ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i1p336-384

Compreensão de conceitos de derivada de estudantes de licenciatura em matemática de três instituições interioranas do estado do Paraná

Understanding of derivative concepts by undergraduate mathematics students from three inland institutions in the state of Paraná

Comprensión de conceptos derivados de la licenciatura en matemáticas estudiantes de tres instituciones del interior del estado de Paraná

Compréhension des concepts dérivés des étudiants en mathématiques de trois institutions de l'intérieur de l'état du Paraná

Jorge Fernandes de Lima Neto[1]
Doutor em Matemática
Universidade Federal do Amazonas - UFAM, Brasil
https://orcid.org/0009-0008-3134-4865

Tiago Emanuel Klüber[2]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, Brasil
Doutor em Educação Científica e Tecnológica
https://orcid.org/0000-0003-0971-6016

Resumo

A aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão e elaboração de significados concernentes aos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Vários documentos oficiais brasileiros enfatizam que o enfoque à compreensão deverá permear a "formação inicial e continuada" de professores ou educadores, indicando que formação deve ter em sua pauta estudos e práticas sobre o tema. Isso nos levou interrogar: "qual a compreensão dos conceitos de derivada de uma variável de estudantes de Licenciatura em Matemática de universidades do oeste[3] do Paraná?" Os sujeitos investigados são oriundos de três *campi* universitários do interior do Paraná. O referencial teórico de Richard Skemp foi assumido para a produção das avaliações e estudo dos dados da pesquisa. Foram elaborados quadros analíticos próprios a partir das respostas aos questionários e entrevistas individuais. A análise evidenciou, segundo critérios estabelecidos, falhas e fracassos na compreensão desses conceitos, indicando fortes indícios de uma aprendizagem não duradoura.

[1]jorge@ufam.edu.br
[2]tiago.kluber@unioeste.br
[3]O primeiro autor estava afastado para pós-doutorado na Unioeste sob supervisão do segundo autor, cujo projeto de pesquisa resultou neste artigo.

Palavras-chave: Compreensão instrumental, Compreensão relacional, Compreensão lógica, Formação inicial de professores, Derivadas.

Abstract

Learning mathematics is intrinsically related to understanding, i. e. the apprehension and elaboration of meanings concerning mathematical objects, without neglecting their applications. Several official Brazilian documents emphasize that the focus on understanding should permeate the "initial and continuing training" of teachers or educators, indicating that training should have studies and practices on the subject on its agenda. This led us to ask: "What is the understanding of the concepts of derivative of a variable among mathematics undergraduate students at universities in western Paraná?" The subjects investigated come from three university campuses in the interior of Paraná. Richard Skemp's theoretical framework was used to produce the evaluations and study the research data. Analytical tables were drawn up based on the answers to the questionnaires and individual interviews. The analysis showed, according to established criteria, failures and shortcomings in the understanding of these concepts, indicating strong signs of non-lasting learning.

Keywords: Instrumental understanding, Relational understanding, Logical understanding, Initial formation of the teacher, Derivatives.

Resumen

El aprendizaje de las matemáticas está intrínsecamente relacionado con la comprensión, es decir, con la aprehensión y elaboración de significados relativos a los objetos matemáticos, sin descuidar sus aplicaciones. Varios documentos oficiales brasileños destacan que el enfoque en la comprensión debe impregnar la "formación inicial y continua" de los profesores o educadores, indicando que la formación debe tener en su agenda estudios y prácticas sobre el tema. Esto nos llevó a preguntarnos: ¿Cuál es la comprensión de los conceptos de derivada de una variable entre los estudiantes de pregrado en Matemáticas de las universidades del oeste de Paraná? Los sujetos investigados provienen de tres campus universitarios del interior de Paraná. Se utilizó el marco teórico de Richard Skemp para elaborar las evaluaciones y estudiar los datos de la investigación. Se elaboraron cuadros analíticos a partir de las respuestas a los cuestionarios y de las entrevistas individuales. De acuerdo con los criterios establecidos, el análisis reveló fallas y deficiencias en la comprensión de estos conceptos, indicando fuertes señales de aprendizaje no duradero.

Palabras clave: Comprensión instrumental, Comprensión relacional, Comprensión lógica, Formación inicial del profesorado, Derivada.

Résumé

L'apprentissage des mathématiques est intrinsèquement lié à la compréhension, c'est-à-dire à l'appréhension et à l'élaboration de significations concernant les objets mathématiques, sans négliger leurs applications. Plusieurs documents officiels brésiliens soulignent que l'accent mis sur la compréhension devrait imprégner la "formation initiale et continue" des enseignants ou des éducateurs, ce qui indique que la formation devrait mettre à l'ordre du jour des études et des pratiques sur le sujet. Cela nous a amenés à poser la question suivante : « Quelle est la compréhension des concepts de la dérivée d'une variable parmi les étudiants de premier cycle en mathématiques dans les universités de l'ouest de l'État du Paraná ? » Les sujets étudiés proviennent de trois campus universitaires de l'intérieur du Paraná. Le cadre théorique de Richard Skemp a été utilisé pour réaliser les évaluations et étudier les données de la recherche. Des tableaux analytiques ont été élaborés à partir des réponses aux questionnaires et des entretiens individuels. Selon les critères établis, l'analyse a révélé des échecs et des lacunes dans la compréhension de ces concepts, indiquant des signes forts d'apprentissage non durable.

Mots-clés : Compréhension instrumentale, Compréhension relationnelle, Compréhension logique, Formation initiale de l'enseignant, Dérivées.

Compreensão de conceitos de derivada de estudantes de licenciatura em matemática de três instituições interioranas do estado do paraná

O Brasil experimenta muitas transformações na educação desde 1996, ano da sanção da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB (Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, 1996). Essas transformações foram e ainda são motivadas por vários documentos emitidos pelo Ministério da Educação (MEC), orientados pela LDB, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998); mais de 30 resoluções emitidas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE); e, recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018).

Essas normativas e orientações baseada**s** na LDB, além de regulamentar junto às escolas, às secretárias de educação, à sociedade, o direito à educação garantido pela constituição de 1988, também vêm para nortear a atuação do professor em sala de aula.

Os PCN "Visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar [...]" (Brasil, 1998, p. 15), e a BNCC "[...] define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver [...] ao longo da Educação Básica"(Brasil, 2018, p. 7). Estes documentos diferem das outras resoluções do CNE que em geral tratam de questões administrativo-políticas, pois são um referencial para a prática do professor em sala de aula. Como decorrência, ambos os documentos enfatizam que essa prática solicitada influenciará a formação inicial e continuada de professores (Brasil, 1998) ou em terminologia mais recente, os educadores (Brasil, 2018). Um dos temas relevantes à formação de professores ou educadores enfatizado nos documentos oficiais é a compreensão, pois de acordo com a BNCC "Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações" (Brasil, 2018, p. 276). A falta de compreensão já foi citada em um documento oficial do MEC como um dos motivos de retenção de estudantes: "Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão (Brasil, 1998, p. 19).

O termo compreensão, ligado à aprendizagem de conceitos de matemática, aparece mais de 90 vezes nos PCN de Matemática (Brasil, 1998) (Brasil, 2006) (Brasil, 2000) e mais de 30 nos capítulos de matemática da BNCC (Brasil, 1998), conforme nossa análise do documento. Isso nos indica que a compreensão é um tema central nos cursos de formação inicial de professores de matemática, portanto, deve estar em pauta tanto nas práticas pedagógicas quanto em investigações.

Pelo exposto, o professor de matemática, ao sair da universidade deve ter compreensão dos conceitos que ele irá abordar com seus estudantes. Essa exposição sobre os documentos oficiais e a reflexão sobre os seus desdobramentos na formação inicial dos professores na licenciatura, leva-nos a pensar e refletir sobre a compreensão dos estudantes de Licenciatura acerca dos conteúdos de matemática apreendidos durante o curso de Matemática.

No entanto, falar em compreensão é algo amplo, uma vez que há diferentes teorias que a estudam, como por exemplo, Anderson *et al* (2001, p. 31), que revisaram a Taxonomia de Bloom (1956), e assumem que compreensão é "Construir significado a partir de mensagens instrucionais, incluindo comunicação oral, escrita e gráfica[4]". Por isso, para além de teorias mais gerais, é necessário pensar de maneira situada a compreensão matemática. Neste artigo, em decorrência do estudo de pós-doutoramento do primeiro autor, assumimos a teoria de Skemp (1987) que diz haver três tipos: **compreensão instrumental**, **compreensão relacional e compreensão lógica[5].** Essa teoria foi assumida em pesquisas internacionais no Ensino Superior, como Weber (2002) e Keene et al. (2011).

Para Skemp (1987) a compreensão relacional a mais importante dentre elas, pois, segundo depreendemos de sua teoria, confere sentido à compreensão instrumental para a devida operação e, também à compreensão lógica para o registro adequado dos conceitos matemáticos.

Dada a relevância deste tema, tanto em âmbito nacional quanto internacional, consideramos pertinente perseguirmos o fenômeno da compreensão matemática dos estudantes de Licenciatura em Matemática. Porém, foi necessário delimitar a abrangência, tanto em termos do tempo para a realização da pesquisa, quanto dos sujeitos significativos participantes da pesquisa, bem como a cobertura espaço-geográfica.

Para evitar o esvaziamento da produção dos dados, levamos em conta a alta evasão dos cursos de licenciatura (Brasil, 2022, p. 86), pois disciplinas de semestres finais em geral têm poucos estudantes, e nos concentramos em uma disciplina que segundo as diretrizes do MEC (Brasil, 2001) é de conteúdo obrigatório, e que, em geral, o estudante de licenciatura deve cursar, no seu primeiro ano de universidade, ainda que existam exceções. Escolhemos a disciplina que, de acordo com as diretrizes nacionais, contém em sua ementa os conceitos de derivadas (Brasil, 2001), (Brasil, 2003).

---

[4] UNDERSTAND – construct meaning from instructional messages, induding orall, written, and graphic communication.

[5] Grifo nosso

Considerando os aspectos legais, teóricos e experienciais, uma vez que atuamos na licenciatura, tornou-se pertinente indagar: qual a compreensão dos conceitos de derivada de uma variável de estudantes de Licenciatura em Matemática de universidades do oeste do Paraná?

É importante destacar que a pesquisa não buscou avaliar metodologias de ensino, nem atuação docente ou currículos e nem mesmo apontar políticas educacionais ou condições socioeconômicas que levam os estudantes de licenciatura a compreenderem ou não os conceitos. Queremos, sim, explicitar a compreensão deles, articulando-a aos conceitos dos autores citados acima, sob a regência dos currículos oficiais vigentes em nosso país, e, explicitar o sentido da compreensão destes estudantes e refletir sobre ela no contexto em que os dados foram produzidos.

Esse trabalho não se esgota aqui. É só o princípio, claro que podemos investigar a compreensão de outros conteúdos que fazem parte da formação inicial do professor de matemática. Então há espaço para replicação deste projeto, observando outros assuntos importantes na formação do professor de matemática.

Problematização: da reprovação aos estudos sobre a compreensão

Publicou-se e ainda se publica muito sobre os problemas de ensino e aprendizagem no Ensino Superior Brasileiro. Alguns desses, como Baruffi (1999), Rezende (2003), Torres e Giraffa (2009), Trevisan e Mendes (2018), Pinheiro (2022), preocuparam-se em geral com problemas no ensino de cálculo; ou Pinheiro e Boscarioli (2022) que fizeram uma revisão da literatura procurando metodologias que diminuíssem as reprovações no ensino de cálculo em cursos de engenharia. Todos observando os índices de reprovação como motivação para sua investigação e depois propondo mudanças nas abordagens de ensino em sala de aula com resultados promissores; mas todos esses trabalhos relatam em seus círculos de problemas "a falta de compreensão de conceitos".

Aqui não nos deteremos nos índices de reprovação, pois a importância dada à compreensão de conceitos por vários autores, desde os anos 1970 e ênfase de mais de 40 anos dos documentos do governo brasileiro desde os anos 1980, incentivou-nos a explicitar, questionando "in loco", por meio desta pesquisa, o que nossos possíveis futuros professores de matemática (os que estão nos cursos de licenciatura) compreenderam dos conceitos de Cálculo, particularmente de derivadas.

Nesse sentido é relevante mencionar a conferência de Tulane (1986 – EUA), exclusiva para tratar dos problemas de ensino de Cálculo, que colocou como um dos objetivos para o ensino de cálculo “Desenvolver nos estudantes a compreensão dos conceitos” (DOUGLAS, 1986, p. xvi). Inclusive há autores de livros didáticos que seguiram as recomendações dessa conferência como (Hughes-Hallett et al., 2013) e (Stewart, 2006); este último se tornando “best-seller” nos EUA, número 1 no Brasil (www.amazon.com.br) e reproduzidos em diversos países.

A problematização acerca da compreensão dos estudantes de licenciatura sobre conceitos do cálculo, conduziu-nos à pergunta que já explicitamos: qual a compreensão dos conceitos de derivadas os estudantes de Licenciatura em Matemática apreendem durante seu curso? E a partir dela explicitamos os objetivos da pesquisa.

De nossa pergunta de pesquisa, decorre outro questionamento: por que a aprendizagem baseada na compreensão é tão importante? Além daquilo que é preconizado nos documentos oficiais do entendimento já explicitado de Skemp (1976, 1987), e de Anderson et al. (2001), Pozo assevera que:

> Talvez, se se repetir muitas vezes, possa se conseguir condensar e automatizar semelhante trava-língua (coisa que francamente não recomendo). Mas tal aprendizagem será pouco duradoura e pouco transferível, quer dizer, pouco eficaz [...] Necessita-se de uma aprendizagem distinta, construtiva, que se baseie em compreender o significado do material e não só em tentar “copiá-lo” literalmente com mais ou menos sorte. Essa aprendizagem construtiva será direcionada à extração do significado do texto, daí que também seja chamada aprendizagem significativa (Pozo, 2002, p. 125).

