ISSN 1983-3156
Qualis A 1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i3p142-174

Quelques considérations relatives à la notion de modèle épistémologique de référence (MER) pour le calculus et l'analyse

Some considerations pertaining to the notion of an epistemological reference model (ERM) for calculus and analysis

Algunas consideraciones relativas a la noción de modelo epistemológico de referencia (MER) para el cálculo y el análisis

Algumas considerações sobre a noção de modelo epistemológico de referência (MER) para cálculo e análise

Pierre Job[1]
ICHEC Brussels Management School, Belgique
Docteur en Sciences
http://orcid.org/0000-0003-0592-8783

Kevin Balhan[2]
Université de Liège (ULiège), Belgique
Docteur en Sciences
http://orcid.org/0009-0001-5025-0791

Résumé

Une caractéristique centrale de la didactique est le questionnement du savoir. Ce questionnement peut se faire notamment au travers d'un modèle épistémologique de référence (MER). Après avoir explicité ce que nous entendons par cette notion, nous présentons un MER du *calculus* et de l'analyse. Ce MER nous sert alors de point d'appui pour discuter la fonction de vigilance épistémologique qu'un MER doit contribuer à exercer. Plus spécifiquement, nous montrons dans quelle mesure le cadre théorique adopté pour la conception d'un MER conditionne la manière dont la fonction de vigilance épistémologique peut être exercée, sur base des caractéristiques de ce MER.

Mots clés : Modèle épistémologique de référence, Modélisation du savoir, Vigilance épistémologique, Situation fondamentale, Praxéologie.

Abstract

A central feature of didactics is the questioning of knowledge. This questioning can be done in particular through an epistemological reference model (ERM). After explaining what we mean by this notion, we present an ERM of *calculus* and analysis. This MER then serves as a basis

[1] pierre.job@ichec.be
[2] kevin.balhan@uliege.be

for discussing the epistemological vigilance function that a ERM should help to perform. More specifically, we show to what extent the theoretical framework adopted for the design of a ERM conditions the way in which the function of epistemological vigilance can be exercised, on the basis of the characteristics of this ERM.

Keyword: Epistemological reference model, Knowledge modelling, Epistemological vigilance, Fundamental situation, Praxeology.

Resumen

Una característica central de la didáctica es el cuestionamiento del conocimiento. Este cuestionamiento puede hacerse, en particular, a través de un modelo epistemológico de referencia (MER). Tras explicar lo que entendemos por esta noción, presentamos un MER de cálculo y análisis. Este MER sirve a continuación de base para discutir la función de vigilancia epistemológica que un MER debería contribuir a realizar. Más concretamente, mostramos en qué medida el marco teórico adoptado para el diseño de un MER condiciona la forma en que puede ejercerse la función de vigilancia epistemológica, a partir de las características de este MER.

Palabras-clave: Modelo epistemológico de referencia, Modelización del saber, Vigilancia epistemológica, Situación fundamental, Praxeología.

Resumo

Uma característica central da didática é o questionamento do conhecimento. Esse questionamento pode ser feito especialmente por meio de um modelo de referência epistemológica (MER). Depois de explicar o que queremos dizer com essa noção, apresentamos um MER de cálculo e análise. Em seguida, esse MER serve de base para discutir a função de vigilância epistemológica que um MER deve ajudar a desempenhar. Mais especificamente, mostramos até que ponto a estrutura teórica adotada para o projeto de um MER condiciona a maneira pela qual a função de vigilância epistemológica pode ser exercida, com base nas características desse MER.

Palavras-chave: Modelo de referência epistemológico, Modelização do conhecimento, vigilância epistemológica, Situação fundamental, Praxeologia.

Quelques considérations relatives à la notion de modèle épistémologique de référence (MER)

Une hypothèse centrale de la didactique française initiée, dans les années 70, par Brousseau (1998) et ensuite par Chevallard (1991) est la nécessité de questionner le savoir et de le sortir d'un état où il est considéré comme une boîte noire non questionnée et plus fort encore, *non susceptible de questionnement*, ce que Bosch et Chevallard expriment en disant à propos de la didactique que

> Sa singularité originaire consiste à prendre comme objet premier à étudier (et donc à questionner, à modéliser et à problématiser selon les règles de l'activité scientifique), non pas le sujet apprenant ou le sujet enseignant, mais le savoir mathématique qu'ils sont censés étudier ensemble, ainsi que l'activité mathématique que leur projet commun d'étude les portera à réaliser. (Bosch et Chevallard, 1999, p. 79)

Cette hypothèse de nécessité du questionnement singularise la didactique par rapport à d'autres disciplines, dont la pédagogie et la psychologie (cognitive). En pédagogie, Develay affirme que

> […] la didactique fait l'hypothèse que la spécificité des contenus est déterminante dans l'appropriation des connaissances. Tandis que la pédagogie porte son attention sur les relations entre l'enseignant et l'élève et entre les élèves eux-mêmes. (Develay, 1998, p. 266)

Matheron (2009) va dans la même direction concernant la psychologie en soulignant que « La psychologie ne tient pas compte de la distinction à opérer entre les différents types de savoirs […], vus comme donnés et non questionnables […] » (p. 38). Cette distinction entre didactique et psychologie ne constitue cependant pas simplement une manière de délimiter des approches différentes, de marquer son territoire pour ainsi dire, mais pose des questions de fond sur la valeur et la validité des approches qui ne tiennent pas (suffisamment) compte des spécificités des savoirs. Matheron (2009) souligne, en effet, que le non-questionnement des savoirs conduit également à nier leurs « différents modes spécifiques d'apprentissage, d'enseignement et d'étude » (p. 38). Cela pose d'autant plus question que dès l'origine de la didactique, Brousseau importe des travaux de Bachelard (1934) la notion d'obstacle épistémologique qui permet en substance d'exprimer l'idée que l'acquisition d'un savoir ne peut se faire qu'en rejetant des connaissances antérieures, connaissances antérieures qui sont constitutives du sens du savoir visé. La validité de cette hypothèse de franchissement d'obstacle est bien appuyée par plusieurs décennies de recherche en didactique des mathématiques (Job & Schneider, 2014), même si, depuis, la recherche en didactique a envisagé d'autres voies à explorer (Artigue, 1990a). Le lecteur pourra consulter Tricot et Sweller (2016) pour une discussion sur les raisons possibles de la « cécité aux connaissances spécifiques » évoquée ci-dessus dans certaines parties des sciences de l'éducation.

Dans ce contexte, il n'est guère surprenant que l'épistémologie joue un rôle important en didactique si on considère que cette discipline, partie de la philosophie

> a pour objet l'étude critique des postulats, conclusions et méthodes d'une science particulière, considérée du point de vue de son évolution, afin d'en déterminer l'origine logique, la valeur et la portée scientifique et philosophique[3].

La multiplicité des publications consacrées aux liens entre épistémologie et didactique témoigne également du lien fort entre ces disciplines. Citons Bächtold, Durand-Guerrier et Munier (2018) à titre d'exemple récent qui consacrent un ouvrage à la question des liens entre didactique et épistémologie. L'épistémologie en tant que discipline n'est pas un bloc monolithique constitué, une fois pour toutes, de faits historiques indubitables. Les épistémologues et en particulier ceux de sciences ont développé des théories épistémologiques qui parfois se rejoignent, parfois s'opposent tels Kuhn (1996), Popper (1973), Lakatos (1994), Feyerabend (1979) pour ne citer que ceux-là. Il n'y a donc pas une seule et unique manière de questionner les savoirs. Ce constat de pluralité nous conduit à la notion de modèle épistémologique de référence (MER). De manière générale, nous définissons un MER comme une construction didactique, un modèle, qui exprime sous une forme ou une autre les caractéristiques épistémologiques du savoir qui apparaissent centrales au chercheur pour notamment lui permettre de contrôler le sens et la cohérence des pratiques où interviennent le savoir. C'est la fonction de vigilance épistémologique (Chevallard, 1991). En tant que modélisation, un MER d'un savoir n'est donc pas forcément unique. Cela pose d'emblée les questions suivantes. Si pluralité il y a, comment concevoir un MER ? Sur quelles bases ? Comment mettre à l'épreuve un MER ? Comment exercer la fonction de vigilance épistémologique à travers de cette pluralité potentielle ?

Nous n'avons évidemment pas la prétention de clôturer toutes ces questions dans l'espace de cet article. Notre contribution sera bien plus modeste et sera structurée de la façon suivante. Nous commençons dans une première partie par exposer le cadre théorique sur lequel repose notre travail. Ce cadre est essentiellement constitué d'une articulation entre la théorie des situations didactique (TSD) et la théorie anthropologique du didactique (TAD). Nous y

---

[3] Tiré du dictionnaire en ligne du Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales (CNRTL) : https://www.cnrtl.fr/definition/%C3%A9pist%C3%A9mologie

exposons comme la notion de MER est pensée dans ce cadre. Dans la deuxième partie, sur base de ce cadre théorique, nous donnons les grandes lignes d'un MER pour le *calculus* et l'analyse que nous utilisons depuis à présent plusieurs décennies dans nos laboratoires de recherche, le LADIMATH et le LADICHEC. Dans la troisième et dernière partie, nous mettons ce MER du *calculus* et de l'analyse à contribution pour ébaucher quelques éléments de réponse à la question du comment exercer la vigilance épistémologique. Relevons pour terminer que la distinction entre *calculus* et analyse sera précisée lors de la seconde partie de cet article et que cette distinction constituera une caractéristique importante de notre MER. Dans l'immédiat contentons-nous de dire que l'analyse est la période du calcul différentiel et intégral initiée par Cauchy lorsqu'il formalise pour la première fois la notion de limite en ε-δ, et le *calculus* la période précédent Cauchy.

Première partie. Cadre théorique : La notion de MER à la lumière de la TSD et de la TAD

Dans cette partie, nous présentons le cadre théorique qui nous sert de sous-bassement pour penser la notion de modèle épistémologique de référence (MER). Ce cadre théorique prend pour l'essentiel appui sur une articulation entre la théorie des situations (TSD) initiée par Guy Brousseau (1998) et la théorie anthropologique du didactique (TAD) initiée par Yves Chevallard (1992), au départ de la théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1991). L'articulation de cadres théoriques distincts n'est pas sans poser question comme en témoigne notamment Perrin-Glorian (1999) et le risque n'est pas négligeable de sombrer dans un syncrétisme de mauvais aloi. Cependant, l'articulation que nous proposons d'exposer sera dûment motivée en lien précisément avec le questionnement du savoir et la question des MER[4]. Nous montrerons en quoi cette articulation sur la question des savoirs est pour ainsi dire inévitable. Étant donné l'usage que nous souhaitons faire de notre cadre théorique, nous nous limiterons à l'exposé des éléments de TSD et TAD qui nous sont directement utiles et renvoyons le lecteur aux références données ci-dessus pour de plus amples développements ainsi qu'à celles plus spécifiques qui émailleront la suite de l'exposé.

