ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p375-398

Os *Principia* de Isaac Newton: uma proposta de modelo epistemológico para o Ensino de integral nas licenciaturas em matemática

Isaac Newton's Principia: a proposal for an epistemological model for teaching integral in mathematics degrees

Principia de Isaac Newton: una propuesta de modelo epistemológico para la enseñanza integral en las carreras de matemáticas

Principia d'Isaac Newton : une proposition de modèle épistémologique pour l'enseignement intégral dans les licenciaturas en de mathématiques

Everaldo Roberto Monteiro dos Santos[1]
Universidade Federal Pará (UFPA)
Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA)
Mestre em Educação Matemática
https://orcid.org/0009-0002-5818-2313

Lucélia Valda de Matos Cardoso[2]
Universidade Federal do Pará (UFPA)
Mestre em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0002-3482-2489

Reginaldo da Silva[3]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA)
Doutor em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0003-0724-166x

Resumo

O artigo tem como objetivo propor um Modelo Epistemológico Alternativo (MEA) para o ensino de cálculo nas licenciaturas em Matemática, usando os *Principia* de Isaac Newton. Para lograr nosso objetivo, partimos da seguinte questão de pesquisa: *Quais são os objetos matemáticos ou artefatos históricos presentes nos Principia que darão subsídios para a criação desse Modelo Epistemológico Alternativo?* Para respondermos à questão e atingirmos nosso objetivo, foi realizada uma análise histórica, epistemológica e contextual da obra citada, sendo possível a partir daí, em processo de transposição didática e utilizando a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a elaboração de um MEA para o ensino de cálculo para as licenciaturas em Matemática.

[1] profroberto2009@gmail.com
[2] luceliamatosmat@gmail.com
[3] reginaldo.jamacaru@ifpa.edu.br

Palavras-chave: Modelo epistemológico alternativo, Ensino de cálculo, Didática da matemática.

Abstract

The article aims to propose an alternative epistemological model (MEA) for teaching calculation in Mathematics degrees, using Isaac Newton's Principia. To achieve our objective, we start from the following research question: What are the mathematical objects or historical artifacts present in Principia that will provide support for the creation of this Alternative Epistemological Model? In order to answer the question and achieve our objective, a historical, epistemological and contextual analysis of the aforementioned work was carried out, making it possible from there, in a process of didactic transposition and using the Anthropological Theory of Didactics (TAD), the elaboration of a MEA for the teaching of calculation for degrees in Mathematics.

Keywords: Alternative epistemological model, Teaching calculus, Mathematics didactics.

Resumen

El artículo tiene como objetivo proponer un modelo epistemológico alternativo (MEA) para la enseñanza del cálculo en las carreras de Matemáticas, utilizando los Principia de Isaac Newton. Para lograr nuestro objetivo, partimos de la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los objetos matemáticos o artefactos históricos presentes en Principia que brindarán apoyo para la creación de este Modelo Epistemológico Alternativo? Para dar respuesta a la pregunta y lograr nuestro objetivo, se realizó un análisis histórico, epistemológico y contextual del citado trabajo, posibilitando a partir de allí, en un proceso de transposición didáctica y utilizando la teoría antropológica de lo didáctico, la elaboración de MEA para la enseñanza del cálculo para licenciaturas en Matemáticas.

Palabras clave: Modelo epistemológico alternativo, Enseñanza del cálculo, Didáctica de las matemáticas.

Résumé

L'article vise à proposer un modèle épistémologique alternatif (MEA) pour l'enseignement du calcul dans les cours de licence (licenciatura) de mathématiques, en utilisant les Principia d'Isaac Newton. Pour atteindre notre objectif, nous partons de la question de recherche suivante : Quels sont les objets mathématiques ou les artefacts historiques présents dans Principia qui serviront de support à la création de ce modèle épistémologique alternatif ? Afin de répondre à la question et d'atteindre notre objectif, une analyse historique, épistémologique et contextuelle du travail précité a été réalisée, permettant à partir de là, dans un processus de transposition didactique et en utilisant la théorie anthropologique de la didactique, l´élaboration de MEA pour l'enseignement du calcul pour les diplômes en Mathématiques.

Mots-clés : Modèle épistémologique alternatif, Enseignement du calcul, Didactique des Mathématiques.

Os *Principia* de Isaac Newton: uma proposta de modelo epistemológico de referência para o ensino integral nas licenciaturas em Matemática.

Neste artigo, utilizamos os pressupostos teóricos da Didática da Matemática, como a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e do Modelo Epistemológico de Referência (MER), para propor uma alternativa para as aulas de cálculo. Desta forma, o objetivo de nosso artigo é propor um Modelo Epistemológico Alternativo (MEA) para o ensino de cálculo nas licenciaturas de Matemática, usando os *Principia*[4] de Isaac Newton.

Partindo da conjectura de que, apesar de o cálculo, em especial o ensino da Integral, ser um objeto bastante presente nas pesquisas da Educação Matemática[5], esses trabalhos não esgotam o leque de possíveis abordagens metodológicas para as aulas desse objeto matemático. Logo, torna-se relevante para o campo de estudo da Didática da Matemática e Educação Matemática a proposta de um MEA para o ensino da introdução da Integral, mais precisamente o cálculo de área abaixo de uma curva, para os cursos de licenciatura em Matemática, utilizando as organizações matemáticas presentes nos *Principia*.

Para a construção do MEA, torna-se necessário que excertos da citada obra, em especial a que se refere ao objeto matemático, que é o foco de nossa pesquisa, passe por um processo de transposição didática. Segundo Chevallard (1985), a transposição didática, em sentido restrito, é um processo em que um saber científico se transforma um saber a ensinar, isto é, transformar um objeto matemático do saber, produzido por um matemático, em um objeto do saber escolar, ou seja, em uma organização didática.

Ao ser abordada a ideia de construir um modelo epistemológico para o ensino da noção de integral para o curso de Licenciatura em Matemática, emerge o nosso problema de pesquisa. Lembramos, a partir das palavras de Corazza (2003), que "... constituir um problema de pesquisa é . . . indagar se aquele elemento do mundo – da realidade, das coisas, das práticas, do real – é assim tão natural nas significações que lhes são próprias ..." (p. 118), para perguntar: *Quais são os objetos matemáticos ou artefatos históricos presentes nos Principia que darão subsídios para a criação desse Modelo Epistemológico Alternativo?*

Tentando responder a esse questionamento, é formulada a seguinte hipótese: *Que na obra Princípios Matemáticos de Filosofia Natural de Isaac Newton podem-se encontrar objetos matemáticos ou artefatos históricos que poderão dar subsídio para a criação de um Modelo Epistemológico Alternativo para o ensino de cálculo nos cursos de graduação em Matemática.*

---

[4]A obra intitulada *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* publicado por Isaac Newton (1643-1727) em 1686, também conhecida como *Principia*, que é plural de *principium* é composta por três livros.
[5] Validado pelo banco de Tese da Capes.

Pela natureza desta pesquisa, os procedimentos metodológicos podem ser divididos em dois momentos, sendo o primeiro relativo à História da Matemática, ao buscar construir um texto, a partir de objetos matemáticos ou artefatos históricos, contidos no livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, e o segundo, à construção do Modelo Epistemológico Alternativo, utilizando esses objetos matemáticos ou artefatos históricos.

