ISSN 1983-3156
Qualis A 1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i2p081-097

Plaidoyer pour l'introduction de transformations déformantes dans les programmes de lycée au Sénégal : le cas de l'inversion

Plea for the introduction of distorting transformations in high school programs in Senegal: the case of inversion

Llamado a favor de la introducción de transformaciones distorsionantes en los programas de secundaria en Senegal: el caso de la inversión

Apelo à introdução de transformações distorcidas nos programas do ensino médio no Senegal: o caso da inversão

Thiendou Diack[1]
FASTEF-UCAD-Sénégal
Doctorant en didactique des mathématiques
https://orcid.org/0009-0009-5557-9076

El hadji Malick Dia[2]
FASTEF-UCAD-Sénégal
Docteur en géométrie différentielle et Docteur en histoire des sciences
https://orcid.org/0009-0000-4738-9373

Cissé Ba[3]
FASTEF-UCAD-Sénégal
Docteur en didactique des mathématiques
https://orcid.org/0009-0006-7278-5793

Résumé

Les programmes de Mathématiques Sénégalais de 2006 (programme en vigueur) invitent l'enseignant à donner des exemples de transformations ne conservant pas le barycentre en Terminales S1-S3. C'est ainsi que nous jugeons nécessaire de doter les enseignants d'un cours sur l'inversion géométrique. Dans cet article, nous allons d'une part expérimenter et analyser des activités visant à introduire l'inversion géométrique en classe de Terminale S1. D'autres parts, nous mènerons une enquête auprès des enseignants pour avoir une idée sur la place qu'occupent les transformations déformantes dans l'enseignement des mathématiques au Sénégal.

Mots clés **:** Inversion géométrique, Programme de mathématiques.

[1] diackthiendou@yahoo.fr
[2] el.dia@ucad.edu.sn
[3] cisse.ba@ucad.edu.sn

Abstract

The Senegalese Mathematics program of 2006 (current program) invites the teacher to give examples of transformations not preserve the barycentre in Terminal S1 and S3. This is why we consider it necessary to provide teacher with a lesson on geometric inversion. In this article, we will on the one hand experiment and analyze activities aimed at introducing geometric inversion in Terminale S1 class. On the other hand, we will conduct a survey of teachers to get an idea of the place occupied by distorting transformations in the teaching of mathematics in Senegal.

Keywords**:** Geometric inversion, Mathematic program.

Resumen

Los programas de Matemáticas de Senegal de 2006 (programa vigente) invitan al docente a dar ejemplos de transformaciones que no conservan el baricentro en Terminales S1-S3. Es por esto que consideramos necesario brindar a los docentes un curso sobre inversión geométrica. En este artículo, por un lado, experimentaremos y analizaremos actividades destinadas a introducir la inversión geométrica en la clase Terminale S1. Por otro lado, realizaremos una encuesta entre profesores para tener una idea del lugar que ocupan las transformaciones distorsionantes en la enseñanza de las matemáticas en Senegal.

Keyword : Inversión geométrica, Programa de matemáticas.

Resumo

Os programas senegaleses de matemática de 2006 (programa em vigor) convidam o professor a dar exemplos de transformações que não preservam o baricentro nos Terminais S1-S3. É por isso que consideramos necessário oferecer aos professores um curso sobre inversão geométrica. Neste artigo iremos, por um lado, experimentar e analisar atividades que visam introduzir a inversão geométrica na classe Terminale S1. Por outro lado, realizaremos uma pesquisa entre professores para ter uma ideia do lugar ocupado pelas transformações distorcidas no ensino da matemática no Senegal.

Keyword : Inversão geométrica, Programa de matemática.

Plaidoyer pour l’introduction de transformations déformantes dans les programmes de lycée au Sénégal : le cas de l’inversion

Dans notre article Diack et al. (2022), nous avions constaté que les transformations géométriques ont toujours constitué un point focal dans l’enseignement des mathématiques au Sénégal. Nous avons aussi montré que dans les programmes de mathématiques du Sénégal, l’habitat des transformations qui était algébrique dans la réforme des mathématiques modernes a migré progressivement vers un habitat géométrique. Ce travail nous a permis aussi de voir que les niches des transformations ont débuté avec la résolution de problèmes géométriques (théorie des coniques), ensuite ils se sont élargis dans la hiérarchisation de la géométrie de Klein et enfin dans la représentation graphique des fonctions simples en analyse.

Plus particulièrement, dans les programmes de mathématiques de 2006 (programme en vigueur) des Terminales S1-S3[4]), il est demandé de donner des exemples d’applications de transformations ne conservant pas le barycentre. Malgré tout, le constat est qu’il n’y a pas d’exemples pour illustrer cette demande. Et pourtant l’inversion est un parfait exemple de transformation qui ne conserve pas le barycentre. Ainsi, ne serait-il pas opportun d’étudier la place des transformations déformantes dans le programme de mathématiques sénégalais ?
Dans la suite, après avoir dégagé la problématique et fait un bref aperçu historique et épistémologique des inversions, nous analyserons de manière assez brève les programmes sénégalais de 1960 à nos jours. En plus, nous allons mener une enquête auprès des enseignants qui ont une fois tenu une classe de Terminale S1 afin d’étudier leurs conceptions sur cet objet de savoir qu’est l’inversion géométrique. Par la suite, nous allons analyser une séquence de cours portant sur l’inversion géométrique en classe de Terminale S1.

