modelos. É nisso que consiste a emancipação epistemológica, enquanto a emancipação institucional se refere à necessidade do didata (e da ciência didática) libertar-se das dependências que acompanham a posição de “professor” (sujeito de determinada instituição escolar), a de “noosfera” (sujeito da noosfera, ou seja, autor de livros didáticos, planos de estudo,

> documentos curriculares, textos de formação de professores, etc.) e, ainda, o de "matemático guardião da ortodoxia" (sujeito da instituição que produz e preserva conhecimento). Obviamente, a emancipação epistemológica constitui um aspecto particular, um primeiro passo essencial, da emancipação institucional que poderia ser definida, em geral, como a libertação da sujeição à ideologia dominante nas instituições que fazem parte do seu objeto de estudo, ou seja, a emancipação não só do provincianismo epistemológico, mas também de todo provincianismo didático, pedagógico e cultural. (tradução nossa)

As abordagens mais comuns (ou clássicas) dos números reais, principalmente em livros didáticos de Análise Matemática ou Cálculo Diferencial e Integral, suscitam incômodos e inconvenientes, gerando debates de caráter histórico e epistemológico. No cerne dessas discussões, encontra-se, por exemplo, a ausência de resposta única à questão acerca do que é número e a impossibilidade de as definições de conceito de número contemplarem a condição dual de *intensionalidade* e *extensionalidade*.

Indicamos como clássicas as abordagens dos números reais: como um conjunto de classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais (completamento do conjunto dos racionais), como o conjunto de cortes de racionais (Cortes de Dedekind) ou como um corpo ordenado completo relativamente às operações adição e multiplicação (conceituação axiomática).

A atuação de matemáticos em diferentes áreas de estudo pressupõe o uso dos números, dos naturais aos transfinitos[3], e a inconveniência da ausência de uma resposta única à questão "o que é um número" ganha força no debate epistemológico (Fonseca, 2010). Defendemos a possibilidade de se vislumbrar a evolução das ideias matemáticas dos diversos tipos de números, por meio da história, além da emancipação epistemológica das abordagens mais tradicionais ou clássicas.

O estudo da evolução histórica de conceitos matemáticos não é sinônimo de harmonia, mas sim de conflitos e complexidade, com o questionamento dos saberes instituídos. Nossas considerações a respeito da conceituação de número, fundamentam-se no princípio da *complementaridade*, uma vez que, de acordo com esse princípio, objetos matemáticos têm natureza dual, isto é, por um lado podem ser caracterizados axiomaticamente (*intensionalidade*), por outro, devem ser complementados por possíveis aplicações, ou seja, modelos que traduzam seus processos lógicos (*extensionalidade*), conforme indicado por Otte (2003). Considerando esse referencial, ao analisar um objeto matemático, busca-se identificar e explicitar a não dissociação dos aspectos que compõem essa dualidade.

[3] Um número transfinito é aquele cuja cardinalidade é maior que C (contínuo). "um dos mais marcantes resultados de *Cantor´s Mengenlehre* é que existem esses números" (Boyer, 1949, p. 297)

A conceituação de número real, proposta por Conway (2001), ressalta potencialidades históricas e epistemológicas diante das conceituações clássicas.

Esse artigo apresenta respectivamente, considerações acerca da natureza dos números, uma breve introdução à teoria de Conway, a noção de *complementaridade*, o questionamento de abordagens clássicas dos números reais perante os preceitos da *complementaridade*, assim como a própria proposta de Conway e, as considerações finais.

Considerações acerca da natureza dos números

Historicamente, filósofos e matemáticos fizeram várias críticas às concepções acerca da natureza dos números, conforme exposto por Barker (1969) e Russell (2007).

> A questão "uma definição para o objeto matemático 'número' deve partir do pressuposto de que esse é puramente um objeto do pensamento ou deve basear-se nas coisas externas que fazem parte da nossa realidade sensível?" sempre esteve envolvida em debates filosóficos ou epistemológicos sobre a natureza dos números (Fonseca, 2010, p. 16).

Nesse artigo, essa questão é considerada levando-se em conta o princípio de *complementaridade*, conforme estabelecido por Otte (2003), e uma possível reformulação pode abarcar outras noções matemáticas, ressaltando o potencial que esse princípio apresenta para analisar noções matemáticas do ponto de vista epistemológico e cognitivo. Ao tentar responder questões acerca da natureza dos números, os argumentos utilizados por matemáticos e filósofos sugerem um debate entre a hierarquia envolvendo a Matemática Pura e a Aplicada (Barker, 1969).

De fato, o desenvolvimento do conceito de número não foi nada harmonioso, por exemplo, os números negativos e os números complexos, durante muito tempo não foram aceitos e eram considerados duvidosos, adquirindo o estatuto de número apenas no século XIX.

Frege (1992, p. 30) foi um dos matemáticos que defendiam que os números negativos e os irracionais deveriam ser analisados e submetidos a uma credencial de número, tal defesa envolve discussões acerca da natureza e definição de tais números.

A partir do século XIX, os números reais foram logicamente bem fundamentados por alguns matemáticos como Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Charles Méray e Georg Cantor. Desde então, é bem aceito que o sistema dos números reais seja construído partindo-se dos números naturais e, por construções sucessivas, obtêm-se os inteiros, os racionais e finalmente os números reais (Fonseca, 2010).

> Dedekind, por exemplo, pode ser legitimamente nomeado como o primeiro a ter construído os números reais a partir dos racionais. Entretanto, quando confrontado com

> a pergunta, O que é número? respondeu com uma teoria geral dos ordinais que fornece status aos números inteiros, mas que não pode ser aplicada diretamente aos números reais, conforme podemos ver no seu texto *The Nature and Meaning of Numbers* (Dedekind, 1901, p. 21).

De acordo com Fonseca (2010, p. 18), as abordagens clássicas dos números reais (cortes de Dedekind, classes de equivalência de sequências de Cauchy de racionais e a abordagem axiomática) apresentam inconvenientes epistemológicos e filosóficos, como a impossibilidade de responder à questão "O que é número?", e a construção dos números de forma única, além de não propiciar a *complementaridade* entre os aspectos *intensional* e *extensional* na conceituação de número real.

