EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i2p281-343

Situações para a aprendizagem da prova em matemática: Estado da pesquisa e questões em aberto[1]

Situations for the learning of proof in mathematics: A review of research and open questions

Situaciones de aprendizaje de la prueba en matemáticas: Estado de la investigación y cuestiones pendientes

Situations pour l'apprentissage de la preuve en mathématiques : État de la recherche et questions ouvertes

Nicolas Balacheff[2]
Directeur de recherche CNRS émérite, Equipe MeTAH, Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain Laboratoire d'informatique de Grenoble Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP
https://orcid.org/0000-0001-7084-3482

Tradução

Saddo Ag Almouloud[3]
Universidade Federal do Pará
Doutor em Matemática e Aplicações
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Resumo

Pesquisas sobre a complexidade epistêmica, lógica e discursiva da aprendizagem de provas têm gerado uma literatura abundante nas últimas duas décadas. Seus resultados contribuem para uma compreensão mais precisa das dificuldades encontradas pelos alunos e do trabalho dos professores. Sustentam a concepção de situações, em particular situações de validação no sentido da Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau,1998), em que a prova funciona como ferramenta de resolução de problemas. No entanto, permanece a dificuldade de apreender a prova como objeto, a fim de reconhecer suas especificidades matemáticas e institucionalizá-la como tal. Este é o problema de que trata este texto. Este texto complementa as apresentações

[1] **Texto original**: Balacheff, N. (2024). Situations pour l'apprentissage de la preuve en mathématiques. État de la recherche et questions ouvertes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Numéro spécial. *Synthèses et perspectives en didactique des mathématiques. Preuve, modélisation et technologies numériques*, 15-59, https://doi.org/10.46298/rdm.12905

[2] E-mail: Nicolas.Balacheff@imag.fr
[3] E-mail: saddoag@gmail.com

feitas no Seminário Nacional de Didática da Matemática, em 2017, e no [4]CORFEM, em 2019. O objetivo comum a essas três palestras era aprender e ensinar a prova antes da sua introdução [5]como uma forma canônica de prova em matemática. Após uma introdução que recorda o contexto institucional e científico, a primeira parte (secções 2 a 4) é dedicada ao estado da investigação, retomando os relatórios de trabalhos significativos, relacionados com diferentes abordagens; e a segunda parte (secção 5) apresenta propostas para formar uma base para a investigação futura. A conclusão centra-se nas questões abertas pela necessidade de engenharia situacional específica para incentivar e acompanhar a gênese e o reconhecimento dos padrões de prova na sala de aula de matemática, antes do ensino explícito da prova.

Palavras-chave: Didática da matemática, Teoria das situações didáticas, Prova, Demonstração, Argumentação.

Abstract

Research on the epistemic, logical, and discursive complexity of proof learning has generated a wealth of literature over the past two decades. The results contribute to a more precise understanding of the difficulties encountered by students and those encountered by teachers. They support the design of situations, especially validation situations in the sense of the Theory of Didactical Situations (TDS—Brousseau, 1998), in which proof is a problem-solving tool. However, there remains the difficulty of grasping proof as an object, recognizing its mathematical specificities and institutionalizing it as such. This is the topic of this text. This text complements those given at the *Séminaire national de didactique des mathématiques* in 2017 and at CORFEM in 2019. The common theme of these three presentations was the learning and the teaching of proof before the introduction of mathematical proof as the canonical form of proof in mathematics. After an introduction recalling the institutional and scientific context, the first part (sections 2 to 4) is devoted to a review of the state of research, taking into account the reports of outstanding work from different approaches. In the second part (section 5), proposals are made to provide a basis for future research. The conclusion considers the issues raised by the need for situation-specific engineering to encourage and support the genesis and recognition of proof norms in the mathematics classroom, prior to the explicit teaching of the introduction of mathematical proof.

Keywords: Didactics of mathematics, Theory of didactic situations, Proof, Mathematical proof, Argumentation.

[4] Convém explicitar esta sigla.
[5] Os destaques em verde indicam exclusões para eliminar repetições.

Resumen

La investigación sobre la complejidad epistémica, lógica y discursiva del aprendizaje de la demostración ha generado abundante literatura en las dos últimas décadas. Los resultados contribuyen a una comprensión más precisa de las dificultades a que se enfrentan los alumnos y a cuáles se enfrentan los profesores. Estos resultados, refuerzan la utilidad de la noción de situación; en particular de situación de validación en el sentido de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD – Brousseau, 1998), en las cuales la prueba funciona como una herramienta de resolución de problemas. Sin embargo, sigue existiendo una dificultad de entender la demostración como objeto, reconocer sus especificidades matemáticas e institucionalizarla como tal. Es en este problema en que se centra este texto, que desarrolla los elementos presentados en la 21ª Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas. Este texto completa las comunicaciones presentadas en el Séminaire national de didactique des mathématiques (2017) y en el CORFEM (2019). El tema común de estas tres presentaciones fue el aprendizaje y la enseñanza de la prueba antes de la introducción de la demostración como forma canónica de prueba en matemáticas. Tras una introducción en la que se recuerda el contexto institucional y científico, la primera parte (secciones 2 a 4) está dedicada a una revisión del estado de la cuestión retomando los relatos de trabajos destacados desde distintos enfoques. La segunda parte (sección 5) presenta propuestas para sentar las bases de futuras investigaciones. La conclusión aborda las cuestiones abiertas por la necesidad de una ingeniería de situaciones específica para fomentar y apoyar la génesis y el reconocimiento de las normas de la prueba en el aula de matemáticas antes de la enseñanza explícita de la demostración.

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas, Teoría de las situaciones didácticas, Prueba, Demostración, Argumentación.

Résumé

Les recherches sur la complexité épistémique, logique et discursive de l'apprentissage de la preuve ont suscité une abondante littérature au cours des deux dernières décades. Leurs résultats contribuent à une compréhension plus précise des difficultés rencontrées par les élèves et de celles du travail des professeurs. Ils confortent la conception de situations, notamment les situations de validation au sens de la Théorie des situations didactiques (TSD – Brousseau, 1998), dans lesquelles la preuve fonctionne comme outil de résolution de problèmes. Cependant, subsiste la difficulté de saisir la preuve comme objet, pour en reconnaitre les spécificités mathématiques et l'institutionnaliser en tant que telle. C'est sur ce problème que porte ce texte. Ce texte complète ceux des exposés faits au Séminaire national de didactique des mathématiques en 2017 et au CORFEM en 2019. Ces trois exposés avaient pour objet commun l'apprentissage et l'enseignement de la preuve en amont de l'introduction de la démonstration comme forme canonique de preuve en mathématique. Après une introduction rappelant le contexte institutionnel et scientifique, une première partie (sections 2 à 4) est consacrée à un état de la recherche en reprenant les comptes-rendus de travaux marquants relevant de différentes approches, une deuxième partie (section 5) avance des propositions pour constituer une base pour les recherches à venir. La conclusion porte sur les questions ouvertes par le besoin d'ingénieries spécifiques des situations pour susciter et accompagner la genèse et la reconnaissance des normes de la preuve dans la classe de mathématique avant l'enseignement explicite de la démonstration.

Mots-clés : Didactique des mathématiques, Théorie des situations didactiques, Preuve, Démonstration, Argumentation.

Situações para a aprendizagem da prova em matemática: uma revisão da pesquisa e questões abertas

1. Introdução

A aprendizagem da prova[6] ou demonstração, ou do raciocínio dedutivo ou do raciocínio matemático, está incluída no projeto pedagógico em todos os níveis de escolaridade em todos os países. Isso é evidenciado pelos estudos de avaliação do PISA (OECD, 2019, pp. 79, 81; PISA Mathematics Frameword, 2022 e Trends in International Mathematics and Sciences Study (TIMSS) (2021, pp. 16-17. As avaliações PISA centram-se no desempenho dos alunos de 15 anos, enquanto as avaliações TIMSS incidem sobre os alunos CM1 e quarto[7]. Utilizo este último estudo para ilustrar a tendência institucional. As avaliações TIMSS distinguem entre domínios de conteúdo e domínios cognitivos. Os domínios de conteúdo definem os temas matemáticos cobertos pela avaliação, e os domínios cognitivos definem os conjuntos de comportamentos esperados dos alunos, ao se envolverem em uma atividade matemática (TIMSS, 2003, in O'Connor et al., 2003, p. 9). As questões relacionadas à validação são abordadas no domínio cognitivo intitulado “raciocínio”. Eis a descrição mais recente:

> O raciocínio matematicamente envolve pensamento lógico e sistemático. Inclui raciocínio intuitivo e indutivo baseado em padrões e regularidades que podem ser usados para chegar a soluções para problemas. Evidências de processos de raciocínio podem ser encontradas na explicação ou justificação de um método de solução, ou na realização de inferências válidas com base em informações e evidências. O raciocínio é necessário para analisar ou generalizar relações matemáticas. Embora muitas das habilidades cognitivas listadas no domínio do raciocínio possam ser aproveitadas ao pensar e resolver problemas complexos, cada uma por si só representa um resultado valioso da educação matemática, com o potencial de influenciar o pensamento dos alunos de forma mais geral. Por exemplo, o raciocínio envolve a capacidade de observar e fazer conjecturas. Envolve também *fazer deduções lógicas com base em pressupostos e regras específicas e justificar resultados*. (TIMSS, 2023, in Mullis et al., 2021, pp. 16-17, *meus itálicos*).

Os objetivos de aprendizagem do domínio cognitivo são expressos em termos de comportamentos: [8]Analisar, Generalizar, Sintetizar/Integrar, Justificar. Este último foi rotulado como Justificar/Provar em 2003, mas apenas *Justificar* permaneceu para campanhas de

[6] Para vincular esse texto a outros da literatura contemporânea em língua inglesa, é importante observar que *preuve* é traduzido como *prova* e *démonstration* como *prova matemática* (ou *prova* quando o contexto não é ambíguo). A palavra inglesa *demonstration* foi usada na matemática até o início do século XX.

[7] Respectivamente, “grau 4” e “grau 8” na nomenclatura internacional.

[8] Estes verbos poderiam ser iniciados por minúsculas?: analisar, generalizar, sintetizar/integrar, justificar. Este último foi rotulado como justificar/provar. *justificar*

avaliação subsequentes. Na França, em 2017, Cédric Villani e Charles Torrossian lideraram uma missão sobre o ensino da matemática a pedido do Ministério da Educação Nacional. A carta missionária pede, em particular, "que se façam recomendações sobre os diferentes níveis anuais de aquisição nas escolas primárias, médias e secundárias" (Villani & Torossian, 2018, p. 94). Uma seção deste relatório é dedicada à Prova, na qual os autores afirmam que "a noção de prova está no cerne da atividade matemática, seja qual for o nível (apropriadamente, essa afirmação é válida do jardim de infância à universidade)"[9]. Tal recomendação é um novo desafio na história da educação matemática na França. Até agora, independentemente do vocabulário escolhido, esse aprendizado não era realmente considerado possível antes do quarto ciclo, mais precisa e classicamente, a oitava série (Balacheff, 2023).

Tabela 1.

Evolução da definição dos termos Justificar e Provar usados pelos documentos de estrutura do TIMSS (estruturas de avaliação) de 2003 a 2023 para o nível CM1 (4.ª série)

2003	Justificar/provar	"Fornecer evidências da validade de uma ação ou da veracidade de uma declaração por referência a resultados ou propriedades matemáticas; desenvolve argumentos para provar ou refutar declarações, com informações relevantes." (/ TIMSS, 2003, in O'Connor et al., 2003, p. 33).
2007	Justificar	"Fornecer uma justificativa para a verdade ou a falsidade de uma afirmação, com referência a resultados ou propriedades matemáticas" (TIMSS, 2007, in Mullis et al., 2007, p. 38).
2008	Justificar	"Fornecer uma justificativa para a verdade ou falsidade de uma afirmação com referência a resultados ou propriedades matemáticas." (TIMSS, 2008, in Garden et al., 2008, p. 22).
2011	Justificar	"Fornecer uma justificativa com referência a resultados matemáticos conhecidos ou propriedades". (TIMSS, 2011, in Mullis et al., 2009, p. 46).
2015 2019 2023	Justificar	Fornecer argumentos matemáticos para apoiar uma estratégia ou solução. (TIMSS, 2019; in Mullis *et al.*, 2017, p. 24; TIMSS, 2023, in Mullis et al., 2021, p. 17; TIMSS, 2015, in Mullis & Martin, 2014, p. 27).

De fato, a prova, ou a questão da validade de um resultado ou de um raciocínio, aparece em programas recentes. Ela foi o tema de um comentário detalhado (EDUSCOL, 2016). A resposta a esse desafio pode ser encontrada em pesquisas realizadas ao longo de várias décadas sobre o tema da prova, com abordagens notadamente cognitivas, lógicas, epistemológicas e

[9] O *National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática)*, no início dos anos 2000, recomendou: "O raciocínio e a prova devem ser uma parte consistente das experiências matemáticas dos alunos do pré-jardim de infância até a 12ª série". (NCTM, 2000, p. 56, citado por Hanna e de Villiers, 2012, p. 207).

didáticas. As primeiras delas, que se concentram essencialmente no aluno ou no objeto de ensino, produziram resultados bastante claros. Entretanto, isso raramente acontece com a pesquisa sobre modelagem *didática de situações*, em que o objetivo é ensinar provas. A razão para isso é a dificuldade de determinar as condições para a transição da prova como ferramenta[10] de resolução de problemas para a prova como objeto, cujas características, se explicitadas, permitiriam que ela fosse reconhecida como tal e institucionalizada (Balacheff, 1988, pp. 580-581, 2019b; Brousseau & Gibel, 2002, p. 217; Grenier & Payan, 2002, p. 201; Stylianides, 2007, p. 15).

A principal ferramenta para criar situações nas quais a questão da validade de um enunciado, problematizada e tratada pelos alunos, é *o esquema de validação explícita*, conforme definido pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau, 1986, 1998, pp. 109-112). As situações a ele correspondentes são *situações de validação*[11], que têm as características de uma *situação adidática* (pp. 58-59) com um componente epistêmico que é regulado pelo *milieu* de referência e um componente social que permite a geração de uma *dialética de provas e refutações*. Nessas situações, a questão que move os alunos é a de provar a validade de um enunciado, e não as características que tornam essa prova aceitável. É certo que muitas delas estão subjacentes aos possíveis conflitos, mas não são formuladas –por exemplo, o terceiro excluído. O problema que nos colocamos diz respeito a esses critérios de aceitabilidade, a seu reconhecimento e a sua apropriação pelos alunos nos diferentes níveis de escolaridade. Para isso, a situação de validação deve incentivar uma mudança no questionamento: da validade do enunciado em si para a legitimidade e a natureza de sua prova.

Sem nenhuma característica específica, *as situações de validação do ponto de vista da solução de um problema são situações de ação do ponto de vista da prova*.

O postulado fundador da TSD afirma que é necessário que o conhecimento a ser aprendido "tenha funcionado como tal em debates científicos e em discussões entre estudantes" (Brousseau, 1981, 1998, pp. 218-220). Trata-se de proporcionar uma situação não mais a um proponente e um oponente, nem mesmo de pequenas equipes em competição, descritas pelo

---

[10] Definição - "Dizemos que um conceito é uma ferramenta quando concentramos nosso interesse em como ele é usado para resolver um problema. A mesma ferramenta pode ser adaptada a vários problemas, e várias ferramentas podem ser adaptadas ao mesmo problema. Por objeto, queremos dizer um objeto cultural que tem seu lugar em um edifício mais amplo, que é o conhecimento acadêmico socialmente reconhecido em um determinado momento" (Douady, 1986, p. 6).

[11] Definição - "As situações de validação envolvem dois jogadores que se confrontam sobre um objeto de estudo composto de mensagens e descrições que o aluno produziu, por um lado, e o ambiente a-didático que serve de referência para essas mensagens, por outro. Os dois jogadores são alternadamente um 'proponente' e um 'oponente' ; eles trocam afirmações, provas e demonstrações sobre esse par 'ambiente/mensagem' ". (Brousseau, 1986, 1998, p. 108)

esquema de validação explícita, mas de propô-la a uma comunidade de cerca de trinta alunos e um professor, na qual é complexa a regulação das interações sociais designadas pelas expressões "debate científico" e "discussão". O debate científico particularmente complexo quando o objetivo é chegar a um *acordo matemático* sobre a solução de um problema, porque a fronteira entre a dialética e a polêmica é sempre frágil. É ainda mais complexo quando o desafio é chegar a um consenso em outro nível, o "nível meta" (Robert & Robinet, 1996), o das regras subjacentes ao acordo. Isso exige que elas sejam reconhecidas, formuladas e, por fim, *institucionalizadas*.

A relação entre os dois níveis de concordância, o da prova-ferramenta e o da prova-objeto, é estreita e sistêmica: qualquer discordância em um nível potencializa a discordância no outro. Mas há uma assimetria: o acordo sobre as regras geralmente é implícito, enquanto o acordo sobre a prova em si é explícito. Assim que a última é acordada, não parece mais necessário tornar a primeira explícita.

A força desse consenso decorre de um princípio de economia natural que impede a criação da prova como um objeto. Os resultados do trabalho sobre o ensino da prova esbarram neste obstáculo: eles atestam a possibilidade de "debates científicos", mas também a incapacidade de os levar a uma conclusão a ponto de poder compartilhar o reconhecimento do que torna suas conclusões legítimas.

No final da década de 1980, esse era um problema em aberto (Balacheff, 1988, pp. 580 e seguintes). E ainda é. O documento que definiu o estudo do ICMI *Proof and proving in mathematics education* (2007-2012) fez a seguinte pergunta: "Que argumentos os professores podem usar na escola e na universidade para promover a apreciação dos alunos sobre o significado da prova e para motivá-los a provar teoremas?" (Hanna et al., 2012, p. 450). Essa pergunta permaneceu sem resposta, mas foi reformulada, passando para o domínio da ação e da situação:

> Quais ações do professor e qual atmosfera da sala de aula podem apoiar ou dificultar o desempenho, e como todos esses fatores podem variar de acordo com a idade ou o nível do aluno, o tipo de matemática e as especificidades do tipo de prova que está sendo usada? (Dreyfus et al., 2012, p. 207, itálico meu).

Em 2018, *o grupo temático Raciocínio e prova na educação matemática*, no congresso ICME-13, abordou novamente esse tema, mas sem nenhum progresso notável. A conclusão da seção dedicada aos problemas de prova em sala de aula simplesmente sugere que o leitor interessado encontrará informações, perspectivas ou ideias úteis nesse relatório (Even, 2018, p. 149).