Problématique et méthodologie

Au sens étymologique, si on se réfère au dictionnaire LAROUSSE, une transformation est définie soit par un passage d’une forme à une autre soit une modification, voire même un changement. Mieux encore, selon Wikipédia, la transformation peut se définir en règle générale comme suit : « action ou processus à travers lesquels une chose est modifiée, transformée ou changée de forme tout en conservant son identité ».

Cependant, dans les programmes de mathématiques sénégalais, de la sixième à la première, toutes les transformations étudiées conservent les formes, c’est-à-dire, qu’elles conservent les angles géométriques, l’alignement, le parallélisme, l’orthogonalité, le

[4] Anciennes séries C-E

barycentre, le contact, ... Ainsi durant toute sa scolarité, l'apprenant pourrait penser qu'il n'existe pas de transformations déformantes. Autrement dit, qui transforment une figure en une figure non semblable.

Afin de donner aux élèves une meilleure compréhension des transformations étudiées et du sens de leurs propriétés, il est souhaitable que les élèves rencontrent et étudient diverses transformations déformantes ou non déformante. C'est pourquoi, il est important de proposer à partir de la terminale une transformation ponctuelle qui ne conserve pas le barycentre comme l'inversion géométrique.

En géométrie, une inversion plane de pôle O (O est un point du plan (P)) et de puissance k (k est un nombre réel non nul) est une transformation telle que :

$f: (P) \setminus \{O\} \longrightarrow (P) \setminus \{O\}$, qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} O, M \text{ et } M' \text{alignés} \\ \overline{OM} \times \overline{OM'} = k \end{cases}$$

Il faut noter que dans les programmes de mathématiques en vigueur au Sénégal, un passage assez sommaire est dédié aux transformations déformantes. Plus précisément, dans le programme de Terminale S1-S3, dans l'étude des applications affines, il est suggéré en commentaires de « *donner des exemples d'applications ne conservant pas le barycentre* ».

Cependant, les discussions menées dans les différentes cellules pédagogiques nous poussent à penser que dans la pratique, ce commentaire est incompris par la plupart des enseignants. Or, ces applications non affines peuvent avoir des propriétés que l'élève n'a pas l'habitude de rencontrer ; en particulier, elles peuvent déformer des figures. C'est le cas de l'inversion.

De plus, on peut judicieusement choisir l'inversion pour simplifier un problème de géométrie. Par exemple, deux cercles quelconques peuvent être transformés en deux cercles concentriques.

Certains auteurs se sont intéressés à l'inversion géométrique. Parmi ces auteurs, il y a Bkouche (1991) qui souligne son importance dans la géométrie conforme considérée comme l'étude de l'ensemble des transformations préservant les angles.: *« Parmi les transformations déformantes, il faudrait aussi citer l'inversion qui fait apparaitre la droite comme un cercle particulier, et qui joue un rôle important dans la géométrie conforme. » (ibid. p. 146)*

Il y a aussi KUNTZ (1998) qui considère l'inversion comme une transformation oubliée des programmes français explique qu'elle peut être introduite dès la seconde avec l'outil informatique pour se poursuivre en première avec une étude plus théorique et devenir un excellent sujet de travaux dirigés en Terminale avec les nombres complexes.

Selon Walter (2001), du point de vue didactique, les inversions ont leurs limites, dans la mesure où leur utilisation comme outil de résolution de problème et de démonstration semble difficilement maîtrisée, voire même rejetée par les élèves. En effet le processus mental qui permet, à partir de la lecture d'un énoncé ou d'une figure, de réinvestir les connaissances adéquates en vue de la résolution d'un problème ou de l'élaboration d'une démonstration constitue une réelle difficulté pour les élèves. Ces difficultés pour lesquelles la traduction d'une compréhension perceptive de propriétés géométriques en une connaissance théorique est un enjeu cognitif très fort :

> il ne suffit pas qu'une propriété soit démontrée pour devenir mobilisable, il faut aussi et surtout que ce soit construite une image mentale, représentation figurée de cette propriété, qui vient s'inscrire dans un lexique personnel explicite ou non, au même titre qu'un théorème énoncé et justifié. (Daniel 1995, p.76)

Au vu de ce qui précède, ne serait-il pas opportun d'intégrer les transformations déformantes dans les programmes de mathématiques au Sénégal et dans l'affirmative, comment les enseignants pourraient-ils les prendre en charge dans une séquence de cours ? Quel pourrait être alors l'apport de l'inversion dans l'apprentissage de la géométrie ?

Nous pensons d'une part qu'il est bien possible d'insérer un thème sur l'inversion géométrique dans le programme de mathématiques des Terminales S1-S3, plus précisément dans la partie GEOMETRIE PLANE juste après le thème sur barycentre et application affine. D'autre part, l'inversion est un outil important pour faciliter les preuves en géométrie plane puisque transformant les droites en cercles et vice versa et préservant les angles. Par exemple, en choisissant un cercle d'inversion pertinent, il est possible de transformer une configuration géométrique en une autre plus simple dans laquelle une preuve est plus facile.