Sobre o primeiro momento: A pesquisa, ao buscar subsídios na História, se classifica no rol das pesquisas qualitativas do tipo bibliográficas documentais sob uma abordagem histórico-descritiva, visto que ela se propõe a investigar os vários contextos históricos que levaram ao desenvolvimento epistemológico do cálculo no século XVII.

No caso desta pesquisa, defende-se que estes subsídios estão presentes no livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, pela razão deste livro apresentar de forma geral alguns dos fundamentos do cálculo newtoniano. Entretanto, por se tratar de um livro, originalmente publicado em 1686, a sua linguagem e a sua epistemologia, as verdades que o validam, já não são mais as correntes atualmente. Dessa maneira, é necessária uma transposição didática.

Acerca do segundo momento: usaremos alguns conceitos da Didática da Matemática, mais especificamente da Teoria Antropológica do Didático (TAD), como a Organização Matemática (OM) e a Organização Didática (OD), conforme exposto a seguir:

> Chevallard (1999) define Organização Didática como o conjunto dos tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias, etc., mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta; enquanto Bosch (2001) dá o nome de Organização Matemática a uma entidade composta pelos tipos de problemas ou tarefas problemáticas; tipos de técnicas que permitem resolver os tipos de problemas, tecnologias ou discursos ("logos") que descrevem e explicam as técnicas, uma teoria que fundamenta e organiza os discursos tecnológicos (Ordem & Almouloud, 2010, p.70).

Assim, segundo o exposto por Chevallard (1991), Bosch (2001) e Ordem & Almouloud (2010), podemos dizer de forma geral que uma Organização Matemática (OM) é um saber matemático, produzido por uma instituição universitária, em que não há uma intencionalidade de ensino, e que uma Organização Didática (OD) pode ser originada de uma Organização Matemática que ao passar por um processo de transposição didática (Chevallard,1991), em uma instituição, assume uma intencionalidade de ensino.

Logo, para ir ao encontro do objetivo desta pesquisa, que é: *Elaborar um Modelo Epistemológico Alternativo para o ensino das noções de cálculo para os cursos de licenciaturas em Matemática,* faz-se necessário utilizar Organizações Matemáticas presentes nos *Principia* e por um processo de transposição didática que pode ser entendida como "... a passagem de um objeto de saber a um objeto de ensino...” (Chevallard,1991 *apud* Almouloud, 2007, p.113), essas organizações serão mobilizadas em uma atividade de ensino, com uma intencionalidade em uma instituição, ou seja, serão Organizações Didáticas.

A questão da modelação dos objetos matemáticos.

A transposição didática desenvolvida por Chevallard (1991), em suas primeiras reflexões sobre o ensino da Matemática, tinha como objetivo distinguir os diferentes saberes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Segundo esse teórico, era necessário distinguir a Matemática do professor, a do aluno e a do pesquisador, pois cada um desses indivíduos utiliza uma Matemática com características próprias e, por isso, torna-se sensato para os que estudam essa teoria usar o termo Matemáticas, em vez de Matemática.

Por essa razão, a Matemática a ser ensinada nas escolas ou faculdades, necessariamente, é o resultado de outra Matemática, que passou por um processo de tratamento didático. Esses mecanismos, que permitem a passagem de um objeto de saber a um objeto de ensino, são agrupados sob o nome de transposição didática.

A teoria da transposição didática categoriza os objetos matemáticos em:

paramatemáticos: ferramentas utilizadas para descrever e estudar outros objetos matemáticos;

matemáticos: além de instrumentos úteis para estudar outros objetos matemáticos, tornam-se objetos de estudo em si mesmos;

protomatemáticos: apresentam propriedades utilizadas para resolver alguns problemas sem, contudo, adquirir o *status* de objeto de estudo ou de ferramenta para o estudo de outros objetos (Almouloud, 2007).

Entretanto, a insuficiência dessa classificação, em um processo de reflexão frente aos fenômenos relacionados aos processos didáticos, fez surgir uma nova teoria a TAD. Em outras palavras, essa teoria surge para ampliar a relação das Matemáticas e os indivíduos, pois:

> Para Chevallard, o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento, produto da ação humana em uma instituição caracterizada por qualquer coisa que se produza, se utilize e se ensina, além de poder eventualmente transpor as instituições (Almouloud, 2007).

Nesta perspectiva, Chevallard (1999) lança as bases para a elaboração de uma antropologia didática em que o objeto de estudo é a relação do professor e/ou aluno frente ao conhecimento matemático. Por exemplo, o professor e o aluno frente a um teorema.

Logo, a partir do desenvolvimento dessa teoria, surgem alguns preceitos teóricos, os quais norteiam aqueles que a utilizam. Apresentaremos os mais necessários para atingirmos o objetivo deste trabalho.

Algumas noções da TAD e MER

A TAD de Yves Chevallard (1991,1992, 1999), que é resultante da problemática da transposição didática entre instituições e é considerada como um importante instrumento de análise no campo da Didática da Matemática[6]. Esta teoria segue a linha condutora do programa de investigação caracterizado como Programa Epistemológico de Investigação em Didática da Matemática, originário da década de 70, com os trabalhos de Guy Brousseau, que deram origem à Teoria das Situações Didáticas (TSD).

A TAD situa a atividade matemática e, em consequência, a atividade do estudo em Matemática no conjunto das atividades humanas e de instituições sociais. Segundo Almouloud (2007), "A TAD estuda as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber (em referência ao sistema didático tratado por Brousseau, aluno-professor-saber)" (p.111).

Logo, para essa teoria, a atividade matemática e de ensino de Matemática é considerada como fenômeno antropológico, conforme a reflexão a seguir:

> A TAD parte da compreensão que os seres humanos, para agirem, reúnem-se em grupos – as instituições – os quais impõem certo modo de fazer e pensar próprios no desenvolvimento de suas atividades. Nesse sentido, o fazer de um professor, quando resolve uma equação em classe, ou quando corrige os exames de seus alunos, toma como referência construções elaboradas em instituições, resultantes de uma produção coletiva da qual esse professor participou e participa, mas que assume como suas (Andrade, 2012).

Nesse sentido, pode-se assegurar por meio da TAD que tais ações podem ser descritas em sua realização por um modelo que Chevallard (1991) sintetiza na palavra *Praxeologia*. E, para amparar esse processo de análise, estudo e explicitação de tais ações didáticas, a TAD, emprega três elementos primitivos, a seguir:

*Instituições (**I**)*: as quais são as disposições sociais que orientam o indivíduo na forma de agir e pensar.

[6] A Didática da Matemática nasceu há aproximadamente 40 anos, e, ainda que seja certamente uma ciência humana – uma ciência das atividades do homem na sociedade – ela é portadora de uma ambição de construir teorias rigorosas, que possam constituir modelos para a análise dos fenômenos de ensino e de aprendizagem da Matemática em um ambiente didático: um meio social concebido para o ensino (ALMOULOUD, 2007 p.13).