O objetivo do presente texto é retomar essas questões no contexto da TSD, ou seja, buscar as condições que uma situação de ensino deve satisfazer para otimizar[12] a possibilidade de surgimento da prova não apenas como uma ferramenta, que é necessária, mas também como um objeto. A retomada, por Andreas Stylianides, da pesquisa original de Deborah Ball (1993) oferece uma oportunidade de fazer uma observação que ilustra concretamente a complexidade da tarefa:

> Por fim, o envolvimento dos alunos com as conjecturas terminou sem que os alunos chegassem a um acordo sobre uma prova e sem que o professor ratificasse uma suposta prova ou explicasse por que outros argumentos não poderiam ser considerados provas. Assim, o episódio terminou sem uma situação de institucionalização (Brousseau, 1981), ou seja, uma situação que visaria apontar e dar um status oficial a algum conhecimento que foi construído durante a atividade em sala de aula (Stylianides, 2007, p. 15).[13]

Deborah Ball (1993) iniciou seu programa de ciências "com um olho no horizonte matemático". Entre outras questões, ela questiona quais são as concepções de prova das crianças de 8 anos e, de forma mais ampla, o que permite que elas garantam a verdade de "algo" p. 383). Sua abordagem é experimental e empírica, envolvendo o projeto, a implementação e a observação de uma orquestração do papel do professor. Nessa problemática, reconhecemos as questões levantadas pelo ICMI. Os princípios que orientam o projeto, os sucessos e os fracassos são relatados em detalhes. O resultado assume a forma de um exemplo analisado que pode ser um recurso para o ensino ou, melhor ainda, uma fonte de inspiração.

Proponho, no que se segue, uma revisão da pesquisa, seguida de uma reflexão sobre as questões levantadas, do ponto de vista das situações, conforme definido pela TSD. A literatura é abundante e de qualidade desigual. Optei por selecionar[14].

---

[12] Escolhi essa formulação para levar em conta e enfatizar o não determinismo inerente à situação real de ensino - frequentemente evocado pela palavra "terreno" ou pela expressão "condições ecológicas". Na prática, os conhecimentos adquiridos com a pesquisa sobre a didática da matemática são utlizados para desenvolver um projeto de ensino em um sistema complexo, no sentido dado a essa noção por Edgard Morin e Jean Louis Le Moigne. Essa complexidade exige que as dimensões psicológica, pedagógica, sociológica, econômica e até mesmo política e cultural sejam levadas em consideração, todas elas interagindo com as dimensões matemática e didática. A didática da matemática, por si só, não pode resolver os problemas do ensino da matemática, mas faz uma contribuição fundamental porque é a matemática que está em jogo. Com o advento das novas normas ortográficas, a Academia Brasileira de Letras optou por excluir o hífen nas expressões compostas pelo advérbio "não".

[13] *Finally, students' engagement with the conjectures ended without the students reaching an agreement on a proof and without the teacher ratifying a purported proof or explaining why other arguments could not count as proofs. Thus, the episode ended without a situation for institutionalization (Brousseau, 1981), that is, a situation that would aim at pointing out, and giving an official status to, some piece of knowledge that has been constructed during the classroom activity* (Stylianides, 2007, p. 15).

[14] Admito a caráter arbitrário dessas escolhas.

1. Trabalhos que estão no paradigma da aprendizagem baseada em questionamento (*inquiry based learning*, IBL) (Artigue, 2018). Seu objetivo comum é criar situações de ensino que incentivem os alunos a se envolverem com o problema da prova (Ball, 1993; Lampert, 1990; Maher & Martino, 1996). Essas pesquisas respondiam às recomendações dos "padrões" americanos do final da década de 1980. São pioneiros em sua natureza. Seus principais artigos são referências reconhecidas na literatura internacional e influenciaram fortemente a pesquisa no mundo de língua inglesa. Os trabalhos de Paul Cobb ocupam um lugar especial, e eu o levo em consideração, ao introduzir o conceito de norma sociomatemática que eles ajudaram a forjar. Por fim, Patricio Herbst propôs análises que nos permitem traçar os contornos de uma síntese, e elas são levadas em conta mais particularmente na última parte deste curso.
2. Dois trabalhos no paradigma da didática da matemática que abordam explicitamente a situação de ensino para a aprendizagem de provas no ensino fundamental como um objeto complexo ((Boero & Douek, 2008; Grenier, 2009; Legrand, 1993; Mantes & Arsac, 2007). Esses trabalhos geralmente foram realizados na interface entre a pesquisa acadêmica e a prática de ensino. Eles são amplamente divulgados e, de certa forma, são referências na área.

2. A prova como um padrão sociomatemático em sala de aula

O objetivo das pesquisas, cujos principais aspectos apresento nesta seção, é testar modelos construídos com base em diferentes teorias nas condições da prática real do professor e examinar seu escopo, tendo em mente a diferença de natureza entre o conhecimento baseado em estudos empíricos ou analíticos e aquele forjado na prática real de ensino (Lampert, 1990, p. 37). Esses trabalhos respondem às demandas institucionais do final da década de 1980 nos Estados Unidos da América[15], que recomendavam que, em vez de aprender vocabulário e técnicas elementares, os alunos deveriam aprender a fazer matemática, ou seja, *conjecturar, explicar, validar, discutir e questionar em uma comunidade matemática.*

Os quadros teóricos de referências, que fornecem princípios para a elaboração e a implementação de ensino baseado em evidências são muitos. Os projetos abrangem um longo período, um ano ou mais.

A metodologia (cf. Herbst & Chazan, 2009) é a de estudos de caso conduzidos com a mesma pessoa no papel de professor e pesquisador – estudos em primeira pessoa –, de acordo com a fórmula: "Usando a mim mesmo como objeto e ferramenta de minha investigação" (Ball, 1993, p. 375). Os dados foram coletados por vários meios – gravações de vídeo, anotações,

[15] Veja, por exemplo: Ball (1991, p. 16); Lampert, (1990, pp. 32-33).

diários de bordo, produções dos alunos, introspecção – e analisados utilizando métodos etnometodológicos e sociolinguísticos.

A questão do significado do conhecimento vem em primeiro lugar e, nesse aspecto, a problemática desta pesquisa é epistemológica e tem ligações com a da didática da matemática, concentrando-se nos *fundamentos afetivos e sociais da prova matemática* – aqui, para caracterizar essa abordagem, tomo emprestadas palavras de Guy Brousseau (1981, 1998, pp. 240 e seguintes). A TSD inclui essa dimensão porque "*o professor deve administrar o investimento afetivo e o desejo de seus alunos*" (p. 240), mas busca nas especificidades do conhecimento os meios para atender a essa exigência. Os trabalhos apresentados nesta seção procuram esclarecer esses meios, analisando as interações entre o professor e os alunos. É o papel do professor que é o objeto de estudo (Jones & Herbst, 2012).

As três seções a seguir apresentam os trabalhos de Deborah Ball e Magdalene Lampert, por seu caráter exemplar e sua influência na pesquisa sobre o *aprendizado de evidências na comunidade da sala de aula*. Seu foco principal é o papel e o trabalho do professor. Os trabalhos de Ball e Lampert são semelhantes, em termos de questões e métodos[16]. Os trabalhos de Carolyn Maher se enquadram na mesma estrutura, mas com a originalidade de realizar um estudo longitudinal de cinco anos. O campo de pesquisa é o ciclo 2 e o final do ciclo 3. Uma síntese da estrutura desses estudos e de suas contribuições é apresentada na seção 3.

2.1.Conhecer as matemáticas

Magdalene Lampert (1990) apresenta seu artigo como um ensaio. A professora e pesquisadora compartilham um relato sobre a aprendizagem do que significa saber matemática no contexto social da sala de aula e mostra como o professor pode agir para criar e manter uma estrutura de participação intelectualmente aberta (p. 34):

> Presumi que mudar as ideias dos alunos sobre o que significa saber e fazer matemática era, em parte, uma questão de criar uma situação social que funcionasse de acordo com regras diferentes daquelas que normalmente vigoram nas salas de aula e, em parte, desafiar respeitosamente suas suposições sobre o que significa saber matemática (Lampert, 1990, p. 58)[17].

[16] Deborah Ball e Magdalene Lampert realizam suas pesquisas na Universidade de Michigan, em Ann Arbor. Carolyn Maher realiza sua pesquisa na Universidade Rutgers.

[17] I assumed that changing student's ideas about what it means to know and do mathematics was in part a matter of creating a social situation that worked according to rules different from those that ordinarily pertain in

Lampert (1990, p. 37) descreve sua abordagem como uma *prova de conceito*, sem, no entanto, renunciar ao valor genérico do que ela relata, ou a seu valor como exemplo para os professores – embora nada seja certo.

Sua ambição é desenvolver novas formas de interação entre alunos e professores e experimentar novas formas de conteúdo. A estrutura epistemológica é baseada em uma leitura de Imre Lakatos (1976) e George Polya (1945), que enfatizam os valores éticos e morais:

− As qualidades de *coragem intelectual e modéstia intelectual* necessárias para a prática da matemática (Lakatos, 1976, p. 3; Polya, 1945, pp. 7-8). Essas qualidades são necessárias para a atividade porque a verdade é sempre "“provisória”: “a verdade permanece provisória” (Lampert, 1990, p. 31). Essa posição encontra sua justificativa no modelo epistemológico de Lakatos: o progresso na matemática deve menos à lógica do que ao “ziguezague” da conjectura à prova e ao retorno a axiomas ou definições que devemos estar preparados para revisar.

− Entretanto, essa disposição para revisar deve ser temperada por uma sábia restrição (Polya, 1945, p. 8): não se deve mudar de ideia sem um bom motivo.

Deve-se observar que esses valores estão, de fato, subjacentes à modelagem de situações na TSD, mas não são tratados explicitamente. Nós os encontraremos novamente em pesquisas sobre situações de “debate científico” (ou “problema aberto”, em que a viabilidade dos debates públicos deve ser garantida pela definição das regras.

O quadro teórico é o da antropologia educacional, segundo a qual o professor pode construir uma estrutura participativa para redefinir seus papéis e responsabilidades, bem como os dos alunos (Lampert, 1990, p. 34); em outras palavras, um contrato didático. É a partir da estruturação e da regulamentação dessas interações que os alunos adquirem um senso de legitimidade de suas atividades e do que conta como conhecimento na sala de aula.

A autoridade social e intelectual do professor poderia, *a priori*, ser um obstáculo, mas o pressuposto é que se trata, na verdade, do produto da negociação: no decorrer das interações, como membro da “comunidade de discurso” da classe, o professor-pesquisador introduz as convenções necessárias conforme exigido ou as “reinventa” com os alunos (Lampert, 1990, p. 35). Essa autoridade vem do papel que ela assume, ao seguir e se comprometer com as propostas com os alunos. “Para fazer isso”, diz Lampert, “é preciso saber como dar provas aos alunos, sem trair a matemática, e ser capaz de avaliar as provas deles em seu próprio quadro de referência” (p. 41).

classrooms, and in part respectfully challenging their assumption about what knowing mathematics entails. (Lampert, 1990, p. 58).

Os símbolos e as convenções são introduzidos no decorrer dessas interações. O professor precisa ser explícito sobre o conhecimento envolvido, a legitimidade e a utilidade das estratégias, e acompanhar os argumentos dos alunos.

A primeira decisão do professor é escolher um "problema estruturado"[18], muitas vezes chamado de situação-problema, que exija que os alunos gerem ideias (Lampert, 1990, p. 39) e provoque conjecturas e discussões. Esse problema deve ser acessível a todos os alunos, independentemente de seu nível, e deve mobilizar concepções ligadas aos conceitos matemáticos visados.

A engenharia da situação de ensino baseia-se nas tradições da pesquisa-ação e nos métodos interpretativos das ciências sociais (Lampert, 1990, p. 36). Os alunos são incentivados a tornar público como entendem o problema e o que podem fazer a respeito. Suas propostas são escritas no quadro, marcadas com um ponto de interrogação. De acordo com a análise de Claire Margolinas (1992, pp. 139-140), a escrita que se torna pública dá expressão concreta à presença de um *milieu* de referência social. Todos os comentários e afirmações sobre essas proposições devem ser justificados. A regra, que é explícita, está sob o controle do professor, de modo a garantir que qualquer questionamento das proposições não seja reduzido a um julgamento (Lampert, 1990, p. 40). O contexto matemático, no sexto ano, é o estudo das propriedades aritméticas da potência de um número natural, com o objetivo de provar a "legitimidade" da fórmula $a^n x a^m = a^{m+n}$ (Lampert, 1990, pp. 51-52). A referência à "legitimidade" é um ponto importante, pois enfatiza que a defesa das propostas é baseada na matemática, e não na palavra do professor. A seguir, apresentamos um esboço da crônica da situação:

> A sequência começa com o problema de decidir sobre o dígito das unidades da potência de um determinado número sem calcular seu valor. Esse primeiro problema é uma maneira de abrir um problema matemático de números inteiros que não se reduz às manipulações técnicas da escrita decimal na aritmética elementar. O objetivo é criar uma comunidade de discurso matemático. Os subproblemas organizaram a exploração: o caso de 54, 64, 74. A professora se movimenta pela sala de aula. Ela observa o que os alunos estão fazendo. Quando todos parecem engajados e a maioria já apresentou ideias, ela inicia a discussão (Lampert, 1990, p. 46). Essa discussão dura cerca de meia hora e envolve quase todos os alunos. A professora começou com uma pergunta: "Quem está pronto com uma teoria sobre essa [54]?" (Lampert, 1990, p. 47). No decorrer da discussão, foi construída uma base comum de conhecimento, vocabulário e esclarecimento de significados – por exemplo, a distinção entre multiplicação (2xa) e exponenciação (a^2). Uma conjectura é formulada: as potências de 5 terminam em 25. Isso leva a outra: as potências de 6 terminam em 36. A generalização é refutada pelo caso de 7, que introduz a questão do valor das terminações para diferentes valores do expoente. As propostas são seguidas pela questão da prova. A professora orquestra as

[18] Essa expressão foi introduzida por Jeremy Kilpatrick, a quem Lampert se refere.

> trocas nas quais ela participa, tomando parte na argumentação ou refutando uma afirmação.

A professora anima e modera as interações entre os alunos. Ela se concentra no tom de certas oposições ou pede que eles considerem uma determinada proposta. No entanto, se necessário, ao se colocar no nível dos alunos, ela pode contribuir para um argumento ou refutar uma proposta. Como pivô das trocas, ela faz circular a palavra pela sala de aula. As propostas são escritas no quadro, e a escrita é o elemento estruturador das discussões. Ela ajuda a ancorar o que está em jogo nas discussões e a gerenciar uma memória compartilhada. A análise toma como indicadores o vocabulário usado e sua evolução, que acompanha o movimento de descentralização dos alunos e sua entrada nas normas sociais da comunidade matemática. Os verbos "saber, pensar, revisar, explicar" e as palavras "problema" e "resposta" são utilizados para redefinir atividades e significar novos papéis e responsabilidades, bem como comportamentos aceitáveis (Lampert, 1990, pp. 35, 38). A mudança nas expressões dos alunos de "eu faço" para "nós fazemos" e seus esforços para se justificar são entendidos como sinais de sua entrada no "reino das verdades matemáticas que foram legitimadas pela comunidade do discurso" (p. 49).

Embora a análise mostre que os principais objetivos do projeto foram alcançados, Lampert (1990) não hesita em apontar as dificuldades e as limitações (pp. 55-57). A comunidade criada não é monolítica. Em particular, os "inteligentes em matemática" têm um papel de referência, mas os alunos que resolveram o problema não veem sentido em participar de uma discussão que valoriza aqueles que têm dificuldades. Eles frustram os esforços do professor, assim como o silêncio, a impossibilidade ou a recusa de explicar, a falta de coragem ou o constrangimento de compartilhar, a teimosia (p. 57) ou o medo de perder a reputação. É certo que a norma é construída, e alguns a aceitam, jogam o jogo e formam a comunidade de discurso na aula de matemática, mas outros permanecem à margem, como acontece em qualquer grupo social, observa Magdalene Lampert.

2.2 A responsabilidade do professor como fonte de dilemas

O objetivo de Deborah Ball (1993) é incentivar os alunos a se envolverem em atividades matemáticas, ou seja, atividades que sejam congruentes tanto com os requisitos da disciplina quanto com a ética da prática científica. Ela busca os princípios que criarão as *condições para um experimento* que envolva o conhecimento dos alunos e os ajude a evoluir, com a preocupação de reconhecer e valorizar o que eles fazem. Essas condições estão relacionadas à escolha do problema e ao comportamento do professor:

> - O problema deve ser uma fonte de ideias, rica em possibilidades e oportunidades matemáticas.
> - A prática do professor deve respeitar a integridade tanto da matemática como disciplina quanto das crianças como pensadores matemáticos.[19] Essa condição expressa o princípio da honestidade intelectual de Bruner: "qualquer assunto pode ser ensinado de forma eficaz e intelectualmente honesta a qualquer criança em qualquer estágio de desenvolvimento" (Ball, 1993, p. 374).

A primeira condição é comum às pesquisas no campo e foi especificada em particular pelo trabalho sobre o problema aberto (Mantes & Arsac, 2007). A ênfase na segunda, por outro lado, é mais específica do trabalho nos Estados Unidos, devido à atenção dada à explicitação dos princípios éticos subjacentes (cf. Stylianides, 2007).

Mais do que um quadro teórico, é a ideia *de reproduzir a atividade do matemático* na sala de aula que orienta o projeto, ao mesmo tempo em que se distancia da frequente reivindicação de autenticidade, que parece impossível de satisfazer – ou até mesmo irresponsável –, dados a natureza e o funcionamento da comunidade matemática, que é marcada pelo individualismo e pelo elitismo (Ball, 1993, p. 377). Sua transposição para a sala de aula modela uma *comunidade de discurso*: as trocas e os debates de ideias devem ser fundamentados e baseados em "argumentos matemáticos", não na autoridade do professor, e devem ser sustentados por um *esforço coletivo* (p. 388). O conceito de comunidade aqui se refere à *criação de uma base comum*, composta de conteúdo: vocabulário, definições, convenções; e regras compartilhadas para colaboração e debate – gerenciamento de conflitos, natureza dos argumentos, provas e refutações (p. 388).

A renúncia local e temporária do professor à autoridade científica não significa a renúncia à responsabilidade associada à sua função, que é socialmente irrevogável. O resultado é uma tensão entre autoridade e responsabilidade, uma fonte de dilemas. A partir de suas observações introspectivas, Ball identifica três dilemas: o de *escolher a situação*[20], *o de respeitar os alunos como "matemáticos"* e, por fim, o de decidir aceitar o *bem comum* que surge na sala de aula.

O principal estudo de Ball (1993) baseia-se no ensino em uma classe CE2, com alunos de 8-9 anos. Os dilemas que ela identifica são ilustrados por três sequências que utilizam problemas de aritmética abertos aos alunos desse nível. O cenário comum é o clássico, no qual

[19] "Aprender a pensar matematicamente significa (a) desenvolver um ponto de vista matemático - valorizando os processos de matematização e abstração e tendo a predileção de aplicá-los - e (b) desenvolver competência com as ferramentas do ofício e usar essas ferramentas a serviço do objetivo de compreender a estrutura - a criação de sentido matemático". (Schoenfeld 1989, citado por Ball, 1993, p. 376).

[20] Representando o conteúdo

os alunos se dedicam ao trabalho pessoal por cerca de dez minutos, seguido de trocas em pequenos grupos e, finalmente, um período de cerca de meia hora durante o qual os alunos – ou grupos de alunos – apresentam suas soluções e discutem suas ideias. O professor/pesquisador alterna entre orquestrar, moderar e atuar como articulador das discussões, como no caso de Lampert. Cada dilema é ilustrado por três estudos de caso, cujos aspectos essenciais descrevo a seguir.