Nous pensons que l'on n'a pas donné une grande importance aux transformations qui ne conservent pas le barycentre dans le programme de mathématiques du Sénégal. Et cela engendre une négligence de ces transformations par les enseignants dans leurs séances d'enseignements-apprentissages. Cette négligence conduit à une ignorance des transformations déformantes par les apprenants.

Pour répondre aux questions posées dans la problématique, nous allons d'une part mener une enquête par questionnaire auprès des enseignants qui ont tenu une classe de Terminale S1. Cette enquête nous permettra de savoir ce qui a empêché les transformations déformantes en particulier l'inversion géométrique de vivre dans les programmes de mathématiques sénégalais, mais aussi d'étudier les conceptions des enseignants sur ces transformations et comment ces dernières sont prises en charge dans les séances d'enseignement-apprentissage.

Par rapport à l'apport de l'inversion, nous avons déroulé une séquence de cours dans une classe de Terminale S1. Au cours de ces différentes séances, nous avons proposé des activités aux élèves au cours desquelles nous leur faisons une initiation sur les transformations déformantes en particulier sur l'inversion géométrique.

Bref aperçu historique

Dans la géométrie des transformations, l'étude de l'inversion remonte à la première moitié du XIX ^{e} siècle selon Chasles (1870).

Selon certains auteurs, c'est Jacob Steiner (1796-1863) qui est le premier à utiliser la notion d'inversion en 1826. Mais à cette époque, la notion de transformation n'était pas encore apparue. C'est pourquoi il parlait plutôt de figures homographiques.

Pour Chasles, la découverte de l'inversion est attribuée au géomètre italien Giusto Bellavitis (1803-1880) qui, dans un mémoire de 1845, a bien illustré des figures inverses. Chasles approuve aussi l'utilisation des transformations par le physicien anglais William Thomson :

« Si le point A appartient à une sphère, le point A' est sur une seconde sphère, que Monsieur Thomson appelle l'image de la première »

Néanmoins, la première théorie complète de l'inversion est dédiée à Joseph Liouville quand il a établi que le groupe des transformations conservant les angles d'un espace de dimension supérieur ou égale à 3 est engendré par les similitudes et les inversions. Cette théorie évolua dans le temps jusqu'à aboutir à l'invention de dispositif mécanique de Peaucellier.

1. L'inversion géométrique et sa raison d'être

L'inversion géométrique est un concept mathématique avancé qui revêt une grande importance dans les STIM[5]. Dans une inversion géométrique, la distance entre un point et son image est inversement proportionnelle au carré de la distance entre le point et le centre de l'inversion. Elle conserve de nombreuses propriétés géométriques importantes. Par exemple, les angles restent inchangés après une inversion, ce qui en fait un outil précieux pour résoudre de nombreux problèmes de géométrie.

On peut aussi judicieusement choisir l'inversion pour simplifier un problème, en transformant un cercle en une droite, deux cercles quelconques en cercles concentriques etc.

Ainsi il est parfois plus facile de raisonner sur l'inverse d'une figure que sur la figure elle-même. Par exemple, en choisissant un cercle d'inversion pertinent, il est possible de transformer une configuration géométrique en une autre plus simple dans laquelle une preuve est plus facile. Ce

[5] Sciences, Technologies, Ingénierie et Mathématiques

qui en fait un outil puissant en géométrie plane. D'ailleurs, c'est l'inversion qui est à la base de plusieurs dispositifs mécaniques dont celui de Peaucellier qui permet de convertir un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne.

C'est pourquoi, les transformations déformantes devraient occuper une place importante dans l'enseignement des Mathématiques.

2. Place de l'inversion dans les programmes sénégalais

Jusqu'à 1971, le Sénégal ne disposait pas encore d'un programme d'enseignement mathématique spécifique. Ainsi, du fait que le Sénégal était une ancienne colonie française, alors le programme français était le seul socle pour l'enseignement des mathématiques.

Dans la réforme de 1972, aucune place n'était réservée aux transformations géométriques pour les classes de sixième et de cinquième. Mais à partir de la quatrième, une grande partie fut réservée aux transformations et sur toutes ses formes. Mais toutes les études des transformations aboutissaient aux groupes de transformations (groupe des rotations, groupes des isométries, groupe des similitudes, …), ce qui donnait plus d'importance au point de vu algébrique.

En revanche, dans la réforme de 1986 on utilisait des fonctions homographiques et implicitement des inversions en géométrie descriptive (en seconde C et en Première C). En effet, une inversion est la composée de l'application « symétrie orthogonale » $(z \longmapsto \bar{z})$ et de l'homographie ($z \longmapsto \frac{k}{z} = \frac{k\,\bar{z}}{|z|^2}, k \in \mathbb{R}^*$).