Considerando os inconvenientes mencionados anteriormente, consideramos a teoria desenvolvida por Conway (2001) que possibilita a construção dos números de forma única, dos naturais aos transfinitos, podendo ser realizada por meio de conjuntos (garantindo seu caráter *intensional*) e de algumas classes de jogos (garantindo o caráter *extensional*). Tal teoria pode ser concebida por meio de uma dualidade, com uma caracterização axiomática e modelos (os jogos) que fornecem a interpretação de seus termos e explicitam propriedades que constituem a conceituação dos números (Fonseca, 2010).

A seguir apresentamos uma breve introdução às principais ideias da teoria de Conway (2001) que permeiam sua construção. Posteriormente teceremos considerações a respeito de suas potencialidades quando confrontadas com as abordagens clássicas dos números reais, orientadas pelo princípio da *complementaridade* (KuiK, 1977; Otte, 2003). Conforme esse princípio, objetos matemáticos têm natureza dual, ou seja, podem ser caracterizados axiomaticamente, mas devem ser complementados por interpretações ou aplicações, modelos que traduzam suas propriedades. Defendemos que analisar um objeto matemático na perspectiva da *complementaridade* significa buscar identificar sua capacidade de indissociar os aspectos que compõem essa dualidade (Fonseca, 2010).

Uma breve introdução às ideias de Conway

A noção de número de Conway, elaborada na década de 1970, é uma generalização dos cortes de Dedekind e "merece o qualificativo de nova não apenas em razão do tempo em que foi apresentada, mas pelos avanços epistemológicos que ela possibilita" (Fonseca, 2010, p. 21). Tal noção de número propicia o enfrentamento de questões epistemológicas, por exemplo, "o que é número", e abarca em sua construção os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número, além de viabilizar a construção dos números naturais aos reais com um único procedimento, superando as abordagens clássicas.

Conway conceitua número utilizando a noção de corte, além de uma classe específica de jogos e a teoria dos conjuntos.

> A noção de corte de Conway é generalização da noção de Dedekind na medida em que prescinde do conjunto dos racionais como ponto de partida, abrangendo todos os números “grandes” e “pequenos”: os números reais como 0, 1, ..., n, -1, 1/2, $\sqrt{2}$, π, ...; os números transfinitos como ω (o primeiro ordinal infinito); e também os números infinitesimais como 1/ω. A definição de ordem, no conjunto dos cortes, é conseguida tomando como modelos dos “cortes generalizados” uma classe especial de jogos. (Fonseca, 2010, p. 22)

Ressaltamos que Conway critica a construção dos reais a partir dos racionais por meio dos cortes de Dedekind, alegando que a distinção entre o “antigo” e o “novo” racional parece artificial, mas é essencial (Conway, 2001, p. 4).

Apesar de Conway utilizar uma generalização do método de Dedekind, o importante e novo é que ele não pressupõe os números racionais. No início ele utiliza conjuntos vazios e constrói uma classe mais ampla de números, chamados ‘Números Surreais’, incluindo os números reais, os transfinitos e os infinitesimais, além dos complexos, isto é, os ‘Números Surreais’ abarcam todos os números, conforme Fonseca (2010). Conway generaliza o método de Dedekind considerando duas classes de números, sendo: E (classe da esquerda) e D (classe da direita), de tal modo que nenhum elemento da classe E seja maior ou igual a algum elemento da classe D. Então define número como o conjunto cujos elementos são as duas classes E e D, ou seja, o conjunto $\{E | D\}$.

A definição de Conway para um número $x = \{E | D\}$ supõe que as classes E e D sejam classes de números definidos anteriormente a x, ou seja, a construção dos números se dá por recorrência. Vejamos como isso ocorre.

O conjunto vazio é utilizado para construir o primeiro número $\{\varnothing | \varnothing\}$. Esse número é o zero, isto é, $\{\varnothing | \varnothing\} = 0$. A partir dele obtêm-se outros números encontrando-se suas duas classes: a da esquerda e a da direita. O número 1, por exemplo, será o número $\{\{0\} | \varnothing\}$, o número 2, o número $\{\{0,1\} | \varnothing\}$, o número 3, o número $\{\{0,1,2\} | \varnothing\}$ e, assim, obtêm-se todos os números inteiros. A representação dos racionais e irracionais estão representados em Conway (2001, p. 4).

Número é jogo

A associação número/jogo elaborada por Conway (2001) considera determinadas classes de jogos, aquelas em que: a) haja apenas dois jogadores; b) um deles é ganhador; c) ser admitido apenas um número finito de jogadas. A classe de jogos Hackenbush é uma que se encaixa nas classes de jogos de Conway. Essa classe é derivada do conhecido jogo NIM regido pela teoria matemática elaborada por Bouton (1901). Em nossa pesquisa escolhemos uma versão da classe de jogos Hackenbush, é composta por peças coloridas, azuis e brancas, com as seguintes regras: O jogador A deve retirar peças de cor azul, ao passo que o jogador B retira peças de cor branca. A configuração de um jogo deve ser tal que as peças estejam sobrepostas, e uma delas conectada a uma linha horizontal.

Os jogadores jogam alternadamente. Cada um deles deve retirar somente uma peça da cor que lhe é atribuída. Se uma peça for retirada, serão apagadas automaticamente as peças que estiverem sobrepostas a ela. Perderá o jogo aquele jogador que primeiro ficar sem peças de sua cor para retirar. Na Figura 1 estão indicados quatro exemplos de jogos Hackenbush.

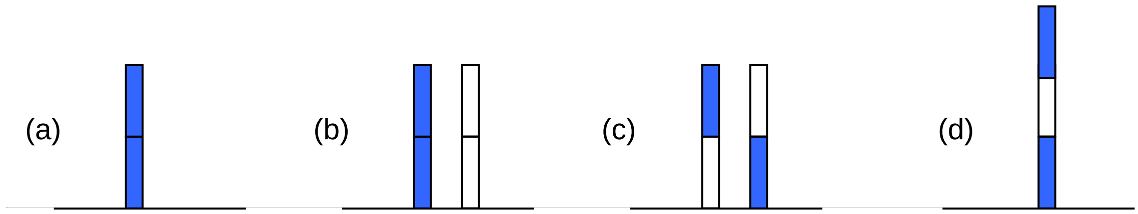


Figura 1.
Exemplos de jogos Hackenbush.