1) O dilema da *escolha da situação* surge quando os números relativos são introduzidos, com base no conhecimento escolar e familiar dos números inteiros. Os alunos são convidados a explorar o que acontece com as manipulações numéricas que conhecem (comparação, adição, subtração) em um contexto familiar, no qual é introduzida a codificação de um número com um sinal "-" para indicar uma posição ou um valor relativo:

a. A numeração dos andares em um teclado de elevador: 0 para o térreo, um número natural para os andares superiores, um número natural precedido pelo sinal "-" para os andares inferiores (Ball, 1993, pp. 378-381). Vários problemas foram abordados e mais ou menos facilmente resolvidos no decorrer das discussões em classe, culminando no problema de dar significado à escrita 6+(-6). "Finalmente, chegamos a uma crise" (p. 381). O professor não sabia como decidir entre as soluções sem ser arbitrário, a fim de superar o que os alunos consideravam um absurdo; de fato, eles não consideravam -6 um número, mas sim o nome codificado do 6.º subsolo.

b. A codificação de quantidades de dinheiro em balanços contábeis: ganho, perda, crédito, débito (pp. 381-384). Dessa vez, não há crise, mas uma admissão de fracasso. Os alunos mantiveram o mundo das quantidades e dos números separados: *dólares abaixo de zero não existem*![21] Eles apresentam soluções sem precisar usar números negativos.

Em ambos os casos, os alunos não se enquadram na estrutura matemática esperada. Eles utilizam uma tecnologia simbólica, determinada por sua interpretação na situação concreta mencionada (Balacheff, 2001). Muitos projetos de pesquisa e inovações baseados em uma situação concreta para invocar o uso de codificação relativa – sinal -, cor, circundar etc. – relatam essa dificuldade. O problema é aberto, e não há uma situação fundamental conhecida

[21] "Não existe algo como dólares abaixo de zero!" (Ball, 1993, p. 82)

no sentido da TSD. O dilema da escolha da situação não tem, até o momento, solução (cf. análise e proposta em Mercier, 2012).

> 2) O dilema de respeitar os alunos como “matemáticos” é observado em uma situação em que os alunos levantam a hipótese de que há mais números pares do que números ímpares que são quadrados. A discussão sobre paridade continuou, com um aluno, Sean, declarando que 6 é par e ímpar (Ball, 1993, pp. 385 e seguintes), porque pode ser representado pelo tripleto OO|OO|OO, e 3 é ímpar, ou por OOO|OOO, ou seja, 2 pacotes iguais, o que satisfaz a definição de paridade. É legítimo querer generalizar essa observação, caracterizar esses números e investigar suas propriedades – por exemplo, conservação para adição ou multiplicação.[22] O interesse demonstrado pelos alunos e o princípio de autonomia com o qual o professor está comprometido significam que podemos continuar a trabalhar nessa invenção, que agora é chamada de “números de Sean”.

A professora e a pesquisadora percebem uma forte semelhança entre a atividade dos alunos e a atividade matemática. O dilema é reconhecer essa legitimidade e, assim, institucionalizar um objeto que não tem lugar no saber matemático. A decisão de sair desse dilema leva a professora a um território desconhecido e incerto (Ball, 1993, p. 388).

A fonte desse dilema está na adoção do princípio radical da pesquisa de Ball: a autonomia da comunidade de alunos na sala de aula, cujo corolário é a retirada do professor como autoridade. É essa comunidade que deve promover o conhecimento de cada indivíduo, que, por sua vez, contribui para o avanço do bem comum. Por tudo isso, o professor continua sendo responsável por suas decisões, sujeito a uma responsabilidade irrevogável.

O dilema surge dessa tensão:

> É claro que a autoridade do professor desempenha um papel em minha sala de aula, como em qualquer sala de aula. No entanto, meu objetivo é usar minha autoridade para incentivar um conjunto de normas intelectuais e sociais para apoiar um tipo de trabalho incomum na experiência anterior dos alunos na escola. *Em vez de me estabelecer como árbitro final da verdade, eu me esforço para desenvolver e distribuir no grupo um*

[22] Esse exemplo foi publicado com um relato detalhado do episódio sob o título “Making mathematics work in school” (Ball et al., 2008).

conjunto de noções compartilhadas sobre o que torna algo verdadeiro ou razoável (Ball, 1993, p. 388)[23].

3) O dilema de *aceitar o que é comum* está no fato de que o consenso dos alunos e sua evolução individual estão indo em uma direção que não é aceitável em uma aula de matemática. Assim, a busca de um significado para a expressão 6+(-6) no contexto de elevadores produz uma série de histórias e argumentos que se acumulam, sem resolver o problema apresentado. Quando, no final da sessão, uma aluna sugeriu que o resultado deveria ser 0, sua história não atribuía a -6 o nome de um andar, mas a orientação de um deslocamento de amplitude 6. Essa história, apontou a professora, dificultou a interpretação da expressão 6-(-6). Ela percebeu sua possível intervenção com um sentimento de desconforto e desonestidade (Ball, 1993, p. 391). Ela decidiu encerrar a sessão, pedindo aos alunos que escrevessem o que lembravam e por quê; dos 17 alunos, 10 lembraram que 0 era o resultado correto. Uma semana depois, quando o tópico dos números relativos estava terminando, ela observou que *a maioria* dos alunos havia feito corretamente os cálculos que ela havia sugerido, embora o debate sobre a resposta correta não tivesse sido explicitamente encerrado. Uma análise da maneira como os debates foram percebidos, o papel do grupo e os julgamentos individuais revelaram uma variedade de pontos de vista que dificilmente atesta o surgimento de uma comunidade.

Nos termos escolhidos por Ball, o professor se vê preso entre o dever de administrar a “confusão” que certas discordâncias podem gerar e o compromisso de permitir aos alunos uma autonomia que pode ser vista como “complacência” (Ball, 1993, p. 393).

Embora haja de fato uma assembleia de alunos na qual as ideias são expressas e defendidas, isso não é suficiente para garantir a criação de uma base comum. É certo que a atividade, as posições assumidas e os argumentos apresentados pelos alunos podem ter as características locais de uma atividade matemática, como aponta Deborah Ball, mas a *ausência do surgimento natural de um consenso* que governaria os modos de validação e regulação do discurso impede a criação de uma comunidade. Essa observação ecoa a de Magdalene Lampert: os alunos podem ter muitos motivos para não participar do jogo, a menos que simplesmente entendam que existe um jogo e o qual é este jogo.

[23] *Of course, teacherly authority plays a role in my classroom as it does in any classroom. I aim, however, to use my authority to encourage a set of intellectual and social norms to support a kind of work unusual in students' prior experience in school.* Rather than establishing myself as the final arbiter of truth, I strive to develop and distribute in the group a set of shared notions about what makes something true or reasonable. (Ball, 1993, p. 388).

2.3 O desenvolvimento da ideia da prova matemática

O professor é o responsável pelo tempo e o garantidor da aceitabilidade dos conhecimentos construídos no curso do ensino, pelo qual ele é responsável perante a sociedade (Arsac, Balacheff, et al., 1992; Herbst & Chazan, 2011). Essa responsabilidade pesa sobre as abordagens mais incertas, como aquelas baseadas na renúncia à instrução em favor da orientação. É possível nos libertarmos dessas restrições? E o que aprenderíamos então? Esse é o caminho seguido por Carolyn Maher quando conduziu um projeto sobre o *desenvolvimento da ideia de prova* nas escolas primárias (Maher & Martino, 1996).

Essa *pesquisa longitudinal* acompanha a evolução da atividade de vários alunos do CP (*curso preparatório)* ao CM2 *(crianças de 8 – 9 anos)* a fim de obter dados sobre o *desenvolvimento do raciocínio matemático da criança* (Maher & Martino, 1996, p. 198). Mais especificamente, o estudo se concentra na evolução dos meios de validação mobilizados no contexto da exploração de um domínio que, a partir do CP, é imediatamente acessível e rico em atividades matemáticas. Todas as abordagens e explorações são possíveis, e não há objetivo de aprendizado formalizado ou projeto de ensino *a priori*. Se uma pergunta ficar sem resposta no decorrer de uma sessão, ela poderá ser retomada nas semanas, meses ou até anos seguintes. O tempo, no decorrer deste estudo dentro do currículo primário, é aberto. Trata-se de uma pesquisa exploratória.

O campo escolhido é o da combinatória elementar, que favorece a invenção de métodos e representações e a criação de um espaço para a experiência autônoma que não é limitada por programas. Essa área é acessível desde muito cedo no desenvolvimento da criança, e exige estratégias, representações e operações que vão desde a manipulação de objetos materiais até representações simbólicas.

O relatório de pesquisa publicado é dedicado ao acompanhamento de uma aluna, Stéphanie, que foi notada desde a primeira série por sua capacidade de se comunicar, compartilhar suas ideias e participar de discussões sobre as ideias dos outros.

A partir de uma ampla gama de dados – vídeo, observações, produções dos alunos, entrevistas –, os pesquisadores selecionaram uma série de 11 eventos “críticos”[24] ocorridos entre maio de 1990 (final do CE1) e outubro de 1992 (início do CM2).

O problema apresentado é o de contagem dos n-tuplas de cubos de duas cores, torres, para um determinado n. A necessidade de um controle, desde as primeiras explorações,

[24] Uso espontâneo de uma heurística, desenvolvimento de um argumento para apoiar um elemento da solução (organização local), extensão de um argumento para construir uma solução completa (organização global).

desencadeia o problema da validação, que permanece um requisito privado, interno à atividade, até que o professor convida os alunos *lhe* a propor uma prova de sua solução; esse é o 11.º evento. É verdade que a professora pediu para ser convencida, mas a tarefa prescrita era *escrever uma carta para os alunos ausentes*, na qual devem ser descritas as diferentes torres construídas para n=3, explicando por que todas as possibilidades estavam presentes e por que nenhuma havia sido esquecida (Maher & Martino, 1996, p. 195).

Os marcos dos 11 eventos mostram a evolução dos meios de representação que Stéphanie (Figura 1) desenvolveu, desde a manipulação de objetos físicos (cubos) até a codificação no quadro-negro e representações icônicas (desenho das torres). A necessidade de controle é a força motriz por trás desse desenvolvimento e das estratégias, que passam da tentativa e erro para o raciocínio baseado em casos. Stéphanie joga o jogo da comunicação conversando com outra aluna, Laura. Ela explica suas razões[25], descrevendo o processo de produção sistemático, para garantir que exatamente 8 torres possam ser construídas. Ela utiliza um código de cores – suas iniciais – e uma tabela de dupla entrada[26].

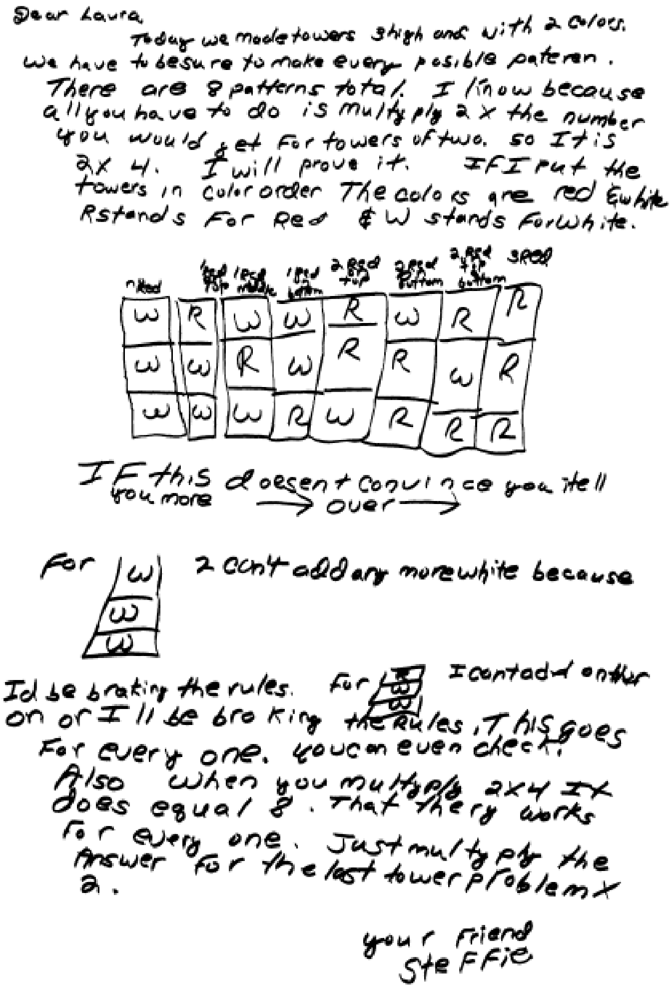
O resultado destacado é a "invenção" de Stéphanie de uma prova elegante: "Ninguém 'ensinou' a ela como fazer uma prova" (Maher & Martino, 1996, p. 196).

[25] Para obter mais detalhes, os leitores podem consultar Maher e Martino (1996, pp. 194-196) ou um resumo em francês (Balacheff, 2019a, seção 3.4).

[26] Na verdade, essa tabela mantém um valor icônico: cada coluna pode ser lida como a representação de uma torre.

Figura 1.

Representação da evolução dos meios utilizados por Stéphanie


Dear Laura,
Today we made towers 3 high and with 2 colors.
We have to be sure to make every posible pateren.
There are 8 patterns total. I know because
all you have to do is multyply 2 x the number
you would get for towers of two. so It is
2x 4. I will prove it. If I put the
towers in color order The colors are red & white
R stands for Red & W stands for White.

If this doesent convince you I'll tell you more → over →

For W W W 2 can't add any more white because
I'd be braking the rules. For I can't add another
on or I'll be broking the rules, This goes
for every one. you can even check.
Also when you multyply 2x4 It
does equal 8. That thery works
for every one. Just multyply the
answer for the last tower problem x
2.

your friend
Steffie

Isso leva a outro resultado que assume a forma de uma pergunta: *se ninguém o ensinou, então quais foram as condições que contribuíram para a "invenção" dessa prova?* As escolhas [27]*a priori* parecem validadas de fato e se impõem como parte da resposta: *a criação de um corredor livre de restrições institucionais que atravessa toda a escolaridade, do CP ao CM2*. Esse corredor assegura a ampliação do tempo e eliminou as restrições do programa de estudos, aliviando assim a responsabilidade que limitava a possibilidade de apoiar os alunos de acordo com suas próprias necessidades, com a única preocupação de manter a legitimidade matemática de suas atividades. O desempenho de Stéphanie significa que ela não precisa mais dizer o que aprendeu. A eliminação das restrições institucionais anula a natureza crítica de qualquer *dilema*.

[27] Por ser expressão latina, é preciso registrá-la em itálico.

No entanto, o caso de Stéphanie não responde às perguntas sobre o ensino de provas no nível da escola elementar. De certa forma, o estudo fornece uma prova de existência: *os alunos jovens* são capazes de raciocinar usando uma expressão que um matemático não rejeitaria. Mas a problemática é a do *desenvolvimento cognitivo da prova* (Tall et al., 2012), e não estritamente o seu aprendizado ou ensino. É por essa razão que essa pesquisa permaneceu como um exemplo paradigmático (seção 4.2.).

A correlação entre a evolução dos meios de representação e os controles, e a confirmação do papel da situação de comunicação encenada pela instrução de escrever uma carta para outro aluno, podem ser consideradas deste estudo. A solicitação para escrever essa carta é o único momento em que os motivos dos alunos para agir são levados em consideração, embora isso não seja analisado. A questão da validação, por sua vez, não está relacionada à situação em si, mas ao conteúdo explícito da instrução que a inicia.

3. Abordagem IBL da prova: elementos do quadro teórico

A corrente de pesquisa da qual são representantes os trabalhos selecionados para este curso, diz respeito à questão de como o *reconhecimento de uma prova como uma explicação aceita por uma comunidade em um determinado momento* pode ser o resultado da interação e da negociação entre os alunos na busca de um consenso, respeitando os valores e as práticas da matemática como uma disciplina da qual o professor é o fiador.

A abordagem é a da *Sala de aula baseada em pesquisa* (Jones e Herbst, 2012). O quadro teórico assenta-se em um conjunto de princípios derivados do construtivismo e do socioculturalismo (cf. Cobb et al., 1994), combinados com uma metodologia de *pesquisa baseada em design* (Anderson & Shattuck, 2012), para utilizar uma referência contemporânea. O contexto e os conceitos desta pesquisa foram estruturados pelo trabalho de Cobb et al. (1994) e Cobb e Yackel (1996), que forjaram o conceito de norma sociomatemática.

O projeto e a condução de situações em sala de aula nesta pesquisa compartilhavam os seguintes princípios: aprendizagem por meio de investigação, autonomia do aluno e promoção do “raciocínio matemático”, o professor como pivô e moderador da atividade e o objetivo de criar uma norma sociomatemática. Este trabalho relaciona intimamente “prova” e “raciocínio matemático”.

3.1. Raciocínio matemático

A expressão “raciocínio matemático” refere-se a um conjunto de práticas e normas coletivas enraizadas na disciplina (Ball & Bass, 2003, p. 29). Esse significado é fundamental para a problemática em que o objetivo é *criar as condições para o surgimento de uma comunidade de prática e discurso específicos da matemática* como um campo de conhecimento constituído (disciplina) e como uma atividade. Ela vincula estreitamente o raciocínio à prova e à construção de um corpo de conhecimento compartilhado e público. O objetivo, como já foi enfatizado, é desenvolver práticas que respeitem a matemática como disciplina e os alunos como “pensadores matemáticos”.

> Quando os alunos estão trabalhando em uma aula de matemática, por exemplo, nós os vemos como construtores de conhecimento matemático. Observar o desenvolvimento do conhecimento dos alunos dessa forma destaca a natureza fundamentalmente matemática do trabalho deles e, consequentemente, dos professores. As maneiras pelas quais os alunos procuram justificar afirmações, convencer seus colegas e o professor e participar do desenvolvimento coletivo do conhecimento matemático publicamente aceito têm ressonâncias poderosas com o trabalho dos matemáticos (Ball & Bass, 2003, p. 29, tradução minha).[28]

Por outro lado, o desejo de ser fiel ao trabalho do matemático torna difícil levar em conta a diversidade de raciocínios e a variedade de seus níveis no aprendizado e no desenvolvimento dos alunos. Isso é uma fonte de dilemas. Os pesquisadores estão bem cientes de que o “raciocínio matemático” precisa ser aprendido – em particular, “a diferença entre ilustração e prova” (Ball, 1993, p. 376). Mas a problemática sociocultural tem precedência sobre a problemática epistemológica:

> Por fim, o ensino que nos interessa visa criar uma comunidade em sala de aula na qual as diferenças sejam valorizadas; na qual os alunos aprendam a se importar e respeitar uns aos outros; e na qual os compromissos com uma sociedade justa, democrática e racional sejam incorporados e aprendidos (Ball & Bass, 2003, p. 30).