*Indivíduos (**X**)*: sujeitos que se tornam ativos quando ocupam o lugar que as pessoas ocupam nas instituições. Sendo que, ao ocupar certas posições nas instituições, os indivíduos fazem com que as instituições existam.

E o *objeto* (**O**): elemento básico da TAD, que por sua vez postula que "tudo é objeto" e que somente existe a partir do momento em que um indivíduo (***X***) ou uma instituição (***I***) reconhece-o como existente.

Segundo essa teoria, a relação pessoal de um indivíduo com um objeto do saber, somente é estabelecida quando a pessoa entra em uma instituição em que esse objeto existe. Da mesma forma, as atividades institucionais de um meio didático (escola, grupo de estudos, salas de aulas) estão ligadas às atividades institucionais solicitadas aos indivíduos. Dessa forma, as relações praxeológicas dos indivíduos (**X**) com os objetos (**O**) nas instituições (***I***) se fazem por meio de quatro noções.

Essas noções são a Tarefa (**T**), a Técnica (**τ**), a Tecnologia (**θ**) e a Teoria (**Θ**), noções que permitem modelar as atividades matemáticas como prática social e que serão resumidamente apresentadas a seguir:

Primeira: Tarefa (**T**), que nada mais é do que uma ação com objetivo bem definido; por exemplo: achar o MDC; medir a altura; desenhar o quadrilátero; sendo que essas tarefas passam a ser rotineiras quando deixam de apresentar alguma dificuldade em sua execução.

Para a realização de uma determinada tarefa, existe uma ou um número determinado de técnicas. A Técnica (**τ**), que é a segunda noção, deve ser reconhecida pela instituição que problematizou a Tarefa (**T**). Segundo Almouloud (2007), "... podem existir técnicas alternativas em outras instituições..." (p.115). As técnicas correspondem à maneira de fazer/resolver/realizar a tarefa correspondente.

Por sua vez, a Técnica que é usada para realizar uma determinada Tarefa requer que o indivíduo utilize uma determinada Tecnologia (**θ**), sendo essa a terceira noção. É a Tecnologia (**θ**) que justifica a técnica que foi empregada, ou seja, a Tecnologia dará uma sustentação lógica e racional à Técnica. Nesse sentido, ela estará mais atrelada ao discurso para que seja possível compreender e justificar a Técnica na efetivação da Tarefa. A última noção é a Teoria (**Θ**), que justifica a Tecnologia por meio de uma argumentação científica.

As quatro noções: tipos de Tarefas (**T**), Técnica (**τ**), Tecnologia (**θ**) e Teoria (**Θ**) compõem uma organização praxeológica completa [**T**/**τ**/**θ**/**Θ**] que se subdivide em dois blocos: (1) o bloco prático-técnico [**T**/**τ**], formado por certos tipos de tarefas e uma técnica correspondendo ao saber-fazer; (2) o bloco tecnológico-teórico [**θ**/**Θ**], contendo uma Teoria que justifica uma Tecnologia.

Para ilustrar essas noções fundamentais, apresentaremos o exemplo em que os objetos do cálculo são relacionados com a TAD:

> Calcular a derivada de uma função *f* no ponto x_o de seu domínio é um tipo de tarefas para qual se tem a técnica do cálculo de limite de uma função em um ponto, com um entorno tecnológico-teórico sobre funções, suas representações gráficas e limites de funções (Mateus, 2007).

Contudo, os princípios teóricos que orientam aqueles que pesquisam e/ou aplicam a TAD em seus estudos vão além dessas ideias. Nesse sentido, este estudo faz uso do que é conhecido na TAD como Modelos Epistemológicos, os quais podem ser classificados como Dominantes, de Referência ou Alternativos. O primeiro tipo é o mais comum e serve de base epistemológica para o conhecimento estudado em um contexto educacional. No entanto, nem sempre esse modelo é adequado para estabelecer uma ligação necessária entre o ensino e a aprendizagem. Por isso, de acordo com a Didática da Matemática, surge a demanda por modelos epistemológicos alternativos, conforme Pérez (2013):

> . . . propongo caracterizar los enfoques o teorías didácticas que forman parte del programa epistemológico como aquellos que cuestionan los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las diversas instituciones (por ejemplo, las instituciones e scolares) y, lo que es más importante, como aquellos que elaboran explícitamente modelos epistemológicos alternativos de los diferentes ámbitos de las matemáticas y los utilizan como sistema de referencia para formular y abordar los problemas didácticos (p.71).

Nesse contexto, o alcance didático de um MED se torna alvo de reflexão, ao serem observadas restrições deste modelo, quanto ao seu uso didático, surgindo assim a necessidade da elaboração de novos modelos, ou seja, um MEA, pois "puede ser útil para orientarnos en relación al tipo de problemas didácticos que plantean y abordan los diversos enfoques y, también, en relación a lo que se considera en cada caso como uno respuesta aceptable a dichos problemas" (Gascón, 2013, p.72).

Um bom exemplo de MEA relacionado ao Cálculo encontra-se no artigo de Figueroa e Almouloud (2018), em que os autores têm como objetivo "Contribuir com o processo de formação docente a partir de reflexões sobre um MER, que considera as incompletudes do trabalho institucional relativo ao objeto matemático limite de função de uma variável real" (Figueroa & Almouloud, 2018, p.1). Os pesquisadores, a partir da análise das organizações matemáticas, à luz da TAD em livros didáticos e cadernos de alunos, e um processo de construção epistemológica, propõem um MER para este objeto matemático.

Ainda sobre MER, tem-se a Pesquisa de Bolea (2010) que questiona o Modelo Epistemológico Dominante que é usado para introduzir a álgebra, como sendo a aritmética generalizada e discute o alcance desse Modelo:

> Según Gascón (1993; véase tambien Bolea, 2003), el modelo epistemológico habitual del álgebra escolar resalta las similitudes entre la aritmética y el álgebra y trata de presentar la segunda como una continuación de la primera, como una aritmética generalizada. En este modelo no cabe la visión de un álgebra cuyos objetivos y técnicas sean radicalmente distintos de los de la aritmética (Bolea, 2010, p.582).

Na sua pesquisa, a autora propõe um modelo epistemológico para o ensino dos números inteiros, ao defender que o modelo epistemológico de referência não é suficiente para dar suporte a todos os fenômenos relativos ao ensino desses números.

Em relação ao ensino de cálculo, o Modelo Epistemológico Dominante, que é ensinado na ampla maioria dos cursos de graduação[7], é o que segue a linha direta do cálculo de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que utiliza a ideia dos infinitésimos em uma abordagem predominantemente algébrica, e que emprega a ideia de limites e funções "incorporada" por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Por outro lado, devido a vários motivos, cuja explicação extrapola os objetivos deste trabalho, o cálculo que foi desenvolvido por Newton, que utilizava o método da primeira e última razões de quantidades em uma abordagem geométrica, foi praticamente abandonado.

Partindo do princípio de que alguns MED não dão suporte a todos os fenômenos relacionados a um objeto matemático, como é o caso do cálculo, e que a construção de um Modelo Epistemológico Alternativo pode ajudar na compreensão desses, é que lançaremos a proposta da construção de um MER, para o ensino de cálculo nos cursos de licenciatura em Matemática, a partir do cálculo desenvolvido por Newton.