Especificamente sobre a formação de professores de Matemática no Ensino Superior, Trevisan e Mendes (2018, p. 213) destacaram que, no geral, os estudantes, ao ingressarem em diferentes cursos de graduação, apresentam uma dinâmica de estudo desenvolvida na Educação Básica, priorizando aspectos relacionados à memorização e mecanização de procedimentos, em vez de compreensão e atribuição de significado. Pesquisas, com mais de duas décadas, já discorreram sobre esse aspecto didático-pedagógico, conforme indicado em Barufi (1999):

> A fim de minimizar o insucesso na construção do conhecimento significativo, a saída, muitas vezes adotada, é a de privilegiar a aplicação do cálculo, apresentando um grande número de problemas e exercícios, muitas vezes repetitivos, onde o aluno acaba memorizando, de alguma forma, processos de resolução. Neste sentido, reduz-se a ideia, o conceito, ao algoritmo, e sobra aquela eterna pergunta dos estudantes, não respondida e “odiada” pelos professores: Para que serve isso? (Barufi, 1999, p. 162).

Skemp (1987), diferentemente de Trevisan e Mendes (2018) e Barufi (1999), considerava que memorização, mecanização de procedimentos e processos de resolução como um tipo de compreensão; para ele, é um tipo de compreensão, porém, instrumental. Certamente, é um nível de compreensão que, se isolado, é mínimo e muitas vezes inerte, pois se apega às regras e os procedimentos para resolução de problemas específicos, portanto, sem atribuição de sentido mais amplo, por ser apenas "operacional".

Para Anderson et al. (2001), que revisaram a Taxonomia de Bloom (1956), compreensão é "construir significado a partir de mensagens instrucionais, incluindo comunicação oral, escrita e gráfica". De certo modo, os conceitos de compreensão de Skemp (1987) e Anderson et al. (2001) possuem uma interseção nas suas esferas de significado, pois os termos (mensagens instrucionais; lembrar regras e aplicá-las; construir significado; capacidade de deduzir), presentes em seus respectivos conceitos, ocorrem matematicamente em uma dimensão de significação comum a ambos.

Cabe destacar que Pozo (2002) também não dispensa copiar com o objetivo de memorizar, mas enfatiza que devemos ir além disso para obtermos uma compreensão, pois é insuficiente permanecer neste nível. Ele diz que "Quanto mais profunda ou significativamente se processa e se aprende um material, mais duradouros e generalizáveis serão seus resultados. Compreender é a melhor alternativa à repetição" (Pozo, 2002, p. 210). Da mesma maneira, entendemos que "Os objetivos da aprendizagem relacional são de longo prazo" [...] (Skemp, 1987, p. 169).

Especificamente sobre o nosso referencial teórico, de acordo com Skemp (1987, pp. 164-166), a compreensão em matemática se divide em três tipos que são inter-relacionados:

> [6]**Compreensão instrumental** é a habilidade de lembrar uma regra e aplicá-la para resolver um tal problema sem saber o porquê a regra funciona.
> **Compreensão relacional** é a capacidade de deduzir regras ou procedimentos específicos a partir de relações matemáticas mais gerais.
> **Compreensão lógica** é a capacidade de conectar o simbolismo e a notação matemática com ideias matemáticas relevantes e de combinar essas ideias em cadeias de raciocínio lógico (Skemp, 1987, p. 166) (tradução nossa).

Essas ideias despertaram interesse de pesquisadores em ensino de matemática universitária. Weber (2002) preocupado com a dificuldade de seus estudantes de graduação em construir demonstrações de proposições sobre isomorfismos de grupos, sabendo que essa habilidade é importante em matemática pura, investigou um pequeno grupo de estudantes de

[6]**Instrumental understanding** is the ability to apply an appropriate remembered rule to the solution of a problem without knowing why the rule works.
Relational understanding is the ability to deduce specific rules or procedures from more general mathematical relationships.
Logical understanding is the ability to connect mathematical symbolism and notation with relevant mathematical ideas and to combine these ideas into chains of logical reasoning.

graduação e de doutorado. Ele adaptou para sua pesquisa os dois primeiros tipos de compreensão dados por Skemp (1987) para avaliar a compreensão de conceitos de teoria dos grupos e concluiu que os graduandos, mesmo tendo a compreensão lógica e instrumental de matemática necessária para construir tais demonstrações, fizeram poucas delas, enquanto os estudantes de doutorado demonstraram todas as proposições. Ao analisar as demonstrações, ele concluiu que doutorandos usaram regularmente sua compreensão relacional para guiar suas tentativas de demonstrações, enquanto os graduandos raramente a usaram. Ele observou que só a compreensão instrumental os deixa limitados quanto ao que eles podem provar e talvez a compreensão relacional seja necessária para uma demonstração sem dificuldades.

Keene et al. (2011) já cientes que a compreensão relacional de conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) é muito importante para que a aprendizagem seja duradoura, apostou que estudantes podem aprender a calcular soluções de uma EDO com profundo conhecimento conceitual (compreensão instrumental e relacional). Eles levaram em consideração que há uma significativa tensão entre aprendizado baseado na compreensão (relacional) dos conceitos de EDO e a apreensão de um conjunto de algoritmos para resolver exercícios padrões de EDO (instrumental), pois os estudantes tendem a gastar mais tempo tentando compreender os algoritmos. Então eles desenvolveram uma estrutura de ensino para compreensão de equações diferenciais ordinárias (EDO) e suas soluções que mesclando ensino para compreensão conceitual e ensino de procedimentos ou algoritmos. Paralelamente, também, desenvolveram um conjunto de itens de avaliação que os ajudaram a entender o que os estudantes estão aprendendo. Baseados nessa avaliação eles incorporaram novas perguntas a dicas com os itens de avaliação para ajudar os alunos a aprofundarem sua compreensão relacional.

Embora não recorramos às ideias de Keene e usemos algumas idéias da metodologia de Weber neste artigo, os citamos porque eles indicam que há preocupação com o ensino sem ênfase na compreensão no Ensino Superior. Nossa pesquisa avaliou a compreensão de estudantes à luz das definições de Skemp e por isso precisamos dar atenção ao seu alerta:

> [...] somos incapazes de observar diretamente os sentimentos e esquemas (mentais) dos nossos pupilos, olhando para seu comportamento. Aceitamos como uma evidência que A compreende X o fato de que A aplica X em situação (em de maior ou menor grau) diferente do qual foi aprendido (Skemp, 1987, p. 166)[7]

[7][...] we are unable to observe our pupils' feelings and schemas directly and look for confirmatory behavior. As evidence that A understands X, we accept the fact that A applies X in situations different (in greater or less degree) from that in which it was learned (Skemp, 1987, p. 166).

Como, as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática (DCN-M), Bacharelado e Licenciatura versam que os currículos devem promover a aquisição de várias competências e habilidades pelos estudantes, concordamos que é necessário desenvolver a "*capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão"* (Brasil, 2001, p. 3). Sob esse entendimento e para incluir lacunas (aprendizado parcial) no escopo da análise, decidimos classificar suas respostas não só como sucesso ou fracasso, mas, em três níveis, (Tabela 1), na qual combinamos o alerta e os tipos de compreensão, ambos de Skemp, com a habilidade exigida na DCN-M.

Tabela 1.

Classificação dos níveis compreensões

Classificação do nível de compreensão (evidência de**)**	**Descritor**
Sucesso	Quando o estudante "*expressar-se escrita ou oralmente, com clareza e precisão*" de acordo com a literatura de Cálculo vigente[8].
Falha	Quando o estudante "*expressar-se escrita ou oralmente, mas sem clareza ou precisão*" de acordo com a literatura de Cálculo vigente.
Fracasso	Quando não houver resposta ou houver resposta aleatória declarada (declarou que chutou a resposta), ou resposta evasiva, ou ainda resposta incompatível com a literatura de Cálculo vigente.

Metodologia: Sobre o *modus operandi*

A produção de dados da pesquisa procedeu-se por meio da aplicação de questionários (avaliações de matemática) e entrevistas à estudantes de licenciatura em matemática de universidades de três campi de universidades do oeste do Paraná. Solicitamos previamente aos coordenadores de curso turmas de estudantes que cursaram a primeira disciplina que envolvia conteúdos de "derivada de funções de uma variável real" (doravante denominada disciplina de Cálculo) mesmo que houvesse reprovados. Cada coordenador(a) de cada campus escolheu uma turma dentre as mais numerosas e negociou, com seu respectivo docente, uma de suas aulas para realização da pesquisa. Assim, aplicamos os questionários e realizamos as entrevistas com turmas cedidas por docentes, nos seus respectivos horários, em datas agendadas pelos coordenadores. Ressaltamos que os questionários não foram disponibilizados previamente aos estudantes, evitando a contaminação dos resultados.

[8] Há uma vasta literatura de cálculo, escolhemos Stewart (2013) e Hughes-Hallet et al. (2013).

Marcada a data, no dia da aplicação começamos explicando-lhes em que consistia no evento e que sua participação era espontânea. Solicitamos que não conversassem durante a aplicação dos questionários e, assim que o respondessem nos acompanhassem em seguida para uma entrevista. Houve desistências. A entrevista foi realizada em uma sala separada onde ninguém pudesse ouvir a conversa exclusiva entre cada estudante e seu entrevistador.

Não conseguimos estimar o número de desistências, pois só compareceu à aula quem estava disposto a participar do evento; o acontecimento foi avisado com antecedência; mesmo assim, após a explicação, houve desistências antes da aplicação dos questionários e antes das entrevistas. Acreditamos que aplicamos o questionário e a entrevista a um número expressivo de estudantes em cada um dos três campi visitados (7+9+9 questionários e 5+7+9 entrevistas), pois a taxa de evasão nos cursos de licenciatura é bem alta no semestre posterior à disciplina de Cálculo (BRASIL, 2022).

Metodologia: sobre as referências para formulação do questionário

Observamos que ementas das disciplinas com conteúdo de derivadas presente na maioria dos Projetos Pedagógicos dos cursos de licenciatura em Matemática, de onde investigamos a compreensão de seus estudantes, seguem a mesma sequência de conteúdo para o ensino de cálculo, ou seja, funções, limites, continuidade, derivadas e integrais; Essa, ainda é a sequência sugerida por Augutin Cachy em seu livro "*Calcul Infinitésimal*" lançado em 1823 (Grabiner, 2005, p. 78) que foi amplamente divulgada só partir de 1850 por Karl Weierstrass (Grabiner, 1983, p. 205) em suas aulas, dessa vez com a simbologia de "epsilons" e "deltas" que conhecemos hoje. Então, fizemos uma extensa busca, na biblioteca física (e alguns da virtual) da instituição onde desenvolvemos o pós-doutorado[9], por livros textos com conteúdo de derivadas que nos fornecessem questões, cujo objetivo fosse avaliar a compreensão dos estudantes. Optamos por observar o prefácio de cada uma em busca de indícios que apontassem foco na compreensão, visto que não havia tempo hábil para uma análise profunda de cada título e, também, esse não era o nosso principal foco da pesquisa. Lemos todos os prefácios dos títulos encontrados na biblioteca física (e virtual) da Unioeste em Cascavel, (Ávila, 2011), (Boulos, 2019), (Guidorizzi, 2018), (Hughes-Hallett et el., 2013), (Leithold, 1994), (Stewart, 2013), (Swokowski, 1995), entre outros e encontramos somente dois livros em português que continham objetivos explícitos concernentes à compreensão, a saber, Cálculo (Stewart, 2013)

[9]O primeiro autor é professor da UFAM e estava fastado para pós-doutorado na Unioeste sob supervisão do segundo autor.

e Cálculo de uma variável (Hughes-Hallett et al., 2009)[10]. Ambos indicaram uma base teórica explícita para a construção e organização de seus conteúdos, que a descrevemos na próxima subseção da metodologia "Sobre os autores".

As questões elaboradas envolveram duas dimensões: aquela com dados objetivos referentes aos dados socioeconômicos (apêndice A) e a parte conceitual referente às derivadas (Apêndice B). Para segunda dimensão procuramos por questões cuja resposta nos desse evidências do nível, tanto de uma só compreensão (instrumental ou relacional), quanto dessas compreensões combinadas. Escolhemos questões que permitissem avaliar somente do nível de compreensões instrumental, outras somente da compreensão relacional e algumas que ensejassem avaliar os níveis das compreensões instrumental e relacional em conjunto; nessas últimas o estudante poderia mobilizar sua compreensão relacional ou instrumental (ou ambas) do conteúdo para respondê-las (Tabela 3 – coluna 2). A compreensão lógica do estudante, em cada questão, foi avaliada de acordo com "a capacidade de conectar o simbolismo e a notação matemática com ideias matemáticas relevantes e de combinar essas ideias em cadeias de raciocínio lógico" (Skemp, 1987. p.166).

Embora todas as ementas das disciplinas de Cálculo dos *campi* visitados falassem em aplicações, não estava claro em qual área das ciências deveríamos abordá-la; por isso escolhemos e formulamos questões dissertativas e objetivas que não envolvessem aplicações extra-matemáticas. Seguimos as ideias das literaturas (Hughes-Hallett et al., 2013) e (Stewart, 2013) , pois como já dito acima, eles indicaram uma base teórica explícita para a construção e organização de seus conteúdos com foco na compreensão. Dois de seus princípios[11] [12] e as ideias de Skemp[13] sobre apreensão de conceitos nos orientaram na escolha das questões, de modo que pudéssemos avaliar o nível de cada tipo de compreensão dos estudantes em um amplo aspecto de apresentação de questões envolvendo derivadas (Tabela 3 – coluna 3). Vale salientar que avaliamos as respostas verbais através das entrevistas como explicamos na seção "Metodologia: Sobre o *modus operandi*". Assim conectamos as exigências da DCN-M com o nosso referencial teórico.