Dois tipos de raciocínio, como processos, são distinguidos: “raciocínio de investigação” e “raciocínio de justificação” (Ball e Bass, 2003, p. 30). Podemos comparar essa distinção com aquela feita por Raymond Duval (1992, p. 51), entre *argumentação heurística e argumentação retórica*. Há, entre as duas questões, entretanto, uma diferença que não podemos perder de vista: na primeira, a forte integração das dimensões sociais, culturais e disciplinares na definição de raciocínio sugere uma assimilação do raciocínio à argumentação; na segunda, Raymond Duval

[28] Esta declaração é baseada no trabalho de Deborah Ball (1993) e Magdalene Lampert (1990).

refere-se ao trabalho sobre enunciados[29], objetos linguísticos modelados em registros semióticos, sem incluir as dimensões sociais e culturais, destacando a congruência com a matemática.

O raciocínio de justificativa se baseia em dois pilares[30] (Ball & Bass, 2003, p. 30):

- *um corpo de conhecimentos compartilhado e público* que determina o nível de granularidade das justificativas em um determinado contexto e para uma determinada comunidade;

- *a linguagem* (símbolos, vocabulário e outras representações e suas definições), sua sintaxe e as regras da lógica. A linguagem também inclui a natureza e o papel das definições e a "compressão conceitual" (p. 33), ou seja, a criação de regras e automatismos[31].

3.2. Aprendizagem por investigação

O objetivo da aprendizagem por investigação[32] (IBL) em matemática é criar as condições para que os alunos sejam tão ativos quanto os matemáticos e para que as condições de prática de conhecimentos matemáticos lhes deem significado (Artigue & Blomhøj, 2013, pp. 797, 799)[33].

O pressuposto é que essa atividade pessoal e coletiva, tão independente do professor quanto possível, contribuirá para a aquisição de conhecimentos e competências, e facilitará a compreensão da natureza da matemática. A tarefa com a qual o professor inicia a atividade deve despertar a curiosidade, ser acessível a todos de uma forma ou de outra, estar aberta à exploração, dar origem a uma diversidade de propostas e, portanto, ser de complexidade significativa, sem estar fora de alcance.

No paradigma da IBL, a atividade é orquestrada de duas maneiras: por um lado, a organização social do trabalho – individual, em pequenos grupos, classe inteira –; e, por outro, as intervenções do professor para acompanhar, orientar e moderar as contribuições individuais ou coletivas. Após as tentativas individuais, possivelmente em pequenos grupos, a ênfase está no compartilhamento e na discussão das várias propostas para descobrir e discutir as

---

[29] "O raciocínio é a organização de proposições direcionadas a uma afirmação-alvo a fim de modificar o valor epistêmico que essa afirmação-alvo tem em um determinado estado de conhecimento ou em um determinado ambiente social e que, consequentemente, modifica seu valor de verdade quando certas condições organizacionais específicas são atendidas" (Duval, 1992, p. 52).

[30] Para traduzir "foundations".

[31] "compressão conceitual" no texto, aproxima-se da ideia de criar rotinas (Saada-Robert e Brun, 1996) ou compilação (J. R. Anderson et al., 1995).

[32] Tradução adotada de *inquiry-based learning* (ou *inquiry-based education*), conservarei a sigla IBL (Ernst et al., 2017).

[33] A apresentação de Michèle Artigue está disponível on-line: https://youtu.be/A1PNXDCJmTo

abordagens, as ideias e uma diversidade de entendimentos e posições sobre a situação vivenciada coletivamente.

O professor é o pivô e o moderador das trocas, reformulando propostas, estimulando os alunos com perguntas ou comentários, facilitando a discussão ou destacando propostas específicas. As ações do professor são semelhantes às de uma *estratégia para apoiar a atividade de toda a classe*, a fim de criar uma comunidade regida por regras coletivamente aceitas – as da matemática (lógica) e as da atividade matemática (dialética de provas e refutações, valores científicos).

A abordagem IBL propõe uma organização e atividades que não levam em conta, *a priori*, uma disciplina, embora tenha se originado na educação científica experimental. Ela aplica os princípios intelectuais gerais do ensino ativo. A validação é uma pedra angular, porque determina a legitimidade do conhecimento e das habilidades desenvolvidas; é uma questão, mas não um objeto de aprendizado definido. O que será a validação na abordagem IBL depende da tarefa escolhida e do consenso alcançado em uma dinâmica coletiva pelos alunos, que são autônomos e responsáveis (cf. o item 4, a seguir, intitulado "Autonomia e autenticidade"), e pelo professor.

O postulado destas pesquisas é que, por se tratar de uma aula de matemática, uma parte significativa desse consenso será de natureza matemática.

3.3. Norma sociomatemática

A *comunidade* de alunos e do professor é o produto de uma atividade social que, como tal, cria práticas e modos de colaboração ou cooperação que garantem sua viabilidade e permitem seu funcionamento. Normas sociais tácitas ou explícitas tomam forma. Elas são reveladas pela análise em um nível muito fino de granularidade: o da linha de expressões e ações individuais de alunos e professores, que identifica regularidades na dinâmica das interações (Voigt, 1985). Erna Yackel e Paul Cobb (1996) observam, entre elas, normas específicas do conteúdo ensinado, a matemática. Eles cunharam o conceito de normas *sociomatemáticas* para explicá-las (p. 460).

Os padrões sociomatemáticos precisam ser descritos e nomeados, ou seja, formalizados no espaço e no tempo escolares. Porém, porque esse é um princípio da IBL, não pode ser feito pelo professor. Por outro lado, o professor pode pedir aos alunos que avaliem e comparem diferentes soluções para um problema:

> Como parte do processo de orientar *o desenvolvimento de uma atmosfera de sala de aula na qual as crianças são obrigadas a tentar* desenvolver soluções pessoalmente significativas que possam explicar e justificar, os professores com os quais trabalhamos perguntavam regularmente se alguém havia resolvido um problema de maneira diferente. [...] Observamos anteriormente que oportunidades adicionais de aprendizado surgem quando as crianças tentam dar sentido às explicações dadas por outros, comparar as soluções dos outros com as suas próprias e fazer julgamentos sobre semelhanças e diferenças (Yackel & Cobb, 1996, pp. 462, 466).

Passar da resolução de um problema para o julgamento de soluções depende da disponibilidade de várias soluções e do interesse em discuti-las. Essa motivação é alimentada por perguntas do professor, que convida os alunos a formularem as razões de seus julgamentos sobre as diferenças, a eficácia, a elegância e a admissibilidade das evidências[34]. Além de desenvolver padrões, essas intervenções são projetadas para incentivar "o desenvolvimento da autonomia intelectual":

> A ligação entre o crescimento da autonomia intelectual e o desenvolvimento de uma tradição de matemática investigativa fica evidente quando observamos que, em uma sala de aula assim, o professor orienta o *desenvolvimento de uma comunidade de validadores* e, portanto, incentiva a devolução da responsabilidade (Yackel & Cobb, 1996, p. 473,tradução minha).

3.4. Autonomia e autenticidade

O conceito de autonomia ocupa um lugar central na abordagem IBL[35]. A autonomia do aluno é uma condição para a construção de um significado adequado às especificidades dos conhecimentos matemáticos e emancipado da autoridade do professor. Erna Yackel e Paul Cobb (1996, p. 473) rejeitam explicitamente qualquer ideia de uma compreensão individualista da autonomia.[36] Na abordagem IBL, trata-se de uma questão de autonomia intelectual que se emancipa dos usos peremptórios da autoridade e cria uma participação responsável. Ser um aluno não é ter um papel duplo em relação ao institucional, do professor, mas ocupar seu lugar em um sistema que a sala de aula inscreve no espaço e no tempo:

> Se os alunos aprendem na escola, eles não o fazem apenas por meio de seus estudos individuais e não apenas quando contam com a atenção individualizada do professor em sala de aula. Eles aprendem por fazerem parte de um sistema de pessoas, restrições e

[34] « justification » no texto

[35] Consulte Artigue e Blomhøj, 2013, p. 809 para obter uma lista das características das situações de IBL.

[36] Myrriam-Webster, Autonomia: "liberdade de autodirigir-se e especialmente independência moral" / "o estado de existir ou agir separadamente dos outros: independência" (por exemplo, "um professor que incentiva a autonomia individual")

> recursos - a classe - cuja atividade total e sistêmica reformula as ações individuais como contribuições para o trabalho coletivo, um de cujos produtos é a oportunidade de aprender (Herbst, 2009, p. 41).

Podemos tomar essas linhas como um postulado para a natureza sistêmica da comunidade de discurso e como práticas que a abordagem IBL busca criar. A expressão “oportunidade de aprendizagem” usada por Patricio Herbst pode parecer um tanto vaga, mas de fato transmite a ideia de uma indeterminação intrínseca à abordagem IBL. Essa oportunidade existe, mas não há garantia de que ela será aproveitada pela sala de aula como um sistema de aprendizagem. Assim, Magdalene Lampert (1990, p. 59) afirma que o novo tipo de ensino que ela está adotando – que de fato segue os princípios da IBL – envolve os participantes em *atividades matemáticas autênticas*, mas ela observa a incerteza sobre o que é aprendido.

A autenticidade é uma característica buscada pelos projetos da IBL. O significado desse conceito pode ter várias facetas[37]. No caso desses projetos, trata-se de um julgamento feito sobre a atividade, e não sobre seu produto: a situação de pesquisa é entendida como uma ferramenta pedagógica para incentivar *a reprodução em sala de aula de uma atividade que é a imagem da atividade do matemático*. Essa formulação refere-se tanto ao trabalho matemático quanto à atividade profissional como um todo. Ela dá origem a objeções e distanciamento (Ball, 1993, p. 377), especialmente porque:

- os matemáticos se concentram em um pequeno número de problemas e trabalham em grande parte sozinhos,

- certos aspectos profissionais não são muito interessantes de reproduzir (por exemplo, rivalidades, competição).

Embora o professor deva permitir que todos os alunos aprendam com a mesma unidade de lugar e tempo, vinculados ao relógio institucional, ele não pode permitir que eles passem meses desenvolvendo uma ideia ou aprendendo a resolver certos tipos de problemas. Mesmo que a exigência de autenticidade seja limitada ao trabalho matemático, a imprevisibilidade dos caminhos que os alunos podem seguir e a natureza não padronizada do conhecimento que eles constroem confrontam o professor com dilemas que ele precisa resolver.

Todos os trabalhos relatados testemunham o papel fundamental do professor e a complexidade desse papel. Eles oferecem o exemplo do professor-pesquisador como uma fonte

[37] A autenticidade não tem o mesmo significado aqui que na lista de Michèle Artigue e Morten Blomhøj (2013), a qual se refere à natureza das perguntas feitas e às ligações que os alunos fazem entre a situação proposta e sua experiência pessoal ou conhecimento da vida “real”.

de inspiração para aqueles que estão embarcando nesse caminho, enfatizando as habilidades matemáticas necessárias.

> A análise das normas sociomatemáticas indica que o professor desempenha um papel central no estabelecimento da qualidade matemática do ambiente da sala de aula e no estabelecimento de normas para os aspectos matemáticos da atividade dos alunos. Além disso, destaca a importância das crenças e dos valores matemáticos pessoais do professor e de seu próprio conhecimento e compreensão matemáticos. Dessa forma, é ressaltada a função crítica e central do professor como representante da comunidade matemática (Yackel & Cobb, 1996, p. 475).

3.5. Benefícios e limitações da abordagem IBL

Os trabalhos relatados são emblemáticos de uma pesquisa sobre a possibilidade de aculturar os alunos à matemática como disciplina e como prática em que a questão da validação estrutura as trocas e legitima as produções. Esses trabalhos fornecem à instituição que lhe deu origem uma *prova de conceito* na medida em que:

- por um lado, mostra que os alunos de ciclos anteriores ao ensino explícito da demonstração são capazes de explorar um campo, fazer conjecturas e produzir provas que podem ser razoavelmente consideradas à luz do julgamento matemático;

- por outro lado, eles são conduzidos em um contexto de sala de aula com as mesmas restrições e responsabilidades dos professores em qualquer outra sala de aula.

Entretanto, há um longo caminho a percorrer desde a prova de conceito até a adoção da IBL pelos professores de matemática.

A atividade do professor é o principal ponto fraco da abordagem IBL e da consecução do objetivo desejado de autonomia do aluno. Seu papel é fundamental porque se trata de um contexto em que não há salvaguarda do texto do conhecimento; de certa forma, o que há para aprender é o produto do que é vivenciado no decorrer da situação[38]. Nada determina a evolução da situação *a priori*. O professor tem de fazer ajustes em tempo real, fazendo perguntas ou oferecendo incentivos (Ball & Bass, 2003, p. 42), para manter o curso desejado, enquanto os alunos mantêm a capacidade de tomar iniciativas imprevistas e divergentes a qualquer momento.

Outro elemento fundamental, pouco discutido, é a tarefa proposta aos alunos. Ela é escolhida de acordo com os critérios gerais de acessibilidade e potencial de criatividade. Ela assume a forma de uma pergunta aberta para a qual não há resposta imediata no repertório de

[38] Para que fique registrado, uma situação não é uma sessão de aula ou um momento em uma sessão. A situação pode durar meses, ou até anos, como no caso do estudo de Carolyn Maher.

conhecimentos e procedimentos considerados disponíveis para a classe. Espera-se que a tarefa seja suficiente em si mesma para iniciar e sustentar o processo de pesquisa. A sequência de eventos que acompanha sua conclusão não é determinada. A maneira como a tarefa é recebida depende de vários fatores, incluindo a forma como o professor a desenvolve e o significado que os alunos atribuem a ela. A questão da validação tem origem no contexto social da classe, em sua "atmosfera", que leva ao confronto de soluções e argumentos, ou posições e significados. Se essa pergunta não surgir naturalmente, ela é provocada pelo professor – por exemplo, Como você provaria que a resposta está certa? (Ball & Bass, 2003, p. 41).

As observações são promissoras, mas destacam uma falha do projeto inicial. Apresentar problemas abertos e pedir aos alunos que expliquem suas ideias ou suas razões não é suficiente para garantir a construção de *uma base de conhecimento comum* e a produção de uma norma *sociomatemática*, que são os dois pilares da abordagem IBL para validação (Ball & Bass, 2003, pp. 42-43).

Ao buscar uma ruptura com as normas de aulas expositivas, a abordagem IBL destaca um conjunto de obrigações que são muitas restrições ao ato de ensinar (Arsac, Balacheff, et al., 1992; Ball, 1993; Herbst, 2003; Herbst & Balacheff, 2009). O professor tem de tomar decisões rapidamente para regular as interações com e entre os alunos no contexto da alta incerteza de uma situação subdeterminada. O trabalho de Patricio Herbst e Daniel Chazan (2011) sobre a racionalidade prática dos professores – suas razões para agir – no contexto aberto da abordagem IBL identifica quatro *obrigações profissionais*: disciplinar, pessoal, interpessoal e institucional.

- *A obrigação disciplinar* é a da *vigilância epistemológica*. É a restrição sobre a qual a pesquisa do IBL para a prova mostra um resultado: o domínio da matemática pelos professores é uma condição necessária. Eles tomam uma posição: a formação matemática dos professores deve ser uma prioridade, adaptada para ser um instrumento de resolução de problemas profissionais. Essa posição está na origem da pesquisa sobre "Conhecimento do conteúdo do professor" (Loewenberg Ball et al., 2008).

- *As obrigações pessoais e interpessoais* dizem respeito a *princípios éticos e deontológicos* – respeito, atenção ao aluno como pessoa. Elas levam em conta que o argumento que pode convencer um aluno pode não convencer outro, que alguns alunos podem relutar em debater, que a temporalidade da aprendizagem pode variar de um aluno para outro e que debater evidências pode envolver processos complexos de poder e relacionamentos com outras pessoas. As trocas e discordâncias sobre provas, entre alunos ou entre alunos e professores, afetam a construção da sala de aula como uma comunidade de aprendizagem (*organização do* *conhecimento*) e a imagem que essa comunidade tem de si mesma (Herbst & Balacheff, 2009, pp. 42-44).

- *A obrigação institucional* é aquela que o professor tem para com a organização escolar e, de modo mais geral, para com a *sociedade*. Essa obrigação também contém uma parcela de responsabilidade matemática pelos programas e currículos e, portanto, tem uma interação potencial com a obrigação disciplinar.

A pesquisa no quadro teórico do IBL e da TSD tem tanto uma proximidade quanto uma distância fundamental.

- *Proximidade*: o reconhecimento de que o significado do conhecimento construído pelos alunos depende da capacidade das situações de levá-los a reconsiderar e questionar suas concepções e a problematizar os novos conhecimentos.

- *Distância*: o *quadro* do IBL toma a atividade do matemático como ponto de referência e postula que a combinação de uma situação-problema bem escolhida e uma liberdade de princípio dada aos alunos é suficiente para dar origem a um processo coletivo capaz de gerar um problema de validação matemática. Em outras palavras, porque os alunos se comportam de maneira semelhante aos matemáticos, os procedimentos e conhecimentos que eles constroem seriam matemáticos. O contexto da TSD tem por referência o conhecimento matemático, suas características epistemológicas e sua razão de ser. Ela postula a existência de situações cujas propriedades problematizam o conhecimento matemático e cuja finalidade incentiva sua apropriação.

Em ambos os casos, o papel do professor é de devolução, regulamentação e institucionalização. Ele age dentro dos limites de suas *obrigações profissionais*, correndo o risco de ser confrontado com dilemas. As diferenças que podem ser observadas são consequência da natureza e das propriedades das situações implementadas.

4. Epistemologia experimental da prova / Didática

A conceituação de IBL é recente, embora suas raízes históricas e filosóficas sejam muito antigas. Na década de 1990, ela foi inspirada no conceito de aprendizagem baseada em problemas, ao mesmo tempo em que aprofundou a ruptura com o ensino baseado em aulas expositivas. A IBL oferece uma orientação geral que não leva em conta a natureza específica dos conhecimentos ou das competências envolvidas. Em particular, ela deixa em aberto para o professor a questão de *como levar em conta a natureza disciplinar e prática específica da pesquisa na disciplina que está sendo ensinada*. Para isso, a IBL para a matemática deve incluir princípios e ferramentas específicos para a investigação matemática – *mathematic enquiry* – (Artigue & Blomhøj, 2013, p. 808).

Projetos iniciados na década de 1990[39] na França e na Itália estão caminhando nessa direção. Eles não fazem parte do movimento IBL, mas de fato compartilham suas características essenciais: autonomia do aluno, interação social, problemas abertos, discussão de provas. Sua problemática comum é a *busca das condições para construir uma relação com a prova em matemática que esteja em conformidade com as regras da disciplina e que, quando chegar a hora, dê sentido à demonstração*. Não se trata apenas de criar as condições para a atividade matemática, mas de garantir que a questão da validação seja levada em conta – em outras palavras, a questão da prova naquilo que é específico da matemática como disciplina, e não como atividade. A atividade do matemático não pode constituir uma referência para a do aluno; elas não podem ser da mesma natureza, como enfatiza Deborah Ball (cf. § 2.2.).