Apport de la TSD à la question des MER : La notion de situation fondamentale

En TSD, un MER d'un savoir est construit à partir de la notion de *situation fondamentale*. En première approximation, une situation fondamentale d'un savoir est un ensemble de problèmes auxquels le savoir apporte une solution « optimale ». Affinons par

[4] Voir notamment Doukhan (2022) pour un exemple d'articulation entre théorie de l'activité et TAD et Venturini (2012) pour un exemple d'articulation entre la théorie de l'action conjointe en didactique et la théorie de l'activité.

couches successives cette notion en nous intéressant notamment de plus près à la notion de problème et au qualificatif « optimal », dont le sens peut varier en fonction des savoirs considérés. Cette pluralité de sens du qualificatif « optimal » se marquera notamment dans la distinction qui sera effectuée en cours d'exposé entre situation fondamentale *au sens strict* et situation fondamentale *au sens large*.

La notion de problème en TSD

En TSD, la notion de problème renvoie à quelque chose de plus précis que son entendement usuel où un problème est, selon la définition donnée par le Larousse en ligne[5] un « Point sur lequel on s'interroge, question qui prête à discussion, qui fait l'objet d'argumentations, de théories diverses ». Premièrement, en tant que chercheur, enseignant, apprenant nous avons probablement tous déjà rencontré et/ou fait usage de problèmes (au sens commun) dont la résolution ne nécessite pas véritablement l'utilisation du savoir dont l'enseignant va faire usage devant les apprenants pour effectuer la résolution. Ce type de déconnexion est monnaie courante dans les problèmes introductifs proposés dans les manuels scolaires sous le vocable « activité », ce qui n'est pas sans poser problème lorsque les apprenants résolvent ces problèmes par d'autres biais que celui envisagé par l'enseignant, tant ce dernier peut être mis à mal par les demandes légitimes des apprenants qui se demandent pourquoi leurs solutions « divergentes » ont été écartées. Nous renvoyons à Schneider (2008, p. 41) pour le traitement d'un exemple détaillé. Par effet de contraste, en TSD, ne sont considérés comme de véritables problèmes que ceux qui ne peuvent faire l'économie du savoir visé pour être résolus. Un problème n'est donc pas un problème en soi mais en lien avec un savoir et forment un couple. La fonction des problèmes est donc en TSD de caractériser un savoir par le fait qu'il n'est pas possible de s'en dispenser pour les résoudre. Ce caractère d'indispensabilité constitue un premier sens du qualificatif « optimal ». De manière imagée, les problèmes jouent le rôle d'« équations » et le savoir est la solution de ce système d'« équations ». De ce point de vue, le sens d'un savoir est notamment situé dans sa fonction d'outil « optimal » de résolution d'un ensemble de problèmes. En TSD, le sens d'un savoir est donc indissociable des problèmes qui le caractérisent et de l'histoire de sa constitution en tant qu'outil « optimal » de résolution de ces problèmes. Les savoirs mathématiques peuvent être porteurs de plusieurs sens, non réductibles les uns aux autres, bien qu'articulés. C'est le cas notamment des savoirs qui ont un caractère FUGS c'est-à-dire formalisateur, unificateur,

---

[5] https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/probl%C3%A8me/64046.

généralisateur et simplificateur (Robinet, 1984 ; Dorier, 1990). Il s'agit, par exemple, de la notion de limite, sur laquelle nous reviendrons par la suite, ou encore des notions d'algèbre linéaire (Dorier, 1990). Cette multiplicité de sens implique qu'un savoir donné est susceptible d'être modélisé par plusieurs situations fondamentales prenant en charge les différents sens du savoir. Pour ce type de savoirs un MER peut donc être composé de plusieurs situations fondamentales. Cette multiplicité de sens est une première porte d'entrée vers la notion de relativité institutionnelle des savoirs qui sera développée plus loin dans le cadre de l'articulation de la TSD avec la TAD.

Deuxièmement, les problèmes en TSD se démarquent également des problèmes ordinaires en lien avec la notion d'obstacle épistémologique évoquée dans l'introduction. Brousseau considère à la suite de Bachelard que

> l'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise. (Brousseau, 1983, p. 171)

La fonction des problèmes qui constituent une situation fondamentale *peut* donc également être, outre la caractéristique d'indispensabilité/ « optimalité » évoquée, de mettre à mal les connaissances antérieures des élèves qui font obstacle à l'acquisition du savoir visé et dont le franchissement est constitutif de ce savoir. Nous renvoyons le lecteur aux références suivantes pour une discussion approfondie de la notion d'obstacle épistémologique (Artigue, 1990 a; Schneider, 2008). Suite à cette première approche de la notion de situation fondamentale et le contraste établi entre problème au sens de la TSD et problème au sens usuel, il semble important de souligner qu'une situation fondamentale n'est pas une situation-problème, cette dernière en constituant le plus souvent une transposition indue. Une situation fondamentale est donc avant tout une modélisation du savoir et non un projet d'enseignement :

> […] on est parfois tenté de considérer que, dans la théorie des situations, la notion de situation fondamentale sert, avant tout, à décrire et à fabriquer des situations d'enseignement […]. On oublie alors que cette notion constitue - aussi et surtout - l'instrument-clé que propose cette théorie pour caractériser les connaissances mathématiques. (Bosch et Chevallard, 1999, pp. 80-81)

Cela étant posé, les didacticiens ont à cœur d'impacter de manière positive le système éducatif et font également des propositions d'enseignement en articulation avec la notion de situation fondamentale. Cette dialectique (qui n'est pas une assimilation) entre modélisation du savoir et projet d'enseignement est abordée notamment dans Perrin-Glorian (2019). Voir également Henrotay et al. (2011), Krysinska et Schneider (2010), Lebeau et Schneider (2009), Ngan Nguyen, Rosseel et Schneider (2009), Rosseel et Schneider (2011), Schneider et al. (2016) pour des exemples de propositions d'enseignement.

Poursuivons à présent sur le qualificatif « optimal ». Nous parlerons de *situation fondamentale au sens strict* (Schneider, 2008) lorsque le savoir apporte une solution « optimale » aux problèmes de la situation de manière « absolue ». Par exemple, les rationnels considérés comme opérateurs linéaires apportent une réponse « absolue » à la problématique de l'agrandissement de puzzles (Brousseau, 1998) dans la mesure ou toute autre procédure dont la procédure additive est invalidée dans l'action même : les pièces du puzzle qui sont agrandies par une autre procédure ne peuvent être assemblées.

Situation fondamentale au sens strict et au sens large

La notion de situation fondamentale au sens strict est cependant trop restrictive pour permettre de modéliser l'ensemble des savoirs mathématiques. La notion de limite fournit un exemple qui met en évidence les limitations de cette modélisation du savoir. Effectivement, l'architecture déductive du *calculus* que constitue l'analyse est susceptible de prendre appui sur la notion de limite, mais, suite aux travaux de Robinson (1966), elle peut également être fondée déductivement sur la notion d'infinitésimal. On ne peut dès lors considérer que la notion de limite apporte une solution optimale « absolue » au problème de fonder déductivement le *calculus*. Au moins deux[6] possibilités de fondation existent, la notion de limite n'étant qu'une possibilité parmi d'autres. C'est bien ce qu'exprime Bloch (1999) en relevant la

> non-nécessité du système de validation de l'analyse classique : historiquement, les mathématiciens ont longtemps hésité, comme on sait, entre des validations de type « classique » (inégalités, majorations) et des validations par les indivisibles, avant de se fixer sur une théorie. (Bloch, 1999, p. 188).

Si la notion de situation fondamentale au sens strict est mise à mal, l'idée de caractériser un savoir par un ensemble de problèmes n'en reste pas moins possible, pour autant qu'on accepte de relâcher la demande qu'un savoir constitue une réponse « optimale » en un sens « absolu » au profit d'une vision plus « relative ». L'exemple de la notion de limite suggère que

[6] À notre connaissance du moins. Il est tout à fait envisageable que d'autres mathématiciens se soient penchés sur la question des fondements de l'analyse réelle en la faisant reposer sur une autre notion que celle de limite ou d'infinitésimal.

cette notion apporte une solution *jugée* « optimale » au problème de la fondation déductive du *calculus, par l'institution* « analyse (standard) », tandis que la notion d'infinitésimal apporte une solution jugée « optimale » par l'institution « analyse non standard ». Nous définirons dès lors définir la notion de situation fondamentale au *sens large* (Schneider, 2008) d'un savoir *S* dans une institution *I* comme un ensemble de problèmes pour lesquels *I* considère que *S* apporte une solution « optimale » à ces problèmes. Au sens large, un savoir, son sens, et sa portée, sont relatifs à une institution qui décrète en son sein quels savoirs sont ou non acceptables et fonctionnels pour ses besoins.

1. Apport de la TAD à la question des MER : Les notions d'institution et de praxéologie

Les notions d'institution et de relativité institutionnelle

L'idée de relativité institutionnelle était déjà bien présente en germe dans les travaux de Brousseau et notamment lorsqu'il met en avant le fait que le sens du savoir peut être « correct par rapport à l'histoire de ce concept, par rapport au contexte social, par rapport à la communauté scientifique » (Brousseau, 1998). Il manque cependant un entendement de la notion d'institution qui permette d'englober les institutions usuelles mais également celles évoquées ci-dessus telles l'« analyse (standard) » et l'« analyse non standard ». C'est en ce point qu'intervient la théorie anthropologique du didactique (TAD), dont une des caractéristiques, soulignée par le qualificatif « anthropologique », est précisément d'étudier les rapports des institutions aux savoirs. Voyons en quoi consiste la notion d'institution en TAD. Selon Chevallard (1992, p. 86) « tout est objet » y compris les personnes et institutions. « Du point de vue de la « sémantique » de la théorie, n'importe quoi peut être un objet » (p. 86) et « Un objet existe dès lors qu'une personne *X* ou une institution *I* reconnaît cet objet comme un existant (pour elle) » (p. 86). En conséquence, « une institution peut être à peu près n'importe quoi » (p. 88). En particulier, une institution existe à partir du moment où une ou plusieurs personnes acceptent de s'y référer. En ce sens, « l'analyse standard » et « l'analyse non standard » constituent bien des institutions de par les personnes qui pratiquent l'une et l'autre forme d'analyse.