---

[10]A base teórica para a construção e organização dos conteúdos foi mais bem explicada no prefácio da edição de 2013 (Hughes-Hallet, et all, 2013).

[11] Ambos os autores de forma semelhante afirmaram no prefácio de seus livros que, quando apropriado, os temas devem ser apresentados geométrica, numericamente, algebricamente (analiticamente) e descritivamente (verbalmente ou oralmente).

[12] Um problema deve ser difícil a ponto de nos desafiar, mas não, a ponto de zombar de nossos esforços.

[13] Once the concept is formed, we may (retrospectively and prospectively) talk about example of concepts (SKEMP, 1987, p.11)

Sobre os autores das fontes que nos auxiliaram na formulação das questões sobre derivadas

James Drewry Stewart (1941–2014) foi violinista profissional e professor emérito de matemática na Universidade de McMaster no Canadá. Formou-se mestre pela universidade Stanford, Ph.D. pela Universidade de Toronto e pós doutor pela Universidade de Londres. Embora supervisionasse várias teses em sua área de pesquisa pura, análise harmônica, sua outra paixão além da música era ensinar. Sua simpatia pelos princípios da Reforma do Cálculo, elaborados pela conferência de Tulane em 1986 (Douglas, 1986, p. viii) e a influência de George Polya, durante sua graduação em Stanford, lhe estabeleceram alguns princípios filosóficos, que agregado à sua experiência em sala de aula se transformou em uma nova edição de seus primeiros livros de Cálculo. O sucesso de vendas, fez desses princípios o padrão das novas edições, como aparece no prefácio da tradução para o português da 5ª edição em 2006 (primeira no Brasil) do seu livro "Cálculo",

> A ênfase está na **compreensão** de conceitos [...] vem da Conferência de Tulane, em 1986, que formulou como primeira recomendação: **Concentrar-se na compreensão de conceitos**. [...] Tentei atingir esse objetivo por meio da Regra dos Três: "Os tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente" [...] A Regra dos Três foi expandida para tornar-se a Regra dos Quatro, enfatizando também o ponto de vista verbal ou descritivo (Stewart, 2006, p. vii) (grifo nosso).

Stewart, ainda no prefácio apresenta algumas características de seu livro; umas que são declaradamente influências filosóficas de George Polya e David Hilbert, como "as quatro etapas para resolução de problema" (Polya, 1995, pp. XII – XIII) e um trecho do discurso de abertura do II ICM[14] em 1900, "Um problema deve ser difícil a ponto de nos desafiar, mas não, a ponto de zombar de nossos esforços" (Hilbert, 1902); outras, citadas abaixo, sem fontes, mas que nos remetem às teorias de aprendizagem, indo ao encontro das seguintes características: Exercícios conceituais [...] Exercícios com dificuldade progressiva [...] Dados reais [...] Projetos [...] Resolução de problemas [...] tecnologia (Stewart, 2006, pp. ix-xi).

Deborah Hughes-Hallet (1944 –) é professora de matemática na Universidade do Arizona e professora-adjunta de políticas públicas em Harvard (Escola Kennedy). Seu principal interesse é Educação de Nível Superior. Deborah já recebeu mais de 11 prêmios e homenagens nacionais (EUA) e internacionais, por suas significativas contribuições à Educação Matemática (Hughes-Hallett, Faculty Profile, 2024), o mais recente em 2022, "*Award for Impact on the*

[14] Second International Congress of Mathematics – II ICM, aconteceu em Paris em 1900

Teaching and Learning of Mathematics" da American Mathematical Society – AMS (AMS, 2022).

Ela, junto com Andrew Gleason da Universidade Harvard fundaram, por volta de 1988, o "*Calculus Consortium for Higher Education*" que prometia inovar o currículo e a pedagogia do ensino de Cálculo nos EUA. Eles com outros 13 professores de várias universidades norte-americanas, financiados pela *National Science Foundation*, criaram um programa de ensino de cálculo. Seu programa, além do propor uma nova forma de abordagem no ensino, produziu um livro de Cálculo com foco na compreensão (Hughes-Hallett et al., Calculo, 1997).

Seu prefácio versa que o livro segue dois princípios, o primeiro é a "regra dos três", mais tarde transformada em "regra dos quatro", embora sem referência, é uma das sugestões que consta nos anais da conferência para a reforma do cálculo que aconteceu em Tulane (Douglas, 1986); o segundo foi inspirado em Arquimedes: (1) **A regra dos "quatro"**: Todo assunto deve ser apresentado de forma geométrica, numérica, algébrica e verbalmente; (2) [...] **O modo de Arquimedes**: Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos.

O livro também foi severamente criticado pelos professores de Cálculo tradicionalistas (Wilson, 1997; Klein & Rosen, 1997; Mac Lane, 1997; Knill, 2004), e elogiado ou aceito com cautela por reformistas (Wu, 1997; Mumford, 1997; Liu et al., 2009; Smoryński, 2017). A "redução do rigor" foi a principal reclamação, por tratar muitos conceitos, como por exemplo, de "limite e continuidade" apenas verbalmente e graficamente, e, na sua primeira edição sequer citar teoremas, como o teorema do valor médio (acrescentado nas edições posteriores). Os reformistas defendem-no, principalmente, por melhorar a compreensão, e as notas, dos estudantes com fraca base matemática. Embora não tenhamos dados de quão adotado é o livro do "*Harvard Calculus Consortium*" como livro didático nas universidades do EUA, sua importância se dá pela quantidade de citações em artigos sobre a Reforma do Cálculo de várias partes do mundo, já citados no *caput* deste parágrafo.

Sobre a tabulação e análise das respostas

O questionário aplicado (Apêndice B – conceitual referente às derivadas) possuía 5 perguntas dissertativas e 7 objetivas), sendo 6 delas com vários itens totalizando 30 questões a serem respondidas.

Eliminamos duas questões, objetiva nº 1 item (d) e objetiva nº 3, item (e), devido a erros de digitação percebidos somente durante a tabulação dos dados; ainda que tenhamos efetuado um piloto, não foi observada essa inconsistência. No entanto, entendemos que isso não invalidou a pesquisa, restando-nos 28 questões (11 dissertativas e 17 objetivas). Eliminamos os questionários dos estudantes que não nos concederam entrevistas e analisamos os 21 questionários restantes triangulando-os com suas respectivas 21 entrevistas, para manter a consistência analítica; classificamos os níveis de compreensão evidenciados pela resposta de cada questão de cada estudante de acordo com a tabela abaixo; em seguida fizemos a contagem da quantidade de cada código. Vale salientar que os níveis são mutuamente exclusivos; havia questões que somente respostas vindas de uma compreensão instrumental, outras que cabiam somente respostas oriundas de compreensão relacional e algumas que ambas as compreensões poderiam respondê-las.

Tabela 2.

Códigos para tabulação dos dados (pesquisa própria)

		Tipo de compreensão		
		Instrumental	Relacional	Lógica
Nível	Evidência de fracasso	10	20	30
	Evidência de falha	11	21	31
	Evidência de sucesso	12	22	32

Na tabela 3 estabelecemos, de acordo com a literatura de Cálculo, o tipo de compreensão necessária para responder cada uma das 28 questões e a forma como cada delas foi tratado nas literaturas consultadas.

Tabela 3.

Compreensão e tipo de tópico (pesquisa própria)

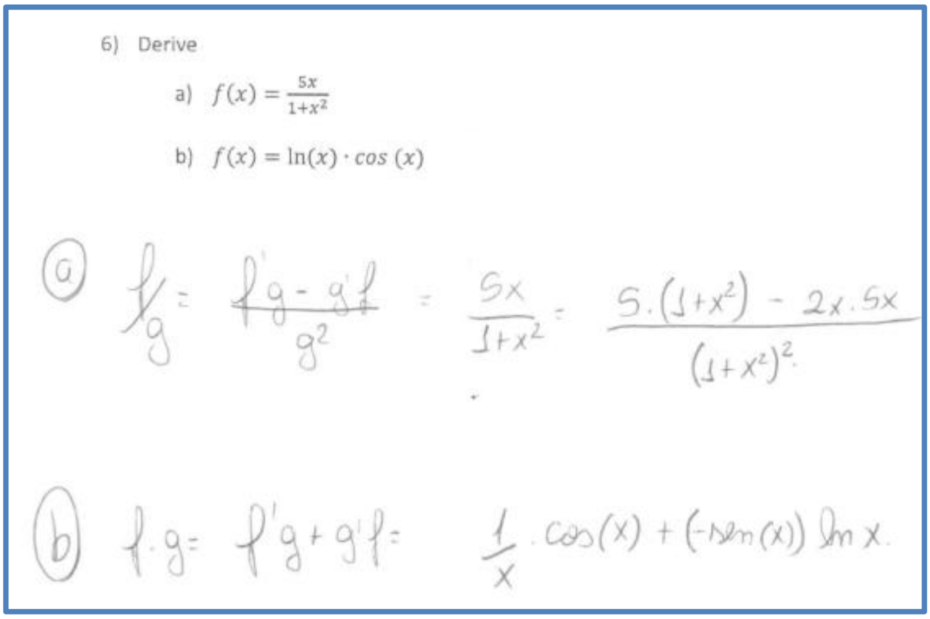
	Número e item	**Compreensão**	**Como o conteúdo foi tratada nos livros**[15]
Questões dissertativas	N° 1	Relacional	Geometricamente, algebricamente e descritivo
	N° 2	Instrumental or relacional	Geometricamente, algebricamente, numericamente e descritivo
	N° 3	Relacional	Geometricamente, algebricamente e descritivo.
	N° 4	Instrumental	Numericamente e algebricamente.
	N° 5	Instrumental e relacional	Geometricamente, numericamente, algebricamente e descritivo.

[15] Ver nota de rodapé nº 11.

	Número e item	Compreensão	Como o conteúdo foi tratada nos livros[15]
	N° 6, item (a)	Instrumental	Numericamente e algebricamente.
	N° 6, item (b)	Instrumental	Numericamente algebricamente.
	N° 7, item (a)	Relacional	Geometricamente e descritivo
	N° 7, item (b)	Instrumental ou relacional	Geometricamente e descritivo
	N° 7, item (c)	Instrumental ou relacional	Geometricamente e descritivo
	N° 7, item (d)	Instrumental ou relacional	Geometricamente e descritivo
Questões objetivas	N° 1, item (a)	Relacional	Geometricamente, algebricamente e descritivo
	N° 1, item (b)	Instrumental	Geometricamente, algebricamente e descritivo
	N° 1, item (c)	Instrumental	Geometricamente, algebricamente e descritivo
	N° 1, item (d)	**Eliminada**	**Questão eliminada**
	N° 2, item (a)	Instrumental	Numericamente e algebricamente
	N° 2, item (b)	Instrumental	Numericamente e algebricamente
	N° 2, item (c)	Instrumental	Numericamente
	N° 2, item (d)	Relacional	Geometricamente
	N° 2, item (e)	Relacional	Descritivo
	N° 3, item (a)	Relacional	Geometricamente
Questões objetivas	N° 3, item (b)	Relacional	Geometricamente
	N° 3, item (c)	Relacional	Geometricamente
	N° 3, item (d)	Relacional	Geometricamente
	N° 3, item (e)	**Eliminada**	**Questão eliminada**
	N° 4	Relacional	Geometricamente
	N° 5, item (a)	Instrumental ou relacional	Geometricamente
	N° 5, item (b)	Instrumental ou relacional	Geometricamente
	N° 5, item (c)	Relacional	Geometricamente
	N° 5, item (d)	Instrumental ou relacional	Geometricamente

A entrevista foi conduzida em seguida à finalização da aplicação do questionário, em sala exclusiva para entrevistador[16] e entrevistado, com uma única indagação: "*O que você pensou para responder essa questão?*". O estudante observava cada questão do questionário por si respondido e nos relatava o que pensou para responder cada questão. As respostas foram livres e o entrevistador começou com a indagação citada acima, nada mais falou, não interferiu, além de repetir a mesma indagação para cada questão quando necessário, e terminou a entrevista com um "muito obrigado". Obtivemos 28 respostas a cada entrevista de cada estudante, exceto por um, que respondeu só 27 (falha de gravação).

Abaixo (Figura 1, Figura 2 e Figura 3) temos um exemplo de tabulação da resposta à pergunta dissertativa nº 6 com dois itens. Essa pergunta aparece na tabulação como duas questões, identificadas como D6a e D6b.


6) Derive

a) $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$

b) $f(x) = \ln(x) \cdot cos\ (x)$

a $\frac{f}{g} = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{5x}{1+x^2} = \frac{5.(1+x^2) - 2x.5x}{(1+x^2)^2}$

b $f.g = f'g + g'f = \frac{1}{x}.\cos(x) + (-\mathrm{sen}(x))\ln x.$

Figura 1.

Trecho de um questionário – foco na compreensão instrumental

[16]As entrevistas foram feitas por três pesquisadores vinculados ao grupo de pesquisa Investigação Fenomenológica na Educação Matemática – IFEM da Unioeste.

00:02:23 Palestrante 1
E para a questão 6 o quê que você pensou?
00:02:27 Palestrante 2
Na questão 6, pelo menos no item (a).
00:02:30 Palestrante 2
Eu lembro das regrinhas, então eu sempre escrevo a elas para me nortear a regra.
00:02:36 Palestrante 2
E aí eu,
00:02:37 Palestrante 2
Fiz de acordo com a regrinha, e na (b) também, só que na (b), eu não estava com muita certeza da minha resposta.
00:02:50 Palestrante 1
E na sétima questão, o quê que você pensou para responder?