Para construção deste MER foram elaboradas duas tarefas (T), a partir das Organizações Matemáticas (OM) encontradas na obra *Principia*. Essas Organizações Matemáticas (OM), por sua vez, ao passarem por um processo de transposição didática, com uma intencionalidade de modificar algumas estruturas matemáticas, com o objetivo de torná-las Organizações Didáticas (OD), ou seja, "... a passagem de um objeto de saber a um objeto de ensino..." (Chevallard,1991 *apud* Almouloud, 2007, p.112-113).

[7] Esta afirmação requer um maior aprofundamento, no sentido de ser perigoso do ponto de vista metodológico, ao alegar que nenhum curso de cálculo utilize modelos epistemológicos alternativos. Para esta afirmativa, foi tomada como base o trabalho de Matos e Almouloud (2010) que, ao analisar a praxeologias dos livros didáticos utilizados nos cursos de cálculo, utiliza o modelo de referência.

Algumas breves considerações a respeito do cálculo de Newton nos *Principia*

Esta seção se dedica a fazer uma breve análise histórica, contextual e epistemológica da obra *Principia*. É importante que se registre que Newton, ao apresentar o método da primeira e última razões de quantidades, na obra referida, a demonstra em uma epistemologia válida para a sua época; contudo, o fato de o cálculo newtoniano ser apresentado de forma tímida nessa obra reside no fato de que o objetivo maior nos *Principia* não era o de divulgar o seu método de calcular áreas, mas a demonstração da lei da gravidade, a partir da unificação das leis que regem o movimento dos corpos na terra – as leis de Newton – com as leis que regem os corpos no espaço – as leis de Kepler – que já eram conhecidas, mas não comprovadas rigorosamente. Newton, no decorrer da obra, enuncia as suas três leis e comprova as leis de Kepler e, por fim, demonstra a lei da gravitação universal. O cálculo nesse contexto é uma ferramenta para calcular áreas em movimento.

Os *Principia*

A obra intitulada *Princípios Matemáticos de filosofia Natural*[8] publicada por Isaac Newton (1643-1727) em 1686, também conhecida como *Principia*, que é plural de *principium*, é composta por três livros, sendo que os dois primeiros lançam os fundamentos dos princípios básicos do movimento e o terceiro aplica tais princípios ao sistema solar (Cohen & Westfall, 2002).

Pode-se dizer que os *Principia* são uma obra que apresenta princípios matemático com o objetivo de provar leis da Filosofia Natural. A esse respeito, cabe observar, tal como enfatiza (Alfonso-Goldfarb, 1994) que, naquela época, não existiam áreas de conhecimentos tais como as concebemos hoje. Naquela época, os estudiosos da natureza se referiam à investigação do conjunto da natureza como filosofia natural. Dessa forma, indivíduos como Newton, que eram considerados filósofos naturais, analisavam diferentes fenômenos naturais. É nesse sentido que devemos entender o que Newton diz em seus *Principia* quando se referiu aos propósitos de sua obra:

> . . . Newton (2008) [nesta obra] examina sobretudo as coisas que se relacionam com a gravidade, a leveza, a força elástica, a resistência dos líquidos e forças similares, sejam elas de atração ou impulsiva; e assim, ofereço este trabalho como constituindo os princípios matemáticos da filosofia, pois toda a tarefa da filosofia parece consistir nisso: investigar, a partir dos fenômenos dos movimentos, as forças da natureza, e a partir dessas forças demonstrar outros fenômenos; e é a esse objetivo que se dirigem as proposições gerais do livro I e II. No livro III, forneço um exemplo disso na explicação

[8] Obra originalmente escrita em latim: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.

> do sistema do mundo, pois, pelas proposições matematicamente demonstradas nos dois livros anteriores, deduzo no terceiro, a partir dos fenômenos celestes, as forças de gravidade com que os corpos tendem para o Sol e para os diversos planetas. . . (p.14).

Newton no prefácio de sua obra deixa claro que os dois primeiros livros tratam de proposições gerais que são “matematicamente demonstradas”. Estas proposições são posteriormente mobilizadas para demonstrar os fenômenos celestes e, dessa maneira, aproximando a Matemática da Filosofia Natural. No terceiro livro, tal como Newton observa, deduz “a partir dos fenômenos celestes as forças de gravidade com que os corpos tendem para o Sol e para os diversos planetas”. Em outros termos, Newton, nos dois primeiros livros, alicerça uma base sólida para que no terceiro livro enuncie e prove a lei da gravitação universal.

Os dois primeiros livros dos *Principia* trazem diversas proposições matemáticas organizadas axiomaticamente. Essas proposições serviam para justificar as suas demonstrações; demonstrações estas que eram de natureza geométrica e que seguiam basicamente a mesma estrutura axiomática encontrada em *Elementos* de Euclides (360-295 a.C.).

Nos *Elementos* há uma organização que Euclides utiliza para apresentar e justificar a sua argumentação, que são: as Definições e os Axiomas, que são verdades aceitas sem comprovação; os teoremas, que são verdades provadas com a ajuda dos axiomas e definições; os corolários, que são afirmações decorrentes dos teoremas; os lemas, que são teoremas que servem para ajudar a provar um teorema de maior importância; e as Proposições, que são sentenças associadas a outro teorema de importância matemática menor. Esse mesmo rigor argumentativo Newton utiliza, em sua obra, no desenvolvimento de suas provas sobre o movimento dos corpos. Para Newton, somente a geometria possuía os elementos fundamentais para demonstrar os fenômenos da natureza (Cohen & Westfall, 2002). Isso porque a geometria estava fundamentada em um sistema de verdades aceitas, que levavam a demonstrações de outras verdades.

Com efeito, tal como em os *Elementos*, Newton organizou suas proposições apresentando inicialmente Definições e Axiomas, seguidos de teoremas (proposições). Cada teorema é demonstrado de modo geométrico a partir dos Axiomas e das Definições. Seguem-se ainda, aos teoremas, alguns corolários e escólios.

Textualmente, o primeiro livro dos *Principia* (livro I) é dividido da seguinte forma: Newton apresenta um prefácio, seguido de oito definições e três axiomas ou leis de movimento, e que atualmente são chamadas as três leis de Newton. Em seguida, a obra traz quatorze seções, compostas de proposições ou teoremas, que tratam sobre o movimento dos corpos. Apresentaremos, em seguida, uma das definições.