C'est finalement dans la période de la contre-réforme des mathématiques modernes avec le paradigme dominant du cadre géométrique, et seulement dans les classes de Terminales S1-S3 que l'inversion apparait implicitement comme application non affine c'est-à-dire ne conservant pas le barycentre. Cet aspect implicite pourrait expliquer le peu d'intérêt accordé à cet objet de savoir par les enseignants.

Vu l'importance des transformations déformantes dans l'enseignement de la géométrie, nous estimons qu'il est opportun de les intégrer dans les programmes de mathématiques au Sénégal. C'est dans cette optique que nous avons réalisé un cours sur l'inversion géométrique avec des élèves de Terminale S1 du lycée Lamine GUEYE de DAKAR.

Analyse d'une séquence de cours sur l'inversion

Au Sénégal, selon l'office du baccalauréat, seuls 494 élèves sont inscrits au BAC S1 pour l'année scolaire 2021- 2022, soit 0,33 % de l'effectif total d'élèves inscrits au BAC. C'est pourquoi notre expérience a été réalisée avec peu d'élèves, car le nombre d'élèves de chaque classe de terminale S1 dépasse rarement en moyenne 5 élèves.

La séquence de cours sur l'inversion s'est déroulée dans la classe de Terminale S1 de huit élèves du lycée Lamine GUEYE de Dakar. Elle est composée de trois séances de deux heures chacune. La première séance consiste à découvrir la notion d'inversion et d'en donner les premières propriétés. Pour la deuxième séance, nous annonçons quelques propriétés immédiates qui découlerons directement de la définition.

Dans la pratique, les séances se sont déroulées les jeudi 22 et Lundi 26 juin 2023 au lycée Lamine GUEYE de Dakar avec les élèves de la classe de Terminale S1. La première séance s'est déroulée le jeudi 22 Juin de 10h à 12h (2h de temps) et les deux autres séances le lundi 26 Juin 2023. La classe compte huit élèves : six garçons et deux filles.

2.1. Première Séance :

La première séance consiste à amener les élèves à déterminer les caractéristiques d'une inversion (pôle et puissance) juste en se basant sur des figures transformées par inversion. Remarquons que l'élève de Terminale S1 ou S3[6] a déjà vu dans les classes précédentes certaines transformations géométriques (isométries et homothéties). Ainsi nous avons proposé l'activité suivante :

Activité

Le graphique ci-contre (voir **figure 01**) est constitué d'un cercle (c) de centre O et de rayon 2 et de deux figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. Dans la figure, les points A', B', C' et D' sont respectivement les transformés des points A, B, C et D d'une certaine transformation.

1. Parmi les transformations que vous connaissez, existe-t-il une qui transforme la figure $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$? justifier.
2. Quelle est la position relative des droites (AA') ; (BB') ; (CC') et(DD') ?
3. Calculer $\overline{OA} \times \overline{OA'}$, $\overline{OB} \times \overline{OB'}$, $\overline{OC} \times \overline{OC'}$ *et* $\overline{OD} \times \overline{OD'}$. Que peux-tu conjecturer ?

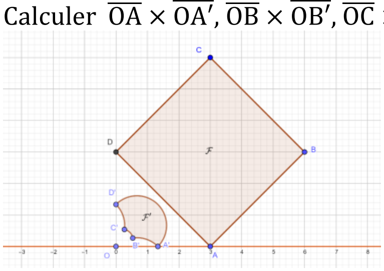

Figure 1.

Activités de la première séance

[6] Sciences fondamentales : Mathématiques –Sciences Physiques

Analyse a priori

Il s'agit pour cette activité de découvrir l'inversion à travers ses caractéristiques : pôle et puissance.

L'espace de travail est une feuille de papier et le matériel utilisé est le crayon et éventuellement une gomme.

D'abord, pour la première question, la réponse attendue est qu'une telle transformation n'est pas connue du fait que les élèves ne connaissent que les similitudes. On peut aussi s'attendre à ce que certains d'entre eux pensent à l'homothétie en raison de la réduction de la figure image. Cependant, la différence de forme des deux figures rendrait cette réponse peu fréquente.

Ensuite, en ce qui concerne la deuxième question de l'activité, il se pourrait que certains élèves répondent que les droites (AA') et (DD') sont perpendiculaires sans faire allusion à la réponse attendue c'est-à-dire que les quatre droites sont concourantes en O. Certains élèves pourraient confondre les segments avec les droites sur le dessin ; ce qui ne les permettrait pas de voir les droites sont concourantes en O. Ce point O est une caractéristique de la transformation en jeu : le pôle.

Enfin, pour la troisième question, nous pensons que les élèves vont faire apparaitre des valeurs approximativement égales, ce qui nous emmène vers la découverte d'une autre caractéristique de l'inversion qui est la puissance. Pour répondre à la troisième question de l'énoncé, les élèves doivent s'appuyer sur la figure 01 où nous avons tracé $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ dans un repère orthonormé direct, facilitant ainsi la lecture des coordonnées des points en question. On devrait s'attendre à ce que les élèves utilisent la règle pour mesurer les distances ou bien, puisque la figure est quadrillée, appliquer le théorème de Pythagore pour calculer les distances.