Figura 2

Trecho da transcrição de uma entrevista (estudante respondente da Figura 1)

Questão	Tipo	Dissertativa												Diss	Diss
	Origem	Questionário						Entrevista							
	ordem	D6a	D6a	D6a	D6b	D6b	D6b	D6a	D6a	D6a	D6b	D6b	D6b	D6	D6
	Avaliação	instrumental	Relacional	Lógica	instrumental	Relacional	Lógica	instrumental	Relacional	Lógica	instrumental	Relacional	Lógica	Confiança	Revisou?
		12		31	12		31	12			12			1	RNA

Figura 3

Trecho da tabela de planilha com suas devidas tabulações

Olhando primeiro para o questionário, consideramos que essas respostas estão de acordo com a literatura de Cálculo vigente no currículo brasileiro. Para nós, os itens (a) e (b) são evidências *de sucesso na compreensão instrumental* desse conteúdo, por isso demos o código 12 para ambos os itens (coluna instrumental). Aqui não cabe codificação quanto à compreensão relacional (Tabela 3 e Apêndice B), por isso deixamos o respectivo campo em branco, mas observamos que o estudante não fez a conexão do simbolismo e a notação com a ideia matemática de acordo com a literatura de Cálculo; para nós, essa resposta é uma *evidência de falha na compreensão lógica*, por isso demos a classificação 31 para ambos os itens. Agora, observando a transcrição, confirmamos a *evidência de sucesso na compreensão instrumental* desse conteúdo, mas sua fala não nos dá nenhum nível de *evidência de compreensão lógica*, por isso só preenchemos as colunas "instrumental" das colunas entrevista. Sua fala, "*não estava com muita certeza*", justifica a confiança 1; essa confiança pode estar relacionada com a *falha* *na compreensão lógica*. A questão foi revisada pelo estudante (RNA) e não foi alterada, mas essa não tinha sugestões de resposta na parte objetiva.

A penúltima coluna, é a confiança depositada na resposta (0 – chutei a resposta ou não respondi; 1 – não tenho certeza se está correta; 2 – Tenho certeza de que está correta). Na última coluna o estudante deve nos indicar se as questões dissertativas foram revisadas após resolução das questões objetivas (NR – não revisei; RNA – revisei e não alterei a resposta; RA – Revisei e alterei a resposta). Algumas questões da parte 1 (dissertativa) têm sugestões de resposta na parte 2 (objetivas); não foi dito que havia sugestões lá, o estudante deveria percebê-las. Essas duas colunas têm o objetivo de nos ajudar nas dúvidas de classificação; por exemplo, se um estudante deu uma resposta não muito clara à uma questão, (pode haver uma sugestão de resposta na parte objetiva) marcou RA e mesmo assim sua confiança é 1, isso para nós é uma evidência de falha de compreensão.

O número máximo de evidências de compreensão instrumental (número de questões em que sua resposta é uma evidência de compreensão instrumental) que um estudante pode alcançar são 16 (sucessos + falhas + fracassos) e 20 de compreensão relacional (sucessos ou falhas ou fracassos), somando um total de 16 + 20 = 36 evidências (Tabela 3). Como 7 questões admitem respostas que podem nos dar uma evidência de sucesso/falha/fracasso na compreensão instrumental ou na relacional, ou ambos (Tabela 3), isso nos diz que o número total de evidências de sucessos/falhas/fracassos na compreensão instrumental vai de 9 (16 – 7) a 16, e, o número total de evidências de sucessos/falhas/fracassos na compreensão relacional vai de 13 (20 – 7) a 20. Combinando as duas compreensões, esse número varia de 29 a 36. Vale salientar que esse número, 36, não foi alcançado. O número 29 não contradiz o número de questões, a saber 28, pois a questão dissertativa n° 5 exige *os dois tipos de compreensão para respondê-la*, portanto essa questão recebeu obrigatoriamente duas classificações (uma de instrumental e uma de relacional). Quanto à compreensão lógica, cada questão pode receber um nível de classificação; temos no máximo 28 classificações dessa compreensão para cada estudante.

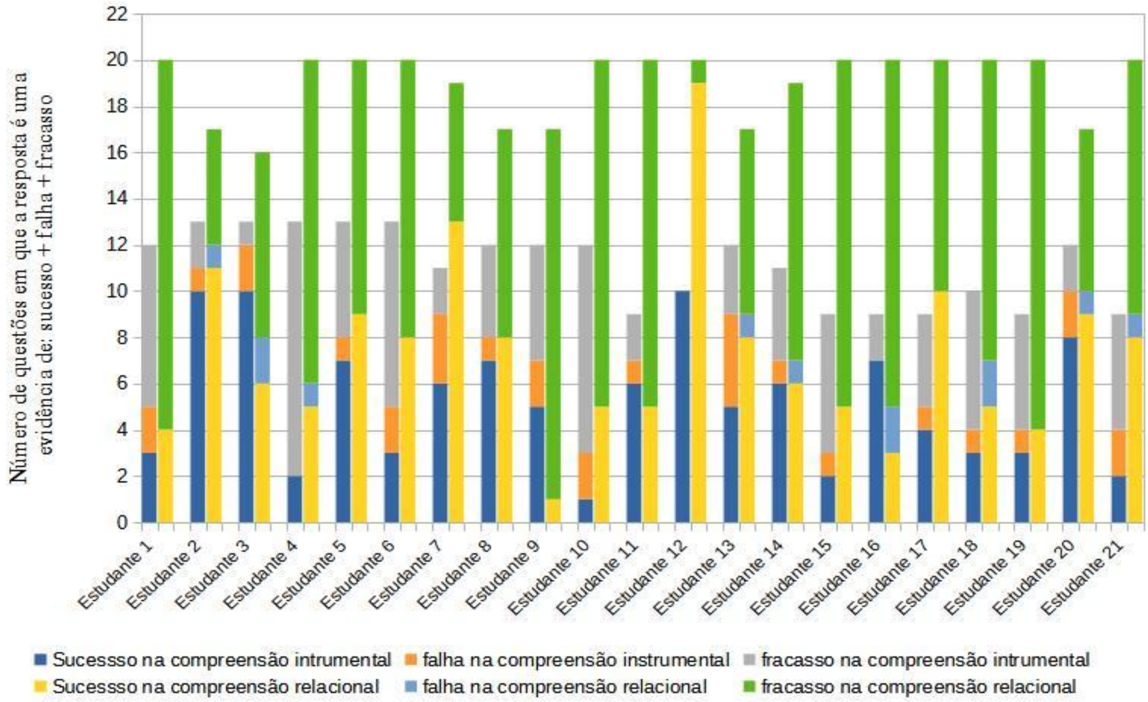


Figura 4.

Panorama dos sucessos, falhas e fracassos (questionário)

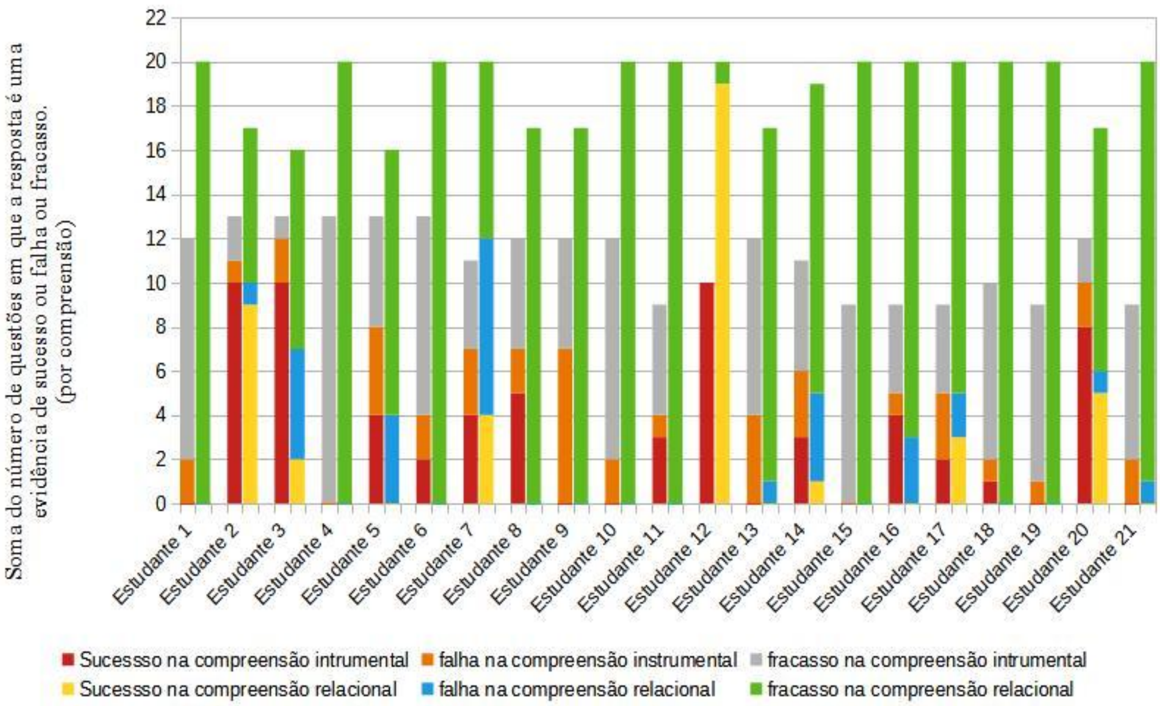


Figura 5.

Panorama dos sucessos, falhas e fracassos (transcrições das entrevistas)

Consideramos que "compreender" é ter sucesso nas compreensões relacional instrumental e lógica, e como as DCN-M, versam que os currículos devem proporcionar ao estudante a *capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão,* podemos fazer a relação: Evidência de sucesso (nas compreensões instrumental + relacional + lógica) no questionário confirmada (triangulada) pela entrevista está diretamente relacionado com a *capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão.*

Resultados

Da análise dos dados socioeconômicos

O quadro socioeconômico é relativamente equilibrado quanto ao gênero, 10 masculinos e 11 femininos. Não houve declaração de outros gêneros. Esse relativo equilíbrio permanece quando comparamos os gêneros com: estado civil, idade, zona residencial, moradia, escolaridade e reside com (Tabela 4 e Tabela 5).

Tabela 4.

Estado Civil / Idade / Zona Residencial (pesquisa própria)

Gênero	**Estado civil**		**Idade**	**Zona Residencial**	
quantidade	Solteiro	Casado	Média / desvio padrão	Urbana	Rural
Masculino – 10	8	2	(26,7)[17] / 7	9	1
Feminino – 11	10	1	(21,8)[18] / 1	10	1

Tabela 5.

Moradia / Escolaridade / Reside com (pesquisa própria)

Gênero quantidade	**Moradia**		**Escolaridade**		**Reside com**	
	Própria	Alugada	Superior incompleto	Superior completo	Parentes pais/não-pais	outros
Masculino – 10	6	4	9	1	8	2
Feminino – 11	7	4	11	0	7	4

[17] Se retirarmos dois estudantes com mais de 30 anos de idade, a média do restante é 22,4 com desvio padrão 1,3.

[18] Uma estudante preencheu todo o questionário socioeconômico exceto sua idade.

Há um pequeno desequilíbrio nos dados: fonte de renda e renda total familiar (Tabela 6); essa pequena variação de renda, declarada pelos estudantes, só nos permite afirmar que o gênero masculino tem renda maior.

Tabela 6.

Renda familiar total (pesquisa própria)

Renda	Masculino	Feminino
Até 1320,00	1	3
de 1320,00 a 3960,00	3	3
de 3960,00 a 5280,00	3	3
De 5280,00 a 13200,00	2	2
Mais de 13200,00	1	0

O desequilíbrio é maior quanto a cor; o gênero feminino é predominantemente de cor branca (Tabela 7) em relação ao masculino, para o qual há um menor desequilíbrio entre branco e preto/pardo.

Tabela 7

Renda / Cor (pesquisa própria)

Gênero	Fonte de renda		Cor	
quantidade	Pais/bolsa	Emprego/ outros	branco	Preto ou pardo
Masculino – 10	4	6	6	4
Feminino – 11	7	4	10	1

Calculamos a taxa de reprovados da primeira vez que o estudante cursou a disciplina de Cálculo (Tabela 8). Há também um equilíbrio nessa taxa, se compararmos os formatos de aulas (híbrido/remoto e presencial). Vale salientar que alguns estudantes declararam “formato presencial” em 2021/2022, final da pandemia.

Tabela 8.

Situação ao cursar pela primeira vez Cálculo

Formato	**Total que cursaram**	**Total de reprovados**	**% reprovados**
Presencial	9	4	44,4
Híbrido/remoto	12	5	41,6

Esses dados situam a produção dos dados e o contexto em que os estudantes estão imersos nos cursos de licenciatura, permitindo interpretações sobre a relação entre o seu nível de compreensão e a suas condições gerais socioeconômicas, porém, não é este o foco deste artigo.

Das evidências de compreensão instrumental e relacional

Das 629 evidências (somas de todos os sucessos/falhas/fracassos de todos os 21 estudantes) somente 6% das evidências no questionário aparece em um nível maior na entrevista para uma mesma questão (verbalizou melhor do que escreveu). A maioria, 74,1%, das evidências (sucesso/falha/fracasso) no questionário se manteve na entrevista, e em 25,3% das análises o nível cai. Isso mostra, por meio da triangulação questionário-entrevista, que a análise da entrevista confirma ou desce o nível da evidência de compreensão nas respostas das questões no questionário. Doravante calculamos todas as taxas (exceto quedas do observado no questionário para o ouvido na entrevista) com base nos números de evidência dados obtidos pela entrevista em relação ao número máximo de evidências esperado, 16 de compreensão instrumental e 20 de compreensão relacional.

Das evidências de compreensão lógica

Tivemos dificuldade em classificar as questões quanto à compreensão lógica dos estudantes, pois eles escreveram e falaram pouco de matemática no questionário e na entrevista, deixando-nos quase sem nenhuma evidência de sucesso, falha ou fracasso dessa compreensão. Como primeiro resultado, podemos dizer que nossa pesquisa não deu conta em descrever essa compreensão dos 21 estudantes pesquisados. Além disso, é possível inferir que os estudantes em geral não têm habilidades de comunicação matemática plenamente desenvolvidas em relação às ideias pertinentes ao cálculo, o que pode estar relacionado à ausência de enfoque à compreensão, que requer aspectos comunicacionais.