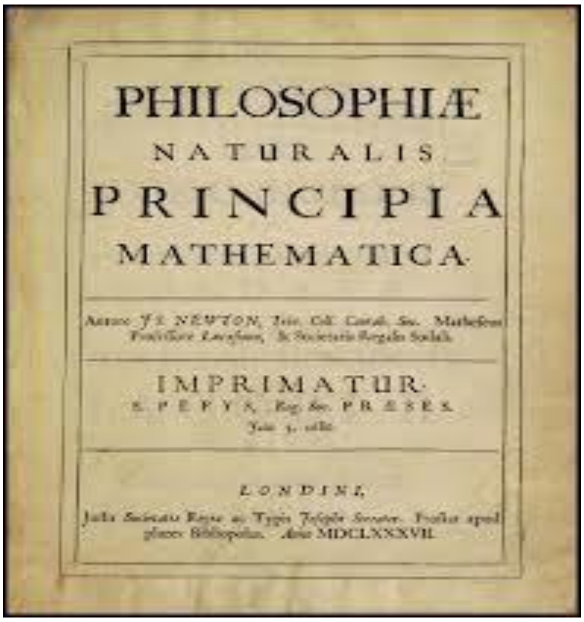

Figura 1.

Capa dos Principia publicada em 1686 (istockphoto, 2022)

Definições

Os *Principia* trazem no início um conjunto de oito definições relacionadas às leis do movimento. Podemos dizer que, da mesma forma que Euclides definiu os objetos da geometria, Newton buscou definir os objetos de sua dinâmica. Pode-se afirmar que as definições fundamentam e formam a base dos *Principia.* Citamos apenas a quinta definição para, logo em seguida, apresentarmos uma breve explicação:

> **Definição V** -Uma força centrípeta é aquela pela qual os corpos são dirigidos ou impelidos, ou tendem de qualquer maneira, para um ponto como centro.

É importante ressaltarmos que Newton, ao deixar claro o que vem a ser força centrípeta, introduz a ideia que segundo Cohen & Westfall (2002), é central nos *Principia*:

> O conceito de força centrípeta, que expressava a percepção de que o movimento circular ou orbital é um movimento acelerado e de que um corpo só continuará a se mover numa órbita fechada enquanto uma força que impede para o centro (centrípeta significa "a que busca o centro") o sustentar nessa trajetória (p.273).

A partir dessas definições, Newton afirma que devido a essa força os corpos celestes se moveriam em trajetórias circulares ou orbitais em um movimento acelerado, e se manteriam neste estado, enquanto a força que os impele para o centro continuasse agindo. A esta força ele chamou força centrípeta, que é o contrário da força centrífuga ("que foge do centro"), que já era conhecida. Contudo ele não havia chegado à concepção generalizada de força, que somente iria acontecer no que é conhecida hoje como a segunda lei de Newton.

Podemos dizer que a força centrípeta tem lugar especial nos *Principia*, visto que Newton buscava compreender o movimento dos corpos celestes. Como vimos, essa força seria responsável por manter um corpo girando ao redor de outro.

Após expostos na obra, as definições e os axiomas, são apresentados onze lemas, que são demonstrados com o auxílio do método das primeiras e últimas razões. Esse método representa o conceito contemporâneo do limite de uma função, embora nosso foco esteja na Integral. É essencial compreendermos epistemologicamente como Newton concebia a ideia de limite em sua obra, já que, sob uma ótica moderna, a Integral definida está ligada à soma de infinitésimos. Newton atribuiu o nome de "Livro I: O movimento dos corpos" à parte dos *Principia* que congrega os onze Lemas da seção I e as outras noventa e oito Proposições distribuídas ao longo de mais treze seções.

De acordo com o objetivo de nosso artigo, analisaremos apenas uma pequena parte da seção I na qual constam: o Lema I, que trata do infinitamente pequeno; o Lema II, que se refere a áreas de curvas, e apenas anunciamos o Lema III, além de alguns Corolários.

A seção I traz em seu título: O método da primeira e última razões de quantidades, com o auxílio do qual demonstramos as proposições abaixo.

Os Lemas apresentados nessa seção correspondem a noções elementares do cálculo diferencial. Mesmo não havendo qualquer referência explícita ao cálculo, como símbolos ou outras terminologias, podemos notar que os Lemas versam sobre os limites de área, linhas e arcos de curvas, conforme observado pelo matemático e autor de livros de cálculo:

> Delachet (1967) é preciso render graças ao gênio de Newton, que soube expor nas suas Philosophiae naturalis Principia mathematica (publicadas em 1687) as regras de seu cálculo infinitesimal, sem empregar a terminologia especial nem os símbolos que inventara a este respeito (p.35).

Nesse sentido, a citação corrobora nossa hipótese de que na obra *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* de Isaac Newton podem-se encontrar objetos matemáticos ou artefatos históricos que poderão dar subsídio para a criação de um Modelo Epistemológico Alternativo para o ensino de cálculo nos cursos de graduação em Matemática.

Nos Lemas, a seguir, Newton apresenta o método de calcular quantidades infinitamente pequenas, que servirá para demonstrar as suas proposições sobre o movimento dos corpos. Esse método, que ele denomina de método da primeira e última razões, consiste em provar que, se houver duas quantidades infinitamente pequenas, e se essas quantidades se movimentarem uma em direção a outra, no final de um determinado tempo elas se tornarão iguais. O método desenvolvido por Newton é naturalmente intuitivo, como veremos a seguir:

Os Lemas

> **Lema I** – As quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente para a igualdade, e antes do fim daquele tempo aproximam-se mais uma da outra do que por qualquer diferença dada, tornando-se finalmente iguais[9].

Esse Lema apresenta uma das ideias principais de cálculo de Newton. Ele discorre sobre as quantidades infinitamente pequenas e o movimento dessas quantidades, como enfatiza Baron (1985):

> O que Newton parece estar dizendo aqui é que se tivermos duas quantidades, digamos Q1e Q2, que variam no tempo, e se a diferença entre Q1 e Q2 diminuir continuamente de tal maneira que, dentro de um intervalo de tempo finito, aproximem-se cada vez mais uma da outra, então teremos finalmente Q1=Q2 (p.31).

A ideia de que as quantidades que se aproximam a ponto de se tornarem iguais num intervalo de tempo finito, conduz-nos a pensar na importância que tem o movimento e a noção de velocidade no processo de formulação de limite.

De fato, parece-nos que, de alguma forma, Newton procurava uma base intuitiva satisfatória para alicerçar o seu cálculo. A noção chave nesse processo parece se encontrar na velocidade instantânea. Newton não se sentia à vontade com os infinitésimos que, a seu ver, tinham credenciais geométricas duvidosas, e tentou eliminá-los por meio da ideia de velocidade instantânea. (Cohen & Westfall, 2002, p.453).

Com efeito, isso parece ser reforçado por outra passagem em que Newton observa que:

> Não considerarei aqui as quantidades matemáticas como sendo compostas de partes *extremamente pequenas,* mas como sendo *geradas* por um *movimento contínuo*. Linhas são descritas, e ao descrevê-las são geradas. Não por um alinhamento das partes, mas por um movimento contínuo de pontos. As superfícies são geradas pelo movimento de linhas e os sólidos pelo movimento de superfície, os ângulos pela rotação dos seus lados, o tempo por um fluxo contínuo, etc. Essa gênese está baseada na natureza e pode ser vista dia a dia no movimento dos corpos (Baron, 1985).

Entretanto, podemos dizer que, apesar de Newton negar os infinitésimos, eles estão presentes em seu estudo, pois a ideia de velocidade instantânea traz implícita a ideia de distância

[9] Ibidem p.71.

infinitesimal percorrida por um corpo num tempo finito (Cohen & Westfall, 2002, p.453). No caso de Newton, a negação dos infinitésimos ocorre mais por razões filosóficas do que matemáticas.