Por exemplo, no jogo (a) da Figura 1 somente o jogador A tem possibilidades de jogada; sendo assim, ele ganha independentemente de quem inicie o jogo.

No jogo (b), a situação é diferente da anterior, pois os dois jogadores têm possibilidades de jogadas, como segue: se o jogador A iniciar a partida retirando a peça azul mais distante da linha, B poderá retirar uma peça branca também mais distante da linha. Então A terá uma única peça para retirar, e B ganhará o jogo. Se o jogador B iniciar a partida, poderá utilizar uma estratégia análoga à anterior, nessas condições, o jogador A vencerá independentemente das jogadas de B. Nesse caso, quem começa perde.

No jogo (c) ocorrerá a mesma situação descrita no parágrafo anterior, ou seja, quem começa perde. No exemplo (d), acontece o seguinte: se o jogador A iniciar a partida, ele retira a peça azul que está conectada à linha apagando automaticamente as peças que estão sobrepostas a ela. Nesse caso, o jogador A ganhará imediatamente o jogo, visto que B não terá possibilidade de retirar nenhuma peça. Se o jogador B iniciar o jogo, ele irá retirar a única peça branca e consequentemente apagará a peça azul sobreposta a ela. E o jogador A também vencerá, pois ainda terá uma possibilidade de jogada, ou seja, o jogador A sempre ganha. A seguir, indicaremos alguns jogos específicos e os números a eles associados.

Jogo zero/número zero

Um jogo zero é aquele em que o jogador que inicia a partida inevitavelmente perde, ou seja, é um jogo em que começar significa perder. A seguir estão indicados alguns jogos zero.

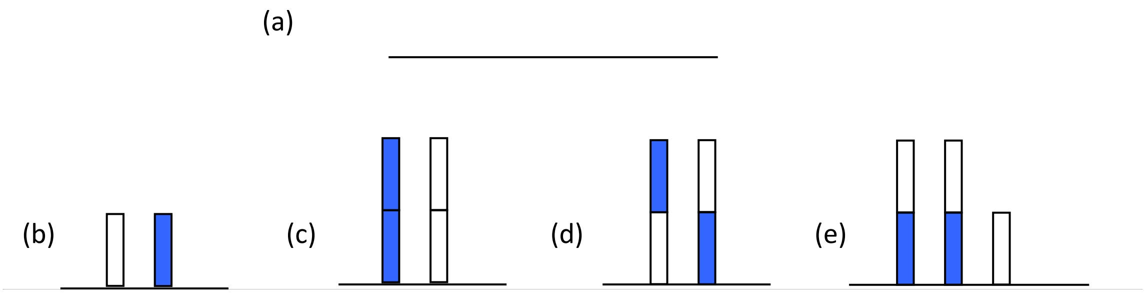


Figura 2.
Jogos Hackenbush de valor zero.

Conway associa o jogo zero ao número zero. O jogo zero de acordo com a configuração (a) indicada na Figura 2 é associado ao número zero representado por $\{\varnothing | \varnothing\}$. Esse é o primeiro número construído por Conway e uma das representações do número zero. O conjunto vazio do lado esquerdo da barra indica a ausência de jogadas para o jogador A, enquanto o vazio do lado direito representa a ausência de jogadas para o jogador B.

Para construir novos números, é necessário definir a seguinte relação de ordem no conjunto dos jogos: um jogo é positivo (ou maior que zero) se o jogador A ganha independentemente de quem comece a partida. De modo análogo, quando a vantagem for do jogador B, isto é, quando B ganha independentemente de quem inicia a partida, o jogo é negativo (ou menor que zero).

Assim, a associação entre jogo zero e número zero está efetivada. Passemos a outros números.

Inicialmente vamos indicar como um determinado jogo J é associado a um número inteiro x, apontando como se obtêm os elementos das classes E e D que definem o número x a ele associado. Isso é feito por recorrência, assim: cada vez que um jogador retira uma das peças, o jogo J se reduz a outro jogo J’ cujo número associado é x’. Esse número x’ será um elemento da classe E ou D de x, dependendo se o jogador que retirou a peça for o jogador A ou o B, respectivamente.

Na Figura 3 a seguir estão alguns exemplos de jogos e os respectivos números inteiros associados a cada um deles. Os jogos são indicados pela configuração das peças e o número a ele associado está indicado abaixo da linha horizontal. Os números 0, 1 e -1 dispostos ao lado de cada peça (na vertical) são os números associados aos jogos a que se reduzem quando a respectiva peça é retirada. Os números 0, 1 e -1 são, como dito anteriormente, em cada caso, elementos das classes E e D do número 1, 2, -1 e -2.

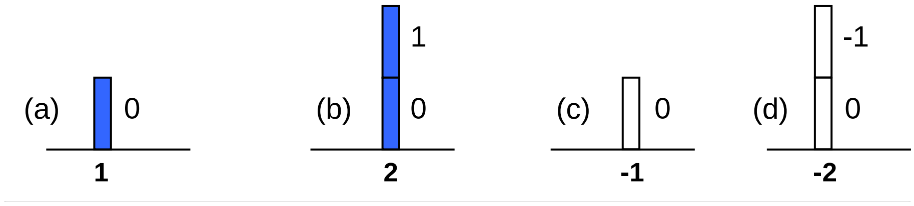


Figura 3.
Jogos/números 1, 2, -1 e -2.

Passamos a detalhar cada caso: Jogo (a): o jogo é constituído de apenas uma peça azul. Nesse jogo apenas o jogador A tem peça para retirar. Quando essa peça é retirada, o jogo se reduz ao jogo zero. O jogador que retirou a peça foi o jogador A, então o número zero será elemento da classe esquerda E de definição do número x associado ao jogo (a). O jogador B não tem peças para retirar, então a classe direita D de definição de x é a classe vazia. Portanto, o número x associado ao jogo (a) é o número $\{\{0\}|\varnothing\} = 1$. Ou seja, o jogo com apenas uma peça azul (a) é o jogo 1 e o número associado a ele é o número 1.

O jogo (b) é o jogo 2, e o número associado a ele é o número $\{\{0,1\}|\varnothing\} = 2$.