Nous voyons dans la plasticité des notions de base de la TAD et spécifiquement celle d'institution non pas une volonté de désinvolture théorique mais la conséquence même de l'inscription de cette théorie dans le champ de l'anthropologie. La définition large de la notion d'institution est, sous un certain versant, l'expression d'une méthodologie, une invitation à adopter le niveau institutionnel approprié pour faire sens du « réel » et y débusquer les phénomènes qui le rendent intelligible. C'est du moins ce que nous lisons dans les propos de Chevallard (1999, p. 221) :

> Le point crucial à cet égard, dont nous découvrirons peu à peu toutes les implications, est que la TAD situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. Or ce parti pris épistémologique conduit qui s'y assujettit à traverser en tous sens – ou même à ignorer – nombre de frontières institutionnelles à l'intérieur desquelles il est pourtant d'usage de se tenir, parce que, ordinairement, on respecte le découpage du monde social que les institutions établies, et la culture courante qui en diffuse les messages à satiété, nous présentent comme allant de soi, quasi naturel, et en fin de compte obligé. Selon cette vulgate du « culturellement correct », parler valablement de didactique des mathématiques, par exemple, suppose que l'on parle de certains objets distinctifs – les mathématiques, d'abord, et ensuite, solidairement, les élèves, les professeurs, les manuels, etc. –, à l'exclusion d'à peu près tout autre type d'objets, et en particulier de tous ceux que l'on croit trop vite scientifiquement non pertinents pour cette raison qu'ils apparaissent culturellement étrangers aux objets tenus pour emblématiques des questions de didactique des mathématiques. (Chevallard, 1999, p. 221)

N'est-ce pas par ailleurs une des fonctions et une des vertus de l'échelle des niveaux de codétermination didactique d'attirer notre attention sur l'intérêt et même la nécessité de porter son regard institutionnel ailleurs que sur les institutions au sens usuel pour monter dans les niveaux plus élevés de cette échelle ? Nous renvoyons le lecteur à Chevallard (2002) pour plus de détails sur cette échelle et à Job et Schneider (2010) pour d'autres exemples d'institutions en lien avec l'analyse qui illustrent tout à la fois la plasticité avantageuse de la notion d'institution, l'utilisation de l'échelle des niveaux de codétermination et plus finement le travail de modélisation didactique que peut constituer le choix d'institutions pertinentes, si ce n'est la création de telles institutions.

La notion de praxéologie

La relativité institutionnelle des savoirs souligne les rapports différents que des institutions peuvent entretenir à un savoir ce qui s'exprime par des pratiques différentes impliquant ce savoir. La TAD fournit un outil d'analyse de ces pratiques avec la notion de praxéologie qui en constitue une modélisation (anthropologique à des fins didactiques). Sommairement, une praxéologie est un quadruplet constitué, dans l'ordre, d'une tâche à accomplir, d'une technique pour réaliser cette tâche, d'une technologie qui justifie que la technique permet bien d'accomplir la tâche considérée, et d'une théorie qui offre un niveau supérieur de justification à la technique, en jouant un rôle technologique par rapport à la technologie alors envisagée comme technique de la tâche qui consiste à justifier le couple (tâche, technique). Le couple (tâche, technique) est appelé bloc pratique et correspond à un savoir-faire et le couple (technologie, théorie) est appelé « bloc logos » et correspond à un savoir. Procédons à quelques commentaires sur la notion de praxéologie en nous tenant aux éléments que nous considérons être directement utiles pour notre réflexion sur les MER. Le lecteur trouvera de plus amples détails sur la notion de praxéologie dans Bosch & Chevallard (1999), Chevallard (1992) et Schneider (2008).

La notion de praxéologie permet de modéliser des activités qui seraient volontiers labélisées comme « mathématiques » telle la suivante. La tâche consiste à résoudre une équation du second degré, la technique consiste à appliquer la formule du réalisant, la technologie est celle qui montre comme le réalisant permet de déterminer les éventuelles solutions au départ d'une mise en forme du second degré susceptible de conduire à une factorisation, la théorie est la théorie des équations. Il s'agit d'un exemple parmi d'autres et la technique envisagée n'est pas la seule possible, ni d'ailleurs la technologie considérée. Voir par exemple Bosch et Chevallard (1999) pour d'autres choix possibles.

Une utilisation majeure de la notion de praxéologie nous concernant est de nous permettre de reformuler la notion de situation fondamentale au sens large. Nous dirons qu'une situation fondamentale au sens large d'un savoir *S* dans une institution *I* est un ensemble de praxéologies pour lesquelles le savoir *S* constitue une technique jugée « optimale » par *I* pour les tâches de ces praxéologies. Nous qualifierons dès lors ces *praxéologies* de *fondamentales* en référence à la filiation avec la notion de situation fondamentale. La notion de situation fondamentale au sens large envisagée à l'aune des praxéologies (fondamentales) fournit ainsi le cadre théorique dans lequel nous envisageons la notion de MER. Les MER que nous considérons par la suite seront construits sur base de praxéologies fondamentales. D'autres modélisations du savoir sont évidemment possibles. Nous n'avons pas la prétention que les praxéologies fondamentales constituent l'alpha et l'omega concernant la modélisation des savoirs. Par contre, il nous semble important de mettre sur la table aussi nettement que possible le point de vue adopté pour aborder l'étude des savoirs. La pertinence de pareille approche sera discutée lors de la troisième partie de l'article en lien avec la notion de MER en général.

Relevons à présent le fait que du point de vue des praxéologies fondamentales, un savoir apparait comme technique permettant d'accomplir un certain nombre de tâches (fondamentales). Dans le même temps, nous avons souligné que le bloc logos correspond au savoir, ce que l'exemple des équations du second degré donné plus haut tend à accréditer. On peut dès lors se demander où est localisé le savoir en TAD ? La réponse à cette question nous est fournie par Bosch et Chevallard (1999) qui soulignent que la « distinction technique/technologie/théorie est fonctionnelle » (p. 86). Ainsi en TAD, selon les contextes institutionnel et praxéologique considérés, ce qui est technique peut également être envisagé comme technologie ou comme théorie mais également comme une tâche. Ce sont les besoins rencontrés qui détermineront les fonctions pertinentes à adopter dans une institution donnée. Formulée différemment, la notion de praxéologie est un outil polymorphe et c'est à charge du didacticien de déterminer quelles fonctions praxéologiques seront utilisées pour le mieux mettre en avant les spécificités des savoirs étudiés. En particulier, la fonction de tâche est porteuse de potentialités de modélisation itérative. Cela signifie notamment que via les tâches, une praxéologie permet de modéliser le type de pratique qui donne lieu à d'autres praxéologies. Ce caractère itératif du modèle praxéologique nous parait essentiel et sera mis à profit dans ce qui suit pour formuler notre MER du *calculus* et de l'analyse, via l'introduction de deux types de praxéologies (I et II). Voir également Bourgade, Cirade et Durringer (2023) pour d'autres développements sur la question de la localisation des savoirs en TAD.

La TSD comme garde-fou en lien avec la notion d'économie de pensée

L'utilisation centrale de la notion de praxéologie dans notre cadre théorique pourrait laisser penser que l'appui sur la TSD n'a été qu'un intermédiaire qu'on peut à présent oublier. Il n'en est rien. La TSD continue à jouer un rôle central de garde-fou par rapport à certains usages qui peuvent être faits de la TAD et que nous considérons comme déviants. Il ne s'agit évidemment pas de critiquer la TAD, théorie dans laquelle nous nous inscrivons pleinement, mais certains de ses usages. La tentation est grande lorsqu'on dispose du formalisme praxéologique de la TAD de choisir comme MER un ensemble de praxéologies dont la légitimité serait avérée du simple fait d'avoir formulé le MER dans le langage praxéologique, comme si avoir recours aux outils de la TAD était en soi un gage de validité épistémologique du modèle adopté. Ce type de déviance nous semble inévitable dès qu'on dispose d'une théorie suffisamment formalisée où à l'image des mathématiques on peut faire tourner le formalisme à vide et donner l'illusion que des mathématiques significatives ont été réalisées. L'articulation (à rebours) avec la TSD est la suivante. Le caractère relatif à une institution de l'optimalité d'un savoir ne doit pas laisser penser que n'importe quelle praxéologie est acceptable pour modéliser un savoir. Encore faut-il que la technique employée jouisse d'une certaine efficacité pour accomplir la tâche considérée. Nous prendrons ce caractère d'efficacité comme un postulat qui prend appui sur différentes références. À un niveau relativement général, l'épistémologie socio-constructiviste (Fourez, Englebert-Lecomte & Mathy, 1997) affirme que les théories scientifiques :

> sont des créations de l'esprit humain, adoptées provisoirement pour leur efficacité à réaliser un projet donné ou à interpréter des phénomènes. Mais les mêmes concepts sont rejetés ou modifiés lorsque cette efficacité est mise à mal. Il ne s'agit donc pas d'y croire mais d'en tester les limites. (Schneider, 2011, p. 177)

Cette notion d'efficacité est bien attestée dans d'autres disciplines, comme la physique, ainsi que le défend Mach (1987) en parlant d'« économie de pensée », expression dont nous nous emparons en étendant son usage aux mathématiques. De fait, l'histoire et l'épistémologie des mathématiques permettent également d'attester que les savoirs mathématiques et en particulier les modèles mathématiques sont construits pour réaliser avec efficacité les buts qui leur sont assignés. À titre d'exemple, à un niveau macroscopique, toute l'entreprise du groupe Bourbaki et la création des structures qui ont révolutionné les mathématiques du 20e siècle peuvent s'envisager comme l'expression même de cette volonté d'économie de pensée :

> Les « structures » sont des outils pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié. (Bourbaki, 1948, p. 42)

Nous renvoyons le lecteur à Job et Schneider (sous presse) pour plus de détails sur cette notion d'économie de pensée.