Não aprofundaremos essas questões, mas queremos apenas aqui observar que pelas questões relativas à Matemática e à natureza perpassavam outras tantas ligadas ao próprio proceder matemático. Grosso modo, podemos dizer que, no século XVII, havia duas grandes correntes filosóficas que se conflitavam (Meneghetti & Bicudo, 2002). De um lado, existia um grupo de pessoas que defendiam que as verdades matemáticas, para serem alcançadas, deveriam ser submetidas à aritmética. Isso porque os objetos da aritmética seriam mais abstratos do que os da geometria. Por sua vez, havia também outro grupo de estudiosos matemáticos que defendiam que o homem somente alcançaria as verdades matemáticas pela observação e experimentação e que, portanto, o método geométrico seria preferível ao aritmético. Isso porque a geometria, diferentemente da aritmética, estava muito mais próxima da realidade sensível.

Em outros termos, ao tratarmos a natureza de forma matemática, seria mais prudente buscar procedimentos matemáticos mais adequados a ela.

Como é notório nos *Principia*, Newton fundamentou as bases do cálculo na geometria. Segundo Meneghetti & Bicudo (2002, p.109) ele teria sido influenciado pelas ideias de Isaac Barrow (1630-77), que foi seu professor em Cambridge. Barrow criticava a aritmetização do cálculo e o simbolismo analítico, buscando valorizar as evidências sensoriais.

Isso nos leva a concordar com Meneghetti & Bicudo (2002), que o trabalho de Newton tinha um caráter mais intuitivo, visto que o tratamento dado por ele ao “infinitamente pequeno” buscou evitar a ideia de “infinitésimos”:

> Sua visão de limite, por exemplo, principalmente a de seus trabalhos iniciais, era baseada em intuições geométricas [...]. Influenciado pelo pensamento do século XVII, foi levado a pensar sobre os indivisíveis geométricos últimos, e, em sua teoria, utiliza termos como razões e formas últimas, expressões que seguem de interpretações abstratas rigorosamente corretas, mas que sugere fortemente outras, em termos de uma visão intuitivamente mais atrativa, produzida pelos infinitesimais. O conceito de limite de Newton era fortemente dependente da ideia do infinitamente pequeno. Essa dependência pode ser percebida em seus *Principia*, quando fala da natureza das razões últimas (p.111-112).

Assim, é nesse sentido que devemos entender o Lema I. Se podemos aqui nos referir à ideia de limite em Newton, este tinha por base quantidades infinitamente pequenas que, ao se aproximarem uma da outra até o ponto de não haver mais a diferença entre elas, se tornariam iguais, e não à moderna noção de infinitesimal. Com este princípio, que Newton batizou de método da primeira e última razões de quantidades[10], ele fundamenta a sua forma de calcular a área de uma curva.

Modelo Epistemológico de Referência

Encontrar a área sob uma curva é um dos pilares do cálculo, mais precisamente dos estudos das integrais. Newton, aplicando o seu método a paralelogramos, prova ser possível encontrar tais áreas, conforme será mostrado nos lemas II e III, que serão apresentados a seguir, juntos de alguns corolários.

> **Lema II -** Se em qualquer figura AacE, delimitada pelas retas Aa,AE e a curva acE, existir um número qualquer de paralelogramos Ab,Bc,Cd etc.,de bases iguais AB,BC,CD etc., paralelos a um lado Aa da figura; e os paralelogramos aKbl, bLcm,cMdn etc., forem completados; então, se for suposto que a largura daqueles paralelogramos foi progressivamente diminuída e o seu número aumentado *in finitum*, afirmo que as razões finais que a figura inscrita AKbLcMdD, a figura circunscrita AalbmcndoE e a figura curvilínea AabcdE, terão uma para outra, são razões de igualdades.[11]

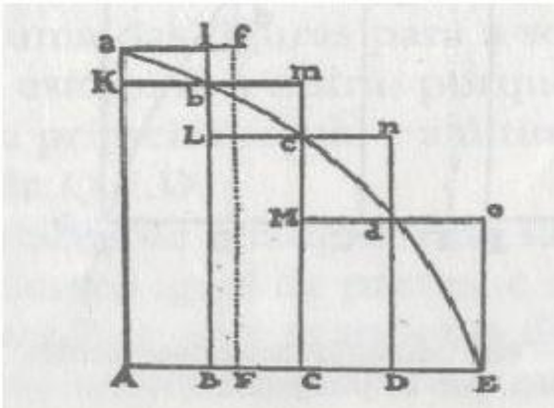

Figura 2.

Representação geométrica Lema II (Newton, 2008 p.72)

O lema II demonstra que, utilizando o método da primeira e última razões de quantidades, conseguimos determinar a área de uma curva.

Newton busca mostrar que, para determinar a área sob uma curva com centro A, delimitada pelos pontos E, c, a, conforme a figura, deveremos proceder da seguinte forma:

1-Desenhar um número qualquer de paralelogramos inscritos nesta curva. No caso da figura, há três de base: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$.

[10] Ibidem, p. 71.
[11] Ibidem, p.71-72.

2- Com a ajuda de outros paralelogramos menores, subscrever a figura curvilínea. Neste caso, os paralelogramos de base: $\overline{Kb}$; $\overline{Lc}$, $\overline{Md}$; $\overline{DE}$ terão esse papel.

Newton argumenta que, se a largura dos paralelogramos for cada vez menor, resultará em uma quantidade maior deles e que, nesse caso, se a largura for diminuída progressivamente, o número de paralelogramos crescerá nessa mesma razão, até chegar a um número infinito.

Por consequência, a área da figura curvilínea será a própria área dos paralelogramos inscritos e circunscritos.

Newton estende a ideia para paralelogramos de larguras desiguais, afirmando que se essas larguras forem diminuídas ao *infinitum,* também a área da figura plana será a dos paralelogramos (LEMA III). A partir desses lemas, ele apresenta algumas proposições, que são:

Corolário I – Assim, a soma final daqueles paralelogramos evanescentes coincidirá em todas as partes com a figura curvilínea[12].

A palavra evanescente, segundo a tradução usada[13], é entendida por quantidades tão pequenas quanto se queira, isto é, infinitesimais.

À medida que a largura dos paralelogramos for reduzindo e, ao somar os paralelogramos de largura infinitesimal, o que coincidirá com a área da figura curvilínea.

Corolário II – A figura retilínea limitada pelas cordas dos arcos evanescentes ab, bc, cd, etc., coincidirá finalmente, ainda mais, com a figura curvilínea[14].

Assim, à medida que a largura dos paralelogramos aKbl, bLcm, cMdn etc, que completam a figura curvilínea, for reduzida, os arcos que formam as suas diagonais vão reduzindo infinitamente até se tornarem retilíneos, contribuindo para que as figuras se tornem iguais.

Corolário III – E da mesma forma, a figura retilínea circunscrita, limitada pelas tangentes dos mesmos arcos[15].