Porém, tanto os alunos quanto os matemáticos são confrontados com as restrições ontológicas e epistêmicas da matemática. Gilbert Arsac deu uma ilustração muito simples e clara da necessidade de estar ciente da distinção entre atividade matemática e disciplina matemática, ou seja, conforme definido por Duval, o respeito pelas regras de raciocínio na matemática.

> Tendo estudado um pouco da história grega, aprendi que a demonstração era, em resumo, uma forma de debate democrático na sociedade grega, e esperava ver a demonstração emergir espontaneamente do debate dos alunos! Há muito tempo estou sorrindo dessa ingenuidade, mas hoje vale a pena ressaltar o seguinte fato: enquanto as regras de demonstração matemática começaram a ser estabelecidas pelos gregos, eles notaram um fenômeno extraordinário: havia uma área, e somente uma área, em que se podia concluir sem apelação que uma afirmação era verdadeira. Em outras palavras, as regras do raciocínio matemático são exclusivas da matemática (Arsac, 2018).[40]

De fato, vale a pena refletir sobre as implicações dessa observação. A reflexão de Deborah Ball e Hyman Bass (2003) sobre as decepções dessas esperanças “ingênuas” levou a uma recomendação para a formação matemática dos professores. A observação de Gilbert Arsac levou a uma reconsideração das situações, que foi o que ele fez no final da década de 1980 (cf. 4.4.).

[39] Ver também as sínteses de: Arsac, 1988; Georget, 2009.
[40] Notas de uma contribuição para a comemoração do quinquagésimo aniversário do IREM de Lyon, reimpresso no Brève 196 de l'IREM de Lyon.

As situações de IBL são projetadas para que os alunos trabalhem em um problema independentemente do professor. Mas, na realidade, esse princípio de autonomia é contradito pela ação constante do professor.

Constante e necessária. Essa contradição é independente de sua competência; faz parte de suas obrigações profissionais. Para resolvê-la, precisamos analisar a situação, o lugar e o papel de cada pessoa na sala de aula e as razões matemáticas para a ação.

Os trabalhos seguintes tratam dessa questão. O que eles têm em comum é o fato de buscarem as condições para o aprendizado de provas e trabalharem com o conceito de prova em matemática a partir dessa perspectiva. Assim, eles fazem parte de uma epistemologia experimental[41] da prova.

4.1.A didática dos domínios de experiência

A expressão "Didática dos domínios da experiência" foi cunhada por Paolo Boero para designar uma abordagem que concebe situações de aprendizado nas quais *situações familiares* são a base para a construção de *conceitos científicos* e problemas associados. A relação entre os dois é dialética. Essa abordagem tem suas raízes no paradigma vygotskiano da relação entre conceitos cotidianos e conceitos científicos (Boero et al., 1995), que enfatiza o papel da relação criança - adultos e da linguagem.

Essa abordagem se baseia nos conceitos de *domínio da experiência* (Boero & Douek, 2008), *discussão matemática* (Bartolini Bussi, 1996) e *mediação semiótica* (Mariotti, 2009). O trabalho se enquadra na *pesquisa para inovação*, que envolve o professor como pesquisador dentro de uma equipe acadêmica que desenvolve conceitos teóricos e meios de modelização por meio do trabalho em sala de aula – e para ele (Arzarello & Bussi, 1998, p. 244; Boero et al., 2009, p. 62). Eles ocorrem em um longo período, de dois a três anos.

Um domínio de experiência é um campo de atividade socialmente perene no qual uma dialética de conhecimentos comuns e conhecimentos científicos é organizada e desenvolvida (Boero & Douek, 2008, p. 100). A didática dos domínios de experiência tem por objetivo "tornar sistemáticos o raciocínio, a justificativa, a argumentação e o esforço para se expressar" (p. 108). Vários aspectos, como a autonomia do aluno, o local de discussão, o papel do professor e o objetivo de aculturação à prática da matemática, vinculam essas pesquisas à IBL. Em particular, elas levantam a hipótese do surgimento de normas sociomatemáticas ou "*regras de*

---

[41] Deve-se lembrar que a expressão epistemologia experimental da matemática, sugerida por Jean-Louis Ovaert, foi concebida para designar nosso campo de pesquisa antes que a expressão didática da matemática se estabelecesse (Brousseau, 1975).

racionalidade que são gradualmente estabelecidas e autorizam o apoio, a modificação, o esclarecimento ou a rejeição de conjecturas propostas" (p. 109). Elas diferem pelo fato de levarem em conta a natureza específica da matemática, selecionando situações-problema de natureza teórica – em uma extensão apropriada para os alunos – e tematizando a argumentação por meio do uso da narração da construção da prova.

A expressão escrita tem um lugar especial:

> Na narração da história, deve ficar claro que os alunos reconhecem as linhas de argumentação envolvidas, suas possíveis relações hierárquicas e seu papel na combinação lógica que produz a prova. Assim, a narração deve deixar claros os objetivos teleológicos dos alunos. Nesse nível, os esforços de comunicação ainda não devem estar sujeitos às regras de produção de textos matemáticos, mas, em vez disso, devem responder à necessidade de compreensão mútua (Boero et al., 2010, p. 17).

Ela facilita a transição da argumentação na dinâmica do debate para a argumentação como uma produção estruturada e analisada. A narração da construção da prova estrutura as trocas. Ela é um catalisador para a conceitualização científica e a aculturação da matemática.

A redação é exigida em dois momentos:

- após um debate, cada aluno deve produzir um texto sobre o objetivo e a estrutura da discussão, para incentivar a internalização e a reorganização das ideias;

- um resumo coletivo conclui a sequência para produzir um texto coletivo que todos copiam em seus cadernos.

O professor estrutura a discussão, insiste na qualidade da expressão e incentiva a conscientização das regras de raciocínio e das ligações entre os conhecimentos, levando em conta a distância entre o comportamento observado e o esperado (Boero et al., 2010, p. 1-12). *O texto é um objeto* que ancora as trocas às quais, com o tempo, serão anexadas as regras de racionalidade e um modelo de escrita, ou seja, uma explicação das normas sociomatemáticas.

O trabalho sobre a língua é uma característica da didática dos domínios de experiência e, de modo mais geral, da mediação semiótica, em que a construção dos conhecimentos é vista como consequência de uma atividade na qual os signos emergem e evoluem na interação social (Mariotti, 2009, p. 428). Essa mediação é possível porque os alunos e professores têm acesso igual a um domínio compartilhado de experiência. Esse domínio e a tarefa associada permitem que o professor intervenha – por exemplo, retornar à tarefa, concentrar-se –[42] para gerenciar o

[42] de volta à tarefa [...] intervenções do professor com o objetivo de reconstruir o contexto da tarefa" (Mariotti, 2009, p. 434). "Focalização [...] todas as intervenções do professor em que, de maneira mais ou menos explícita, a atenção dos alunos é direcionada para aspectos específicos de sua experiência (passada ou presente)." (Mariotti, 2009, p. 435).

desenvolvimento da sequência e, ao mesmo tempo, minimizar a violação do contrato de neutralidade.

4.2. Situação de pesquisa para sala de aula

O objetivo do projeto *Situações de pesquisa para sala de aula* (*Situations de Recherche pour la Classe* [SiRC]) é especificar as condições para praticar a abordagem de pesquisa[43] e aprender as habilidades interdisciplinares associadas, incluindo argumentação, definição e comprovação. Mais fundamentalmente, o objetivo é mudar a relação dos alunos com a matemática, dando a eles a oportunidade de realmente fazer matemática (Grenier, 2009, p. 162) e [44]viver a *experiência científica de um matemático*[45] no contexto escolar. Esses objetivos sugerem uma proximidade com a abordagem IBL, mas a estrutura teórica utilizada, a TSD, marca a diferença.

A pesquisa do SiRC utiliza os conceitos de *situação didática*, *situação adidática* e *milieu* para seu papel na construção da situação adidática. Deve-se lembrar que o papel do *milieu*, no sentido da TSD, é ser um antagonista e regulador matematicamente relevante da ação do aluno. Ele garante a viabilidade do caráter adidático da situação[46] , ou seja, a retirada do professor, que é condição para uma atividade *verdadeiramente matemática*. Do ponto de vista teórico, essa retirada é uma consequência das propriedades intrínsecas da situação, e não a aplicação de um princípio *a priori*: os mecanismos reguladores são propriedades da situação, eles garantem a viabilidade da retirada do professor ou, na prática, a robustez da devolução nos casos em que o professor precisa intervir (Arsac, Colonna, et al., 1992 OU Arsac, Balacheff, et al., 1992).

Uma SiRC é realizada em várias sessões; o tempo é indeterminado, a depender do que é necessário para que a pesquisa comece e se desenvolva. Ela alterna entre atividades em pequenos grupos e debates em plenário. É iniciada pela "apresentação" de uma pergunta que atenda aos critérios já mencionados: fácil acesso, sem resposta imediata, mas com estratégias possíveis em qualquer nível, conjecturas bastante óbvias que dão início ao processo de pesquisa. No entanto, a problemática da origem das perguntas está próxima à da pesquisa atual em matemática: por exemplo, em matemática discreta, os problemas de poliominós e tesselações (Gravier & Ouvrier-Buffet, 2022; Grenier & Payan, 2002, pp. 191-192). O *milieu* de resolução

---

[43] EDUSCOL, 2009; essa referência foi confirmada em 2016.
[44] Podemos dizer desta forma?
[45] Esse objetivo coloca este projeto na mesma linha dos projetos Math.en.Jean (desde 1985) e Math à Modeler (desde 2003).
[46] A situação de referência é a situação de ampliação do quebra-cabeça (Brousseau, 1981, 1998, pp. 225, 231).

consiste em objetos materiais manipulados de acordo com as regras de um jogo formal – no sentido de que essas regras de manipulação são independentes da natureza física dos objetos. Essa escolha evita as dificuldades das chamadas referências familiares, que induzem a um "ruído" de significado – por exemplo, o dilema de escolher a situação (cf. seção 2.2). A pesquisa dos alunos extrai sua dinâmica *da dialética entre a reflexão teórica e a manipulação de objetos*, que tem uma função de objetivação durante os debates contraditórios – essa é a função do denominado *milieu* antagônico do sujeito. Finalmente, cada grupo de alunos mantém um "caderno de pesquisa" (*ibid*., p. 165).

O objetivo de uma SiRC não é tanto dar vida a uma situação de solução de problemas, mas *fazer nascer uma aposta* de verdade, vinculada à transformação de uma afirmação em uma conjectura, e dar significado ao problema da prova. Essa abordagem, portanto, aceita a possibilidade de *não* finalidade: a situação pode ser encerrada sem que uma resposta tenha sido fornecida, e o problema pode até mudar completamente no decorrer da pesquisa. Essa posição permite encerrar a SiRC em uma situação aberta; seu objetivo é alcançado, se *a questão da verdade for colocada e compartilhada*, com toda a classe e cada um de seus alunos se apropriando dessa questão, ou seja, tornando a prova ou a refutação o objeto do trabalho. O final de uma SiRC envolve fazer um balanço da atividade matemática: reconhecer o *status* do raciocínio, especificar estratégias e tipos de prova, distinguir entre o que foi provado e o que não foi.

A comunidade científica está tomando forma, está estruturada, sem ser formalizada. Não há institucionalização do que precisa ser aprendido além da observação compartilhada da atividade vivenciada; isso não é uma falta, mas a consequência da escolha de permanecer fora da estrutura formal da instituição. *Não há ensino, apenas um processo de aculturação*.

4.2.Didática do debate científico em curso

A ideia do debate científico em curso é envolver os alunos no empreendimento comum de construção do conhecimento. O debate e a resolução de problemas são ferramentas para dar sentido ao conhecimento que é o tema do curso. A validação não é apenas sobre a solução, é também sobre o conhecimento associado, que a prova valida e vincula a outros conhecimentos.

A didática do debate científico em curso[47] é uma abordagem singular. Não é semelhante às palestras, nem ao IBL. É certo que ela compartilha os princípios da IBL: autonomia dos

[47] Essa abordagem foi inicialmente concebida por Marc Legrand para resolver o problema no ensino superior, para o qual o IBL está buscando uma solução nos níveis mais elementares, de dar significado aos conhecimentos

alunos, autenticidade dos problemas, princípios éticos e epistemológicos da matemática (Legrand, 1995a, 1995b), mas a autonomia e sua contraparte, a neutralidade do professor, são consequência de uma formalização da regra: "Essa neutralidade do professor, que é a pedra angular do sistema, é, portanto, tecnicamente difícil de estabelecer e só pode ser mantida em um contrato didático explícito que possibilite renegociar o contrato social habitual" (Legrand, 1993, p. 130). O contrato "habitual" aqui é o de ensino tradicional.

O papel do professor é semelhante ao de um palestrante, mas difere no relacionamento que ele estabelece *explicitamente* entre os alunos e com eles. As regras invocadas são as das "práticas oficiais" da "comunidade científica" (Legrand, 1986, p. 399). Necessariamente idealizadas, essas práticas servem como referência para avaliar e regular o debate. Sem elas, os alunos ficariam à deriva ou as intervenções do professor seriam vistas como arbitrárias:

> É, portanto, para permitir que os alunos, em primeiro lugar, entrem em problemáticas científicas, depois evitem distorcer demais o significado dos conhecimentos aprendidos e, finalmente, acessem uma certa forma de autonomia de pensamento, que o professor propõe à classe ou ao auditório que adote um modo de operação inspirado na comunidade de pesquisadores (Legrand, 1993, p. 131).

A situação é a de um curso na sua configuração magistral, mas não no espírito. Ela é estruturada pelos marcadores sociais, o professor de um lado e os alunos de outro, e pelas regras explícitas do debate, segundo as quais cada um aceita o risco do que está propondo e garante a *sinceridade* do compromisso de seus argumentos. Portanto, se o professor é neutro, essa neutralidade é a de um árbitro em um jogo cujas regras são estabelecidas e no qual os alunos concordam em participar com pleno conhecimento dos fatos: em nossa opinião, cabe ao professor dar *status* científico aos erros nas fases de pesquisa, e cabe ao debate provar sua eficácia didática a longo prazo: mostrar à "classe" ou ao "anfiteatro" que aqueles que intervêm assumindo o risco de um maior envolvimento pessoal oferecem, a si mesmos e aos outros, oportunidades de entender a matemática em profundidade, oportunidades que eles teriam encontrado com menos intensidade e que, em muitos casos, teriam escapado completamente no curso de trocas didáticas menos aventureiras (Legrand, 1993, p. 124).

Deixados à própria sorte, os alunos se perderiam nas discussões, "alguém tem que liderar o grupo social, a classe ou auditório, a fim de evitar que o debate fique atolado em um fórum em que cada um gritaria mais alto que o outro" (Legrand, 1993, p. 129). O professor

---

matemáticos que, na maioria das vezes, são reduzidos à reprodução de técnicas. Ela foi retomada e trabalhada nos grupos do IREM, que a estenderam ao ensino do colégio para fornecer uma solução para o problema da aprendizagem da demonstração (Legrand, 1986; Legrand et al., 2011).

utiliza o quadro para limitar e canalizar as trocas e manter uma crônica de ideias importantes para retornar. Além disso, os alunos podem, no decorrer das trocas, não se entenderem mais, acreditarem erroneamente que concordam com posições matemáticas inaceitáveis ou efetivamente concordar com elas. O professor tem, assim, de administrar, como na abordagem da IBL, um delicado equilíbrio entre a liberdade que deixa aos alunos e a restrição de sua responsabilidade em relação ao conhecimento a ser ensinado – um dilema inerente à IBL. O contrato didático explícito com os alunos, no entanto, limita a dificuldade, ao dar-lhe dois referentes "objetivos": a matemática e as regras do debate.

A escolha dos problemas atende aos requisitos, comuns às abordagens IBL e TSD, de equilíbrio entre simplicidade e complexidade para facilitar o envolvimento do aluno e obter produções originais que estimulem a discussão e os esforços para provar ou refutar uma proposição[48]. Trata-se aqui de problemas de modelização, em um campo concreto ou familiar, escolhidos para criar tensão entre a chamada lógica cotidiana e a lógica matemática e, assim, aumentar a conscientização de suas diferenças. A modelização é, em si, um problema cuja solução é discutida, mas não é, no quadro de referência do professor, o objeto da situação. Além disso, se isso parecer muito complexo ou levar os alunos a um beco sem saída, ele pode fazer uma proposta e reiniciar a situação.

O encerramento da situação envolve dois tipos de institucionalização:

- Por um lado, o reconhecimento do conhecimento que é o tema da aula como a solução de um problema matemático que teve de ser separado do modelo que o introduziu e expresso em termos de saber.

- Em segundo lugar, o reconhecimento de princípios compartilhados de validação. Uma grande parte deles é metaconhecimento, que é implícito por natureza e, portanto, complexo de institucionalizar (Legrand, 1993, p. 151).

4.4. Situação de iniciação ao raciocínio dedutivo

A 'prática do problema aberto' faz parte de uma tendência de inovação pedagógica que pode ser vinculada à tendência internacional das pesquisas sobre a resolução de problemas do início da década de 1980. Na França, essa abordagem é promovida pelo IREM de Lyon, que a vê como uma "técnica pedagógica" que pode ser utilizada para "colocar os alunos na situação mais típica da atividade de pesquisa matemática, ou seja, confrontar um problema cujo enunciado os coloca, considerando todos os aspectos, na situação de um pesquisador" (Arsac

[48] Além disso, há a necessidade de produções relacionadas ao tema do curso.

& Mante, 1983, p. 7). O objetivo não é ensinar, mas colocar os alunos em contato com uma ciência viva: "a prática de pesquisa de problemas ensina, antes de tudo, o que é a matemática (mesmo que também ensine matemática)" (p. 7, p. 10). O professor não tem nenhuma função específica a não ser propor um problema e orientar os alunos, dando-lhes total liberdade, mesmo que a solução não seja encontrada dentro do tempo permitido. Trata-se de uma *pesquisa para inovação* (Boero et al., 2009): seus resultados e propostas devem poder ser utilizados por qualquer professor em sala de aula.

Aqui, novamente, a chave está no problema. Observações repetidas levam a uma caracterização daqueles que provavelmente funcionarão: enunciado curto que não leva a um método ou solução, os alunos estão suficientemente familiarizados com o domínio conceitual do enunciado. Outro requisito é que o problema permita que sejam feitas propostas suficientes para que, mesmo não resolvido no tempo permitido, haja uma rica troca de ideias quando o progresso for avaliado, para que possam ser discutidas e comparadas – aqui encontramos a essência dos princípios do IBL.

No final da sequência, o professor orienta o debate, solicitando argumentos e até mesmo provas e contraexemplos. Dessa forma, ele inicia uma conscientização sobre a natureza do *debate matemático*. Essa fase final é delicada: o professor se esforça para envolver os alunos, respeitando o princípio da autonomia deles, mas sem renunciar a sua responsabilidade profissional e matemática.

Escrever pôsteres com propostas é uma forma de regular as trocas, principalmente por exigir atenção aos princípios de escuta e respeito mútuo. Mas, embora as regras de bom comportamento coletivo possam ser compreendidas, se não seguidas, as regras do debate matemático não surgem espontaneamente: elas não têm análogos na vida cotidiana, em que a questão da verdade de um julgamento não tem uma resposta tão radical quanto na matemática – a prática pode acomodar uma afirmação que seja *verdadeira em geral*.