Deuxième partie. Ébauche d'un MER pour le *calculus* et l'analyse

Dans cette seconde partie, nous présentons un MER du *calculus* et de l'analyse qui met à contribution le cadre théorique explicité dans la partie précédente. Faute d'espace, nous ne pourrons en donner que les grandes lignes et renvoyons le lecteur à Job (2011), Job & Schneider (sous presse) et Schneider (2008, 2011) pour plus de détails.

Par *calculus*, nous entendons la période du calcul différentiel et intégral (Boyer, 1949) qui précède la genèse de l'analyse initiée par Cauchy et qui s'étend en gros de l'antiquité avec Archimède au début du 19e siècle. En contrepoint, nous désignons par le terme *analyse* la période qui s'initie avec Cauchy comme figure de proie en fondant pour la première fois le calcul différentiel et intégral sur la notion de limite algébrisée, c'est-à-dire exprimée en $\varepsilon - \delta$. Chacune de ces périodes est considérée comme une institution au sens de la TAD (Job, 2011 ; Job & Schneider, 2010).

Pour l'essentiel, notre MER est composé de deux praxéologies fondamentales (au sens évoqué plus haut), qui modélisent respectivement le *calculus* et l'analyse. La modélisation adoptée est particulière dans la mesure où ces deux praxéologies constituent des modèles de l'activité mathématique dont ces deux périodes sont les résultantes. De ce point de vue, le *calculus* et l'analyse sont donc considérés comme produits de ces deux processus. Nous nommerons de ce fait ces praxéologies respectivement praxéologie « Constitution du *calculus* » et praxéologie « Constitution de l'analyse » pour souligner leur caractère de processus.

Ces deux praxéologies sont elles-mêmes des instances de deux types de praxéologies, I et II, qui modélisent, elles aussi, deux aspects de l'activité mathématique qui ont joué (et joue encore) un rôle central dans le développement des mathématiques. De manière synthétique, le premier type de praxéologie modélise l'activité « Déterminer des grandeurs » et le second type l'activité « Concevoir une architecture déductive ».

La distinction entre *calculus* et analyse adoptée est motivée à deux niveaux. Un premier niveau est une légitimité historico-épistémologique. La transition entre les deux périodes constitue une rupture épistémologique majeure tant dans les buts et visées que dans les modes de validation adoptés qui modifient le sens et la portée des savoirs impliqués dans ces deux périodes (Job, 2011). Un second niveau plus proprement didactique est lié aux phénomènes didactiques que le modèle permet de mettre en évidence, en lien justement avec la notion d'obstacle épistémologique évoquée précédemment. Ce niveau est abordé dans la troisième partie de l'article où nous nous exprimons également, au regard des analyses didactiques que ce choix autorise, sur les raisons pour lesquelles nous avons choisi de ne pas donner de modélisation « directe » du *calculus* et de l'analyse mais plutôt des processus qui y conduisent.

Les praxéologies de type I et la praxéologie « constitution du *calculus* »

Partie 1. Les praxéologies de type I

Le type de tâches d'une praxéologie de type I consiste à déterminer des objets préconstruits au sens de Chevallard (1991). Un objet est préconstruit lorsque son existence n'est pas questionnée, parce que celle-ci est considérée comme évidente, non sujette à discussion. Le statut de préconstruit peut résulter de différentes circonstances qui peuvent éventuellement se renforcer les unes les autres. Une première considération est liée à la prégnance des sens. L'objet existe car nos sens nous permettent de le percevoir. Une seconde considération est institutionnelle. Dans certaines institutions, l'existence d'un objet peut être culturellement établie au point d'exclure tout doute. Par exemple, $\sqrt{2}$ est manipulé depuis des générations par les élèves du secondaire. En Belgique francophone, aucun n'est en mesure de prouver son existence au sens des mathématiques déductives en se référant à l'une ou l'autre construction des réels (Boniface, 2002). Malgré cela, quel élève accepterait de mettre en question cette existence, tant sa prégnance est grande dans les pratiques ordinaires des classes, hormis à avoir été poussé à une telle interrogation par le truchement d'une rencontre organisée spécifiquement à cet effet, rencontre basée par exemple sur une situation fondamentale ? En un sens anthropologique, $\sqrt{2}$ existe *de facto*. De par leur nature, les préconstruits peuvent faire l'objet de définitions mais leur existence n'est pas subordonnée à ces définitions. La définition d'un objet préconstruit relève plus souvent de la description que de la volonté de créer un appui déductif (Job, 2011), comme c'est le cas dans les mathématiques déductives typiques de l'analyse et des praxéologies de type II (voir infra).

En s'appuyant notamment sur certaines intuitions (Fischbein, 2010) relatives à ces préconstruits, on élabore une ou des techniques permettant de les déterminer. Pour l'essentiel, la validation de ces techniques ne peut pas prendre un appui exclusif sur une théorie déductive car, au sein d'une telle théorie, les objets préconstruits n'ont pas de légitimité, seuls les objets définis de manière déductive en ont une. La validation d'une technique doit dès lors également prendre appui sur un autre niveau de rationalité (Rouy, 2007) que le niveau strictement déductif. Cet autre niveau de rationalité constitue un cas particulier de technologie au sens de la TAD (Bosch & Chevallard, 1999) que l'on qualifiera de « pragmatique » : la technique est justifiée parce qu'elle donne des résultats en accord avec les résultats obtenus à l'aide d'une autre technique déjà validée par ailleurs. Ce type de validation a été omniprésent à travers l'histoire des mathématiques, notamment pendant toute la période de constitution du *calculus*, avant l'avènement de l'analyse et semble incontournable dans ce premier niveau praxéologique.

Partie 2. La praxéologie « constitution du calculus »

Au sein du *calculus*, quatre types de tâches majeures peuvent être épinglés : optimiser de grandeurs, déterminer des tangentes à des courbes, déterminer des vitesses instantanées, et déterminer des aires de surfaces et des volumes de solides. Ces tâches portent sur les objets préconstruits tangente à une courbe, vitesse instantanée, aire et volume qui, dans cette période, ne sont pas définis par le biais des limites au sens de l'analyse, ou toute autre définition strictement déductive. Ainsi la tangente en un point d'une courbe n'est pas définie algébriquement par une équation de la forme $y = ax + b$ ayant pour pente a une certaine dérivée, mais comme objet de la géométrique synthétique qui ne possède qu'un point en commun avec la courbe. L'aire sous une courbe n'est pas définie comme une intégrale mais déterminée par les objets géométriques qui en délimitent la surface, comme le segment de parabole dont l'aire, selon Archimède, est déterminée par la délimitation du segment de la parabole par une corde joignant deux de ses points (Edwards, 1994). L'existence de ces préconstruits n'est donc pas mise en cause, la conviction de leur existence s'appuie sur ce que les Grecs ont établi les siècles précédents, combinée à une certaine évidence véhiculée par les perceptions visuelles.

Les techniques employées pour déterminer ces préconstruits sont multiples. Parmi celles-ci on trouve le calcul des limites dans une phase embryonnaire et qui n'a donc pas encore été exprimé en $\varepsilon - \delta$, ou encore, le calcul plus performant des dérivées et des primitives, mais également toute une série de variantes prenant appui sur la notion d'infinitésimal. Il ne nous est pas possible de détailler toutes ces techniques dans l'espace de cet article. Contentons-nous de dire quelques mots sur le calcul des limites au stade embryonnaire pour faire sentir de quoi il retourne et le contraster avec la version moderne de la notion de limite. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages Boyer (1949), Edwards (1994) et Grabiner (2005) pour plus de détails sur ces différentes techniques.

Ce calcul des limites embryonnaire consiste, pour déterminer l'objet considéré, à supprimer des termes dans une expression algébrique et ce *sans jeu de compensation*. Un tel calcul est notamment à l'œuvre chez Fermat (1896) lorsqu'il cherche à résoudre le problème d'optimisation consistant à partager le segment AC en E, en sorte que AE × EC soit maximum (Figure 1.).

Figure 1.

Illustration du problème de partage de Fermat.

Pour trouver ce maximum, Fermat développe une technique qu'il nomme *méthode d'adégalité*. Elle repose sur l'idée qu'à « proximité » d'un maximum les variations d'une grandeur sont « faibles ». En substance, la mise en œuvre est la suivante. Notons a et b les longueurs des segments AE et AC respectivement. Le produit des longueurs à maximiser est $ba - a^2$. Notons e un accroissement de longueur du segment AE. Si e est « petit », $ba - a^2 \approx ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. Après simplifications algébriques, on obtient $be \approx 2ae + e^2$ et après division par e, il reste $b \approx 2a + e$. Fermat conclut alors en annulant e dans cette dernière expression, sans jeu de compensation, pour obtenir $b = 2a$. Il faut donc partager le segment en deux parties égales pour maximiser l'aire étudiée.

Cette technique s'apparente en germe à un calcul moderne de dérivée d'une fonction à partir de sa définition comme limite d'une fonction taux de variation moyen c'est-à-dire

$\lim\limits_{e \to 0} \frac{f(a+e)-f(a)}{e}$, avec $f(a) = ba - a^2$ et $f(a+e) = ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. De fait, à un niveau purement manipulatoire, dans ce calcul de limite, on annule e dans l'expression obtenue une fois toutes les simplifications algébriques menées à terme et la division par e effectuée.

Au-delà des similitudes de forme qui nous permettent de qualifier la méthode de Fermat de calcul des limites embryonnaire, la différence est de taille entre ces deux conceptions de la limite. Chez Fermat, le statut de e est problématique car il désigne, selon l'étape de calcul, une quantité non nulle au moment de la division par e et ensuite une quantité nulle dans l'étape finale. Les contemporains de Fermat n'en étaient pas dupes et ne se sont pas privés pour critiquer les failles logiques de sa méthode d'adégalité dont Descartes, Mersenne et Roberval (Clapié & Spiesser, 1991). Au sens actuel de la notion de limite, cette ambiguïté n'est pas présente. Si formellement, le calcul de la dérivée revient, dans le cas particulier abordé à égaler e à zéro, la procédure est parfaitement légitime et justifiée par la définition en ε-δ de la notion de limite. Fermat continue cependant à faire usage de sa méthode d'adégalité sur base de justifications pragmatiques. D'une part, il avance que sa méthode à une portée pour ainsi dire illimitée et lui permet de résoudre des problèmes jusqu'alors inédits :

> Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles ; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir. (Fermat, 1896, p. 123)

En outre, sa méthode donne des résultats en accord avec d'autres préalablement obtenus comme celui de déterminer la tangente en un point d'une parabole, résultat connu depuis l'antiquité, ou encore celui d'optimisation considéré ci-dessus.