Analyse a posteriori

Après avoir mis en œuvre la première activité, nous avons recueilli les réponses des élèves qui se présentent comme suit :

- Pour la première question, tous les élèves ont répondu non. Six élèves n'ont pas justifier leurs réponses et à titre illustratif voici les justifications des deux autres restant.

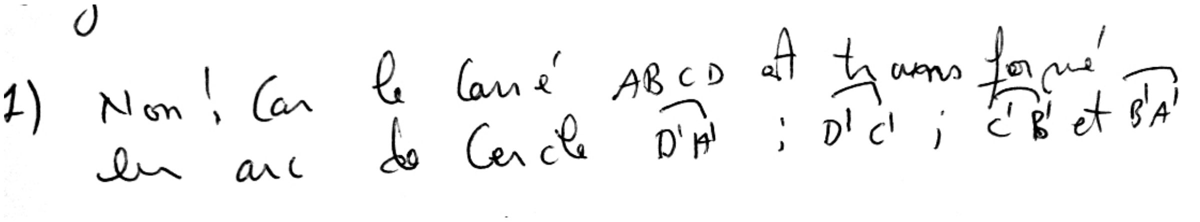
1) Non ! Car le carré ABCD est transformé
en arc de cercle D'A' ; D'C' ; C'B' et B'A'

Figure 2.

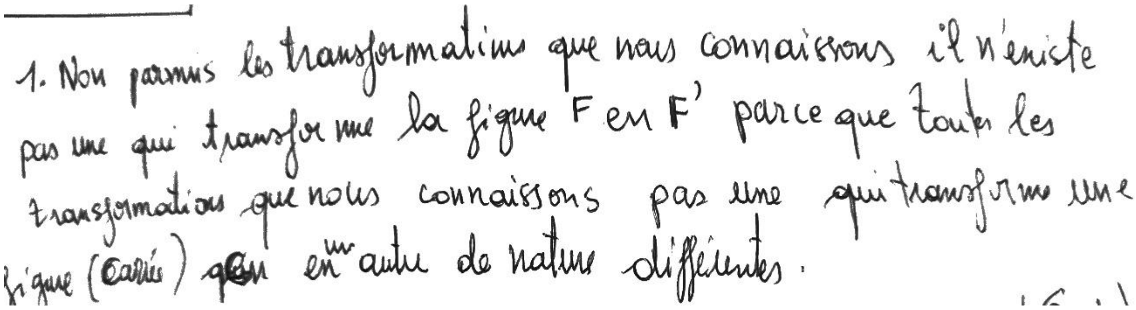
1. Non parmis les transformations que nous connaissons il n'existe pas une qui transforme la figure F en F' parce que toutes les transformations que nous connaissons pas une qui transforme une figure (carrée) ~~qu~~ en une autre de nature différentes.

Figure 3.

Réponse des deux élèves pour la première question

- Par rapport à la deuxième question, tous les élèves affirment que les droites (AA'), (BB') , (CC') *et* (DD') sont concourantes en O. Mais on a remarqué qu'ils ont un problème pour illustrer cela. En effet, un des élèves l'explique de la manière suivante :

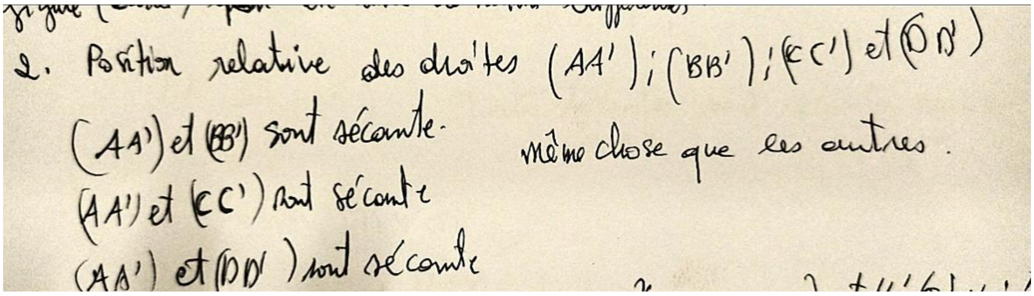
2. Position relative des droites (AA'); (BB'); (CC') et (DD')
(AA') et (BB') sont sécante. même chose que les autres.
(AA') et (CC') sont sécante
(AA') et (DD') sont sécante

Figure 4.

Réponse des deux élèves pour la première question

Nous avons remarqué aussi que sept parmi les élèves affirment que les droite (AA') et (DD') sont perpendiculaires. Voici comment l'un d'entre eux le justifie :

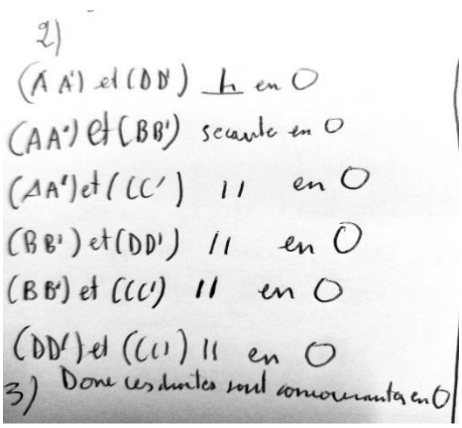
2)
(AA') et (DD') ⊥ en O
(AA') et (BB') secante en O
(AA') et (CC') 〃 en O
(BB') et (DD') 〃 en O
(BB') et (CC') 〃 en O
(DD') et (CC') 〃 en O
3) Donc les droites sont concourantes en O

Figure 5.