Em meados da década de 1980, com a introdução, no currículo, da iniciação ao raciocínio dedutivo nos primeiros anos do colégio, os trabalhos evoluíram para a pesquisa sobre esse tema: "o objetivo é permitir que o aluno verifique gradualmente por si mesmo a veracidade de uma afirmação matemática" (Arsac, Colonna et al., 1992; Arsac & Mante, 1996, p. 21). A estrutura continua sendo a da pesquisa para inovação: "Propor situações de sala de aula que possam ser utilizadas no decorrer de uma aula comum, testadas com eficácia nessas condições, e que possibilitem dar uma resposta a essa demanda do currículo". (*ibid*., p. 22). A abordagem estrutura-se, ela é de natureza experimental e adota o referencial teórico e metodológico da TSD.

Os resultados das pesquisas sobre problemas abertos e o estudo epistemológico da relação entre o raciocínio cotidiano e matemático nos leva a postular *a priori* que as metarregras do raciocínio dedutivo não serão totalmente construídas e adotadas coletivamente pelos alunos (*ibid*., p. 24), em particular as três seguintes: (1) *uma afirmação é verdadeira ou falsa*, (2) *um exemplo não é suficiente para validar uma afirmação*, (3) *um contraexemplo é suficiente para invalidar uma afirmação*. Os trabalhos se concentram no estudo de situações propícias ao seu aprendizado.

A situação fundamental para a iniciação ao raciocínio dedutivo é a de um debate cujo objetivo é esclarecer o acordo sobre *as regras que regem a validade* de uma afirmação. Como a construção das situações adidáticas correspondentes não pode, *a priori*, garantir que essas regras serão formuladas, nem que se chegará a um consenso aceitável do ponto de vista matemático, a hipótese que está sendo trabalhada é que os conflitos durante o debate justificarão a intervenção do professor e darão sentido às regras que ele estabelecerá.

"Isso pressupõe que o professor só introduzirá essas regras depois que os alunos perceberem a dificuldade de concluir o debate" (*ibid*., p. 23). O problema deve ser escolhido de forma a tornar o debate altamente provável, e três condições são mantidas (*ibid*., p. 25):

- os alunos não precisam produzir todos a mesma solução para o problema apresentado;

- respostas diferentes para as perguntas acima levam a soluções diferentes para o problema; só deve ser possível obter o resultado exato utilizando as regras que estão sendo ensinadas;

- os alunos devem perceber que a diferença entre as soluções está ligada às técnicas de validação utilizadas.

A sequência de situações é planejada para levar ao debate plenário, e um cenário preciso é proposto (*ibid*., p. 26). Vale a pena observar os detalhes:

- formação de grupos (4 a 5 alunos)
- distribuição do enunciado
- pesquisa individual (5 a 10 minutos) - apropriação inicial
- pesquisa em grupo (cerca de 45 minutos) - trabalho em busca de uma solução comum
- produção de um pôster (resultados e explicações convincentes)
- coletas de cartazes, classificação e etiquetagem
- abertura do debate com o primeiro cartaz (A)
- trabalho de cada grupo no cartaz A (10 minutos)
- julgamento de cada grupo por um porta-voz, em uma das duas formas a seguir:
    - "Concordamos com este cartaz porque ...".

- “Não concordamos com este cartaz porque ...”.
- […]

Esse cenário continua com a explicação dos acordos e desacordos, argumentados individual ou coletivamente, para cada um dos cartazes. O professor pede aos autores que respondam aos comentários ou objeções da mesma forma que justificaram sua proposta. Uma vez expressas, essas posições são debatidas.

As observações confirmam que, no decorrer dos debates em plenário, as regras pragmáticas do raciocínio cotidiano dão origem a discordâncias que as questionam. Os alunos perceberam essas discordâncias, mas não conseguiram ir além delas e mantiveram suas posições. O professor formula as razões para as discordâncias e, em seguida, estabelece a regra que conclui o debate.

Foram feitas duas observações robustas (Arsac, Colonna et al., 1992, p. 187, p. 188; Arsac & Mante, 1996, p. 22-23, 40-42):

- a maioria dos alunos se apropria das regras,

- os alunos se referem espontaneamente a situações que vivenciaram como referência; essas situações são utilizadas como tal pelo professor.

Entretanto, a qualidade do debate não é garantida; ela depende da natureza das soluções propostas. Por fim, a *variedade de soluções*, porque exige a busca de critérios de comparação e escolha, e *o tempo*, porque é necessário para a convergência e o consenso, são duas condições para o surgimento de um padrão sociomatemático de prova.

4.5. Princípios compartilhados

Os trabalhos nesta seção têm origem no mesmo desejo de permitir que os alunos *realmente façam matemática*, retomando a expressão de Denise Grenier, o que implica sua autonomia intelectual e, correlativamente, a neutralidade do professor. Essas duas condições são comuns à abordagem IBL, mas a maneira pela qual a segunda é satisfeita é significativamente diferente. No caso da abordagem IBL, a neutralidade é um princípio consagrado na função do professor como facilitador e moderador da atividade individual e coletiva. No caso das abordagens agrupadas sob o tema da epistemologia experimental, ela é buscada como consequência da *criação de situações* que incentivam a devolução de uma participação apoiada na verdade e na responsabilidade. A pesquisa se concentra nas características dessas situações, e não no professor, mesmo quando seu papel é magistral, como no modelo da *didática do debate científico*.

Como o professor não pode se livrar de suas responsabilidades matemáticas e institucionais, o objetivo é superar esse limite de duas maneiras: a integração do professor-matemático à situação e o relaxamento da restrição institucional. Esse último é alcançado por meio da aceitação de conclusões imperfeitas e da abertura de tempo – didática dos domínios de experiência, SiRC –, da definição das regras do jogo e da instalação do professor no papel de árbitro (debate científico em curso) ou ainda a incorporação de um princípio robusto de institucionalização (introdução ao raciocínio dedutivo).

A situação fundamental para dar significado à prova é a tomada de decisão coletiva sobre a validade da solução de um problema ou do enunciado de uma conjectura. O texto, o da solução ou do enunciado, é o objeto do julgamento. O debate é o meio pelo qual a decisão é tomada e apropriada coletivamente, e a questão em jogo é a aceitação do texto – ou seja, sua validade em termos de forma e substância, à luz de um padrão probatório compartilhado. Deve-se observar que essa situação não é uma situação matemática ou de modelização matemática, no sentido canônico do conceito de situação fundamental na TSD. Trata-se de uma situação de debate científico, cuja natureza matemática decorre da escolha do problema, e suas características potencializam o debate, ao permitir que todos os alunos se envolvam e iniciem sua resolução em várias direções, cuja comparação motiva as trocas críticas. A natureza matemática do debate é reforçada[49] pela capacidade do problema de evoluir para um problema matemático (teórico), porque é introduzido por um enunciado matemático – iniciação ao raciocínio dedutivo – ou por um *milieu* formal tangível (SiRC), ou porque induz à modelização matemática de forma bastante imediata: didática dos domínios da experiência, debate científico em curso.

A tarefa de escrever um texto público requer atenção à linguagem, à coerência e ao significado, que engajem uma dialética de formulação mais exigente do que a da comunicação oral, envolvida na dinâmica, às vezes animada, do debate. Sejam quais forem as modalidades, esses textos contribuem para a criação de uma memória pessoal –narração do raciocínio, caderno de pesquisa – e para a criação de um objeto compartilhado (exibição de argumentos).

5. As situações de prova

Os objetivos das pesquisas que eu reuni para este curso são semelhantes, mas são claramente distintos uns dos outros em termos de suas opções epistemológicas – ou seja, a reprodução da atividade do matemático *versus* a determinação pelos saberes –, seus referenciais

[49] A ideia de potencial é desenvolvida nos trabalhos de Jean-Philippe Georget (em particular, 2009, p. 79).

teóricos e seus métodos. Além dessas diferenças, que às vezes poderiam ser vistas como complementaridades, esses trabalhos se concentram em três categorias principais de questões: a da especificidade da prova como saber disciplinar; a da natureza da argumentação matemática a montante da demonstração; e as características das situações de prova e, portanto, do objeto e da regulação do debate necessário para o compartilhamento de um padrão de prova na sala de aula de matemática.

As respostas a essas perguntas são necessárias para resolver os problemas didáticos levantados pelo trabalho do professor, para dar propósito ao envolvimento dos alunos e para permitir que eles reconheçam *as lições* a serem levadas em consideração na sua atividade (Brousseau, 1986, 1998, p. 49). São essas lições que serão o objeto da institucionalização do padrão.

Abordo essas questões nas seções a seguir, primeiro esclarecendo o conceito de argumentação matemática e, depois, o de situação de prova.

5.1. Provar: uma competência

Os programas e textos oficiais e seus diversos documentos de acompanhamento, na França e internacionalmente, identificam "provar" como uma competência. Seu *status* epistemológico é o de um *saber transversal* (Grenier & Payan, 2006), cuja característica é que ele está envolvido na construção dos saberes disciplinares e é independente de saberes específicos – por exemplo, raciocínio matemático –, ou mesmo da própria disciplina, por exemplo, conjecturar.

Uma competência é adquirida pela prática da disciplina; ela deve ser aprendida, mesmo que não seja ensinada explicitamente (por exemplo, Schoenfeld, 1987). Esse é o significado da pergunta de Gilbert Arsac (1988): *a demonstração pode ser ensinada*? A resposta seria sim, se fosse simplesmente uma questão de aprender um estilo de escrita, mas não quando se trata do significado de validação em matemática. Resumindo, escreve Daniel Lehmann (1989), "independentemente do pesar que possamos ter pelo fato de não haver nenhum outro mais tranquilizador, o talento, o tato e o discernimento são os principais critérios de validação em matemática". Ele conclui:

> Não é evidente que o aprendizado da demonstração deva ser institucionalizado. Essa institucionalização pode apresentar perigos, pois favorece um discurso sobre o tema da demonstração (definição, exemplos etc.) em detrimento de seu significado como instrumento de aquisição de saber. O importante é que os alunos aprendam a fazer matemática, ou seja, aprendam a procurar e, se possível, a resolver os problemas com os quais se deparam ou os problemas que lhes são apresentados e que estão dispostos a

> criar. Para isso, precisam entender o que é uma demonstração [o que não significa que saibam dar uma definição, como acrescenta a nota], e que aprendam a fazê-la (Lehmann, 1989, pp. 15-16).

Gibert Arsac (2018, p. 262) resume essa posição da seguinte forma: a demonstração deve ser utilizada apenas como uma ferramenta e, portanto, não deve ser objeto de ensino explícito.

A palavra demonstração tem dois significados no texto de Daniel Lehmann: um tipo de texto e uma prova matemática. Ao afirmar, no início de sua nota, que prova e demonstração são sinônimos, ele se priva de uma distinção entre o objeto matemático e seu significado. Mais de 30 anos depois, a palavra "prova" foi adotada pelas instituições, tornando possível emancipar a prova na sala de aula de matemática da ferramenta-demonstração no sentido da forma que será fixada no final do ciclo 4.

Se a competência escapa do ensino magistral, então, para que ela possa ser aprendida, precisamos criar situações que deem origem a *uma atividade* na qual sua manifestação possa ser observada, designada e reconhecida como tal[50]. *A competência e a atividade são inseparáveis, assim como o conhecimento e os problemas*. A competência é o desdobramento e a organização da atividade para mobilizar conhecimentos operatórios eficazes, cuja maior parte é da ordem do conceito-em-ato (Vergnaud, 1990, 2011).

Lembremos, para nossos propósitos aqui, que na origem da atividade do aluno há um problema a ser resolvido. Nesse ponto, trata-se de uma atividade individual – ou mesmo dentro de um pequeno grupo, que pode ser comparado a um sujeito epistêmico individual –, cujo produto é uma explicação, adquirida pelo indivíduo, da validade de uma solução; essa explicação é pessoal e temporalmente situada. A problemática da prova é a de sua transformação em uma argumentação em uma transição público-privada, que permitirá que o produto individual seja qualificado como um bem coletivo nos termos de um acordo explícito. O corolário é a despersonalização e a eventual institucionalização – um ato de distanciamento do contexto e do tempo – da argumentação que se torna prova.

Todos esses processos individuais e sociais mobilizam vários níveis de linguagem e vários registros semióticos para produzir textos explicativos ou argumentativos e para instrumentalizar o debate probatório. A linguagem tem "uma função de comunicação, uma função de representação, uma função de auxílio ao pensamento e à organização da ação"

[50] Lembramos que essa definição é comum aos cursos de treinamento vocacional, que essencialmente ensinam habilidades, procedimentos e saber-fazer.

(Vergnaud, 1990, p. 168). Ela é funcionalmente constitutiva da construção e da instituição da prova.

Por essa razão, sem reduzi-la a isso, proponho caracterizar a competência necessária para a prova e o debate em matemática, adaptando o modelo de competência linguística de acordo com quatro componentes (Cuq & Gruca, 2017, p. 245):

- *Componente linguístico*: conhecimento de regras e das estruturas gramaticais e do vocabulário;

- *Componente sociomatemático*: conhecimento de regras compartilhadas do uso de formas linguísticas e semióticas em função na sala de aula de matemática;

- *Componente discursivo*: coerência dos tipos de discurso de acordo com a situação de comunicação em que são usados;

- *Componente estratégico*: capacidade de utilizar estratégias verbais e não verbais adaptadas ao debate matemático.

O debate matemático é um instrumento (ferramenta-processo) para a construção da competência matemática, em particular seu componente sociomatemático –reconhecimento e aquisição de critérios de prova – e seu componente estratégico: construção de um argumento matemático.

5.2. Argumentação matemática

Volto à definição de "raciocínio" de Raymond Duval (1992, p. 52): raciocínio é a organização de proposições direcionadas a uma afirmação-alvo a fim de modificar seu valor epistêmico. Essa definição não apresenta nenhuma contradição com a escolha da pesquisa IBL (cf. § 3.1). Ela limita seu escopo, ao projetar o raciocínio no plano do discurso, o dos termos "proposição" e "enunciados".

A expressão do raciocínio finalizado é o tema de um texto em apoio à validade de um enunciado. Esse texto é uma *argumentação* quando é orientado para a aceitação, por outros – possivelmente por si mesmo –, da validade alegada. É uma explicação, quando relaciona a afirmação-alvo com os enunciados cuja validade foi estabelecida (*ibid*., p. 40). É uma prova, quando a argumentação que ele apresenta é aceita por uma comunidade individualizada, ou seja, por indivíduos reunidos em uma determinada circunstância, em um determinado momento, com um projeto comum de conhecimento.

O fato de que a expressão de um raciocínio seja *uma argumentação pode ser reivindicado*. O fato de que uma argumentação seja *uma prova deve ser debatido e aceito*.

“Demonstração” se refere às provas da comunidade matemática, sem prejuízo de suas formas, que podem ser diferentes das herdadas de Euclides.

Não é raro encontrar matemáticos que consideram que os termos prova e demonstração são sinônimos[51]. Essa posição é insustentável quando se trata de aprendizado desde a primeira série até a universidade. Uma olhada na história ajuda a qualificar essa posição: *Nolens volens*, uma prova é tingida de retórica porque é um discurso completo, que é, acima de tudo, adequação ao que prova; e apresenta, por isso, um caráter interpretativo, enquanto uma demonstração pode ser considerada como um ato de exterioridade ou objetivação, algo que requer o olhar (o objeto é o de um sujeito), mas um “ver” que é suficiente em si mesmo, verdadeiramente uma “demonstração” da verdade do que está em questão (Dhombres, 2008, p. 61).

Sem criar uma ruptura indissolúvel com os matemáticos, podemos dizer que a demonstração é uma ferramenta no processo de construção dos saberes matemáticos, por meio de um ato coletivo de objetivação e reconhecimento do que os sustenta. Esse reconhecimento não depende de uma norma discursiva ou linguística específica, segundo a posição de Daniel Lehmann; ela resulta de um acordo ao final de um processo da instituição matemática. A norma de demonstração é um meio de criar um referente comum para a crítica e de regular esse processo. Sua natureza é sociomatemática.

No caminho para o conhecimento, a primeira etapa é a formulação de uma *conjectura* para a qual a pessoa que a afirmar tem boas razões para sustentar sua verdade. O processo probatório tem três aspectos: a formulação de sua afirmação, a estrutura de uma concepção[52] na qual ela é reivindicada e a argumentação que a acompanha. Uma vez que esses componentes tenham sido explicitados, a afirmação merece ser reconhecida como uma conjectura. Essa observação me levou a propor[53] uma caracterização da conjectura: *Conjectura* = {concepção, enunciado, argumentação}. A vantagem dessa forma é que ela é congruente com a caracterização do teorema na forma do tripleto descrito por Maria-Alessandre Mariotti et al. (cf. este volume; 1997, p. 180): *Teorema* = {teoria, enunciado, prova}. A aproximação dessas duas representações nos lembra que a argumentação que se torna uma prova transforma a conjectura em um *teorema* e liga o teorema à teoria. Entretanto, a ideia de teorema é inadequada em níveis elementares. De fato, mesmo quando a demonstração é introduzida, a noção só é utilizada em sala de aula para os enunciados cuja institucionalização autoriza seu uso sem o

[51] Cédric Villani reafirmou essa posição para mim durante uma breve troca de *e-mails* sobre o relatório Villani-Torossian sobre o ensino da matemática (30 de março de 2018).
[52] « Concepção » é utilizada aqui no sentido do modelo cK¢ (Balacheff, 2019a).
[53] Ref. in *La Lettre de la preuve* (Balacheff, 1999).

retorno da prova. Na sala de aula de matemática comum, um teorema é um *enunciado verdadeiro* que, devido à sua importância e escopo, merece ser explicitamente integrado à teoria.

O que está em jogo na validação é essencialmente a modificação do *status* epistêmico de uma afirmação, que se torna uma *afirmação verdadeira*.

Precisamos voltar aos termos proposições e enunciados, usados por Raymond Duval. Eles denotam a *verbalização em palavras* de objetos de pensamento. Trata-se, por um lado, de oferecer explicações necessárias para o debate público de prova e, por outro lado, de instrumentar o pensamento (Vergnaud, 1990, p. 158, 159, 1991, p. 85). De modo geral, e, portanto, *a fortiori*, no caso de alunos jovens, ao colocar em palavras o que é dito ou escrito, é útil distinguir a frase do que ela representa – o enunciado. Essa distinção, tirada aqui de John Langshaw Austin[54], não é feita no uso comum, sem que isso afete a comunicação, mas esconde o trabalho que precisa ser feito. A frase, objeto linguístico complexo, é o produto do trabalho no decorrer do qual ela evolui para ser ajustada o mais próximo possível da intenção da enunciação (adequação semântica) e ser respeitosa das regras e estruturas gramaticais da língua (correção linguística). Esse trabalho continua até a expressão final da argumentação.