Da mesma forma, as bases superiores dos paralelogramos circunscritos, ao serem reduzidos ao infinito, coincidirão com a figura curvilínea.

Corolário IV – E, portanto, essas figuras finais (com relação a seus perímetros acE) não são retilíneas, mas limites curvilíneos de figuras retilíneas[16].

[12] Ibidem p.72
[13] Tradução de responsabilidade da edusp-vários tradutores.
[14] Ibidem p.73
[15] Ibidem p.73
[16] Ibidem p.73

Os segmentos das figuras, que são retos no início e que no final aparentemente se tornam curvos, deixando de ser retilíneos, são, na realidade, limites curvilíneos das figuras retilíneas.

A partir da análise dos *Principia*, apresentaremos duas tarefas, que serão resolvidas utilizando alguns argumentos desenvolvidos por Newton, com o objetivo de encontrar área abaixo de gráfico. No final, faremos uma breve análise das tarefas, mobilizando conceitos da TAD. Sendo que para a melhor visualização da resolução dessas tarefas, será usado o *software* de geometria dinâmica Geogebra.

Tarefa (**T**): utilizando método da primeira e última razões de quantidades, desenvolvido por Newton, calcule a área aproximada sob o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x$, no intervalo [0,4].

Para resolver **T,** iremos utilizar o **Lema II,** que demonstra que o método da primeira e última razões de quantidades determina a área de uma curva.

Assim, segundo Newton, devemos proceder da seguinte maneira:

1- Desenhar um número qualquer de paralelogramos de mesma base inscritos nesta curva.

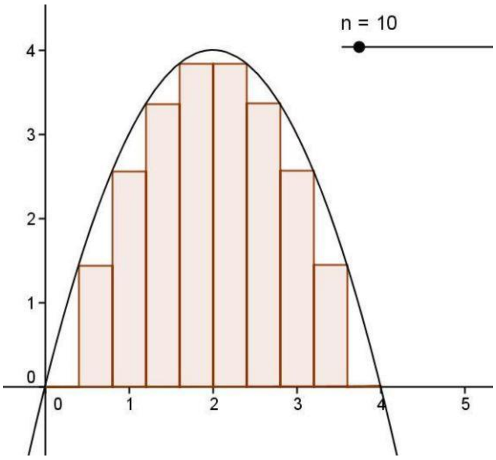

Figura 3.

Paralelogramos inscritos no gráfico da função (Geogebra.org)

Usando o botão deslizante, nota-se que se o número de paralelogramos inscritos é igual a 8, e, efetuando a soma das áreas, temos:

S_1= 8,96 unidades de área (u.a)

2- Com a ajuda de outros paralelogramos com a mesma base do item 1, circunscrever a figura curvilínea.

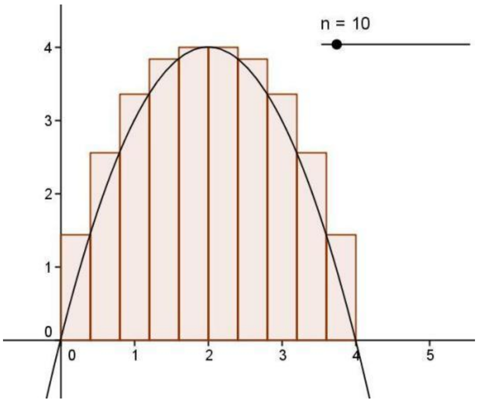

Figura 4.

Paralelogramos circunscrito ao gráfico da função (Geogebra.org)

Repetindo o procedimento com o botão deslizante, quando o número de paralelogramos circunscritos for igual, é igual a 10, e, efetuando a soma das áreas, temos:

S_2 = 12,16 u.a.

Repetindo os procedimentos do **Lema II**, mas, no caso, com um aumento do número de paralelogramos, temos:

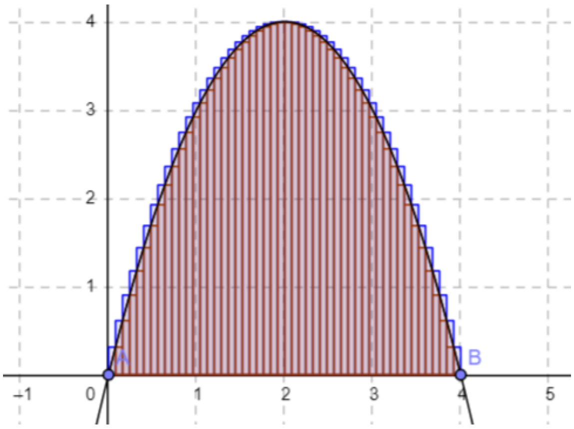

Figura 5.

Aumentando para 50 o número de paralelogramos (Geogebra.org)

Aumentando o número de paralelogramos para 50, temos as seguintes somas das áreas:

S_1= 10,34 u.a.

S_2= 10,98 u.a.

Aumentando o número de retângulos para 1000, temos as seguintes somas das áreas

S_1= 10,66 u.a.

S_2= 10,66 u.a.

Pelo **Corolário I** – Assim, a soma final daqueles paralelogramos evanescentes coincidirá em todas as partes com a figura curvilínea.

Logo, a área aproximada sob o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x$, no intervalo [0,4], será 10,66 u.a.

Apesar de o método da primeira e última razões de quantidades ser usado nos *Principia*, para calcular a área abaixo de uma curva, podemos estender a ideia e aplicá-lo para calcular a área abaixo de gráfico de qualquer função. Na tarefa a seguir, usaremos o método para calcular a área abaixo de uma reta.

Tarefa **(T)** - Utilizando o método das razões de igualdade, calcule a área aproximada abaixo do gráfico da função $f(x)= x+1$ no intervalo [-1,3]

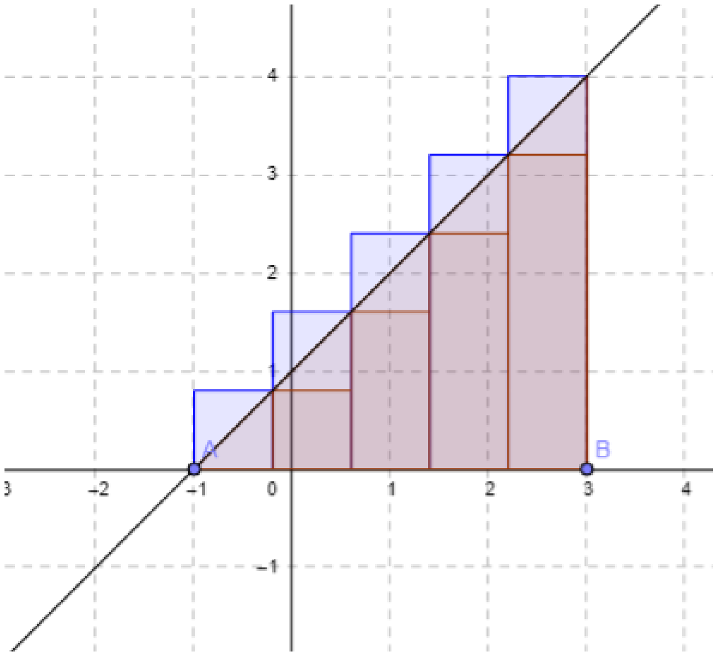

Figura 6.