Réponse d'un élève pour la deuxième question

Nous pensons que cela est dû à l'utilisation d'un repère orthonormé. En effet puisque les axes du repère sont perpendiculaires, alors les (AA') et (DD') sont perpendiculaires.

- En ce qui concerne la troisième question, six élèves ont remarqué que la valeur du réel $\overline{OM} \times \overline{OM'}$ où M' est l'homologue de M est approximativement égale à 4. En revanche les deux autres ont trouvé des valeurs différentes. En effet, au lieu d'utiliser les graduations du repère, ils ont utilisé une règle graduée pour mesurer les distances réelles conformément à nos prévisions dans l'analyse.

Par rapport à la conjecture, la déduction de l'élève suivante a attiré notre attention.

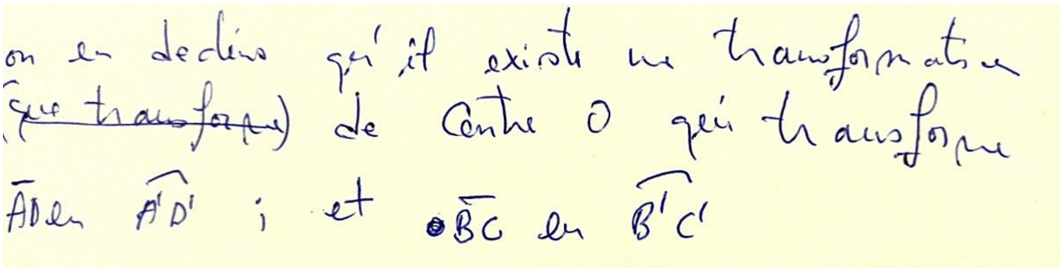

Figure 6.

Réponse d'un élève pour la troisième question

Bien qu'il a mis des mesures algébriques à la place des segments, on voit quand même que l'élève a bien remarqué que les segments sont transformés en arcs de cercle et cela met en évidence la notion de transformation déformante.

Après cette première séance, nous remarquons que les élèves n'ont pas trouvé de difficultés pour repérer le pôle (point de concourt des droites (AA') ; (BB') ; (CC') et(DD')) et la puissance de l'inversion (Question04) à travers un schéma illustrant une figure et son image par une inversion géométrique. Malgré tout, ils ont aussi remarqué que parmi les transformations vues dans les classes antérieures, il y en a aucune qui leur permet de réaliser une telle figure. Cela nous a permis d'introduire la définition de l'inversion géométrique.

Après avoir institutionnalisé la notion d'inversion géométrique, nous avons représenté avec le logiciel Geogebra, sous forme de travaux pratiques, quelques figures (cercles, droites, carrées, …) et observer les images par rapport à une inversion de puissance positive.

2. Deuxième Séance

Cette séance présente deux moments :

➢ Le premier moment consiste à découvrir, à travers Geogebra, comment agit l'inversion sur les droites et les cercles, puis à énoncer des conjectures liées aux cercles et aux droites.

- Le deuxième moment consiste à énoncer des conjectures liées aux cercles et aux droites.

C'est ainsi que nous avons proposé l'activité suivante :

Énoncé de l'activité

Activité :

1) Trace un cercle de centre O et de rayon 1.
2) Trace une droite ne passant pas par O. Quelle est son inverse par rapport au cercle ?
3) Que se passerait-il si la droite passe par O ? Quelle conjecture peux-tu faire ?
4) Trace un cercle ne passant pas par O. Quelle est son inverse par rapport au cercle ?
5) Que se passerait-il si le cercle passe par O ? Quelle conjecture peux-tu faire ?
6) Quelle conclusion peut-on tirer ?

Objectifs

D'une part, découvrir la nature de l'image de figures simples (droites et cercles) par une inversion de puissance positive. D'autre part, de déterminer la position de l'inverse d'un point dans le plan, au moment où ce dernier se rapproche ou s'éloigne du pôle de l'inversion.

Matériel : smartphone ou ordinateur où le logiciel Geogebra est installé.

Nous nous attendons à ce que les élèves représentent les figures sans soucis majeur et qu'ils constatent que l'image d'une droite (ne passant pas par le pôle) par une inversion géométrique est un cercle et que l'image d'un cercle (ne passant pas par le pôle) par une inversion géométrique est une droite.

Pour cette activité, les élèves peuvent avoir un problème avec le logiciel Geogebra car peut être pour certain, c'est la première fois qu'ils l'utilisent. Les élèves pourront aussi rencontrer un problème dans l'installation du logiciel de même que son exécution.