O jogo (c) é constituído apenas de uma peça branca. Não há, portanto, nenhuma peça para o jogador A retirar, o que implica E ser vazia, e a classe D será composta pelo zero, pois, quando o jogador B retira a peça branca, o jogo (c) é reduzido ao jogo nulo. O número x associado ao jogo (c) é $\{\varnothing|\{0\}\}$.

Mostremos que $\{\varnothing|\{0\}\}$ é o número -1, de fato ele é negativo, pois é associado a um jogo negativo. (O jogador B sempre ganha). E, definindo-se a soma de dois jogos J e J' como um jogo J" (J+J'=J"), tal que as peças de J sejam colocadas ao lado das peças de J' e apoiadas na linha horizontal, temos que 1+ (c) = 0, como no jogo (a) na Figura 4 a seguir. E assim $\{\varnothing|\{0\}\} = -1$.

Analogamente obtém-se o número $-2 = \{\varnothing|\{-1, 0\}\}$. Dois números x e –x cuja soma é zero são ditos números opostos. De uma maneira geral, o número inteiro positivo n é definido como $n=\{\{n-1\}|\varnothing\}$. Todos os números inteiros são construídos de forma semelhante.

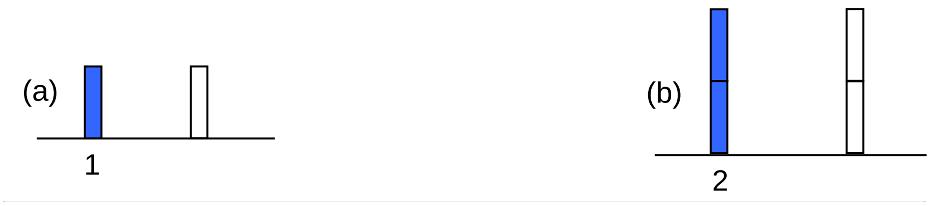


Figura 4.
Números 1, -1, 2 e -2.

Vamos agora analisar um novo jogo indicado na Figura 5.

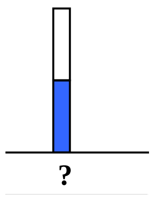


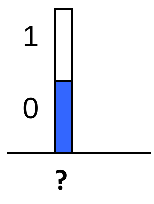
Figura 5.
Um novo número.

Verifiquemos que número está associado a ele. De fato ocorre que:

(1) Existem jogadas possíveis para os dois jogadores;

(2) É um jogo positivo, pois o jogador *A* tem vantagem, em consequência disso o número associado a ele é um número positivo.

(3) Nesse jogo, apesar de a vantagem ser do jogador *A*, o jogador *B* tem uma possibilidade de jogada. Sua representação por meio de conjuntos é $\{\{0\} \mid \{1\}\}$, visto que:



(4) Utilizando soma de jogos, obtemos o jogo (b) na Figura 6. Entretanto verifica-se que não se trata de um jogo zero, pois nesse caso a vantagem é do jogador *B*. Tentamos uma nova possibilidade jogando com (c). Concluímos que o jogo (c) na Figura 7 é um jogo zero.

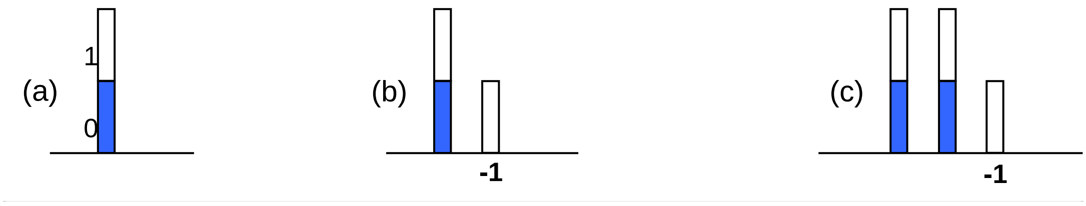


Figura 6.

Construção do número $\frac{1}{2}$.

A configuração do jogo (c) pode ser representada pela equação 2x + (–1) = 0, cuja solução é $\frac{1}{2}$.. Ou seja, o jogo (a) na Figura 6 corresponde ao número $\{\{0\}|\{1\}\}$, que é o número $\frac{1}{2}$.. O seu oposto é obtido por um jogo resultante da inversão das jogadas de A por B. O resultado é o número $-\frac{1}{2} = \{\{-1\}|\{0\}\}$.

Outros números racionais podem ser construídos a partir desses e de outros construídos anteriormente.

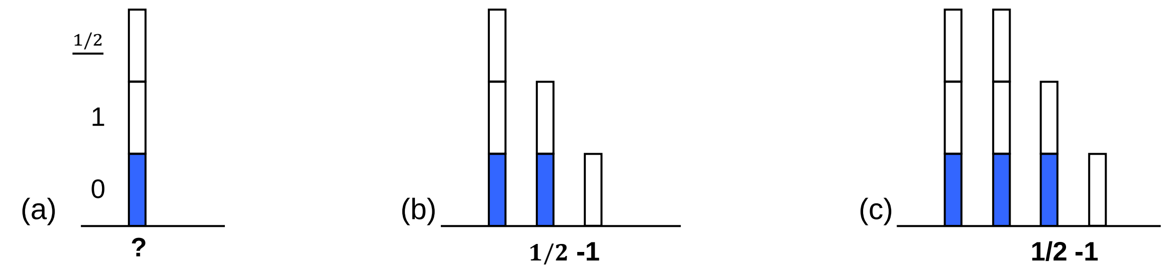


Figura 7.

Construção do número $\frac{1}{4}$..

No jogo (a) da Figura 7, a vantagem é do jogador A, portanto tal jogo está associado a um número positivo. O jogador B tem duas possibilidades de jogadas, podendo ser representado por $\{\{0\}|\{\frac{1}{2}, 1\}\}$ ou $\{\{0\}|\{\frac{1}{2}\}\}$.