A análise subsequente vai tratar dos outros dois tipos de compreensão e de suas articulações.

Da Análise dos dados da compreensão instrumental

Como dito acima há 16 questões onde o estudante pode nos dar evidências do seu nível de compreensão instrumental, mas em 9 dessas exige-se a somente a compreensão instrumental para respondê-las. Para as outras questões, uma ou outra compreensão pode respondê-la. Alguns estudantes nos deram 9 evidências de compreensão instrumental (soma dos sucessos, das falhas e dos fracassos) outros nos deram até 13 evidências dessa compreensão (Figura 5).

Observamos que há 4 (quatro) estudantes que além de nos apresentarem pelo menos 8 evidências de sucesso na compreensão instrumental necessária para responderem as respectivas questões, tiveram uma queda[19] de 0% do questionário para a entrevista nas evidências de sucesso na compreensão instrumental, ou seja, todas as evidências de sucesso no questionário desses quatro se refletem na entrevista. Por outro lado, tivemos 8 que caíram 100%, ou seja, nenhuma das evidências de sucesso no questionário foi confirmada na entrevista. O restante apresentou menos de 8 evidências de sucesso; nem todas confirmadas na transcrição das entrevistas (Figura 6).

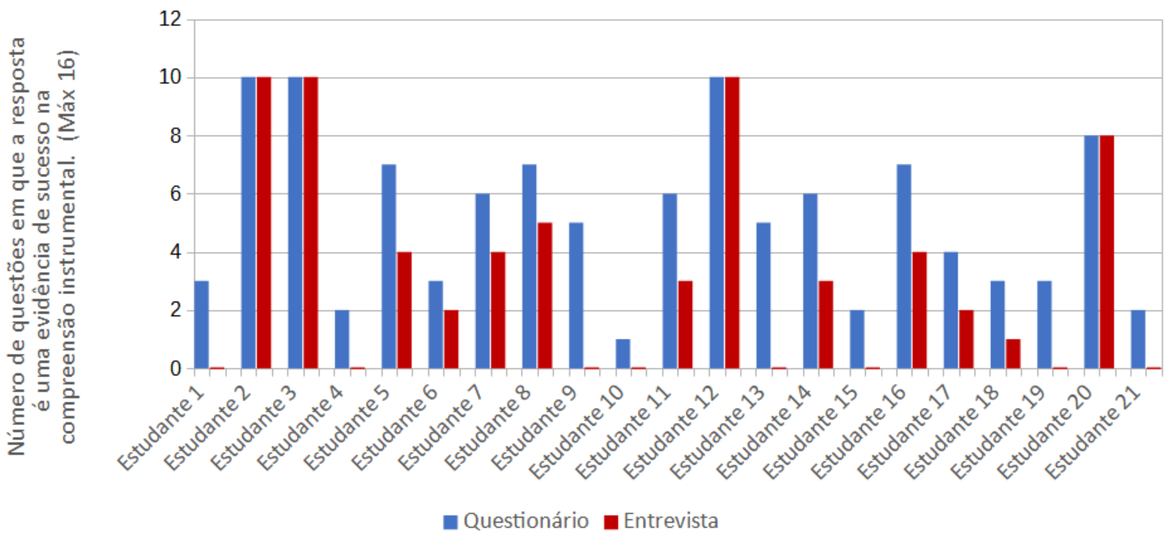


Figura 6.

Sucesso na compreensão instrumental

[19] Taxa de queda = 1 – (nº de evidências de sucesso na entrevista ÷ nº de evidências de sucesso no questionário) em números percentuais

As evidências de fracasso estão bem distribuídas nos quartis quando olhamos para as transcrições das entrevistas. Como foi dito acima, a entrevista confirma ou desce um nível de compreensão observado no questionário

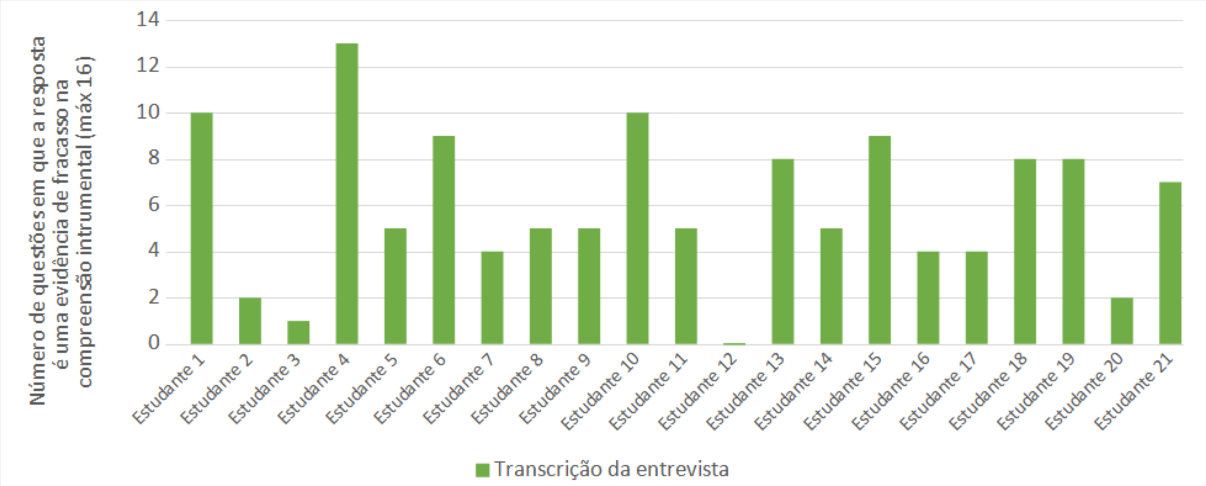


Figura 7.

Fracassos na compreensão instrumental (transcrição da entrevista)

43% dos estudantes (8 de 21) nos deram 38% ou mais evidências de fracasso na compreensão instrumental; 57% dos estudantes (13 de 21) nos deram menos de 50% de evidências de fracasso na compreensão instrumental. Verificamos na tabulação que os 4 estudantes com mais de 50% de evidências de sucesso (Figura 7) são os estudantes com menos de 25% de evidências de fracasso na compreensão instrumental.

Da Análise combinada de dados: compreensão instrumental e relacional

Como dito acima (Tabela 3 – coluna 2) há 20 questões onde o estudante pode nos dar evidências do seu nível de compreensão relacional, mas em 12 dessas exige-se somente a compreensão relacional para respondê-las e 1 (uma) exige-se as duas compreensões. Para as outras 7 questões, uma ou outra compreensão pode respondê-la. Teríamos no máximo 20 evidências de compreensões relacional e 16 evidências de compreensões instrumental.

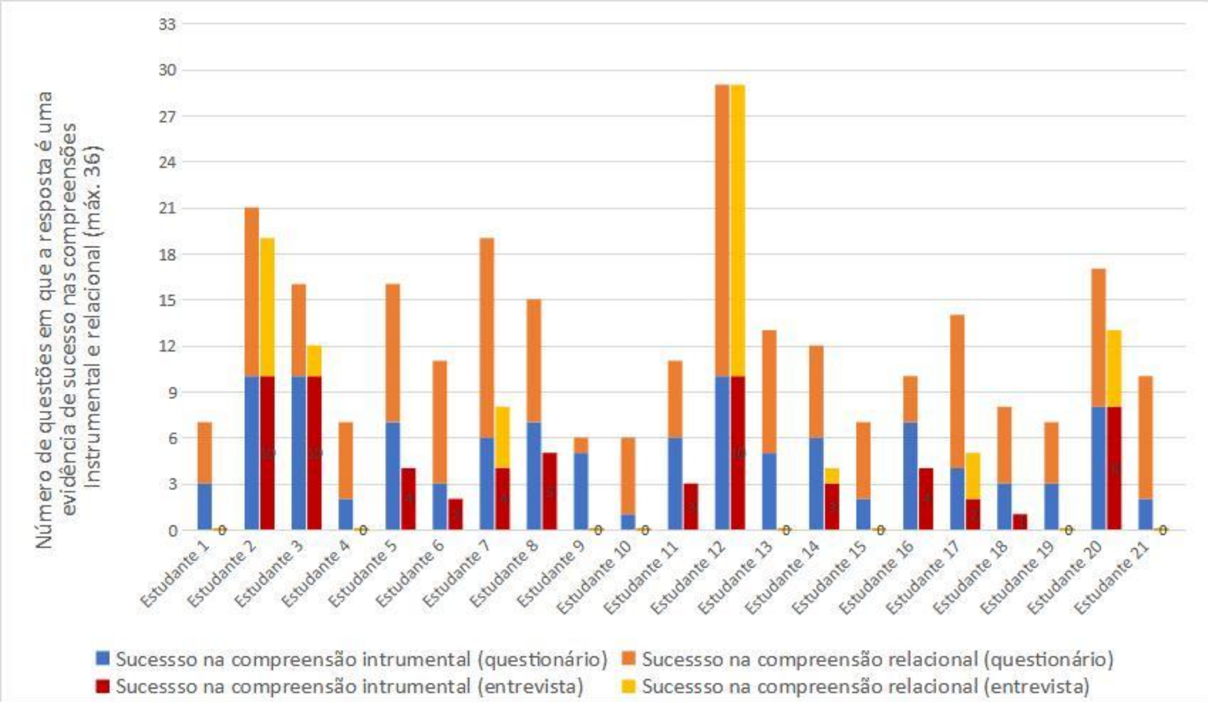


Figura 8

Secesso na compreensão instrumental e relacional (questionário e entrevista)

Somente 2 estudantes nos deram evidências de mais de 50% de sucessos (números de evidência de sucessos na compreensão instrumental + números de evidências de sucessos na compreensão relacional) nos questionários e confirmado pelas suas entrevistas; outros 2 estudantes (estudantes 3 e 20), que haviam obtido um relativo sucesso na compreensão instrumental não obtiveram tanto sucesso na análise combinada.

Ao compararmos a queda dos números de sucessos evidenciado no questionário para a entrevista, somente os 4 estudantes citados (os mesmos da análise instrumental[20]) acima tiveram uma queda menor ou igual a 25%; os outros 17 estudantes (Figura 8) tiveram uma queda de mais de 50%, sendo que 8 (os mesmos 8 com queda de 100% na análise instrumental) tiveram uma queda de 100%, ou seja, não conseguimos confirmar nenhuma evidência de sucesso na transcrição da entrevista de 8 dos 21 estudantes. Vale salientar que o não-sucesso pode ser uma falha ou fracasso nas compreensões combinadas; analisamos essas possibilidades mais adiante.

Ao compararmos os 17 estudantes que tiveram queda de mais de 50% na taxa de sucesso do questionário para a entrevista verificamos que 15 deles são os mesmos que apresentaram

[20] Verificado na tabulação

mais de 50% de evidências de fracasso as compreensões combinadas (relacional e instrumental) na entrevista (Figura 9).

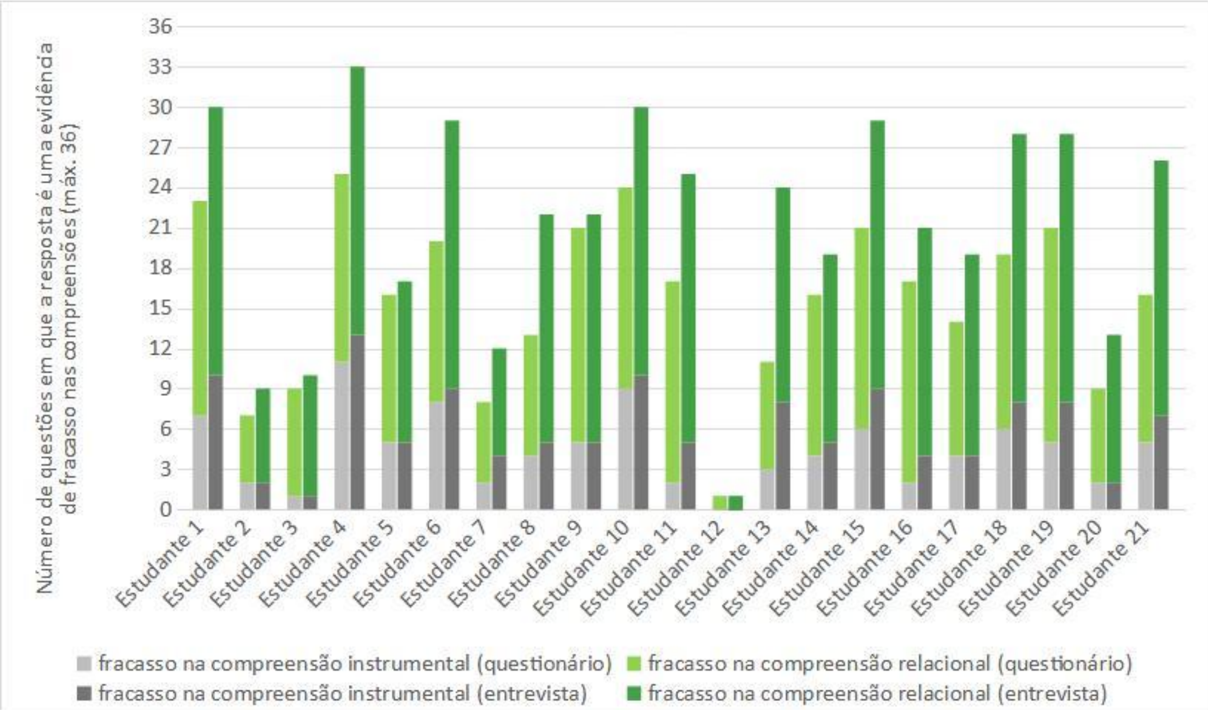


Figura 9.

Fracasso na compreensão instrumental e relacional (questionário e entrevista)

Discussões

Ao nos perguntarmos sobre a compreensão dos conceitos de derivada de uma variável de estudantes de Licenciatura em Matemática de universidades do oeste do Paraná, avançamos com a pesquisa em distintas direções, dos aspectos socioeconômicos aos indícios de compreensão dos estudantes sobre o tema.