Analyse a posteriori

Remarquons d'abord que la première question consistait à une construction de figure géométrique. Ensuite, après avoir déroulé l'activité, nous nous rendons compte que les élèves n'ont pas trouvé de difficultés majeures pour répondre aux questions 2 et 3. Puis, pour la quatrième question, bien qu'ils aient observé que l'image d'un point s'éloigne de plus en plus du pôle de l'inversion que son homologue se rapproche celui-ci cinq d'entre eux ont un problème pour l'exprimer. Par exemple un élève nous dit : « …lorsqu'il s'éloigne du pôle, son inverse devient de plus en plus en petit… ». Un autre affirme : « …si le cercle passe par O, alors son inverse devient un immense cercle, … ». Enfin, en ce qui concerne la dernière question, les élèves n'ont pas trouvé de difficultés pour faire une conjecture aboutissant aux deux propriétés suivantes liées à l'inversion.

Dans cette séance, les élèves ont bien apprécié l'observation d'inverses de figures géométriques à l'aide du logiciel Geogebra. De là, ils ont bien manipulé des figures inverses et ont pu conjecturer sur quelques propriétés géométriques (l'image d'une droite ou d'un cercle par une inversion). Ils ont aussi pu conjecturer l'extension de la définition de l'inversion sur tout le plan en faisant approcher au maximum l'image d'un point du pôle d'inversion. C'est ce qui fera de l'inversion une transformation du plan.

Ainsi, les propriétés suivantes ont été énoncées :

Propriété 01

L'inverse d'une droite (D) ne passant pas par le pôle O est un cercle de centre Ω passant par le pôle et réciproquement. La droite $(O\Omega)$ *est perpendiculaire à* (D).

Propriété 02

L'inverse d'un cercle (C) *ne passant pas par le pôle* O *est un cercle homothétique.*

Propriété 03

L'inverse d'un cercle (C) *passant par le pôle* O *est une droite (D).*

Propriété 04

L'inverse d'une droite (D) passant pas par le pôle O *est la droite (D) elle-même.*

A l'issu de cette dernière activité, nous nous rendons compte que les élèves commencent à s'approprier de la notion d'inversion géométrique. Grâce au logiciel Geogebra, ils ont pu observer l'image d'une droite ou d'un cercle (passant par le pôle ou non) par rapport à une inversion de puissance positive.

Dans nos prochains travaux, nous comptons démontrer rigoureusement ces propriétés pour ensuite proposer des situations utilisant ces dernières.

Des questions durant le déroulement du cours

A la fin de la première partie de la deuxième séance, les élèves ont bien vu avec l'aide du logiciel *Geogebra* comment déterminer l'image d'un point, d'une droite ou d'un cercle par une inversion de puissance positive. De là il y a eu une discussion entre les élèves et l'enseignant. A titre illustratif en voici un extrait :

Professeur : Qu'en est-il de l'image d'un point, si ce dernier se rapproche du pôle ?

Élève 01 : l'mage s'éloigne du pôle.

Élève 02 : mais arrivé au cercle d'inversion le point et son image sont confondus.

Élève 03 : l'mage risque de sortir de l'écran.

Professeur : Qu'en est-il maintenant, si le point s'éloigne du pôle ?

Tous les élèves : son image se rapproche du pôle d'inversion.

Professeur : Donc selon vous comment pourrait-on définir l'image du pôle ?

Tous les élèves : silence total pendant quelques instants.

Elève 01 : On ne peut pas le définir.

Elève 02 : peut-être la limite infinie, rire…

Dans cette riche discussion, nous avons pu laisser les élèves construire petit à petit un prolongement dans le plan de la définition d'une inversion. Ainsi, l'inversion peut être considérée maintenant comme une transformation du plan.

3. Enquête auprès des enseignants

Dans la problématique de notre article, nous étions intéressés aux questions suivantes :

Ne serait-il pas opportun d'introduire les transformations déformantes dans les programmes de mathématiques du Sénégal ?

Dans l'affirmative :

- Quelles sont les conceptions des enseignants sur la notion des transformations déformantes et comment pourraient-ils la prendre en charge dans une séquence de cours ?
- Quel pourrait être l'apport de l'inversion dans l'enseignement-apprentissage de la géométrie ?

Dans la logique d'apporter des éléments de réponses à ces interrogations, nous avions mené des enquêtes par questionnaires auprès de quelques enseignants (une vingtaine) qui ont au moins tenu une fois une classe de terminale scientifique. Les réponses de chaque question posée dans ce questionnaire sont résumées soit par un diagramme (voir indexe), soit par une phrase.

Ainsi, l'analyse du questionnaire a abouti aux informations suivantes :

- Par rapport à l'ancienneté, 23,5% des enseignants concernés par l'enquête ont fait moins de 5 ans dans l'enseignement des mathématiques. De même 23,5% ont enseigné entre 5 ans et 10 ans et enfin 52,9% ont fait plus de 10 ans. Ici nous pensons que plus l'ancienneté est élevée, plus il est probable que l'enseignant rencontre des situations qui mets en jeux la notion d'inversion.