Uma tentativa nos leva a construir a soma de jogos, como em (b), obtendo-se um jogo em que a vantagem é do jogador B, logo não nulo. Uma nova tentativa pode ser feita com o jogo (c), cuja soma resulta em um jogo no qual quem começa perde, ou seja, um jogo zero. Assim o novo número associado ao jogo (a) na Figura 7 é solução da equação:

$2x + \frac{1}{2} + (-1) = 0$, ou seja, $x = \frac{1}{4}$. Então $\frac{1}{4}$. $= \{\{0\}|\{\frac{1}{2}, 1\}\}$ ou simplesmente

$\frac{1}{4} = \{\{0\}|\{\frac{1}{2}\}\}$. E, $-\frac{1}{4} = \{\{-\frac{1}{2}\}|\{0\}\}$.

Até o momento não associamos nenhum jogo a números racionais como $\frac{1}{3}$ ou a números irracionais. Um dos motivos para isso é que, para associarmos jogos a tais números, é necessário admitir jogos Hackenbush que tenham configuração infinita de peças. É importante ressaltar que tais jogos também satisfazem as regras iniciais. Mesmo considerando infinitas peças para os jogadores, trata-se de um jogo que pode ser jogado finitamente, visto que, a partir do primeiro deslocamento feito por um dos jogadores, serão apagadas todas as peças sobrepostas à peça retirada, tornando o jogo finito.

Salientamos também que na teoria de Conway tais números são construídos a partir dos números diádicos e contam com um processo infinito. De acordo com Conway e Guy (1999, p. 299), o conjunto "{a, b, c,... | d, e, f,...} define o número mais simples estritamente superior a todos os números a, b, c,... e estritamente inferior a todos os números d, e, f,...", tal definição, associada à regra elaborada por Elwin Berlekamp,[4] permite estabelecer a correspondência entre números reais e o jogo Hackenbush.

A regra elaborada por Berlekamp, Conway e Guy (2001) é a seguinte: o primeiro par de peças de cores distintas que aparecerem contando de baixo para cima representará a "vírgula binária", as peças azuis e brancas que seguem esse par são os dígitos 1 e 0, respectivamente, que aparecem à direita da vírgula, sendo ainda adicionado um último 1 no caso em que a configuração de peças que compõem o jogo for finita. A parte inteira é igual ao número de peças que aparecem antes do par que representa a vírgula.

Vejamos alguns exemplos. O jogo associado ao número racional $\frac{1}{3}$ tem uma configuração infinita e periódica, conforme indicado na Figura 8. Em notação binária, o número $\frac{1}{3}$ é representado por 0,010101..., e por meio de conjuntos da seguinte forma:

$$\frac{1}{3} = \{0{,}01;\ 0{,}0101;\ 0{,}010101;\ ... \mid ...;\ 0{,}0101011;\ 0{,}0111;\ 0{,}011;\ 0{,}1\}$$

[4] Elwyn Berlekamp nasceu em Dover, Ohio, nos Estados Unidos, em 6 de setembro de 1940. É professor emérito de Matemática de Engenharia Elétrica e Ciência da Computação na Universidade da Califórnia, Berkeley, desde 1971. É conhecido por seus trabalhos na Teoria de Informação e na Teoria dos Jogos Combinatórios. Com John Horton Conway e Richard K. Guy, escreveu a coletânea de livros *Winning Ways for Your Mathematical Plays*.

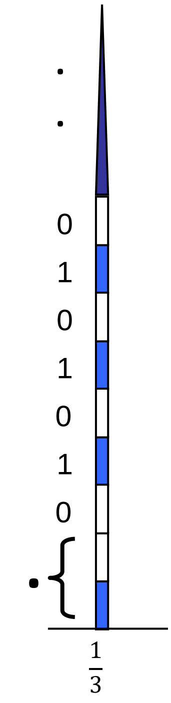


Figura 8.

Jogo Hackenbush correspondente ao número $\frac{1}{3}$.

Como sabemos, os números irracionais têm representação binária infinita e não periódica, por isso podemos utilizar a regra de Berlekamp para associar jogos aos números irracionais. Vejamos um exemplo. O número irracional *e*, cuja representação em notação binária é 10,101101..., e por meio de conjuntos temos:

$e = \{10{,}101;\ 10{,}1011;\ 10{,}101101;\ \ldots \mid \ldots;\ 10{,}11001;\ 10{,}1101;\ 10{,}11\}$

Tal número corresponde ao jogo indicado na Figura 9.

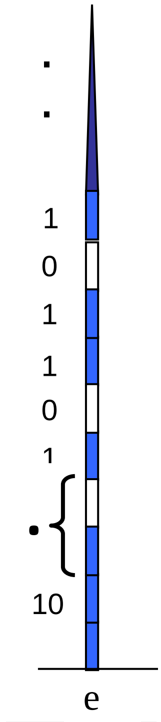


Figura 9.
*Jogo associado ao número irracional **e**.*

Até aqui apresentamos as ideias que envolvem a teoria de Conway, mostramos a interpretação de alguns números por meio de uma classe específica de jogos e suas representações por meio de conjuntos. Na sequência discutimos o princípio de *complementaridade.*

A noção de complementaridade

O artigo *Complementary, Sets and Numbers,* de Otte (2003), traz várias questões sobre os números. Otte lança mão do princípio de *complementaridade* para analisar o desenvolvimento epistemológico e cognitivo desses conceitos, ressaltando a necessária indissociabilidade dos aspectos *intensional* e *extensional,* na conceituação de número. Esse tratamento considera “complementares dois conceitos opostos que, porém, se corrigem reciprocamente e se integram na descrição de um fenômeno” (Abbagnano, 1982, p. 144).

A *complementaridade* entre as concepções *intensional* e *extensional,* de acordo com Otte (2003) está intrinsicamente relacionada ao conceito de número, mas não se restringe a ele, podendo ser utilizada para analisar o desenvolvimento histórico e epistemológico de outros objetos matemáticos, como também foi defendido por Kuik (1977). Ambos defendem que a *complementaridade* ocorre de forma natural havendo hierarquia entre os aspectos *intensional* e *extensional*.