O quadro socioeconômico não dificulta uma vida estudantil, pois 85% são solteiros, 90% têm residência urbana, 71% moram com parentes (pais e não pais). A média de idade 22,4 anos[21] e entrada no curso entre 2018 e 2021, nos diz que 18 estudantes (85%) são jovens adultos que ficaram um intervalo curto sem estudar e entraram na universidade. Há um relativo desequilíbrio na renda (Tabela 6), 47% declararam renda familiar menor de três salários-mínimos e 53% maior que três salários-mínimos, sendo que o gênero masculino em geral

[21] Se retirarmos uma idade não informada e duas idades maiores que 30 anos de idade, a média do restante (18 estudantes) é 22,4 com desvio padrão 1,3.

declarou renda familiar maior. Esses dados não apresentaram correlação direta entre o quadro socioeconômico e o nível de compreensão expresso por sucessos/falhas/fracassos. Por isso, é pode-se dizer que o nível compreensível possui relação com o modelo curricular implantado que não enfatiza o desenvolvimento da compreensão, exceto entre aqueles estudantes que já possuem alguma destreza cognitiva favorecida por fatores variados e por nós desconhecidos.

Quanto aos aspectos conceituais, observamos uma correlação (Figura 8 e Figura 9): Os estudantes com mais de 50% de queda nos sucessos, não evidenciaram muitas falhas, evidenciaram mais de 50% de fracassos na análise combinada das compreensões, ou seja, 15 de 21 estudantes evidenciaram incompreensão (fracasso nas compressões combinadas) em mais 50% dos conceitos abordados nas 28 questões. Isso nos diz que os estudantes têm muita dificuldade em verbalizar do que escrevem, como nos disseram dois entrevistados (Figura 10 e Figura 11):

00:02:31 Palestrante 1

E na sétima questão o quê que você pensou?

00:02:35 Palestrante 2

Hum. Ai eu não, não lembro, não lembro como fazer isso, não lembro. Então não respondi por isso.

Figura 10.

Transcrição de trecho da entrevista de um estudante[22]

00:00:00 Palestrante 1

Nós vamos começar pela questão dissertativa.

É... o quê você pensou para responder a primeira?

00:00:07 Palestrante 2

Eu lembrei apenas do jeito que resolvi assim, tipo a definição certinha ali eu não lembrava, mas eu tipo, tentei esboçar, um jeito de fazer.

00:00:19 Palestrante 2

E tentar resolver.

Figura 11.

Transcrição de trecho da entrevista de outro estudante

Desse modo, parece haver uma correlação entre não-verbalização do escrito e incompreensão, pois é por meio da compreensão relacional que os aspectos instrumentais e lógicos são devidamente apreendidos em uma estrutura ordenada e inteligível. A análise triangulada das entrevistas e questionários ressalta a ausência da compreensão relacional, uma

[22] O “Palestrante 1” é o entrevistador. O “Palestrante 2” é o estudante. Isso é um padrão do transcritor.

vez que estudantes não conseguiram expressar entendimentos articulados em uma situação distinta daquela em que aprenderam os conceitos, conforme depreendemos de Skemp (1987).

Os 4 estudantes que apresentaram queda menor que 25% (questionário para entrevista) nas evidências de sucesso das compreensões combinadas, são os mesmos que apresentaram 0% de queda de evidências de sucesso do questionário para a entrevista quando olhamos só para sua compreensão instrumental. Isso nos sugere uma correlação entre compreensão relacional, compreensão instrumental e retenção de conhecimento para aprendizagem duradoura, pois na análise exclusiva dos dados relativos à compreensão instrumental não encontramos nenhum estudante com mais 50% de evidências de sucesso de compreensão relacional, além dos quatro estudantes comentados acima.

Trevisan e Mendes (2018), como dito acima, destacam que, no geral, os estudantes, ao ingressarem em diferentes cursos de graduação, apresentam uma dinâmica de estudo desenvolvida na Educação Básica, priorizando aspectos relacionados à memorização e mecanização de procedimentos, em vez de compreensão e atribuição de significado. Como um círculo vicioso, Barufi (1999), já nos alertava da continuidade dessa prática no ensino superior, a fim de minimizar o insucesso na construção do conhecimento significativo. Porém, a nossa investigação aponta para um dado mais preocupante, ou seja, nem os aspectos instrumentais parecem se consolidar, asseverando para a necessidade de se investir em aspectos que articulem a compreensão relacional e instrumental.

Ainda que o nosso foco não seja avaliar metodologias de ensino, nem atuação docente ou currículos e nem mesmo apontar políticas educacionais ou condições socioeconômicas que levam os estudantes de licenciatura a compreenderem ou não os conceitos, os resultados mostram fortes indícios de uma aprendizagem não duradoura, pois 76% (16 estudantes) declaram (pesquisa nossa) que já cursaram uma disciplina com conteúdo de derivada mais de uma vez, seja repetindo-a por reprovação ou cursando a subsequente. Por esse motivo, é necessário avançar no debate sobre os currículos e principalmente sobre o modo como são postos em vigor, em termos metodológicos e pedagógicos. Ainda, é necessário investigar e elaborar propostas e estratégias que permitam compreender o background dos estudantes, tanto intelectualmente, como de sua formação para a vida intelectual.

Pozo (2002) já havia alertado que uma aprendizagem baseada na memorização e repetição é pouco duradoura e pouco transferível. Do mesmo modo, porém, especificamente para a aprendizagem matemática, Skemp (1987) esclareceu que somente a compreensão instrumental também não é duradoura.

De modo geral, podemos afirmar que 17 estudantes apresentaram fortes evidências de falhas e fracasso nas compreensões relacional e instrumental dos conceitos de derivada abordados nas questões.

O que falta para os 17 obterem o sucesso? Para Skemp, Pozo e mais tantos outros que citamos acima, o ensino deve ter foco na compreensão profunda, que é eficaz e duradoura e transferível. Disso fica a reflexão "Um professor conseguirá pautar suas aulas com base na compreensão sem ter vivenciado aulas assim na sua formação?"

Limitações do estudo

Ainda que o tema seja amplamente mencionado, ele o é de maneira naturalizada, pois ainda há poucos trabalhos sobre compreensão de conceitos em matemática no Ensino Superior, o que se estende ao Cálculo. Mesmo restringindo o conteúdo à "derivada", muitas de suas justificativas e consequências não foram avaliados. Deixamos de avaliar a compreensão da regra da cadeia e de L'hospital; evitamos cálculos numéricos de funções não polinomiais, pois isso tomaria um tempo que extrapolaria o estudo pós-doutoral do primeiro autor, inclusive evitamos os gráficos dessas funções; não falamos de funções definidas por várias sentenças; não tocamos em certos conceitos formais, como o teorema do valor médio etc. Quais questões deveríamos colocar no questionário de modo que pudéssemos investigar a compreensão de nossos estudantes em relação a conceitos de derivadas, suas justificativas e suas consequências? É claro que evitamos questões de respostas longas, mesmo assim havia um imenso volume de exercícios nos livros de Cálculo. Demo-nos conta que é necessário, mais trabalhos para aprimorar os resultados dessa pesquisa como auxílio à verificação de aprendizagem duradoura, e assim auxiliar professores na reestruturação de currículos, planos de ensino e práticas de sala de aula.

Referências Bibliográficas

AMS. (2022). Deborah Hughes Hallett receives: Award for Impact on the Teaching and Learning of Mathematics. American Mathematical Society: *News from AMS*. https://www.ams.org/news?news_id=6840.

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R., ... Wittrock, M. C. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of Edcatoins Objectives.* New York: Longman.

Ávila, G. S. S. (2011). *Cálculo: das funções de uma variável*. (7a ed., vol. 1). Rio de Janeiro: LTC.

Barufi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral* [Tese de Doutorado]. Universidade de São Paulo – USP. https://doi.org/10.11606/T.48.1999.tde-06022004-105356

Bloom, B. S. et al. (1956) *Taxonomy of Educacional Objectives: The Classification of Educational Goals* (v. 1). New York: Longmans, Green.

Boulos, P. (2019). *Introdução ao Cálculo Diferencial* (2. ed., v. 1). São Paulo: Blucher. https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521217534/.

Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of Educacional Objectives: The Classification of Educational Goals* (Vol. 1). New York, USA: Longmans, Green. https://archive.org/embed/bloometaltaxonomyofeducationalobjectives

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries): Matemática.* Brasília: MEC / Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil. (2000). *Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio): Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: MEC.

Brasil. (2001). *Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática.* Brasília: MEC / Conselho Nacional de Educação.

Brasil. (2003). *Estabelece as diretrizes curriculares para os cursos de Matemática.* Brasília: MEC / Conselho Nacional de Educação.

Brasil. (2006). *PCN+: Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias.* Brasília: MEC / Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular.* MEC.

Brasil. (2022). *Censo da Educação Superior 2021: divulgação dos dados.* Brasília: MEC / INEP. Acesso em 04 dez. 2022, disponível em https://download.inep.gov.br/educacao_superior/ censo_superior/documentos/2021/apresentacao_censo_da_educacao_superior_2021.pdf

Douglas, R. G. (2-6 jan. 1986). Toward a Lean and Lively Calculus. *Conference/workshop to Develop Curriculum and Teaching Methods for Calculus at the College Levels.* MAA notes and report series. n. 6.

Grabiner, J. V. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, 56(4), 195–206. https://doi.org/10.1080/0025570X.1983.11977043.

Grabiner, J. V. (2005). *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Dover Publications.

Guidorizzi, L. H. (2001). *Um Curso de Cálculo* (5a ed., Vol. 1). LTC. https://bookshelf.vitalsource.com/#/books/9788521622444.

Guidorizzi, L. H. (2018). *Um Curso de Cálculo* (6a ed., Vol. 1). LTC. https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521635574/

Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 8(10), 437-479. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1902-00923-3

Hughes-Hallett, D. (2024). *Faculty Profile*. https://www.hks.harvard.edu/faculty/deborah-hughes-hallett

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., Flath, D. E., Gordon, D, Osgood, B.G., McCallum, Quinney, D., Mumford, D., Raskind, W., Tscoky-Feldman, J., Thrash, J. B. & Tucker, T. W. (1997). *Cálculo* (1. ed. Vol. 1). LTC.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., McCallum, W. G., Quinney, D., Lock, P. F., Osgood, B. G., Flath, D. E., Pasquale, A., Gordon, S. P., Lomen, D. O., Tecosky-Feldman, J., Thrash, J. B., Lovelock, D., Thrash, K. R. & Tucker, T. W. (1999). *Cálculo e aplicações* (1. ed., vol. 1). Blucher. *E-book*. https://plataforma.bvirtual.com.br.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., McCallum, W. G., Pasquale, A. Flath, D. E., Quinney, D., Lock, P. F., Raskind, W., Gordon. S. P., Rhea, K., Lomen, D. O., Tscoky-Feldman, J., Lovelock, D, Thrash, J. B., Osgood, B.G., & Tucker, T. W. (2013). *Cálculo de uma Variável* (3 ed., Vol. 1). LTC.

Keene, A. K., Glass, M., Kin. J. H. (2011). Identifying and Assessing Relational Understanding in Ordinary Differential Equations. *Proceedings – Frontiers in Education Conference*. Oct. 12-15. https://doi.org/10.1109/FIE.2011.6143074

Klein, D., Rosen, J. (oct. 1997). Calculus Reform - For the $Millions. *Notices of the AMS, 44*(10), 1324-1325. https://www.ams.org/notices/199710/comm-klein.pdf

Knill, O. (2004). *On the Harvard Consortium Calculus*. https://people.math.harvard.edu/~knill/pedagogy/harvardcalculus/

Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. (1996). *Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional*. https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm

Leithold, L. (1994) *O cálculo com geometria analítica*. (3 ed., Vol. 1). Harbra.

Liu, P.-H., Lin, C.-C., Chen, T.-S., Chung, Y.-T., Liao, C.-H., Lin, P.-C., Tseng, H,-E & Chen, R.-M. (2009). A Collaborative Model for Calculus Reform—A Preliminary Report. *Proceedings of the tenth International Conference Models in Developing Mathematics Education* (pp. 372-375). https://www.researchgate.net/publication/255657280_A_Collaborative_Model_for_Calculus_Reform-A_Preliminary_Report

Mac Lane, S. (sep. 1997). On the Harvard Consortium Calculus. *Letters to the Editor,* 44(8), 893. https://www.ams.org/notices/199708/letters.pdf

Mumford, D. (1997). Calculus reform—for the millions. *Notices of the AMS*, *44*(5), 559-563. https://www.ams.org/notices/199705/comm-mumford.pdf

Pinheiro, G. D. (2022). *Sala de aula invertida no ensino de cálculo diferencial e integral I em cursos de engenharia: Uma proposta experienciada* [Disertação de Mestrado]. Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

Pinheiro, G. D., Boscarioli, C. (2022). Metodologias ativas e o ensino de cálculo diferencial e Integral I em cursos de engenharia – Uma revisão de literatura. *Revista de Ensino de Engenharia*, 41, 140-153. http://revista.educacao.ws/revista/index.php/abenge/article/view/1952

Polya, G. (1995). *A arte de resolver Problemas: Um novo aspecto do método matemático.* Interciência.

Pozo, J. I. (2002). *Aprendizes e mestres: a nova cultura da aprendizagem.* Artmed.

Rezende, W. M. (2003). *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica* [Tese de Doutorado]. Universidade de São Paulo. https://doi.org/10.11606/T.48.2003.tde-27022014-121106

Skemp, R. R. (1976) *Relational understanding and instrumental understanding*. Mathematics Teaching, 77, 20-26.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Smoryński, C. (2017). *MVT: A Most Valuable Theorem.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-52956-1

Stewart, J. D. (2006). *Cálculo* (5 ed., vol. 1). São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

Stewart, J. D. (2013). *Cálculo* (7 ed., vol. 1). São Paulo: Cenage Learning.