- En ce qui concerne l’enseignement en série S1 ou S3, 76,5% ont déjà tenu une classe de série S1 ou S3 contre 23,5% qui n’en ont jamais tenu.
- Pour l’utilisation de l’inversion géométrique dans l’enseignement des mathématiques, 60 % des enseignants interrogés affirment avoir utilisé l’inversion dans leur séances d’enseignement-apprentissage et les 40% disent qu’ils ne font pas l’usage de l’inversion géométrique. Ils utilisent ces transformations plus en géométrie (85,7%) et un peu en algèbre, soit 21,4%. Nous pensons qu’il y peut y avoir plusieurs situations où l’enseignant peut rencontrer des exercices faisant intervenir les inversions comme dans le cas des nombres complexes
- L’utilité de l’inversion géométrique dans l’enseignement des mathématiques est confirmée par 59% des enseignants interrogés. Par contre seulement 5,9% pensent que c’est inutile et 35,1% n’ont pas d’idées sur l’utilité de l’inversion géométrique dans l’enseignement des mathématiques. A titre illustratif, voici la réponse de quelques enseignant qui pensent que l’inversion est utile :
  - ✓ L’inversion géométrique est utile dans la simplification des exercices en transformant des cercles en droites et vice versa ;
  - ✓ Par exemple agrandir ou diminuer des figures géométriques ;
  - ✓ Elle permet aux élèves de mieux comprendre les transformations conservatives ;
  - ✓ Montrer que certaines transformations ne conservent pas la forme des objets géométriques.

Par contre, pour ceux qui pensent que l’inversion géométrique n’est pas utile dans l’enseignement des mathématiques le justifient par le fait que cela alourdirait le programme de mathématiques.

- Enfin dans l’activité que l’on a proposée, 70,6% des enseignants interrogés pensent qu’elle serait adéquate en classe de Terminale S1 et 5,9% ont proposé l’activité pour la Première S1 dans la partie Transformation. En ce qui concerne les difficultés que peuvent rencontrées les élèves pour répondre aux questions de l’activité, un des enseignants affirme : *« En classe de Terminale S1, les difficultés peuvent être diverses : -Est-ce que la transformation en question admet un point invariant? - La transformation ne conserve pas les distances. Est-ce que la transformation à un rapport ? -si l'élève a une fois rencontré les inversions en exercices dans le plan complexe penser à l'écriture complexe de la transformation. - Est-ce la transformation conserve les angles ? -Est-ce la droite n'est pas enroulée sur le cercle ? Alors qu'on a une transformation. »*

Conclusion

A la fin du déroulement des activités, on constate que les élèves ont pris du temps pour appréhender la notion d'inversion. Comme l'a dit l'un d'entre eux : « c'est la première fois que je vois une transformation qui peut transformer une droite en cercle ». Mais au fur et mesure que le cours se déroule, ils ont pu adopter petit à petit la notion d'inversion. En posant quelques questions sur l'inversion géométrique à certains professeurs qui ont tenu au moins une fois une classe de Terminale S1, nous étions très surpris de constater qu'ils ne connaissaient pas eux aussi cette dernière. C'est pourquoi l'idée d'outiller les enseignants d'un support de cours sur l'inversion géométrique est bien justifiée. En perspective, nous pensons qu'en perspective, il serait opportun de donner quelques applications sur l'utilisation de l'inversion géométrique dans la résolution de problèmes mathématiques mais cela pouvait s'étendre jusqu'à faire l'objet d'un article sur l'utilisation de l'inversion géométrique en mécanique automobile, dans le fonctionnement des moteurs en transformant un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne (ou l'inverse).

Après avoir analysé les réponses des enseignants, nous nous rendons compte que la majeure partie des professeurs qui enseignent dans les séries scientifiques utilisent l'inversion dans l'enseignement des mathématiques plus particulièrement en géométrie. Malgré tout, le programme de mathématiques du Sénégal n'a réservé qu'un simple commentaire dans la partie Terminale S1-S3 pour les inversions géométriques. C'est en quelques sortes ce qui confirme l'importance de la réintroduction de l'inversion géométrique dans l'enseignement des mathématiques au Sénégal. Puisque environs 60 % des enseignants concernés par l'enquête confirment l'utilité de l'inversion géométrique dans l'enseignement des mathématiques, cela appuie notre idée d'insérer une leçon sur l'inversion géométrique dans le programme de mathématiques des Terminale S1-S3, plus précisément dans la partie GEOMETRIE PLANE juste après la leçon de barycentre et application affine.

Références

Bkouche R. (1991) *De la géométrie et des transformations*, *Repères-IREM* nº 04, Juillet 1991.

Chasles M. [Cha70] *Rapport sur les progrès de la géométrie*, qui date de 1870.

Kuntz G. (1998) *une transformation oubliée qui sort de l'ordinaire l'inversion*, Repères-IREM nº 30

[4] Walter A. (2001) *Quelle géométrie pour l'enseignement au collège,* petit x nº 54 pp. 31-49.

Daniel, J-C (1995) *Géométrie en mouvement*, *Repères IREM n*°18

Diack T. et al. (2022), *Etude descriptive de l'historique des transformations géométriques dans les programmes de mathématiques aux Sénégal.* LIENS, ISSN 2772- 2392 n°2, Juillet 2022