Para nós, o princípio de *complementaridade* defendido por Kuik (1977) e por Otte (2003) pode contribuir com a praxiologia matemática no desenvolvimento de Modelos Epistemológicos de Referência, uma vez que permite analisar os conhecimentos matemáticos instituídos com base nos aspectos *intensional* e *extensional*. A distinção entre os termos *intensional* e *extensional* foi debatida na filosofia e na lógica contemporânea:

> Este par de termos foi introduzido por Leibniz para expressar a distinção que a Lógica de Port-Royal expressara com o par compreensão-extensão e a lógica de Stuart Mill expressara com o par conotação-denotação [...]. O emprego destes dois termos foi adotado por Hamilton: "A interna quantidade de uma noção, a sua intensionalidade ou compreensão é constituída por diferentes atributos cujo conceito é a soma, isto é, dos vários caracteres conexos do próprio conceito num uno todo pensado. A quantidade externa de uma noção ou a sua extensão é constituída pelo número de objetos que são pensados mediatamente através do conceito" (*Lectures on Logic*, 2.ed., 1866, I, pág. 142). [...] A intensão de um termo é definida por Lewis como "a conjunção de todos os outros termos cada um dos quais deve ser aplicável àquilo a que o termo é corretamente aplicável". Neste sentido a intensão (ou conotação) é delimitada por toda definição correta do termo e representa a intenção de quem o emprega, por isso o significado primeiro de "significado". A extensão, entretanto, ou denotação de um termo é a classe das coisas reais às quais o termo se aplica (Lewis, *Analysis of Knowledge and Valuation*, 1950, pág. 39-41). As mesmas determinações são dadas por Quine: a intensão é o significado, a extensão é a classe das entidades às quais o termo pode ser atribuído com verdade. Analogamente são usados os adjetivos intensional e extensional [...]. (Abbagnano, 1982, p. 549)

Em objetos matemáticos, a noção de *intensão* caracteriza as relações entre classes, assim como suas relações estruturais, mas não esgota a conceituação. A esse respeito, podemos tomar como exemplo sistemas axiomáticos como os utilizados por Peano e Hilbert ou, ainda, uma abordagem axiomática dos números reais (corpo ordenado completo). Normalmente, uma abordagem axiomática não trata de objetos que existem concretamente, mas sim de relações gerais ou objetos ideais.

O filósofo e matemático Bertrand Russell (2007) fez severas críticas ao método axiomático, pois, para ele, os axiomas como termos não específicos precisam ser interpretados e especificados, estabelecendo conexões com determinadas aplicações. O autor argumenta que: "em primeiro lugar, as três ideias primitivas de Peano – a saber, '0', 'número' e 'sucessor' – são passíveis de infinitas interpretações diferentes, todas as quais satisfarão as cinco proposições primitivas" (Russell, 2007, p. 23).

Com base nos argumentos de Russell, pode-se inferir a busca por uma definição para número que contemple a natureza matemática, considerando a forma como é concebido pelo homem, suas aplicações e a descrição do objeto em si, aspectos que não são considerados apenas com a noção de *intensão* no método axiomático, por exemplo, na conceituação axiomática de número real.

Considerando impossibilidade de conceber objetos matemáticos independentemente de suas representações e da própria atividade cognitiva, a noção de *extensão* torna-se essencial, já que concerne à interpretação de tais objetos, assim como às aplicações, caracterizando modelos da teoria.

Para Otte (2003), uma teoria axiomática deve ser concebida de acordo com o princípio da *complementaridade*, ou seja, como um par, satisfazendo o aspecto *intensional*, que descreve as relações entre seus termos teóricos por meio de axiomas, e o aspecto *extensional* com referências ou extensões de tais termos, explicitando aplicações, interpretações ou modelos da teoria.

Destacamos que não devemos conceber a *complementaridade* como uma simples dualidade entre os dois aspectos citados, mas sim como complementares dentro da construção do arcabouço teórico (Otte, 2003, p. 205). Para Bachelard (2004, p. 14),

> "[...] um saber puramente dedutivo não passa, a nosso ver, de mera organização de esquemas, pelo menos enquanto não se estabelecer no real a raiz das noções abstratas. Aliás, o próprio avanço da dedução, ao criar abstrações, exige uma referência contínua ao dado que ultrapassa, por essência, o lógico.

O debate sobre a relação entre o aspecto *intensional* e as visões *extensionais* da Matemática foi particularmente intenso a respeito do conceito de número, como pode ser visto em Russell (2007) e Barker (1969).

Na *complementaridade* uma parte constituinte da atividade matemática é o procedimento construtivo partindo de qualidades básicas como "material de construção"; e que a segunda parte constituinte da atividade matemática é o conhecimento sobre as construções matemáticas (incluindo as qualidades básicas), assim como conhecimentos sobre o mundo, a formulação desse conhecimento acontece então em modelos dedutíveis (Kuyk, 1977, p. 156).

Números reais e a noção de complementaridade

Neste item teceremos considerações acerca das abordagens clássicas dos números reais (axiomática, classes de equivalência de sequências de Cauchy de racionais e corte de Dedekind), tendo como pressuposto teórico o princípio de *complementaridade*, e ressaltaremos potencialidades teóricas em relação à proposta de conceituação de número elaborada por Conway.

Como sabemos, a abordagem axiomática dos números reais resulta da apresentação de uma lista contendo fatos elementares admitidos como axiomas, explicitando como esses objetos matemáticos se relacionam, de modo que, a partir deles, os teoremas que constituem a teoria possam ser demonstrados.

Esses axiomas tornam o conjunto dos números reais munido das operações de adição e multiplicação em um corpo ordenado completo. No bojo dessa abordagem axiomática não há qualquer tipo de descrição, interpretação ou aplicação para o objeto matemático (número real), apenas as relações entre os objetos (números reais) são enfatizadas, caracterizando de forma unilateral o aspecto *intensional* desses objetos (Fonseca, 2010).

A noção de *intensão* estabelece apenas as relações entre classes de objetos matemáticos (relações estruturais). A abordagem axiomática dos números reais não descreve o objeto matemático em si, evidenciando apenas como se devem realizar operações com esses números, tratando-os como objetos ideais, ou seja, o método exclusivamente axiomático não garante o aspecto *extensional* do conceito de número (Fonseca, 2010).

Considerando o princípio de *complementaridade*, a abordagem axiomática dos números reais estará sempre incompleta, pois não abarca o aspecto *extensional* desses números.

A proposta de Richard Dedekind, para a construção dos números reais, pressupõe os números racionais e suas propriedades, ele desenvolve o conceito de número real com base em um arcabouço puramente lógico, cuja essência encontra-se na ordinalidade.