Par la suite, Newton développera cette technique pour répondre à des problèmes de vitesses instantanées et Leibniz pour accomplir des tâches de détermination de tangentes à des courbes. Malgré les avancées, leurs discours technologiques ancrés respectivement dans la cinématique et la géométrique n'en restent pas moins de nature pragmatique. De fait, chez les fondateurs du calcul différentiel et intégral, à l'instar de Fermat, le statut des infinitésimaux impliqués reste sujet à caution à cause de leur double statut : tantôt non nuls, tantôt nuls. Leibniz par exemple considère la tangente tantôt comme droite ne possédant qu'un point commun avec une courbe, tantôt comme droite possédant une portion commune avec elle entre deux points « infiniment proches ». Il faudra attendre les travaux de Cauchy pour sortir de cet écueil et que le calcul différentiel et intégral développe des fondements théoriques plus affirmés.

Cette transition vers Cauchy est typique du lien entre praxéologies de type I et de type II. A l'issue des praxéologies de type I, les préconstruits seront définis à partir des techniques qui les déterminent pour donner prise au raisonnement déductif, ce qui nous conduit aux praxéologies de type II qui modélisent l'activité mathématique dans sa composante proprement déductive.

Les praxéologies de type II et la praxéologie « constitution de l'analyse »

Partie 1. Les praxéologies de type II

Le type de tâches d'une praxéologie de type II consiste à concevoir une architecture déductive d'une portion plus ou moins grande des mathématiques ou d'un domaine extra-mathématique, que ce dernier appartienne au monde sensible ou à d'autres disciplines déjà constituées (physique, biologie, économie, linguistique...). Une praxéologie de type II est donc une modélisation d'un type particulier d'activité mathématique.

Une architecture déductive est un ensemble de définitions et de propositions qui vérifient les caractéristiques globales suivantes. Nous nous limiterons à quelques grandes lignes, notre objectif n'étant pas de faire la théorie approfondie des architectures déductives, mais d'en cadrer suffisamment d'éléments pour prendre appui dessus pour la suite de l'exposé. Nous renvoyons à Patras (2001) pour une étude de cette notion.

Les propositions sont de deux sortes. Soit, elles sont démontrées déductivement ; soit elles sont acceptées sans démonstration avec le statut d'axiome. Démontrer déductivement signifie que les déductions effectuées constituent des instances des règles d'inférence de la logique mathématique qui sont appliquées à des définitions préalablement introduites (au sens donné ci-dessous) ou à des propositions préalablement démontrées déductivement ou ayant le statut d'axiome. Les règles d'inférence adoptées sont typiquement celles de la logique « classique » des prédicats, mais d'autres types de logique sont envisageables comme la logique intuitionniste (Largeault, 1992) en lien avec les mathématiques constructives initiées par Brouwer.

Une proposition acceptée sans démonstration s'appelle un axiome. Si un axiome n'est pas démontré au même titre qu'une proposition, ce statut entraîne cependant un travail particulier. Il s'agit de prouver la cohérence des axiomes de l'architecture déductive considérée. Démontrer la cohérence d'un ensemble d'axiomes consiste à exhiber un ensemble d'objets dont l'existence est avérée et qui satisfont ces axiomes. La question de la cohérence nous entraine bien au-delà du cadre de cet article et le lecteur intéressé peut se tourner vers les théorèmes de correction et complétude en consultant par exemple Mendelson (2015) pour plus de détails sur cette question.

Venons-en aux définitions. Dans une architecture déductive, une définition qui ne vise pas simplement à introduire une notation ou une terminologie a pour objectif de caractériser de manière déductive un type d'objets. Caractériser de manière déductive un type d'objets signifie que seules cette définition et les propriétés démontrées à partir de cette définition pourront être utilisées dans les pratiques (déductives) impliquant ce type d'objets. En particulier une définition déductive doit être accompagnée d'une proposition qui démontre l'existence d'au moins un objet la satisfaisant. Si on définit la notion de filtre (Bourbaki, 2007) en topologie, encore faut-il prouver l'existence de filtres.

Le type de tâche « concevoir une architecture déductive » peut prendre des formes diverses selon le caractère plus ou moins local/global de l'architecture à concevoir et selon qu'elle doive être créée de toutes pièces ou constitue une refonte plus ou moins importante d'une architecture préalable. Il peut notamment s'agir à un niveau local de définir (de manière déductive cette fois et non plus seulement descriptive) des objets qui étaient jusqu'alors préconstruits, au sens évoqué ci-dessus dans les praxéologies de type I, afin d'en contrôler les propriétés et l'utilisation par le seul raisonnement déductif. Mais il peut également s'agir de démontrer une proposition, d'en donner une démonstration plus simple, de la généraliser et donc potentiellement de la reformuler de manière significative pour étendre son domaine d'applicabilité, d'en affaiblir les hypothèses inutiles, etc. Ces différentes formes ne sont évidemment pas mutuellement exclusives et interagissent le plus souvent les unes avec les autres. La démonstration d'une proposition peut par exemple demander de définir déductivement de nouveaux objets qui n'avait pas d'existence préalable en tant que préconstruits, en même temps que la reformulation de son énoncé, tant au niveau des hypothèses que de la thèse.

À un niveau plus global, on peut notamment entamer une réflexion sur les aspects structurels d'une architecture en cherchant à constituer une axiomatique aussi simple que possible où les axiomes ne sont pas redondants. Cela demande alors de prouver l'indépendance de ces axiomes. En conjonction on peut mener une réflexion sur les axiomes à choisir pour permettre la démonstration à moindres frais des propositions principales de l'architecture ainsi que sur la forme à donner à ces résultats pour en faire également des outils instrumentaux. Cette focalisation sur les aspects déductifs peut avoir un coût et davantage réduire la possibilité d'une mise en correspondance avec le monde sensible et avec ce que d'aucuns appelleraient l'intuition, du moins dans son acception courante (Fischbein, 2010).

Une technique possible pour accomplir (localement) une telle tâche de mise en forme déductive est la dialectique des (tentatives de) preuves et réfutations mise en évidence par Lakatos (1984). Pour initier une telle dialectique, les techniques employées dans les praxéologies de type I pour déterminer des grandeurs peuvent servir d'inspiration pour formuler des définitions déductives.

Cette technique n'est évidemment pas algorithmique en un sens strict. De manière générale il n'y a pas de technique « canonique » pour accomplir le type de tâche « concevoir une architecture déductive ». Le caractère non algorithmique de cette technique s'explique en partie par le fait que ce type de tâche peut en général être accompli de différentes manières. Il n'existe pas en général une seule et unique mise en forme déductive d'un domaine donné. C'est ce que montre l'exemple de la notion de limite utilisé plus haut pour motiver l'introduction des situations fondamentales au sens large. À une échelle plus grande, l'histoire des mathématiques est faite de refontes déductives successives. C'est toute la question bien connue des fondements avec l'émergence de la théorie des ensembles et de la logique moderne et plus récemment l'émergence de la théorie des catégories comme nouvelle fondation possible des mathématiques (Bell, 1981).

Abordons à présent le bloc « logos » des praxéologies de type II. L'aspect de validation le plus évident est probablement le suivant. La technique employée pour constituer une architecture déductive sera validée dans la mesure où la tâche correspondante a été accomplie. Étant donné l'hyper focalisation sur le déductif, la tâche a bien été accomplie si notamment les propositions de l'architecture sont bien démontrées déductivement, les axiomes sont cohérents, les définitions renvoient bien à des classes non vides d'objets. Cet aspect ne permet cependant pas de clôturer la question de la validation. En effet, comme déjà souligné, hormis la dialectique lakatosienne évoquée plus haut qui offre quelques grandes lignes, il n'existe pas de technique algorithmique pour concevoir une architecture déductive et l'architecture résultante n'est pas forcément unique.

Produire une architecture déductive est un problème ouvert où les techniques et réponses adoptées peuvent varier en fonctions des institutions considérées et selon des critères de validation qui ne se réduisent pas des considérations strictement déductives. Une certaine subjectivité s'infiltre au sein même de ce qui pourrait initialement être considéré comme un parangon du niveau de rationalité déductif. De ce fait, selon le degré de maturation d'une architecture et des architectures concurrentes, une architecture peut être adoptée simplement parce qu'elle est la seule existante à une période donnée, en dépit de ses défauts, ou parce qu'une architecture est bien installée au regard d'une certaine tradition qui se refuse d'être renversée par une autre. Des critères esthétiques (Feyerabend, 1979) peuvent également entrer en ligne de compte : des choix de démonstrations et/ou d'agencements jugés plus élégants que d'autres. Les considérations esthétiques ne sont pas disjointes de critères qui pourraient plus volontiers être reliés à la rationalité déductive, montrant l'intrication de différents niveaux argumentaires. Ainsi une architecture peut être préférée à une autre parce qu'elle conduit à des propositions de base, plus générales et en plus petit nombre, à partir desquelles les autres résultats de l'architecture peuvent être dérivés. Plus d'un mathématicien pourrait considérer une telle architecture plus belle, justement par la perception de sa plus grande simplicité.

Notre objectif n'est pas d'énumérer tous les arguments qui peuvent intervenir dans le bloc « logos » d'une praxéologie de type II mais plutôt de sensibiliser à la pluralité des niveaux de rationalité impliqués et de ce fait à la dimension anthropologique au sein même du déductif et à la nécessité dans la constitution d'un MER relevant d'une praxéologie de type II de prendre en compte pleinement cette dimension anthropologique qui gouverne tout autant que le déductif les pratiques institutionnelles liées à un savoir, dont les pratiques transpositives (Chevallard, 1991).

L'irruption si on peut dire de considérations non strictement déductives au sein des praxéologies de type II nous semble d'autant plus importante à souligner qu'une architecture déductive résultante sera, elle, typiquement mise à contribution en tant que théorie dans le bloc « logos » de diverses praxéologies, dans une perspective strictement déductive. Ce regard différent entre architecture déductive en cours de constitution et architecture déductive constituée fait partie intégrante de notre MER et sera mis à contribution dans la troisième partie de l'article.