Cálculo da área no intervalo [-1,3] (Geogebra.org)

Aplicando o **Lema II,** e realizando a soma das áreas dos paralelogramos circunscritos e inscritos, temos:

S_1 = 9,6 u.a.

S2= 6,4 u.a.

Aumentando para 50 o número de paralelogramos, e realizando a soma das áreas dos paralelogramos circunscritos e inscritos, temos:

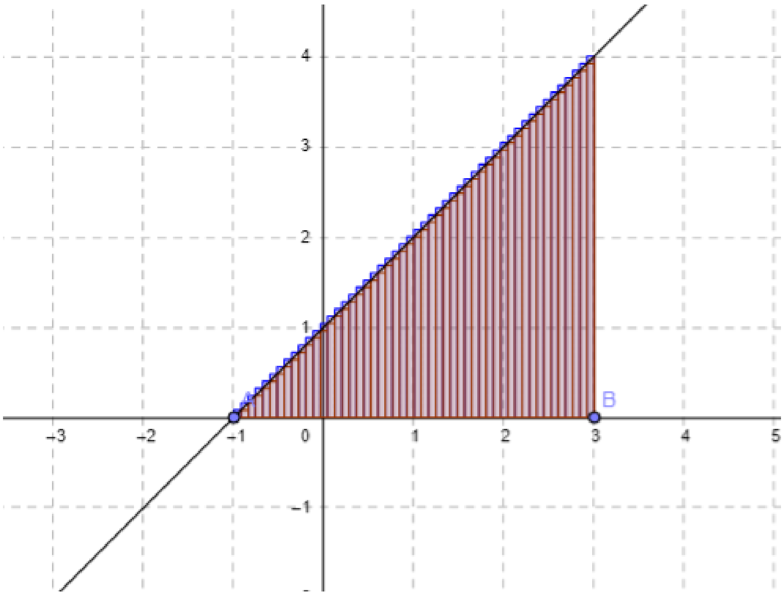

Figura 7.

Soma das áreas do paralelogramo circunscritos e inscritos (Geogebra.org)

S_1 = 8,1 u.a.

S_2 = 7,8 u.a.

Aumentando o número de retângulos para 1000, temos as seguintes somas das áreas:

$S_1 = S_2$ = 8 u.a.

Aplicando o **Corolário I**, temos:

S = 8 u.a. (área abaixo do gráfico)

Análise da tarefa:
(T): Calcular a área abaixo do gráfico de uma função polinomial do segundo grau em um determinado intervalo.
(T): Calcular a área abaixo do gráfico de uma função polinomial do primeiro grau em um determinado intervalo.
Técnica (**τ**): Método da primeira e última razões de quantidades
Discurso teórico/tecnológico [**θ/Θ**]: Seguindo o Lema II dos *Principia*, para se calcular a área abaixo de uma curva, é necessário somar a área de paralelogramos inscritos e circunscritos nela. Utilizando o método da primeira e última razões de quantidades, constatou-se que, quanto maior o número de paralelogramos, mais precisa será a área. E que a soma da área dos paralelogramos inscritos e circunscritos, tendem a ser iguais, conforme aumenta a quantidade de paralelogramos, e suas bases superiores passam a ser interpretadas como parte da curva do gráfico, indo ao encontro dos Corolário I,II,III e IV. Logo, pode-se concluir que a área de qualquer gráfico é a própria área da soma dos paralelogramos, sejam eles inscritos ou circunscritos ao gráfico.

Figura 8.

*Análise de **T** a luz da TAD*

Considerações finais

A resolução da tarefa, utilizando o cálculo de Newton, mostra que ele permite a solução de problemas que envolvem a área sob uma curva, como é o caso das funções polinomiais. Quando Newton publicou os seus *Principias*, a ideia de função moderna não existia e seu objetivo principal era calcular áreas de corpos em movimento, mas a tarefa (**T**) mostra que seus procedimentos podem ser utilizados para encontrar áreas abaixo de gráficos de funções.

A tarefa (**T**) nos mostra que procedimentos utilizados por Newton para o cálculo de área como o uso dos "métodos da primeira e última razões de quantidades", o Lema II e os Corolários são ferramentas que, ao passarem por um processo de transposição didática, são uma alternativa para o MED em vigor, que usa o cálculo de Leibniz.

Por fim, ao apresentar a solução da tarefa (**T**) por meio de técnicas e discursos teórico-tecnológicos utilizando o cálculo de Newton à luz da TAD propomos um MEA para o ensino de cálculo para os cursos de graduação em Matemática.

Referências

Alfonso-Goldfarb, A. M. (2004). *O que é História da Ciência*. Editora Brasiliense.

Almouloud, S. A. (2010). *Fundamentos da didática da matemática*. Editora UFPR.

Andrade, R. C. D. (2012). A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores: o caso da geometria analítica.

Baron, M. E., & Bos, H. J. M. (1985). *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo*. UnB.

Farras, B. B., Bosch, M., & Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática The three dimensions of the didactical problem of mathematical modeling. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*(1).

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. *Monografía del seminario matemático García de Galdeano*, *29*.

Bosch, Mariana, Un Punto De Vista Antropologico: La Evolución De Los "Instrumentos De Representación" En La Actividad Matemática (Ponencia en el Seminario de Investigación I sobre Representación e Comprensión). IV Simposio – SEIEM – Huelva, España 2000. http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin11.htm

Chevallard, Y., & Johsua, M. A. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. In *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado* (pp. 196-196).

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Cohen, I. B. Parte 6: O Sistema do Mundo. In: I. B. Cohen, & R. S. Westfall. Newton: textos, antecedentes, comentários. Tradução Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto: EDUERJ, 2002, p. 309-362.

Corazza, S. M. (2002). Labirintos da pesquisa, diante dos ferrolhos. *Caminhos investigativos: novos olhares na pesquisa em educação*, *2*, 105-131.

Delachet, André. A análise matemática**.** São Paulo: DIFEL, 1967. 118 p. (Coleção "Saber atual").

Farras, B. B., Bosch, M., & Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática The three dimensions of the didactical problem of mathematical modeling. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*(1).

Figueroa, T. P., & Almouloud, S. A. (2018). Reflexões sobre um Modelo Epistemológico Alternativo (MEA) considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático limites de funções Reflections on an Epistemological Model Alternative (MEA) considering the analyzes of the institutional relations about the mathematical object limits of functions. *Educação Matemática pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP*, *20*(3).

Mateus, P. (2007). Cálculo diferencial e integral nos livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica.

Meneghetti, R. C. G., & Bicudo, I. (2002). O que a história do desenvolvimento do cálculo pode nos ensinar quando questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *2*(3), 103-118.

Newton, I., Cohen, IB, & Whitman, A. (1999). *The Principia: princípios matemáticos da filosofia natural*. Univ of California Press.

Ordem, J. (2010). Prova e demonstração em Geometria: uma busca da organização Matemática e Didática em Livros Didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique.

Pérez, J. G. (2013). La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (3), 69-87.