Swokowski, E. W. (1995) *Cálculo com geometria analítica*. (2. ed., v.1) São Pauulo: Makron Books.

Torres, T. I. M. & Giraffa, L. M. M. (2009). O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE. *Revista eletrônica de Eduação Matemática,* 4(1), 18-25. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2009v4n1p18

Trevisan, A. L. & Mendes, M. T. (2018). Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia,* 11(1), 209-227. https://doi.org/10.3895/rbect.v11n1.5702

Weber, Keith. (2002) The role of instrumental and relational understanding in proofs about group isomorphisms. *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level.* http://users.math.uoc.gr/~ictm2/ICTM2Proceedings.zip.

Wilson, R. (1997). *"Reform Calculus" Has Been a Disaster, Critics Charge*. The Chronicle of Higher Education. https://www.chronicle.com/article/reform-calculus-has-been-a-disaster-critics-charge/

Wu, H. (1997). The Mathematics Education Reform: Why You Should Be Concerned and What You Can Do. *The American Mathematical Monthly,* 104(10), 946-954. https://doi.org/10.1080/00029890.1997.11990745

Apêndice A

Questionário Socioeconômico

Universidade:____

1. Nome:_______________________________________data: ____/ _____ / 2023

2. Gênero:
   a. ( ) masculino
   b. ( ) feminino
   c. ( ) outro: ___________________
   d. ( ) prefiro não declarar

3. Idade: __________________________

4. Você se considera:
   a. ( ) Branco
   b. ( ) Preto
   c. ( ) Pardo
   d. ( ) Amarelo
   e. ( ) Indígena
   f. ( ) Prefiro não declarar

5. Estado civil:
   a. ( ) solteiro(a)
   b. ( ) casado(a)
   c. ( ) divorciado(a)
   d. ( ) viúvo(a)
   e. ( ) outro________________

6. Tem quantos filhos(as)?
   a. ( ) nenhum
   b. ( ) 1
   c. ( ) 2 ou mais filhos

7. Escolaridade:
   a. ( ) Ensino Superior incompleto
   b. ( ) Ensino Superior completo
   c. Pós-graduação
      i. ( ) Especialização.
      ii. ( ) Mestrado.
      iii. ( ) Doutorado

      Área: _____________________

8. Você possui alguma deficiência?
   a. ( ) Sim
   b. ( ) Não.

   Em caso afirmativo, indique o tipo:
      i. ( ) Deficiência física
      ii. ( ) Def. visual
      iii. ( ) Def. mental
      iv. ( ) Defi. auditiva
      v. ( ) outra: ________________

9. Residente em:
   a. ( ) Área Urbana
   b. ( ) Área Rural.

10. Atualmente, você reside:
    a. ( ) com os pais
    b. ( ) com parentes (não pais)
    c. ( ) com amigos
    d. ( ) sozinho(a)

11. Número de moradores na sua residência:____________

12. Condições de moradia:
   a. ( ) Própria
   b. ( ) Alugada
   c. ( ) Cedida
   d. ( ) outro: __________________

13. Renda mensal:
   a. ( ) até R$ 1.320,00
   b. ( ) de R$ 1.320,00 até R$ 2.640,00
   c. ( ) de R$ 3.960,00 até R$ 5.280,00
   d. ( ) de R$ 5.280,00 a R$ 13.200,00
   e. ( ) mais de R$ 13.200,00

14. Principal fonte de renda:
   a. ( ) pais
   b. ( ) bolsa
   c. ( ) emprego
   d. ( ) outra: _____________________

15. Em que ano você entrou nesse curso de licenciatura em matemática? _______________________________

16. Em que semestre/ano (e formato) você cursou (primeira vez) a disciplina que tem o conteúdo de derivadas? Ano: ________
   a. ( ) Presencial
   b. ( ) Remota
   c. ( ) Híbrida

17. Você já foi reprovado na disciplina que tem o conteúdo de derivada?
   a. ( ) Sim
   b. ( ) Não

18. Você já cursou mais de uma vez a disciplina que tem o conteúdo de derivada?
   a. ( ) Sim
   b. ( ) Não

Apêndice B

Questionário (parte conceitual referente às derivadas)

Projeto de pesquisa

Conceitos de cálculo diferencial: compreensão de estudantes de licenciatura em Matemática de universidades do oeste do Paraná

Pesquisador: Jorge Fernandes de Lima Neto
Supervisor: Tiago Emanuel Klüber

Questionário – Questões dissertativas

Parte 1 de 2

Nome:____

Universidade:____

Data:____

Instruções: As respostas são livres. Você pode colocar ou o conceito ou as ideias intuitivas que você aprendeu durante as aulas sobre derivadas. Faça esboços se considera-los necessário. Não tenha vergonha, solte sua imaginação.

1) Qual é o seu entendimento sobre derivada de uma função?

Obs.: este comentário em itálico não estava no questionário do estudante.
Pretendíamos verificar compreensão relacional dos estudantes para o conceito de derivada. O que o estudante conhece das relações mais gerais que levam a definição de função derivada? Como por exemplo a aproximação da reta tangente por retas secantes a um ponto fixo, e repensar esse ponto fixo como um ponto qualquer.

Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____

0 – Chutei a resposta ou não respondi

1 – Não tenho certeza se está correta;

2 – Tenho certeza de que está correta.

☐ Revisei e **alterei** a resposta após responder a parte 2

☐ Revisei e **não alterei** a resposta após responder a parte 2

2) Se f é uma função derivável no número a, o que representa $f'(a)$?

(Você pode dar uma resposta ou algébrica, ou numérica, ou geométrica ou ainda intuitiva)

Obs.: este comentário em itálico não estava no questionário do estudante.
Pretendíamos verificar compreensão relacional ou instrumental dos estudantes para o conceito de derivada em um ponto. A questão anterior é um contraponto desta. A ideia aqui, era avaliar a compreensão da diferença entre um conceito local e um conceito global. O estudante pode apresentar a ideias gerais, como taxa de variação em um ponto ou inclinação da reta tangente à curva em um ponto, ou tangente do ângulo que a reta tangente (a um ponto) faz com o eixo dos x, ou mesmo a regra algébrica de limite.

Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____

0 – Chutei a resposta ou não respondi

1 – Não tenho certeza se está correta;

2 – Tenho certeza de que está correta.

☐ Revisei e **alterei** a resposta após responder a parte 2

☐ Revisei e **não alterei** a resposta após responder a parte 2

3) Se f é uma função duas vezes derivável em um intervalo numérico. O que suas derivadas f' e f'' dizem sobre a função f ?

(Você pode dar uma resposta ou algébrica, ou numérica, ou geométrica ou ainda intuitiva)

Obs.: este comentário em itálico não estava no questionário do estudante.
Diferente das duas primeiras, aqui pretendíamos avaliar a compreensão relacional do estudante, pois a pergunta "O que [...] dizem sobre [...]" envolve ideias gerais e sugere uma resposta sem aplicação de procedimentos ou fórmulas. Havia a possibilidade que a resposta fosse uma reprodução de frases do jargão matemático; mas a resposta da Questão Objetiva nº 3 nos deu um indicativo do tipo de compreensão que estamos procurando aqui.

Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____

0 – Chutei a resposta ou não respondi

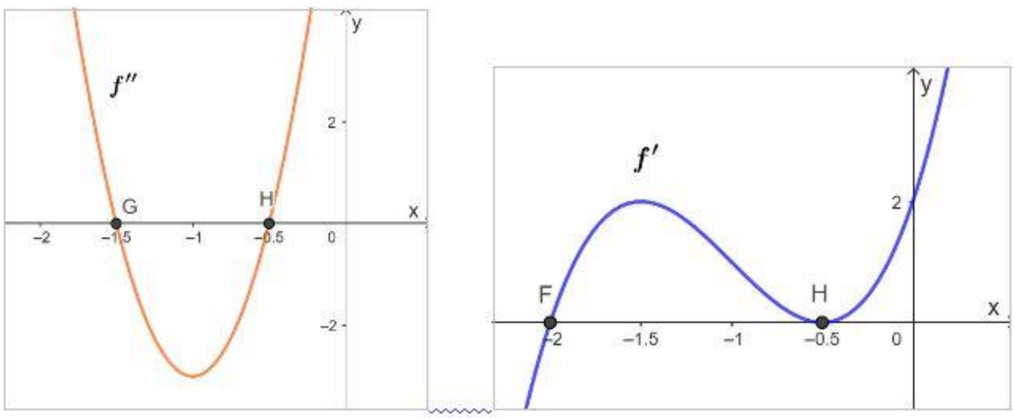
1 – Não tenho certeza se está correta;

2 – Tenho certeza de que está correta.

☐ Revisei e **alterei** a resposta após responder a parte 2

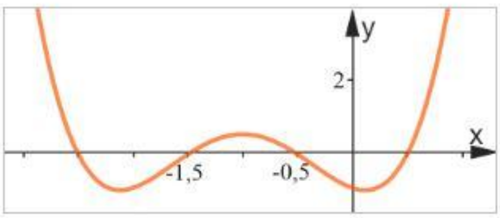
☐ Revisei e **não alterei** a resposta após responder a parte 2

4) Observe os esboços dos gráficos das derivadas primeira e segunda da função f,

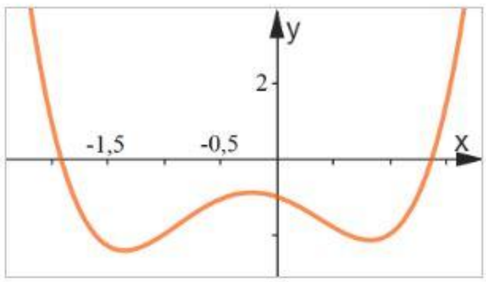


Marque o possível esboço gráfico da função f,

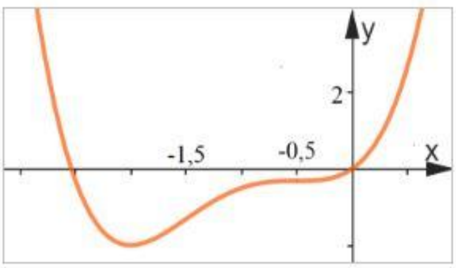
( ) (a)



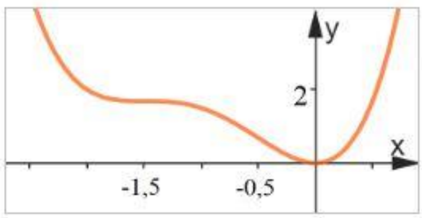
( ) (b)



( ) (c)



( ) (d)



Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____

0 – Chutei a resposta ou não respondi

1 – Não tenho certeza se está correta;

2 – Tenho certeza de que está correta.

5) Se $f(x) = 3x^2 - x^3$, $x \in R$, encontre seus pontos críticos, seu ponto de inflexão e esboce seu gráfico.

Obs.: este comentário em itálico não estava no questionário do estudante.
Aqui, continuamos a intenção de avaliar a compreensão instrumental do estudante que começou na questão anterior. Vale ressaltar que era necessário que o sujeito tivesse uma compreensão relacional dos conteúdos para que ao final da sequência de procedimentos e cálculos, pudesse esboçar o gráfico de uma função interpretando alguns dados fornecidos por suas derivadas.

Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____

0 – Chutei a resposta ou não respondi

1 – Não tenho certeza se está correta;

2 – Tenho certeza de que está correta.

☐ Revisei e **alterei** a resposta após responder a parte 2

☐ Revisei e **não alterei** a resposta após responder a parte 2

6) Derive

a) $f(x)=\frac{5x}{1+x^2}$

b) $f(x)=\ln(x)\cdot\cos(x)$

Obs.: este comentário em itálico não estava no questionário do estudante.
Aqui queríamos avaliar a compreensão instrumental dos(as) estudantes. Apenas avaliamos se a fórmula foi memorizada e aplicada de acordo com a literatura de Cálculo.

Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____

0 – Chutei a resposta ou não respondi

1 – Não tenho certeza se está correta;

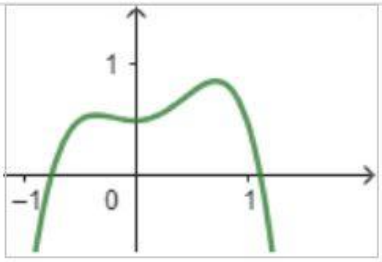
2 – Tenho certeza de que está correta.

☐ Revisei e **alterei** a resposta após responder a parte 2

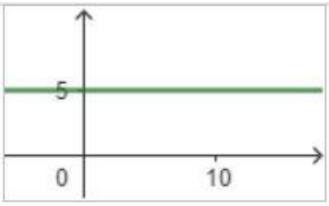
☐ Revisei e **não alterei** a resposta após responder a parte 2

7) Esboce o gráfico da função $f'(x)$ para as funções dadas. Dê razões para sua escolha.

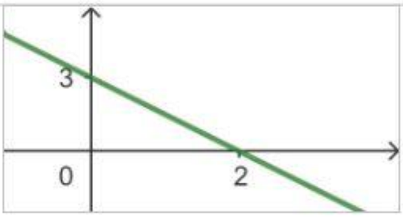
a)



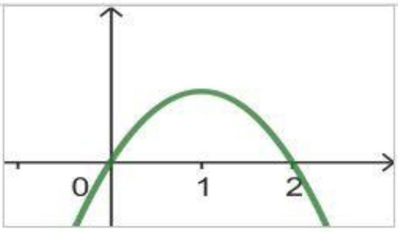
b)



c)



d)



Obs.: este comentário em itálico não estava no questionário do estudante.
Nossa intenção nessa questão era avaliar apenas a compreensão relacional dos estudantes; como deixamos os valores nos gráficos, recebemos respostas onde o estudante usou sua compreensão instrumental nos itens (b) (c) e (d) (construiu a equação, derivou-a e esboçou o gráfico); recebemos também repostas onde o estudante usou sua compreensão relacional: identificou as funções afim e quadrática ou identificou pontos críticos (conceitos gerais) e esboçou o gráfico aproximado de suas derivadas. Avaliamos a compreensão instrumental e relacional do estudante.

Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____

0 – Chutei a resposta ou não respondi

1 – Não tenho certeza se está correta;

2 – Tenho certeza de que está correta.

☐ Revisei e **alterei** a resposta após responder a parte 2

☐ Revisei e **não alterei** a resposta após responder a parte 2

Projeto de pesquisa

Conceitos de cálculo diferencial: compreensão de estudantes de licenciatura em Matemática de universidades do oeste do Paraná

Pesquisador: Jorge Fernandes de Lima Neto
Supervisor: Tiago Emanuel Klüber

Questionário – Questões objetivas

Parte 2 de 2

Nome: ____

Universidade: ____

Data: ____

1) Complete as lacunas com V, F ou D.

- V significa verdadeiro
- F significa falso
- D significa não sei ou tenho dúvida.

Admita que f é uma função derivável no número a,

a) ( ) A derivada $f'(a)$ é a taxa instantânea de variação de $y=f(x)$ em relação a x quando $x=a$,

b) ( ) A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se o limite existir.

c) ( ) A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se o limite existir.

d) ( ) A derivada da função f no número a é o número L, se para todo $\varepsilon>0$ existe um existe um correspondente número $N>0$ tal que: se $|x-a|<N$, então $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-L\right|<\varepsilon$

Obs.: este comentário em itálico não estava no questionário do estudante.
Aqui pretendíamos avaliar tanto a compreensão instrumental quanto a relacional dos estudantes, pois o primeiro item é uma definição verbal falando de taxa de variação (conceito geral) e os outros itens são variações da definição formal (regra) de derivada em um ponto. A triangulação com a entrevista nos deu bastante evidências do nível de compreensão deles(as).

Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____
0 – Chutei a resposta ou não respondi
1 – Não tenho certeza se está correta;
2 – Tenho certeza de que está correta.

2) Complete as lacunas com V, F ou D.

- V significa verdadeiro
- F significa falso
- D significa não sei ou tenho dúvida.

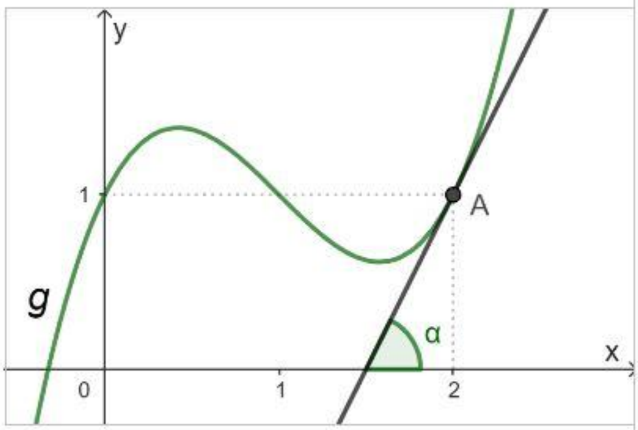
Considere que g é uma função real e $g(x)=x^3-3x^2+2x+1$,

a) ( ) $g'(2)=\lim_{x \to 2} g(x)$

b) ( ) $g'(2)=\lim_{h \to 0} \frac{g(2+h)-g(2)}{h}$

c) ( ) $g'(2)=3$

d) ( ) $g'(2)=tg\,\alpha$



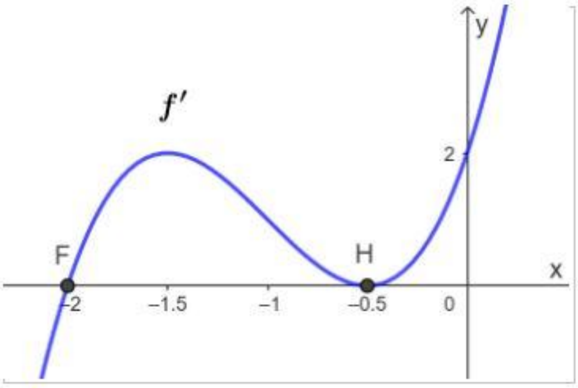
e) ( ) A derivada da função g no número 2 é a inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(2,1)$

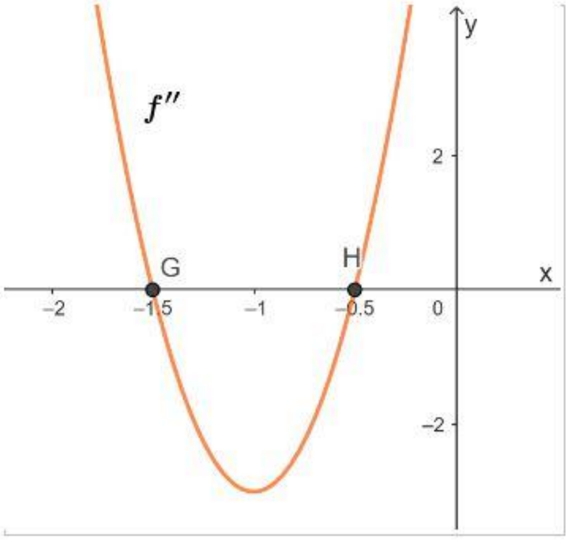
Obs.: este comentário em itálico não estava no questionário do estudante.
Aqui também pretendíamos avaliar tanto a compreensão instrumental quanto relacional, da derivada em um ponto, mas dessa vez numericamente e graficamente. Essa questão foi posta aqui também para nos auxiliar na avaliação da compreensão do estudante acerca da questão dissertativa 2. A triangulação com a entrevista nos deu mais evidências do nível de compreensão deles.

Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____
0 – Chutei a resposta ou não respondi
1 – Não tenho certeza se está correta;
2 – Tenho certeza de que está correta.

3) Abaixo temos os esboços dos gráficos de f' e de f''. O que podemos dizer da função f? Complete as lacunas com V, F ou D.

- V significa afirmação verdadeira
- F significa afirmação falsa
- D significa não sei ou tenho dúvida.





a) ( ) A função f tem dois máximos locais.

b) ( ) A função f tem um máximo e um mínimo local.

c) ( ) A função f tem somente um mínimo local.

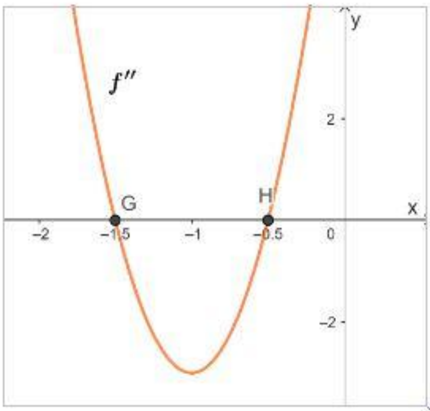
d) ( ) A função f tem dois pontos de inflexão.

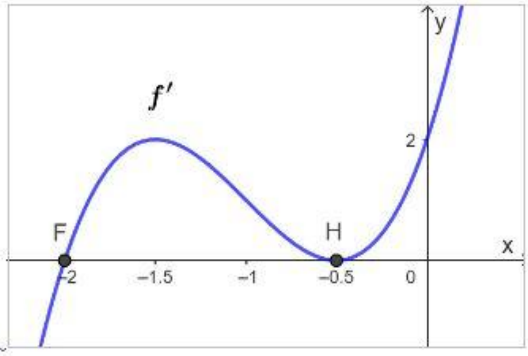
e) ( ) A função f tem não tem máximo local.

Obs.: este comentário em itálico não estava no questionário do estudante.
Aqui e na próxima queríamos avaliar a compreensão relacional dos estudantes. O que as derivadas nos dizem sobre sua função?

Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____
0 – Chutei a resposta ou não respondi
1 – Não tenho certeza se está correta;
2 – Tenho certeza de que está correta.

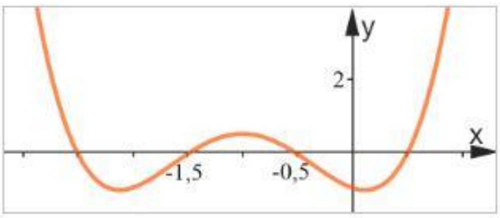
4) Observe os esboços dos gráficos das derivadas primeira e segunda da função f,



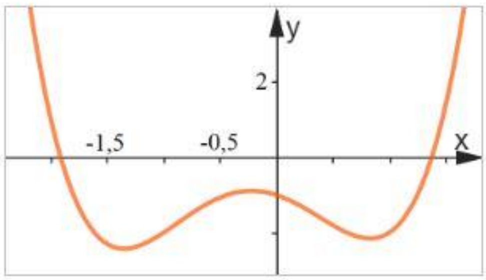


Marque o possível esboço gráfico da função f,

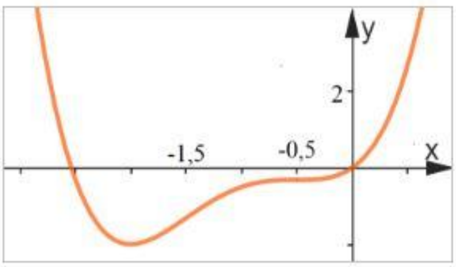
( ) (a)



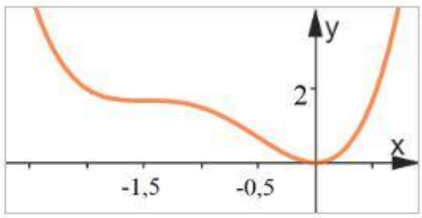
( ) (b)



( ) (c)



( ) (d)



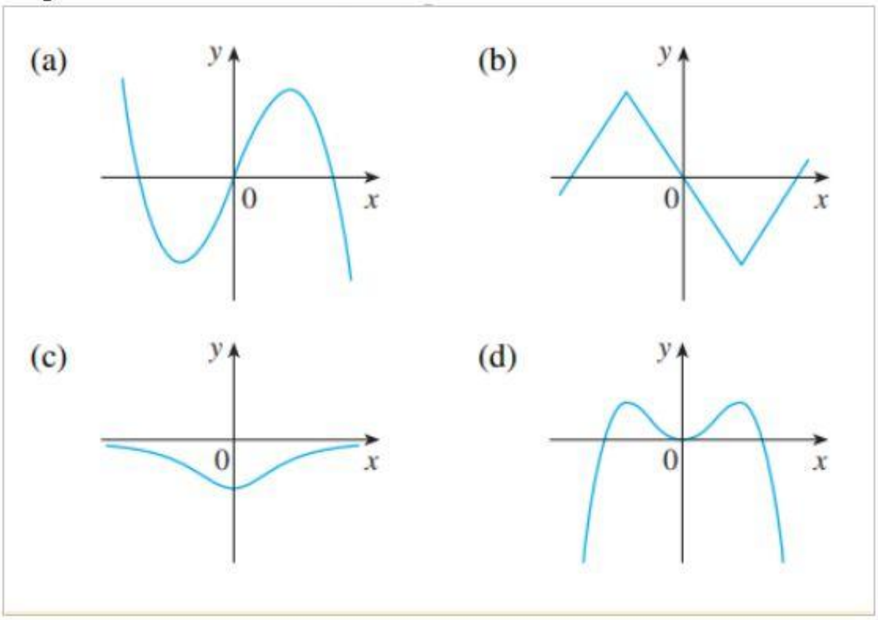
Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____

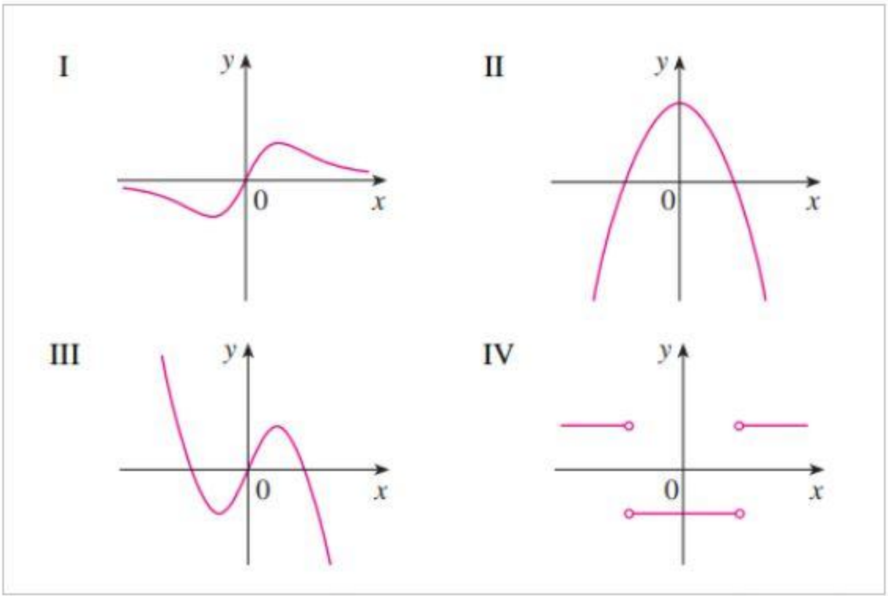
0 – Chutei a resposta ou não respondi

1 – Não tenho certeza se está correta;

2 – Tenho certeza de que está correta.

5) (Stewart, 2013, pág. 147, nº3) Associe o gráfico de cada função (a) – (d) com o gráfico da sua possível derivada em I – IV.





Obs.: este comentário em itálico não estava no questionário do estudante
Aqui queríamos avaliar novamente a compreensão relacional (ou instrumental) dos conceitos de cálculo quanto à identificação dos gráficos de suas derivadas. Suas falas nos auxiliaram na avaliação da compreensão relacional.

Quão confiante você está em relação a sua resposta? ____
0 – Chutei a resposta ou não respondi
1 – Não tenho certeza se está correta;
2 – Tenho certeza de que está correta.