A caracterização de uma afirmação válida, nos moldes de um teorema, seria: *Afirmação verdadeira* = {base de conhecimentos, sentença, argumentação matemática}. Os termos desse tripleto evoluem no curso das trocas – dialética de comunicação e formulação no sentido da TSD – até o ponto em que uma explicação da verdade é estabelecida aos olhos do solucionador de problemas, seja individual ou coletivo, e pode funcionar pelo menos como uma argumentação para os outros[55].

É preciso explicitar o que pode ser a base de conhecimentos. As primeiras pesquisas sobre aprendizagem de provas se concentraram em questões de lógica e estrutura de discurso e, em seguida, em processos probatórios no contexto da resolução de problemas. Elas não levavam totalmente em conta a natureza teórica da conjectura e sua transformação em um

---

[54] "Uma declaração é feita e sua elaboração é um evento histórico, o pronunciamento por um determinado orador ou escritor de certas palavras (uma frase) para um público com referência a uma situação histórica, um evento ou qualquer outra coisa. Uma frase é composta de palavras, uma declaração é feita em palavras. Uma frase não é inglês ou não é um bom inglês, uma declaração não é em inglês ou não é um bom inglês. As declarações são feitas, palavras ou sentenças são utilizadas. Falamos de minha afirmação, mas da frase em inglês (se uma frase é minha, eu a cunhei, mas não cunho afirmações)" (Austin, 1950, p. 3).

[55] Ou mesmo como uma explicação, mas esse não é de imediato o caso - Repensamos na famosa exclamação de Cantor: "Eu vejo, mas não acredito".

teorema[56]. Essa explicitação tornou-se necessária no contexto da didática dos domínios da experiência (cf. seção 4.1.). Nessa abordagem, o trabalho de modelização leva os alunos a um estudo no modelo, que é um modelo matemático, sem de fato falar sobre ele. Para isso, o processo de validação deve ser desvinculado do uso de controles exógenos pelo referente, e deve haver um acordo sobre o modelo, ou seja, sobre os conhecimentos que esse modelo reúne e institui. Isso é o "tomado como compartilhado" das abordagens IBL (Cobb & Yackel, 1996). Reconhecer a necessidade de ater-se aos controles endógenos ao modelo é um ato que inicia a constituição de uma norma sociomatemática. Raciocinar no modelo, sem retornar ao referente, é uma primeira introdução a uma *atividade teórica*.

De fato, garantir a validade de um raciocínio consiste em verificar se as afirmações utilizadas são aquelas aceitas quando o modelo foi construído, ou afirmações resultantes de um *raciocínio válido no modelo*; decidir sobre essa validade nada mais é do que questionar a lógica subjacente, suas regras e as condições de seu uso (cf., por exemplo, Arsac & Mante, 1996, p. 33). Essas são as características do raciocínio dedutivo. Entretanto, os argumentos apresentados não estão imediatamente em conformidade com a norma matemática. No mínimo, eles devem ser aceitáveis de acordo com a disciplina, mesmo que não tenham o *status* de provas (Herbst et al., 2009, p. 43). Esse é o caso, por exemplo, do uso de um *exemplo genérico* ou de um *experimento mental* (Balacheff, 1987), que podem ser aceitos em escolas elementares.

Se um modelo não é uma teoria, no sentido forte do termo na disciplina, ele é uma teoria localmente – para usar a fórmula de Hans Freudenthal (1971, p. 430) –, no sentido da *organização local dos conhecimentos*. Por esse motivo, retomei a expressão "base de conhecimentos" para designar o corpo organizado de conhecimentos, muitas vezes de origens diversas, que forma a base da modelização. Estabelecida por e para a comunidade da sala de aula, essa base de conhecimentos pode combinar saberes escolares, conhecimentos em ato ou até mesmo fatos oriundos de observação, cuja legitimidade é empírica. Ela deve ser *instituída* para existir como um recurso de referência para a argumentação (Ball & Bass, 2003).

Em resumo...

- As condições de eligibilidade de uma frase para o debate probatório na sala de aula de matemática serão sua conformidade ética (sinceridade, responsabilidade), sua correção linguística (vocabulário e sintaxe) e sua adequação semântica (fidelidade ao tema do enunciado).

---

[56] Percebi essa ideia bem cedo, mas sem tirar todas as consequências: "Do aluno praticante, todo orientado para o domínio do saber-fazer, passa-se ao aluno teórico, cuja justificativa da atividade é a de conhecer". (1988, p. 65, 1990). Aqui seria (Balacheff, 1988, p. 65, 1990)?

- A aceitabilidade matemática de uma argumentação será submetida à satisfação das condições sobre as frases, além da correção formal do texto (coerência lógica), sua congruência com as concepções dos alunos e, finalmente, sua ancoragem na base de conhecimentos compartilhados.

5.3. Dialética da validação e situação de prova

A TSD tem suas origens na busca de situações que dão significado aos conceitos matemáticos, dando-lhes vida no cadinho de uma *dialética de validação* (Brousseau, 1972, p. 436), cujo ponto culminante assume a forma de explicitar um acordo coletivo sobre a verdade ou falsidade de uma afirmação e seu reconhecimento formal (institucionalização). O conceito didático canônico correspondente é o de uma *situação de validação*. Os conceitos de *situação de ação* e *situação de formulação* são deduzidos disso por meio do raciocínio sobre as condições necessárias para uma dialética relevante e eficaz: disponibilidade das concepções que o professor deseja ver engajadas, compartilhamento de meios de comunicação linguísticos e não linguísticos que instrumentam o debate contraditório. Outra condição é a autonomia dos alunos, garantindo que o resultado do processo seja plausível dentro de uma gama de possibilidades matematicamente aceitável. Para atingir essa condição, a TSD dispõe, por um lado, do conceito de *milieu*, cujas propriedades devem garantir a regulação endógena para minimizar a intervenção do professor, e, por outro lado, um *modelo de jogo de estratégia coletiva* para dar consistência a uma *finalidade* que orienta a atividade dos alunos.

Esse jogo é determinado pelo terreno concreto ou abstrato em que ocorre, por seus estados e pelas regras para mudar de estado, pela especificação de um bom estado final e pelos papéis dos jogadores (Brousseau, 1986, 1998, pp. 82 e seguintes). A criação de um *milieu* objetivo, uma terceira e antagônica realidade[57], no campo de jogo, é um meio de regulação endógena que objetiva as retroações – refutação, evidência empírica.

O jogo regula a ação e determina as razões para agir. Ele deve ocorrer sem a intervenção do professor. No entanto, essas intervenções podem ser legítimas e necessárias para garantir o cumprimento de regras que podem ser esquecidas, desconsideradas ou violadas involuntariamente.

Assim como no direito, em que a lei escrita exige um juiz, o *jogo com regras explícitas* exige um árbitro. Assim, embora o professor esteja ausente do jogo teórico (*situação adidática*), ele faz parte do jogo efetivamente jogado (*situação didática*): ele é o garantidor do

[57] Material ou imaterial

cumprimento das regras, mas é indiferente às estratégias – é por isso que a atividade dos alunos é autônoma, embora a presença ativa do professor possa ser observada. O *contrato didático* estabelece os limites da responsabilidade dos alunos-jogadores e do professor-árbitro.

A situação deve ser projetada de modo que todos tenham interesse em desempenhar seu papel com sinceridade e eficácia, em um contexto que incentive a emulação em vez da competição, a fim de contribuir para o sucesso coletivo. A dialética da validação assume a forma de trocas contraditórias que devem mobilizar figuras de linguagem que os alunos utilizarão e depois abandonarão (Brousseau, 1978, 1998, p. 127). Assim, no sentido da TSD, "um problema de validação é muito mais um problema de comparação, de avaliação e de rejeição de provas do que de busca de demonstração" (p. 127); hoje falaríamos de *busca de provas*. É esse *problema de validação* que a situação deve trazer à tona, e não apenas o problema que é sua razão de ser quando da sua devolução.

As situações de validação são uma maneira eficaz de transformar construções individuais em um objeto de conhecimento compartilhado que pode ser reconhecido e institucionalizado pelo professor. A validade desse conhecimento é, portanto, atestada, mas, na maioria das vezes, a base para essa decisão é deixada implícita. A prova é, portanto, uma ferramenta; e não é, por si só, a aposta em jogo na situação ou seu objeto.

Essa limitação restringe o escopo dessas situações para o aprendizado de provas. Para superar essa hipótese, precisamos acessar o "esquema de validação explícita", questioná-lo, reconhecer suas características e instituí-las, e só então "a pequena sociedade da sala de aula" poderá se afirmar como verdadeiramente matemática (Brousseau, 1986, 1998, p. 112). Guy Brousseau utiliza a expressão "situação de prova" para designar situações de validação com essas características, mas não desenvolve a modelização nessa direção e não a retoma. Adotarei a expressão *situação de decisão* para designar situações de validação que não requerem a explicitação de um esquema de validação explícito, reservando o nome *situação de prova*[58] para situações de validação cujo *objeto* é o problema de validação.

O *design* de situações de interações sociais abertas, como as da abordagem IBL, baseia-se na suposição de que a criação de um debate livre na sala de aula seria suficiente para trazer à tona o problema de validação. Isso não é o que se observa, mesmo quando o problema é escolhido de acordo com os critérios de um problema aberto e quando a situação verifica as características de uma situação de validação, incluindo um *milieu* objetivo.

[58] Essa expressão aparece duas vezes na coleção de artigos que apresentam a TSD (Brousseau, 1998, p. 43, p. 111).

A situação de prova deve *dar aos alunos as razões para se engajarem na validação por meio de conhecimentos* (teoremas e teoremas-em-ato, regras de inferência, controles), e não apenas por meio de interações com o *milieu* objetivo (medir, observar, manipular, desenhar, calcular). Por essa razão, o *milieu* no qual o problema de validação é colocado não pode ser meramente material; ele deve *incluir* conhecimentos (Margolinas, 1992, pp. 42 e seguintes), no sentido de que é vinculativo. É com essa condição que o ambiente é um sistema antagônico ao sujeito: o conhecimento constitui a referência (conhecimento local).

A situação didática da aprendizagem da prova será baseada no *milieu* de referência, que combina o *milieu* objetivo e conhecimentos, e modelará um jogo de estratégia coletiva que instrumentaliza e regula a dialética do verdadeiro e do falso. Esse jogo transforma a prova ferramenta na situação de validação em um objeto na situação de prova.

5.4. O debate, objeto e regulação

O reconhecimento de uma argumentação como prova matemática requer discussão crítica, trocas e exames de argumentos a favor e contra, propostas de explicações e um esforço para reduzir conflitos de substância – sobre conhecimento e estruturas argumentativas – ou de princípio, sobre as regras e metarregulações do trabalho matemático. Na literatura, essas discussões são frequentemente chamadas de debates, e vou me ater a esse uso, embora ele enfatize mais o conflito do que a colaboração ou a cooperação no processo de validação. As regras desse jogo, sejam elas formuladas ou implícitas, devem levar os alunos a se interessarem por:

- participar da dialética de provas e refutações;
- compartilhar as regras do debate de evidências matemáticas;
- transformar uma construção pessoal em um bem público;
- contribuir para uma base de conhecimentos compartilhada (saberes locais).

A finalidade do jogo é a publicação de uma prova, um texto público aceito por todos os alunos e potencialmente aceitável pelo professor. O sucesso dessa transição da esfera privada – na qual um aluno ou grupo de alunos chegou a uma explicação que os convenceu – para a esfera da sala de aula é a pedra de toque da situação. A publicação do texto é sua institucionalização. Ela o torna uma parte legítima da memória comum, e o conhecimento que ele estabelece é uma contribuição para o saber de referência. Para conseguir isso, o processo é semelhante ao seguido pelo matemático. Ele compreende vários tipos de atividades que interagem intimamente, as da relação dialética entre formulação e validação, incluindo:

- *escrever* (criar frases e organizá-las);

- *validar o texto* (as restrições da boa forma);

- *validar a prova* (critérios de validade).

Os trabalhos relatados neste curso verificam várias dessas condições, mas raramente todas elas. Em particular, as situações no paradigma IBL são estruturadas de forma muito fraca para serem modeladas em termos de um jogo de estratégia coletiva. Mas, se essas situações verificassem todas as condições, em seu espírito, se não em sua letra, a proposta que faço aqui deveria ser considerada com cautela: *embora uma situação de prova favoreça* a priori *a explicação e a discussão de regras em diferentes níveis, os elementos teóricos sejam sólidos o suficiente para garantir isso, sua implementação é incerta devido à própria natureza do envolvimento humano na interação social* – autoimagem, relacionamento com os outros, marcação social entre alunos 'bons' e 'ruins', manipulação de regras etc. Não se pode garantir que todos os alunos participarão da construção de um consenso, e os desacordos podem resistir às tentativas internas de resolver conflitos sobre as regras do debate.

As arbitragens são necessárias; elas não podem vir de um *milieu* objetivo, nem do jogo de estratégia coletiva. Cabe ao professor confirmar ou rejeitar o uso de uma regra, se necessário; lembrar os alunos da regra, etc. Até certo ponto, ele pode agir como um matemático, fornecendo um contraexemplo, pedindo uma justificativa factual. Mas é isso possível quando o que está em questão é a marcação de um consenso, o que é compartilhado (Yackel & Cobb, 1996, p. 471), ou a institucionalização de uma regra que completará a norma sociomatemática? Essas intervenções parecem impossíveis sem uma violação unilateral do contrato de autonomia dos alunos.

Uma solução, que é clássica, pode ser contar com aqueles entre eles que têm uma legitimidade específica; uma comunidade de validadores (Yackel & Cobb, 1996, p. 473; Tabach et al., 2014, pp. 196-197). Isso pode enfraquecer a construção da norma sociomatemática como uma norma compartilhada, porque alguns alunos podem se sentir excluídos ou obrigados a se alinhar. Essa dificuldade pode ser superada mudando o foco: ao identificar primeiro os problemas que os conflitos vividos pelos alunos revelam, a institucionalização possibilita "dar sentido às regras institucionalizadas pelo professor, na medida em que elas lhes permitirão resolver o debate no qual estão envolvidos e que não podem concluir" (Arsac & Mante, 1996, p. 25). Isso significa que o professor só introduzirá essas regras depois que os alunos *perceberem* a dificuldade de concluir o debate. Ao fazer isso, ele pode agir explicitamente como um representante da comunidade matemática.

Isso levanta a questão de saber se é possível para o professor ser uma parte interessada na situação de prova, sem correr o risco de interromper o processo de apropriação pelos alunos – ruptura do contrato de devolução –, que, segundo se postula, exige que ele assuma responsabilidade autônoma, e sem hipotecar suas responsabilidades como professor. Claire Margolinas (1992) foi bastante clara em sua resposta:

> O professor não é um sujeito matemático; ele nunca está em uma situação adidática, mas sempre em uma situação didática. Reduzir o professor a um sujeito racional que interage com um ambiente objetivo não me parece válido. A analogia com a teoria dos jogos termina onde começa o trabalho do professor (p. 120).

Passadas três décadas, como a pesquisa, seja qual for a abordagem, fornece indicações suficientes, acho que podemos reconsiderar essa posição e voltar ao problema que precisamos resolver, tanto dentro da perspectiva teórica da IBL quanto da TSD.

O professor pode ser um participante na situação de prova, se ele ali ocupar uma posição de matemático, não como um parceiro no jogo, mas como um *árbitro*. Nos termos da TSD, ele tem um lugar como um elemento do *milieu* em sua dimensão social. O árbitro pode ter de julgar conflitos e, nesse caso, ele ajuda a nomeá-los e entendê-los. Um conflito que os alunos não conseguem resolver dentro do jogo pode ser resolvido "objetivamente", com base na referência matemática e explicando-a. Essa arbitragem é uma força motriz por trás do desenvolvimento da norma sociomatemática.

6. Conclusão: os alunos, a matemática e o professor

Em 1988, Gilbert Arsac (1988) fez a seguinte pergunta: "A demonstração, tal como existe na matemática, é ensinável?" (p. 276). Ele não respondeu à pergunta, mas observou as posições divergentes dos matemáticos, que tendiam a classificar a demonstração como saber não ensinável, e também dos didatas, que eram "fortemente contrários a essa ideia" (cf. seção 4). De minha parte, observei na época que "a construção de situações que permitiriam debates *sobre* provas, e não apenas debates de prova, a determinação de suas características e restrições são problemas em aberto para a pesquisa didática" (Balacheff, 1988, pp. 580 e seguintes).

A introdução da palavra "prova" no discurso institucional, e até mesmo sua banalização, contribuiu para a evolução da problemática: a prova na sala de aula de matemática não é mais necessariamente uma demonstração, mas uma argumentação que seja adaptada ao nível de desenvolvimento e de aprendizagem dos alunos e aceitável do ponto de vista da matemática – ou melhor, do ponto de vista dos matemáticos que fariam suas exigências dentro das restrições desse nível.

A nova questão é, portanto, se a prova pode ser ensinada na sala de aula de matemática. As instituições respondem positivamente, colocando-a no nível de competências, e não de conhecimento. Entretanto, as dificuldades e os fracassos são significativos. Embora o problema da aquisição de raciocínio matemático, como os programas se referem a essa habilidade, seja mais bem compreendido e sua complexidade mais bem analisada, ele permanece em aberto a tal ponto que a questão de seu ensino ainda está sendo feita: "As questões críticas de como os alunos adquirem essas competências e se essas competências podem ser ensinadas continuam sendo importantes questões de pesquisa em aberto" (Weber & Harel, 2018, p. 7).

Na passagem do ensino da demonstração para o ensino da prova, de certa forma passando da técnica para o significado, uma problemática se tornou dominante: reproduzir a maneira como os matemáticos trabalham. Vejo nessa abordagem o risco de favorecer a encenação de comportamentos sem questionar suficientemente seus significados e, assim, perder de vista o que está na origem do processo específico de prova em matemática.

Trabalhar como os matemáticos é encontrar seus objetos e entrar nas problemáticas que eles impõem: *os matemáticos fazem o que fazem porque seus objetos são o que são*. Certamente concordaremos que o objetivo desse trabalho é produzir conhecimentos – teoremas – e que esses conhecimentos são de natureza teórica. Nessa atividade, a prova (demonstração) tem duas funções fundamentais: permite a certificação de um novo conhecimento, que adquire o *status* de saber, quando seu enunciado e sua prova são publicados, e estabelece uma relação com os saberes existentes. A *demonstração* é um construtor da matemática.

Contrapartida, e não transposição, *as características da argumentação matemática* e o que elas implicam para a construção de conhecimentos, permitirão que ela tenha, na sala de aula, a mesma função fundadora que a demonstração tem na comunidade matemática.

Para que isso aconteça, é essencial que a palavra não se refira à construção dinâmica de argumentos que sustentam a validade de uma afirmação, mas sim designe o texto que objetiva essa construção, permitindo que a argumentação matemática seja reconhecida e permanentemente inscrita na memória da classe.

No nível sociomatemático, os alunos e o professor estão envolvidos em um processo de matematização de um pensamento já matemático, que lhes permite entrar na situação de prova.

Eles fazem matemática. O professor, o árbitro do jogo, está na posição de matemático. Ele retomará sua posição institucional na fase de institucionalização, que marca o fim da situação de prova pelo acordo coletivo sobre a validade da afirmação e sua prova no contexto explícito da base de conhecimentos compartilhada naquele momento da história comum.