Partie 2. La praxéologie « constitution de l'analyse »

La praxéologie « constitution de l'analyse » qui modélise la période « analyse » est une instance des praxéologies de type II qui correspond à la tâche particulière « Constituer une architecture déductive du *calculus* ». L'articulation évoquée ci-dessus avec les praxéologies de type I et spécifiquement la praxéologie « constitution du *calculus* » est bien présente. Les techniques de détermination des préconstruits de cette dernière praxéologie sont mises à profit pour en créer des modèles déductifs : les aires sont définies comme intégrales définies, les vitesses et tangentes à l'aide des dérivées. Nombre d'historiens considèrent Cauchy comme un personnage central dans la constitution de l'analyse :

> Émile Borel, qui avait collaboré à la publication des œuvres de Cauchy, écrivait [...] que c'était Hermite qui lui avait appris « à connaître et à admirer Cauchy », et cette

> admiration n'a cessé de croître à mesure qu'il connaissait « mieux celui qui fut vraiment le créateur de l'analyse moderne ». (Dugac, 2003, 93)

L'attribution de cette paternité est en grande partie due au rôle central que Cauchy a fait jouer à la notion de limite dans son traité d'analyse (Cauchy, 1821). Cette notion était déjà bien présente avant lui mais il semble avoir été le premier, dont nous ayons connaissance et dont l'œuvre a été impactante, à avoir donné une définition déductive de la notion de limite et à l'avoir véritablement mise en œuvre pour définir les notions de dérivée, convergence d'une série… mais également pour prouver des propositions comme l'inégalité de la moyenne, en utilisant la technique désormais archétypique des ε-δ.

Étant donné cette centralité de la notion de limite, on peut avancer que cette notion constitue un élément clef de la technique permettant une mise en forme déductive du *calculus* au sein de l'institution « constitution de l'analyse standard ». Et cette définition de limite s'inscrit par ailleurs dans une dialectique lakatosienne comme argumentée dans Job (2011) au départ des travaux de Grabiner (2005) et Lakatos (1984). En quelques mots, Cauchy semble s'être inspiré, pour construire sa définition de limite, d'un lemme algébrique présent dans les travaux d'Ampère, qui a aussi travaillé au calcul différentiel et intégral, ainsi que d'un schéma de preuve présent chez Lagrange pour tenter d'estimer l'erreur commise en tronquant la série de Taylor d'une fonction à un ordre donné. En ce sens, nous venons de donner une praxéologie fondamentale de la notion de limite pour l'institution « Analyse (standard) » (Job & Schneider, 2010).

Troisième partie. Fonction générique d'un MER : Exercer la vigilance épistémologique

La fonction générique d'un MER est de permettre l'exercice d'une certaine vigilance épistémologique. De quoi s'agit-il ? Comment l'exercer ? De manière générale, exercer sa vigilance épistémologique consiste à porter un jugement sur les pratiques faisant intervenir un savoir à l'aide d'un MER de ce savoir. Plus précisément, dans quelle mesure ces pratiques sont-elles en adéquation avec le MER ? Autrement formulé, sont-elles légitimes du point de vue épistémologique mis en évidence par le MER ? Ces questions peuvent à première vue sembler anodines, voire relever de l'évidence. Nous montrerons dans ce qui suit qu'il n'en est rien, que cet exercice est central et permet notamment de rendre intelligibles des pratiques qui autrement ne feraient pas sens. Ces pratiques peuvent se situer à différents niveaux. Il s'agit tout autant des pratiques des enseignants, des apprenants, des programmes et référentiels, des manuels et des chercheurs. Partons de notre MER du *calculus* et de l'analyse pour explorer cette dimension de vigilance épistémologique.

Localisation des savoirs en TAD

Posons-nous la question de la localisation praxéologique et donc de la modélisation du savoir en TAD. Une localisation évidente, si l'on suit cette théorie exposée dans la première partie de l'article est le bloc « technologico-théorique » puisque ce bloc est appelé « bloc logos ». Cependant, comme souligné précédemment, la « distinction technique/technologie/théorie est fonctionnelle » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 86) et ce qui est technique dans un contexte institutionnel et praxéologique donné peut être tâche, technologie ou théorie dans un autre contexte. Nous pouvons dès lors localiser le savoir, ailleurs que dans le bloc technologico-théorique, en tant que technique. Cette possibilité de localisation au niveau de la technique est ce dont témoignent les types praxéologiques introduits plus haut, et spécifiquement le second, car la notion de limite y apparait comme technique permettant d'accomplir la tâche de donner une structure déductive au *calculus*. Le caractère fonctionnel des praxéologies se donne également bien à voir dans notre MER, au travers de la distinction opérée entre les praxéologies de type I et de type II, qui constituent des modélisations de facettes particulières de l'activité mathématique et donc des processus, et les praxéologies résultantes. Dans la praxéologie « constitution de l'analyse », le savoir « limite » a le statut de technique et acquière par la suite le statut de théorie dans la praxéologie « analyse » (standard). Cette possibilité, proposée par la TAD, d'envisager le savoir selon différentes fonctions, n'est pas une simple potentialité formelle, une sorte de gadget théorique, mais constitue véritablement un endroit stratégique d'exercice de la vigilance épistémologique, comme nous allons l'illustrer à présent.

Négligence, incompréhensions et manque d'articulations autour des praxéologies de type I et II et des niveaux de rationalité pragmatique et déductif

Dans Job (2011) nous avons conçu une ingénierie didactique prenant appui sur notre MER du *calculus* et de l'analyse qui organise une rencontre entre des élèves du secondaire inscrits dans une section qui prépare notamment aux études supérieures à forte teneur en mathématiques (ingénieurs, mathématiciens, physiciens) et le caractère lakatosien de la notion de limite, soit les praxéologies de type II. Cette ingénierie didactique (Artigue, 1990b, 2002) est pensée comme dispositif de recherche à caractère phénomenotechnique (Schneider & Job, 2014) et non comme projet d'enseignement. Elle montre que les élèves entretiennent un rapport épistémologique relevant du positivisme empirique, soit en substance l'idée (Fourez, Englebert-Lecomte et Mathy, 1997) que les concepts scientifiques sont des reflets « exacts » du monde qui peuvent être découverts par l'observation de « faits objectifs », indépendants des interprétations et dispositifs d'observation de l'observateur. Ce rapport constitue un obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite, suffisamment résistant et « invalidant » dans la durée (voir *infra*) pour le qualifier d'épistémologique. Ce rapport se manifeste notamment par le fait que les élèves envisagent la notion de limite comme un préconstruit (au sens évoqué plus haut). À peu de chose près, ils considèrent que la notion de limite, « tout le monde voit bien de quoi il s'agit ». Fondamentalement, pour eux, même si elle peut être mise à contribution dans une démonstration, une définition de cette notion ne fait au bout du compte que décrire une « réalité » supposément partagée. Les objections des expérimentateurs sur leurs propositions de définition, basée sur des contre-exemples les invalidant en tant qu'outil de preuve dans des démonstrations de propriétés, ne sont donc pas véritablement légitimes à leurs yeux et relèvent plus du « pinaillage » et d'une certaine mauvaise foi.

Ce rapport positiviste empirique n'est pas restreint à la notion de limite, il est également présent au niveau des principaux concepts du *calculus* et de l'analyse telles les dérivées et intégrales, et sa mise en évidence prend également appui sur notre MER du *calculus* et de l'analyse (Balhan & Schneider, 2022 ; Gantois, 2012 ; Gantois & Schneider, 2012 ; Job & Schneider, 2014 ; Rouy, 2007 ; Schneider, 1988, 1991, 1992). Il se manifeste chez les élèves de différentes manières dont les suivantes : les aires et volumes « curvilignes » ne peuvent pas être déterminés exactement au départ d'aires et de volumes « rectilignes » ; une vitesse instantanée ne peut être déterminée exactement au départ de vitesses moyennes ; la tangente est un objet premier par rapport à sa pente et de ce fait n'est pas définie par la notion de dérivée qui ne fait qu'en exprimer une propriété calculatoire. Cette posture du positivisme empirique n'est d'ailleurs pas limitée au *calculus* et à l'analyse, comme en témoigne les travaux de nos laboratoires de recherche le LADIMATH et le LADICHEC montrant sa prégnance et résistance dans divers domaines des mathématiques, lui valant la qualification au titre d'obstacle épistémologique *générique* (Schneider, 2008 ; Schneider, 2013).

Au-delà de la dimension d'obstacle, ce que ces recherches mettent en évidence, c'est le besoin et la nécessité pour les élèves, et ce pour différentes raisons, de prendre appui sur des notions mathématiques encore à l'état de préconstruit, afin d'une part de leur permettre d'éprouver les limites de ce statut de préconstruit et par suite la nécessité d'une mise à plat déductive. Cela suppose de pouvoir les faire vivre dans une durée temporelle relativement longue. D'autre part, il s'agit également de leur permettre de faire sens des techniques de détermination de grandeurs que constituent les limites, les dérivées et intégrales, sur base d'arguments qu'ils sont à même de recevoir. « À même de recevoir » désigne des arguments qui répondent aux interrogations légitimes des élèves sur la capacité des techniques à accomplir ce qu'elles prétendent accomplir. Ce besoin est évidemment en lien avec la notion d'obstacle épistémologique évoquée ci-dessus. Il s'agit par exemple d'offrir aux élèves l'accès à des arguments qui conduisent non seulement à accepter l'existence d'une vitesse instantanée mais également à son mode de détermination au moyen d'un calcul de limite sous forme embryonnaire à partir de vitesses moyennes. Nous renvoyons aux mêmes références que ci-dessus sur cet aspect, en soulignant notamment la possibilité féconde de prendre appui sur un contexte de cinématique pour faire émerger une forme embryonnaire du calcul des limites et des dérivées et comme porte d'entrée au théorème fondamental de l'analyse. C'est dans ce contexte où les élèves s'interrogent que le niveau de rationalité pragmatique et les praxéologies de type I prennent tout leur sens en mettant à profit l'ancrage à l'expérience sensible, et aux connaissances communes et acquises dans d'autres disciplines, pour tisser des réseaux de significations qui font sens pour ces élèves, au travers de la valorisation d'arguments pragmatiques, qui certes ne peuvent être réduits à des mathématiques déductives canoniques, mais n'en ont pas moins une parfaite légitimité épistémologique, comme en atteste le développement historique du *calculus* et de l'analyse.