> Tradicionalmente, para se obterem os números, dos naturais aos reais, pode-se utilizar o seguinte caminho: os números naturais podem ser caracterizados pelos axiomas de Peano; em seguida, constrói-se o conjunto dos números inteiros por meio de classes de equivalência de pares ordenados de números naturais; o próximo passo é construir os números racionais por meio de classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros, e por fim os números reais por meio dos cortes Dedekind ou por classes de equivalência de sequências de Cauchy (de números racionais). (Fonseca, 2010, p. 126)

No processo de construção dos números, dos naturais aos reais, seja por meio de cortes de Dedekind ou por classes de equivalência de sequências de Cauchy, deve-se considerar também que, a cada extensão de um conjunto para outro, todas as propriedades precisam ser demonstradas novamente.

Observamos que, em tal construção, do ponto de vista da *complementaridade*, apenas as deduções lógicas são contempladas, sem interpretações ou modelos de referência para os números (Fonseca, 2010).

Além disso, há um certo tipo de ruptura na passagem dos números racionais para os reais, caracterizada pela mudança de método, abandonam-se as operações com pares ordenados (de números naturais ou inteiros) para utilizar "novos" objetos, os cortes de Dedekind ou as classes de equivalência de sequências de Cauchy (Fonseca, 2010).

Em relação aos cortes, Dedekind postulou que todo corte tem um elemento de separação (supremo da classe A ou ínfimo da classe B). O efeito de tal postulado é a criação dos números irracionais, o que acarreta a completude do corpo dos números reais. "Filosoficamente, a definição de Dedekind de números irracionais envolve um grau bastante elevado de abstração, uma vez que ela não coloca quaisquer restrições quanto à natureza da lei matemática que define as duas classes A e B" (Courant e Robbins, 2000, p. 86).

Consideramos que em tais abordagens não são explorados possíveis modelos, aplicações ou interpretações dos números, sendo assim, os aspectos *extensionais* não são contemplados e a desejada *complementaridade* entre os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número não ocorre.

Na *complementaridade* uma parte constituinte da atividade matemática é o procedimento construtivo baseado em fatos elementares (que podem ser dados axiomaticamente). Outra parte é o conhecimento sobre as construções matemáticas (incluindo os fatos elementares) e os conhecimentos sobre o mundo, o que está articulado às aplicações dos conceitos envolvidos na atividade matemática (Kuyk, 1977, p. 156).

Segundo Otte (1993, p. 226), o objeto da Matemática ou o conteúdo da atividade matemática de forma alguma pode ser definido absolutamente e independente dos meios da atividade matemática.

Conforme afirmam Courant e Robbins (2000, p. 106), "de uma forma ou de outra, explícita ou implicitamente, mesmo sob o mais intransigente aspecto formalista, lógico ou axiomático, a intuição construtiva permanecerá sempre como o elemento vital na Matemática".

De acordo com Fonseca (2010, p. 158) "uma abordagem complementar entre o caráter *intensional* e *extensional* de conceitos matemáticos faz-se necessária em virtude de considerar a realidade matemática intrinsecamente ligada à própria atividade cognitiva".

O matemático George Cantor propôs uma construção dos números reais a partir dos números racionais e suas propriedades, ele utilizou sequências convergentes de números racionais para construir os números reais. Nessa construção, um número real é uma classe de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. Ratificamos que nossas considerações acerca da construção dos números passo a passo, dos naturais aos reais por cortes de Dedekind, aplicam-se à construção dos reais por meio das classes de equivalência de sequências de Cauchy.

> Se construirmos os números reais por meio de cortes de Dedekind, obteremos um corpo ordenado completo, cujos elementos são conjuntos de números racionais. Se usarmos o processo de Cantor, o corpo ordenado completo que obtemos é formado por classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. São dois corpos ordenados completos que diferem pela natureza de seus elementos, mas não pela maneira como seus elementos se comportam. Em outras palavras, são isomorfos. (Fonseca, 2010, p. 129)

Observamos que, nessas duas construções dos números reais, apenas os aspectos *intensionais* dos números são contemplados, não há qualquer menção aos aspectos *extensionais*. Defendemos a relevância de se considerar novas formas, referências e modelos para abordar os números. Em razão disso, sinalizamos para a abordagem proposta por Conway (2001), visto que fornece em seu bojo alguns axiomas e definições com base nas teorias dos conjuntos, o que permite explorar o aspecto *intensional* do conceito de número, bem como garante a interpretação de tais números por uma classe específica de jogos, isto é, fornece modelos para a interpretação dos números, contemplando o aspecto *extensional*.

"Os jogos nessa teoria não têm um simples papel de aplicação para a axiomática; ele fornece uma interpretação e um modelo intrínseco à própria teoria, visto que a ordenação para os números se encontra inspirada nos jogos" (Fonseca, 2010, p. 130). Ressaltamos que, nessa teoria, não há uma hierarquia entre os aspectos *intensional* e *extensional*. Uma abordagem para os números, dos naturais aos reais, por meio da teoria de Conway, pode ser realizada sem rupturas de procedimentos, contrapondo o que vimos nas propostas de Dedekind e Cantor.

Na teoria de Conway (2001), podemos construir os números, concomitantemente, por meio de conjuntos e por meio dos jogos, que são um modelo empírico, potencializando criatividade, conjecturas, motivação e experimentação, características essas que são relacionadas à atividade matemática por meio de processos de investigação.

Essa construção envolvendo os aspectos *extensionais* do conceito de número pode servir para apoiar a compreensão do aparato lógico, envolvendo definições, deduções, teoremas e suas respectivas demonstrações, contemplando os aspectos *intensionais*.

Diante disso, sinalizamos para o potencial que há na teoria de Conway (2001) para se conceituar número, dos naturais aos transfinitos, de forma única e garantindo o princípio de *complementaridade* entre os aspectos *intensional* e *extensional*. Além disso, poderíamos usar as ideias de Conway para apresentar uma nova fundamentação para os números reais, uma vez que ele afirmou que ensinava sua teoria em cursos de graduação, como a teoria dos números reais (Conway, 2001, p. 27).