As anotações de Guy Brousseau (1984), antes de um curso na Escola de Verão de Didática da Matemática intitulado "O papel do professor e a institucionalização", convidam a uma reflexão mais aprofundada nessa direção no contexto da TSD. Ele escreve "Uma situação de ação leva o aluno a uma mudança de ponto de vista; uma situação de formulação leva a uma mudança de código, de linguagem; uma situação de prova leva o aluno a uma mudança da teoria que permite produzir teoremas".

Observe-se a expressão "situação de prova" para o que mais tarde seria ancorado na TSD pela expressão "situação de validação". Ele continua:

> Se pararmos por aí, o papel do professor é propor situações ao aluno, não formular o saber, mas simplesmente dar instruções, com mais ou menos informações para motivar o aluno e fazê-lo entender o que estamos jogando. Fizemos com que funcionasse e, nas aulas, havia muitos fenômenos que escapavam à análise, o professor precisava conversar com os alunos, contar-lhes o que havia acontecido. Foi assim que surgiu o conceito de institucionalização. Os alunos não podiam continuar a menos que "algo" acontecesse. Você não poderia entrar em novas situações se não concordasse com o que havia acontecido nas sequências anteriores. O modelo quase isolado é totalmente inadequado; o professor faz parte da situação. Por que isso acontece? (Brousseau, 1984, s/p).

O modelo quase isolado é o que orienta o trabalho discutido neste curso. O papel do professor não é ignorado, o que está em questão é a problematização desse papel. As observações relatadas e analisadas estão essencialmente confinadas nas tensões e nas limitações induzidas pelo postulado da autonomia do aluno e seu corolário, a neutralidade do professor. A palestra de Brousseau na escola de verão de 1984 enfocou os paradoxos didáticos (Brousseau, 1986, 1998, pp. 72-80) que sustentam os dilemas e as tensões dentro das situações. Em particular, o mais frequente deles são as tensões entre a responsabilidade profissional e a responsabilidade matemática. O equilíbrio dessa relação é prejudicado pelo surgimento de um fluxo de incertezas no momento do fechamento da situação. Um dos *resultados* da TSD é o estabelecimento e a validação de princípios de engenharia para situações quase isoladas que reduzem os paradoxos, as tensões e os dilemas resultantes. Os processos de devolução e institucionalização possibilitam o controle da lacuna entre as situações reais e o modelo adidático subjacente[59]

Gilbert Arsac (1988, p. 42) concluiu seu resumo do estado da pesquisa com a observação de que

> [de uma pesquisa] mais orientada para propostas de remediação de um estado de coisas considerado ruim do que para uma análise aprofundada da situação como ela é e como

[59] Esse controle não é absoluto, os protagonistas são seres humanos, a situação envolve inúmeros determinantes contextuais e sociais cujos modelos não podem integrar a complexidade (no sentido das ciências da complexidade).

tem sido, e leva pouco em conta outras possíveis questões relativas ao que poderia ser chamado de controle da transposição.

Não creio que tenha havido uma mudança significativa de direção; pelo contrário, ela afirmou seu caráter de *pesquisa para inovação*, parafraseando a expressão de Paolo Boero. Por outro lado, a compreensão da complexidade do ensino da prova tornou-se mais clara, com uma convergência objetiva de trabalhos, embora tenham se desenvolvido de forma independente. Assim, ficou claro que *a neutralidade do professor não significa sua ausência*.

- Ao ouvir a turma, o professor-matemático precisa de ferramentas para dar legitimidade às atividades dos alunos, mesmo que eles tenham utilizado definições ou símbolos não canônicos, ou produzido uma prova que não seja consistente com uma demonstração (Herbst et al., 2009, p. 42). Essas ferramentas ainda precisam ser construídas. Algumas delas são prefiguradas pelos projetos, mas não a ponto, por exemplo, de serem introduzidas na formação como saberes profissionais documentados para uso em sala de aula. Descrever, validar e documentar essas ferramentas e os saberes associados é um problema em aberto. Uma prioridade para futuros programas de pesquisa seria progredir pelo menos nas seguintes tarefas: No decorrer da situação de prova, o professor - *matemático* deve :
- - tornar explícitos os *acordos e desacordos*, ou apontá-los;
- - fornecer contraexemplos ou contradições factuais;
- - formalizar o registro de provas e a crônica de suas construções;
- - registrar e atualizar a base de conhecimentos e disponibilizá-la;
- - gerenciar e garantir a memória da turma, registrar a jurisprudência.
- Ao final do debate probatório, o *professor*-matemático registra o consenso sobre a avaliação e a validação da prova e institucionaliza os critérios de prova, quer tenham sido formulados e compartilhados pelos alunos, quer tenham sido formulados para resolver um conflito estabelecido e nomeado.

Por fim, para todos os trabalhos, o tempo é claramente uma restrição ou, pelo menos, uma variável determinante. Em todos os casos, suas exigências e seu gerenciamento impossibilitam a previsão de um ensino baseado sistematicamente em situações de prova. Entretanto, quando utilizadas de forma limitada com o objetivo de criar ou atualizar normas sociomatemáticas, essas situações constituirão um *corpus* de referências para dar um significado pragmático e fundamental à argumentação matemática, precursora da demonstração.

Referências

Anderson, J. R., Corbett, A. T., Koedinger, K. R., & Pelletier, Ray. (1995). Cognitive Tutors: Lessons Learned. *Journal of the Learning Sciences*, *4*(2), 167-207. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0402_2

Anderson, T., & Shattuck, J. (2012). Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research? *Educational Researcher*, *41*(1), 16-25. https://doi.org/10.3102/0013189X11428813

Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 247-280.

Arsac, G. (2018). *Naissance et premiers pas du problème ouvert à l'IREM de Lyon* [Allocution pour les 50 ans de l'IREM de Lyon, in: Brève 196, 27 juin 2018].

Arsac, G., Balacheff, N., & Mante, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(1), 5-29. https://doi.org/10.1007/BF00302312

Arsac, G., Colonna, A., & Chapiron, G. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses Universitaires de Lyon.

Arsac, G., & Mante, M. (1983). Des « problèmes ouverts » dans nos classes de premier cycle. *Petit x*, *2*, 5-33.

Arsac, G., & Mante, M. (1996). Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 21-43.

Artigue, M. (Réalisateur). (2018, décembre 21). *Démarches d'investigation, problèmes ouverts, recherche didactique*. https://www.youtube.com/watch?v=A1PNXDCJmTo

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Arzarello, F., & Bussi, M. G. B. (1998). Italian trends in research in mathematical education: A national case study from an un international perspective. In A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Éds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (Vol. 4, pp. 2). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5196-2_1

Austin, J. L. (1950). In G. Longworth (Éd.), *Truth* (The virtual issue n°1-2013). The Aristotelian Society. https://www.aristoteliansociety.org.uk/pdf/2013%20AS%20Virtual%20Issue.pdf

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* [Doctorat ès-sciences]. Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach of the psychology of mathematics education. *For The Learning of Mathematics*, *10*(3), 2-8.

Balacheff, N. (1999). L’argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat... [Newsletter]. *La lettre de la preuve*. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeFR.html

Balacheff, N. (2001). Symbolic Arithmetic vs Algebra the Core of a Didactical Dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Éds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 249-260). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_14

Balacheff, N. (2019a). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In J. Pilet, & C. Vendeira (Éds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2018* (pp. 423-456). ARDM et IREM de Paris - Université de Paris Diderot. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02333720

Balacheff, N. (2019b). L’argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. 29. *XXVIe Colloque CORFEM*, Jun 2019, Strasbourg, France.

Balacheff, N. (2023). *Notes for a study of the didactic transposition of mathematical proof* (p. 27) [Preprint].

Ball, D. L. (1991). *Implementing the NCTM Standards: Hopes and Huompletarrdles*. 20.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching Elementary School mathematics. *The Elementary School Journal*, *93*(4), 373-397. http://www.jstor.org/stable/1002018

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Éds.), *A research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 27-44). NCTM. https://www.researchgate.net/profile/Hyman-Bass/publication/312532588_Making_mathematics_reasonable_in_school/links/5f943d3f299bf1b53e40ca68/Making-mathematics-reasonable-in-school.pdf

Ball, D. L., Lewis, J., Thames, M., & Hoover. (2008). Making Mathematics Work in School. In National Council of Teachers of Mathematics. *Study of Teaching: Multiple Lenses, Multiple Views. NCTM Monograph N°14* (pp. 13-44, 195-201). National Council of Teachers of Mathematics. https://www.jstor.org/stable/30037740

Bartolini Bussi, M. G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school: To Giovanni Prodi on occasion of his 70th birthday. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(1-2), 11-41. https://doi.org/10.1007/BF00143925

Boero, P., Consogno, V., Guala, E., & Gazzolo, T. (2009). Research for innovation: A teaching sequence on the argumentatiive approach to probabilistic thinking in grades I-IV and some related basic research results. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *29*(1), 56-96.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L., & Scali, E. (1995). Aspects of the mathematics—Culture relationship in mathematics teaching-learning in compulsory school. In L. Meira et D. Carraher (Éds.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (17 pages). http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_boero/boero%26c_PME_XIX.pdf

Boero, P., & Douek, N. (2008). La didactique des domaines d’experience. *Carrefours de l’éducation*, *26*(2), 99. https://doi.org/10.3917/cdle.026.0099

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. M. F. Pinto, & T. F. Kawasaki (Éds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-209). PME.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. In APMEP (Éd.), *La mathématique à l'école élémentaire* (pp. 428-442). Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

Brousseau, G. (1975). Epistémologie expérimentale vs Didactique [Blog]. *Guy Brousseau*. https://guy-brousseau.com/3297/1975-epistemologie-experimentale-vs-didactique-2016/

Brousseau, G. (1978). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(1), 37-127.

Brousseau, G. (1984). Le rôle du maître et l'institutionnalisation. *Actes de la III° Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*. III° Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/03/84-11-R%C3%B4le-du-Ma%C3%AEtre.pdf

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115. https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990)*. La Pensée Sauvage.

Brousseau, G., & Gibel, P. (2002). Influence des conditions didactiques sur l'apparition, l'usage et l'apprentissage des raisonnements en classe. *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, 205-230.

Cobb, P., Perlwitz, M., & Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des Sciences de l'Education*, *20*(1), 41. https://doi.org/10.7202/031700ar

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, *31*(3/4), 175-190.

Cuq, J.-P., & Gruca, I. (2017). *Cours de didactique du français langue étrangère et seconde*. Presse Universitaire de Grenoble.

Dhombres, J. (2008). La preuve mathématique en tant qu'elle est épreuve de mémoire. *Communications*, *84*(1), 59-84. https://doi.org/10.3406/comm.2008.2507

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Dreyfus, T., Nardi, E., & Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classroom. In G. Hanna, & M. de Villiers (Éds.), *Proof and proving in mathematics education* (Vol. 15, pp. 191-213). Springer Science et Business Media.

Duval, R. (1992). Argumenter, prouver, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, *31*, 37-61.

EDUSCOL. (2009). *Raisonnement et démonstration*. MENESR-DGESCO. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf

EDUSCOL. (2016). *Mathématiques—Raisonner*. MENESR-DGESCO; http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf

Ernst, D. C., Hodge, A., & Yoshinobu, S. (2017). What is inquiry-based learning? *Notices of the American Mathematical Society*, *64*(06), 570-574. https://doi.org/10.1090/noti1536

Even, R. (2018). Classroom-based issues related to proofs and proving. In A. J. Stylianides, & G. Harel (Éds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving* (pp. 145-151). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_10

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *3*, 413-435.

Garden, R. A., Lie, S., Robitaille, D. F., Angell, C., Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Foy, P., & Arora, A. (2008). *TIMSS Advanced 2008 assessment frameworks*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands. Tel: +31-20-625-3625; Fax: +31-20-420-7136; e-mail: department@iea.nl; Web site: http://www.iea.nl. https://timssandpirls.bc.edu/timss_advanced/frameworks.html

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* [Didactique des mathématiques, Paris-Diderot]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603

Gravier, S., & Ouvrier-Buffet, C. (2022). The mathematical background of proving processes in discrete optimization— Exemplification with research situations for the classroom. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(4), 925-940. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01400-3

Grenier, D. (2009). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, pp. 161-177. https://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR10001.pdf

Grenier, D., & Payan, C. (2002). Situations de recherche en « classe » Essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, pp.189-203.

Grenier, D., & Payan, C. (2006). Les « situations de recherche » pour l'apprentissage de savoirs transversaux. *Actes du colloque EMF 2006*, 12 pages. http://emf.unige.ch/files/2814/5390/3967/EMF2006_GT6_Grenier.pdf

Hanna, G., & de Villiers, M. (Éds.). (2012). *Proof and proving in mathematics education : The 19th ICMI study* (corrected edition 2021). Springer.

Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H. N., Lin, F.-L., Selden, A., Tall, D., & Yevdokimov, O. (2012). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education: Discussion document. In G. Hanna, & M. de Villiers (Éds.), *Proof and proving in mathematics education* (Vol. 15, p. 10). Springer.

Herbst, P., & Balacheff, N. (2009). Proving and knowing in public: The nature of proof in a classroom. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Éds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 40-63). Routledge.

Herbst, P., & Chazan, D. (2009). Methodologies for the study of instruction in mathematics classrooms. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *29*(1), 11-32. https://revue-rdm.com/2009/methodologies-for-the-study-of/

Herbst, P., & Chazan, D. (2011). Research on practical rationality: Studying the justification of actions in mathematics teaching. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 405-462.

Herbst, P. G. (2003). Using novel tasks in teaching mathematics: Three tensions affecting the work of the teacher. *American Educational Research Journal*, *40*(1), 197-238. https://doi.org/10.3102/00028312040001197

Historique des actions menées par l'association MATh.en.JEANS depuis 1985. (1985, depuis). MATh.en.JEANS. https://www.mathenjeans.fr/historique-mej

Jones, K., & Herbst, P. (2012). Proof, proving, and teacher-student interaction: Theories and contexts. In G. Hanna, & M. de Villiers (Éds.), *Proof and proving in Mathematics Education* (Vol. 15, pp. 261-277). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_11

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations—The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Legrand, M. (1986). L'introduction du débat scientifique en situation d'enseignement. *Publications de l'Institut de Recherche Mathématiques de Rennes*, *fascicule 5 « Didactique des mathématiques », 1988-1989* (exp. n°3), 1-16. http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988-1989___5_A3_0

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères-IREM*, *10*, 123-159. http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/10_article_68.pdf

Legrand, M. (1995a). Un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique (première partie). *Repère IREM*, 21, 91-108.

Legrand, M. (1995b). Un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique (deuxième partie). *Repères IREM*, *21*, 111-139.

Legrand, M., Lecorre, T., Leroux, L., & Parreau, A. (2011). *Le principe du « débat scientifique » dans un enseignement*. IREM de Grenoble. http://irem.univ-grenoble-alpes.fr/spip/IMG/pdf/principedebac949.pdf

Lehmann, D. (1989). *La démonstration*. IREM de Lille.

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 194. https://doi.org/10.2307/749600

Mantes, M., & Arsac, G. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. CANOPE -CRDP Lyon.

Margolinas, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître : Les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 113-158.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective : The role of the teacher. *ZDM*, *41*(4), 427-440. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0199-z

Mariotti, M. A. (2021). Initiation à la preuve : La médiation des environnements informatiques. *Actes de la 21e école d'été de didactique des mathématiques*. 21e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Ile de Ré.

Mariotti, M. A., Bussi, M. G. B., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Éd.), *Proceedings of the 21st PME Conference* (Vol. 1, pp. 180-195). University of Helsinki.

Maths à Modeler : Recherches. (2003, depuis). https://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/recherches.html

Mercier, A. (2012). Suivre une démarche d'investigation pour enseigner les relatifs, au collège : Une proposition pragmatique et une expérimentation, en France. In J.-L. Dorier, & S. Coutat (Éds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : Enjeux et défis pour le 21e siècle* (pp. 1423-1431). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Mullis, I. V. S., Martin, Michael O. (Eds.), & International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) (Netherlands). (2017). *TIMSS 2019 Assessment Frameworks*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands. Tel: +31-20- 625-3625; Fax: +31-20-420-7136; e-mail: department@iea.nl; Web site: http://www.iea.nl. http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/

Mullis, I. V. S., International Association for the Evaluation of Educational Achievement, & TIMSS (Éds.). (2007). *TIMSS 2007 assessment frameworks*. TIMSS et PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. https://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/frameworks.html

Mullis, I. V. S., & Martin, M. O. (2014). *TIMSS advanced 2015 assessment framework*. TIMSS et PIRLS International Study Center.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G., O'Sullivan, C. Y., & Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011 assessment frameworks*. TIMSS et PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & von Davier, M. (Éds.). (2021). *TIMSS 2023 Assessment Frameworks*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

O'Connor, K. M., Mullis, I. V. S., Garden, R. A., Martin, M. O., & Gregory, K. D. (2003). *TIMSS assessment frameworks and specifications 2003* (2nd ed). International Study Center. https://timssandpirls.bc.edu/timss2003i/frameworksD.html

OECD. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en*PISA Mathematics Framework*. (2022). https://pisa2022-maths.oecd.org/ca/index.html#Mathematical-Reasoning

Polya, G. (1945). *How to solve it* (1954e éd.). Princeton University Press. https://press.princeton.edu/titles/669.html

Robert, A., & Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(2). https://revue-rdm.com/2005/prise-en-compte-du-meta-en/

Saada-Robert, M., & Brun, J. (1996). Transformations of school knowledge: The contributions and extensions of genetic psychology. *Prospects*, *26*(1), 25-36. https://doi.org/10.1007/BF02195607

Schoenfeld, A. H. (1987). Confessions of an accidental theorist. *For the Learning of Mathematics*, *7*(1), 30-38. http://www.jstor.org/stable/40247883

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics*, *38*(3), 289-321.

Tabach, M., Hershkowitz, R., Rasmussen, C., & Dreyfus, T. (2014). Knowledge shifts and knowledge agents in the classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 192-208. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.001

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive development of proof. In G. Hanna, & M. de Villiers (Éds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 15, pp. 13-49). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_2

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2/3), 133-170.

Vergnaud, G. (1991). Langage et pensée dans l’apprentissage des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie*, *96*(1), 79-86. https://doi.org/10.3406/rfp.1991.1350

Vergnaud, G. (2011). La pensée est un geste. Comment analyser la forme opératoire de la connaissance. *Enfance*, *2011*(01), 37. https://doi.org/10.4074/S0013754511001042

Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l’enseignement des mathématiques* (La documentation française, p. 96) [Rapport public]. Ministère de L’Education Nationale. https://www.ladocumentationfrancaise.fr/rapports-publics/184000086/

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6*(1), 69-118.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477. https://doi.org/10.2307/749877

Gostaria de agradecer a Janine Rogalski e Cécile Ouvrier-Buffet por sua cuidadosa revisão e sugestões sobre este texto, bem como a Maria Alessandra Mariotti e Patricio Herbst, pelas muitas trocas de ideias ao longo dos anos sobre os tópicos abordados neste curso.