Soulignons que, sans cette étape de travail des préconstruits, en lien avec le niveau de rationalité pragmatique, on ne peut guère espérer qu'une entrée « directe » dans du déductif « dur » puisse aboutir. En outre et parallèlement, une telle entrée empêche les élèves de travailler l'obstacle du positivisme empirique et fait violence à leur culture et à l'expérience du monde sensible d'une manière qui rend les mathématiques absconses pour plus d'un. Au-delà du respect bureaucratique à des programmes et référentiels, qu'a-t-on gagné en définitive à se cantonner au strictement déductif ? Pas grand-chose si l'on suit Rouy (2007), qui montre justement que pour les professeurs du secondaire, le niveau de rationalité déductif des praxéologies de type II est emblématique des mathématiques et de l'activité mathématique, au point que le niveau de rationalité pragmatique s'en trouve masqué, voire déconsidéré, car jugé non « rigoureux » (Rouy, 2007). Étant donné les difficultés, voire l'impossibilité de faire vivre du déductif « dur » au niveau secondaire, faute de la perception d'un autre niveau de rationalité, les enseignants en sont le plus souvent réduits à prendre appui sur des praxéologies « à trous » où le bloc « technologico-déductif » est formellement présent mais absent sur le fond. Ce vide praxéologique est alors comblé pour l'essentiel par des pratiques ostensives, dont certaines sont assumées et d'autres déguisées (Salin, 1999).

Dans la foulée on peut se poser la question de l'intérêt de faire vivre le niveau de rationalité pragmatique en dehors du cadre scolaire. Dans la formation des futurs mathématiciens et professeurs du secondaire, le travail de ce niveau de rationalité nous apparait indispensable. Les obstacles épistémologiques rencontrés chez les élèves ne s'évanouissent pas soudainement lorsque ceux-ci deviennent étudiants et entrent à l'université. À nouveau, les plonger d'emblée dans des mathématiques strictement déductives, comme il est de coutume dans de nombreux pays, les polarise sur une autre forme de rationalité, mais sans leur offrir la possibilité de les confronter à ces obstacles. De fait, l'expérience de plusieurs décennies dans la formation des enseignants de nos laboratoires de recherche montre que ces obstacles sont tout aussi présents chez les futurs enseignants (Schneider & Job, 2016) que chez les enseignants en poste eux-mêmes (Job, 2011). Plus spécifiquement, des expériences réalisées à l'Université de Liège en Belgique (Job, 2023) montrent que la posture du positivisme empirique, tout autant que chez des élèves du secondaire, constitue un obstacle à un entendement proprement lakatosien de la notion de limite par les futurs enseignants et que cette posture résiste à des confrontations « dures » et systématiques organisées sur base de notre MER du *calculus* et de l'analyse. En outre, les leçons préparées par ces futurs enseignants sur la notion de limite sont organisées de manière à renforcer la posture du positivisme empirique chez les élèves qui les suivent et ainsi créer un cercle vicieux qu'on pourrait qualifier de « boucle empiriste ». Cet état de fait ne semble pas propre à la Belgique francophone. Les données disponibles sont encore à ce stade à l'étude, mais des expériences menées en septembre 2023, dans différents états du Brésil, dans le cadre du groupe de recherche GECEMS, suggèrent des conclusions similaires.

Cette incapacité des élèves et futurs enseignants à entrer dans une dialectique lakatosienne peut être éclairée par notre MER comme une incapacité à distinguer entre la praxéologie « constitution de l'analyse » et la praxéologie résultante « analyse » (standard) c'est-à-dire à distinguer entre processus et résultante de ce processus. Formulé différemment, l'idée même que la définition de limite puisse être construite « de toutes pièces » à des fins de preuves au lieu de simplement présentée et « justifiée » sur base de pratiques ostensives semble absente pour plus d'un enseignant. Des expériences menées en Belgique et au Brésil encore en cours d'étude indiquent que, sur le fond, des (futurs) enseignants vont rejeter $\forall\varepsilon > 0\ \exists n \geq 1 : |a_n - a| < \varepsilon$ comme définition de la convergence d'une suite au profit de $\forall\varepsilon > 0\ \exists n \geq 1\ \forall m \geq n : |a_m - a| < \varepsilon$ au motif que la première ne vérifie pas les mêmes propriétés que la seconde. Ce faisant ils font l'hypothèse que la seconde est bien la seule et unique définition possible de la convergence d'une suite mais sans avoir construit cette définition le moins du monde, tant elle apparait comme la seule et unique possibilité de définir la convergence.

Cet épisode est probablement l'arbre qui cache la forêt. S'agissant de l'analyse, les qualificatifs « déductif », « formalisé », « rigoureux », qui lui sont volontiers accolés, pourraient laisser penser qu'ils font l'objet d'un consensus au point de la parfaite transparence. Il n'en est rien mais cela les enseignants n'en ont pas forcément conscience. Des expériences menées auprès de futurs enseignants montrent que ceux-ci rechignent à considérer des preuves inspirées de Cauchy (1821) comme « rigoureuses » au motif qu'elles ne font pas apparaitre des quantificateurs et ne prennent pas un appui explicite sur la logique des prédicats, alors même que Cauchy est considéré comme un des pères fondateurs de l'analyse.

Cette expérience nous semble significative d'un phénomène, pour transposer une expression de Chevallard à propos des ostensifs (Bosch & Chevallard, 1999), de réduction de l'épaisseur épistémologique du « déductif », du « formel » et du « rigoureux », ici entendus, non plus simplement comme qualificatifs, mais comme renvoyant à autant d'institutions au sens de la TAD (Job & Schneider, 2010). Cette réduction consiste effectivement à réduire la constitution d'une architecture déductive à l'usage de la logique des prédicats. Cette réduction semble intenable si on considère qu'à l'époque de Cauchy la logique des prédicats n'existait pas. Il existe donc non pas une seule et même rigueur, une seule et même « analyse » mais plutôt une histoire évolutive de ces institutions (Job, 2011) où la contribution majeure de Cauchy à l'analyse a été, comme l'indique le titre de son ouvrage (Cauchy, 1821), d'algébriser le *calculus* en fournissant précisément la formulation en ε-δ. Cette histoire se poursuit jusqu'à nos jours avec notamment Weierstrass, dont un apport est d'avoir fait reposer le *calculus* sur une notion de nombre mise au clair, puis Cantor et d'autres encore qui ont ouvert la possibilité de faire reposer le *calculus* et plus largement l'ensemble de l'édifice mathématique sur la théorie des ensembles, la logique des prédicats et plus récemment la théorie des catégories.

Cette réduction épistémologique n'est pas le propre des apprenants et enseignants. Les chercheurs eux-mêmes ne sont pas immunisés et la notion de MER apparaît alors d'autant plus fondamentale pour le chercheur lui-même et le contrôle de ses propres pratiques et la légitimité des résultats de recherche annoncés. Considérons à titre d'exemple les travaux de Przenioslo (2005) et Swinyard (2011) analysés plus en détail dans Job et Schneider (2014). Les deux travaillent avec des principes similaires. Ils proposent aux étudiants, partant d'une définition initiale de limite, d'en construire de nouvelles qui sont adaptées à des ensembles toujours plus grands de fonctions, sur base d'exemples et contre-exemples. De loin, ce type de tâche peut ressembler à une dialectique lakatosienne. De loin seulement, car les définitions successives envisagées ne sont pas évaluées par leur capacité à asseoir des preuves de nature déductive, ni non plus à déterminer des grandeurs. Elles sont évaluées à l'aune de leur capacité à décrire les caractéristiques perceptibles des fonctions d'un ensemble de référence. Ces définitions ne s'intègrent donc ni dans une praxéologie de type I, ni dans une praxéologie de type II. Leur crédibilité épistémologique est dès lors sujette à caution. À y regarder de plus près, ce type de tâche relève d'une forme sophistiquée d'ostension (Brousseau, 1998) où les étudiants doivent construire la définition que l'enseignant à en tête et non la ou les définitions permettant de répondre aux besoins d'une problématique mathématique légitime. Nous terminerons en disant que réussir à faire produire à des étudiants une définition de limite n'est pas en soi le témoin de l'acquisition de cette notion, ce qui reviendrait à confondre la résultante d'un processus, la définition de limite, avec le processus lui-même, en l'occurrence une praxéologie de type II, processus qui donne sens à la résultante.

Conclusion

Le MER du *calculus* et de l'analyse présenté à la section précédente a fait ses preuves depuis plusieurs décennies à présent, comme en témoignent les publications qu'il a permis d'engendrer. Il n'est cependant pas sans poser quelques questions. Il a initialement été conçu pour étudier l'analyse à la fin du secondaire et au début du supérieur et n'a donc pas été développé avec en tête l'étude des développements subséquents de l'analyse qui ne se limitent définitivement pas aux espaces de fonctions de variables réelles. Or, l'expérience sur le terrain montre que passé la première année d'université, les étudiants peuvent se trouver tout autant démunis à leur entrée face à des versions plus sophistiquées de l'analyse réelle qui utilisent différents types d'espaces toujours plus généraux, des espaces métriques aux espaces topologiques en passant par les espaces de Banach, les espaces vectoriels topologiques, les espaces à convergence et bien d'autres encore qui forment le lit de l'analyse moderne. La notion de limite elle-même ne se restreint pas au contexte réel et prend des formes diverses dans les espaces susmentionnés en s'appliquant à des objets toujours plus sophistiqués comme les systèmes dirigés et les filtres et même au-delà du champ usuel de l'analyse aux foncteurs en théorie des catégories. Comment dès lors faire évoluer notre MER pour prendre en charge ces différentes incarnations et poursuivre l'analyse didactique ? Telle est la question à laquelle il faudra nous atteler dans nos prochaines investigations.