Considerações Finais

Com base na proposta de Conway para a construção dos números, é possível apresentar uma resposta à pergunta "o que é número?", que abrange desde os números naturais até os transfinitos. O próprio Conway respondeu a essa questão afirmando que "número é um jogo". Conway (1999, p. 300).

Nesse artigo, buscamos mostrar o potencial de sua teoria para a construção dos números, destacando que ela garante a *complementaridade* na conceituação de número, contemplando concomitantemente os aspectos *intensional* e *extensional*, o que traz vantagens epistemológicas, filosóficas e cognitivas.

Outro aspecto defendido trata da possibilidade de se utilizar o princípio de *complementaridade* no desenvolvimento de Modelos Epistemológicos de Referência, uma vez que tal princípio é uma teoria poderosa para questionar o conhecimento matemático instituído, permitindo analisar se os aspectos *intensional* e *extensional* são contemplados.

No presente artigo, utilizamos como exemplo de análise o caso dos números reais, questionando as abordagens clássicas perante o princípio de *complementaridade* e indicando uma nova teoria que apresenta vantagens epistemológicas. Nesse questionamento também buscamos amparo nos desenvolvimentos históricos, epistemológicos e filosóficos do conceito de número. Assim, propomos o uso de tal princípio para questionar o conhecimento, manter vigilância e permitir a emancipação defendida por Gascón (2014, p. 100) e intuímos que seu uso em Modelos Teóricos de Referência possa ser promissor.

Esse artigo tem por pretensão contribuir com a Educação Matemática em geral e, em particular, com o desenvolvimento de Modelos Epistemológicos de Referência, sob duas perspectivas distintas: a teórica e a prática. A primeira, de cunho teórico, envolve o contexto epistemológico da Matemática. Para isso, exemplificamos no texto como questionar a natureza e os critérios de verdade que os matemáticos utilizam, considerando uma análise rigorosa da diversidade de formas conceituais envolvidas nas noções matemáticas, com ênfase particular no conceito de número real.

A segunda, de caráter mais prático, visa subsidiar reflexões sobre a conceituação de número real. Nesse sentido, o estudo pode fornecer *insights* valiosos para o desenvolvimento de novas abordagens pedagógicas, especialmente no Ensino Superior. Ao explorar maneiras inovadoras de apresentar o conceito de número real, pretendemos motivar pesquisas empíricas para investigar sua adequação na prática.

Vislumbramos, nesse artigo, contribuir tanto para o avanço teórico quanto para a aplicação prática na Educação Matemática. Ao abordar a diversidade de formas conceituais no campo teórico e propor novas abordagens pedagógicas no campo prático, acreditamos que será possível enriquecer o ensino e a aprendizagem de noções matemáticas.

Referências

Abbagnano, N. (1982). *Dicionário de Filosofia*. Tradução de Alfredo Bosi. 2. ed. São Paulo: Mestre Jou.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l´esprit scientifique*. Paris: Librairie J.Vrin.

Bachelard, G. (2004). *Ensaio sobre o conhecimento aproximado*. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto.

Badiou, A. (2008). *Number and Numbers*. Tradução de Robin Mackay. Malden, MA, USA: Polity Press.

Barker, S. F. (1969). *Filosofia da matemática*. Tradução de Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar.

Berlekamp, E. R.; Conway, J. H.; Guy, R. K. (2001). *Winning ways for your mathematical plays*. 2. ed. Massachusetts: A. K. Peters.

Bouton, C. L. (1901). Nim, a game with a complete mathematical theory. *Annals of mathematics*, ser II, vol. 3, nº 1, p. 35.

Brolezzi, A. C. (1996). *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino da matemática*. 1996. Tese (Doutorado em Educação) –Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo.

Bronner, A. (1997). *Etude didactique des nombres reels*. Thése, laboratoire Leibnitz IMAG. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Boyer, C.B. (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. Dover publications, Inc., New York

Conway, J. H.; Guy, R. K. (1999). *O livro dos números*. Tradução de José Sousa Pinto: Lisboa: Gradiva.

Conway, J. H. (2001). *On Numbers and Games*. 2nd ed. Natick, Massachusetts: A K Peters.

Courant, R.; Robbins, H. (2000). *O que é Matemática?* Tradução Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Dedekind, R. (1901). *Essays on the Theory of Numbers*. Tradução Woostre Woodruff Beman. Chigago: The Open Court Publishing Company. Disponível em: <http://www.gutenberg.org/files/21016/21016-pdf.pdf>. Acesso em: 04 de abril, 2010.

Frege, G. (1992). *Os fundamentos da aritmética*. Tradução, prefácio e notas de Antônio Zilhão. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional; Casa da Moeda.

Fonseca, R. F. da. (2010). *A complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC-SP. São Paulo.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, 25, 99–123. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854006.

Hamilton, A. G. (1982). *Numbers, sets and axioms: the apparatus of mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hermes, H. (1998). *Nombres et jeux*. in Les Nombres: Leur histoire, leur place et leur rôle de l'Antiquité aux recherches actuelles. Traduction française et adaptation de François Guénard. Paris: Librairie Vuibert, p. 351-375.

Knuth, D. E. (2002). *Números surreais*. Tradução de Jorge Nuno Silva. Lisboa: Gradiva.

Krause, D. (2002). *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência*. São Paulo: E.P.U.

Kuyk, W. (1977). *Complementarity in Mathematics*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Margolinas C. (1988). *Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels*. Petit x n°16, pp 51-68. IREM de Grenoble.

Otte, M. (1993). *O Formal, o social e o subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da matemática*. Tradução de Raul Fernando Neto. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista.

Otte, M. B. (2001). Russell's "introduction to mathematical philosophy". *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo: EDUC, v. 3, n. 1, p. 11-55.

Otte, M. (2003). Complementarity, Sets and Numbers. *Educational Studies in Mathematics*. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. vol. 53. p. 203-228.

Otte, M. (2007). Mathematical History, Philosophy and Education in Studies in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Russell, B. (2007). *Introdução à Filosofia Matemática*. Tradução Maria Luiza X. de A. Borges; revisão técnica, Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Tall D.; Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, n 82, p. 44-49.

Tall, D.; Pinto, M. (1996). Stundent teacher's conceptions of the rational numbers. *Published in Proceedings of PME 20,* Valencia, v. 4, p. 139-146.