Nous avons illustré comment la fonction de vigilance épistémologique peut être exercée à l'aide de notre MER du *calculus* et de l'analyse. Ces exemples ne sont pas anodins. Ils nous permettent de souligner que cette possibilité d'exercer une vigilance épistémologique est étroitement liée à la nature du MER adopté, nature qui est elle-même conditionnée par le cadre théorique dans lequel ce MER est conçu. La prise en charge de la relativité institutionnelle des savoirs nous a autorisés à distinguer entre deux niveaux de rationalité au sein des praxéologies de type I et de type II. Cette distinction a permis de situer une partie des problèmes liés au *calculus* et à l'analyse dans le manque d'articulation et de conscience de ces niveaux de rationalité et de leurs spécificités. Le caractère fonctionnel de la modélisation praxéologique de la TAD nous a permis de localiser un savoir à différents niveaux praxéologiques et en particulier a permis de considérer l'analyse tout autant comme théorie intervenant dans différentes praxéologies que comme résultante d'une activité de modélisation avec les praxéologies de type II. À la suite de la caractéristique précédente, cette distinction, couplée à la notion de situation fondamentale héritée de la TSD, et donc de savoir, considéré comme solution « optimale » d'un ensemble de problèmes, permet de redonner une certaine épaisseur épistémologique aux notions principales de l'analyse (limite, dérivée…) et de les considérer comme l'expression d'un processus de modélisation impliquant une dialectique lakatosienne. Ce regain épistémologique sert alors d'outil permettant de pointer l'obstacle épistémologique du positivisme empirique ainsi que l'incohérence d'une partie des pratiques ordinaires relatives au *calculus* et à l'analyse. La mise en évidence de ces caractéristiques pose par extension la question de celles dont un MER en général ne peut faire l'économie. En particulier, quelle serait la valeur scientifique de MER ou cadres théoriques qui ne disposeraient pas de telles caractéristiques ?

Si le questionnement épistémologique est posé comme central en didactique, dans le prolongement de la question précédente, il nous paraît inévitable d'interroger également les liens entre les théories ontologiques (implicites et explicites) sur lesquelles les chercheurs prennent appui et la nature des MER qu'ils conçoivent. Dans Job (2011), nous posons la question du lien entre postures ontologiques des enseignants et spécifiquement le platonisme et la manière dont ils abordent les questions d'enseignement et d'apprentissage. Ce type de questionnement nous semble tout aussi pertinent à développer à l'échelle des chercheurs, mais pourtant moins abordé à notre connaissance. Une contribution allant dans ce sens est l'article de Radford, Miranda et Vergel (2023) qui questionne les savoirs dans le cadre de la théorie de l'objectivation. De quelle(s) position(s) ontologique(s) notre MER porte-il les éventuelles traces ? Notre MER permet-il de questionner ces positions ontologiques et d'autres également ? Autant de questions auxquelles il nous faut également nous atteler.

Bibliographie

Artigue, M. (1990 a). Épistémologie et didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 10(2.3), 241-286.

Artigue, M. (1990 b). Ingénierie didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 9(3), 281-307.

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? Dans A. Terrisse (Dir.), Les Dossiers des Sciences de l'Éducation N°8, *Didactique des disciplines scientifiques et technologiques : concepts et méthodes* (pp. 59-72). Presses Universitaires du Mirail.

Bachelard, G. (1934). *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*. Vrin.

Bächtold, M., Durand-Guerrier, V., & Munier, V. (Eds.) (2018). Epistémologie & didactique : Synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales. Presses universitaires de Franche-Comté.

Balhan, K., & Schneider, M. (2022). L'apprentissage de l'analyse à l'épreuve du théorème fondamental. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 42*(2), 241–283. https://revue-rdm.com/2022/lapprentissage-de-lanalyse-a-lepreuve-du-theoreme-fondamental/

Bell, J.L. (1981). Category Theory and the Foundations of Mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 32(4), 349-358.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-194.

Boniface, J. (2002). *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*. Ellipses.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77–124. https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

Bourbaki, N. (1948). L'architecture des mathématiques. In F. Le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35-47). Actes Sud.

Bourbaki, N. (2007). *Topologie générale*. Springer.

Bourgade, J.-P., Cirade, G., & Durringer, C. (2023). Le « savoir » comme fonction. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 13(4), 9-41.

Boyer, C. (1949). *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Dover.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 4(2), 165–198.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.

Cauchy, A.-L. (1821). *Analyse algébrique*. Presses de l'école polytechnique.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique* (2e ed.). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-111.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 19(2), 221–266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). La Pensée Sauvage.

Clapié, M., & Spiesser, M. (1991). *Des problèmes d'extrema chez Fermat à la notion de dérivée*. IREM de Toulouse.

Develay, M. (1998). Didactique et pédagogie. Dans Jean-Claude Ruano-Borbalan, *Éduquer et Former*. Éditions Sciences humaines.

Dorier, J. (1990). Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire. *Cahier de DIDIREM*, 7.

Doukhan, C. (2022). Comment l'articulation entre théorie de l'activité et théorie anthropologique éclaire la transition secondaire-supérieur : le cas des probabilités conditionnelles. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 27, 133-167.

Dugac, P. (2003). *Histoire de l'Analyse*. Vuibert.

Edwards, C. H. (1994). *The Historical Development of the Calculus*. Springer.

Fermat, P. de (1896). *Œuvres de Fermat, Tome III*. Gauthier-Villar.

Feyerabend, P. (1979). *Contre la méthode, Esquisse d'une théorie anarchiste de la connaissance*. Le Seuil.

Fischbein, E. (2010). *Intuition in Science and Mathematics*. Springer.

Fourez, G., Englebert-Lecomte, V., & Mathy, P. (1997). Nos savoirs sur les savoirs. De Boeck Université.

Gantois, J.-Y. (2012). Un milieu graphico-cinématique pour apprendre les dérivées. Potentialités et limites [Thèse de doctorat, Université de Liège].

Gantois, J.-Y., & Schneider, M. (2012). Une forme embryonnaire du concept de dérivée induite par un milieu graphico-cinématique dans une praxéologie 'modélisation'. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32(1), 57-99.

Grabiner, J. (2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Dover.

Henrotay, P., Krysinska, M., Rosseel, H., & Schneider, M. (2011). *Des fonctions taillées sur mesure*. Presses universitaires de Liège.

Job, P. (2011). Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques [Thèse de doctorat, Université de Liège].

Job, P. (2023, 12 septembre). *Didactique et notion de limite. Vers un modèle épistémologique de référence (MER) partagé* ? [Conférence] Séminaire de didactique des mathématiques, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Job, P., & Schneider, M. (2010). Une Situation Fondamentale pour le Concept de Limite ? Question de Langage de Culture ? Comment la TAD Permet-elle de Problématiser cette Question ? Dans A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard & C. Ladage (dir.), *Actes du 2ième congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (TAD) : Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 615-632). Uzès (France) du 31 octobre au 3 novembre 2007 : IUFM de l'académie de Montpellier.

Job, P., & Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of *calculus*. *ZDM Mathematics Education*, 46, 635–646.

Job, P., & Schneider, M. (sous presse). Quel enseignement pour préparer les apprenants à la modélisation mathématique ? In Commission Inter-IREM Didactique (org.), *Rencontres autour de la compétence "Modéliser"*. IREM de Poitiers.

Krysinska, M., & Schneider, M. (2010). *Emergence de modèles fonctionnels*. Presses universitaires de Liège.

Kuhn, Thomas S. (1996). *The Structure of Scientific Revolutions* (3rd ed.). University of Chicago Press.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et refutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Hermann.

Lakatos, I. (1994). *Histoire et méthodologie des sciences : programme de recherche et reconstruction rationnelle.* Presses Universitaires de France.

Largeault, J. (1992). *L'Intuitionisme*. Presses universitaires de France.

Lebeau, C., & Schneider, M. (2009). *Vers une modélisation algébrique des points, droites et plans*. Presses universitaires de Liège.

Mach, E. (1987). *La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement* (Bertrand, É., Trad.). Sceaux : J. Gabay (œuvre originale publiée en 1883).

Matheron, Y. (2009). *Mémoire et étude des mathématiques : une approche didactique à caractère anthropologique*. Paideia.

Mendelson, E. (2015). *Introduction to Mathematical Logic* (6th ed.). Routledge.

Ngan Nguyen, G., Rosseel, H., & Schneider, M. (2017). *Une approche heuristique d'une géométrie calculatoire*. Presses universitaires de Liège.

Patras, F. (2001). *La pensée mathématique contemporaine.* Presses Universitaires de France.

Perrin-Glorian, M.-J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 19(3), 279–322. https://revue-rdm.com/1999/problemes-d-articulation-de-cadres/

Perrin-Glorian, M.-J. (2019). L'ingénierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 9(1), 45-82.

Popper, K. (1973). *Logique de la découverte scientifique*. Payot.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 71–93.

Radford, L., Miranda, I., & Vergel, R. (2023). Savoir mathématique et action didactique dans la théorie de l'objectivation. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 13(4), XX – XXX.

Robinet, J. (1984). *Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur* [Thèse de doctorat, Université Paris VII].

Robinson, A. (1966). *Non-standard analysis*. Princeton University Press.

Rosseel, H., & Schneider, M. (2009). *Des grandeurs inaccessibles à la géométrie du triangle*. Presses universitaires de Liège.

Rosseel, H., & Schneider, M. (2011). *Ces nombres qu'on dit imaginaires sont-ils vraiment des nombres* ? Presses universitaires de Liège.

Rouy, E. (2007). Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changement de posture vis-à-vis de la rationalité [Thèse de doctorat, Université de Liège].

Salin, M.-H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants. Dans G. Lemoyne & F. Conne , *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 327-352). Les Presses de l'Université de Montréal.

Schneider, M. (1988). Des objets mentaux 'aires' et 'volumes' au calcul des primitives [Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain-la-Neuve].

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des 'découpages infinis' des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 11(2.3), 241-294.

Schneider, M. (1992). À propos de l'apprentissage du taux de variation instantanée. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 317-350.

Schneider, M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques. La didactique par des exemples et contre-exemples*. Les Éditions de l'Université de Liège.

Schneider, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique? In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, & P. Gibel (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques : actes de la XVe école d'été de Didactique des Mathématiques* (pp.175-206). La Pensée Sauvage.

Schneider, M. (2013). Un obstacle épistémologique comme trait d'union des travaux d'un laboratoire de didactique des mathématiques. In C. Sylvie, & M. Haspekian (Eds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des mathématiques 2012* (pp. 215-228). IREM de Paris.

Schneider, M., Balhan, K., Gerard, I., Henrotay, P. (2016). *Du calcul infinitésimal à l'analyse mathématique*. Presses universitaires de Liège.

Schneider, M., & Job, P. (2016). Ingénieries entre recherche et formation, *Éducation et didactique,* 10(2), 91-112. https://journals.openedition.org/educationdidactique/2508

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: the case of Amy and Mike. *Journal of Mathematical Behavior, 30,* 93–114.

Venturini, P. (2012). Action, activité, « agir » conjoints en didactique : discussion théorique. *Éducation et didactique*, 6(1), 127-136.