Historia y rigor en una iniciación al cálculo: una experiencia cubana

History and rigor in an introductory calculus course: a cuban experience

CONCEPCIÓN VALDÉS CASTRO[1]

CARLOS SÁNCHEZ FERNÁNDEZ[2]

La buena lógica cuando se introduce en el momento y lugar
equivocado, puede ser el peor enemigo de la buena enseñanza.
George Polya (1887-1985)

Resumen

El objetivo principal de este artículo es compartir nuestras experiencias en el desarrollo de un curso introductorio de Cálculo con el uso de problemas históricos. Con este enfoque pretendemos presentar a los estudiantes tanto los obstáculos encontrados en la resolución de problemas históricos significativos, como las ideas y métodos que han servido para superarlos. De hecho queremos argumentar que una reconstrucción adecuada del contexto histórico de estos fructíferos problemas puede ser valiosa para incrementar la motivación del estudiante y para una asimilación más razonable de la indispensable metodología ε-δ en los cursos avanzados de Análisis Matemático.

Palabras claves*: Integración de la historia en la enseñanza del cálculo, introducción del Calculo, tránsito a la educación universitaria, enfoque histórico.*

Abstract

The main goal of this paper is to share our experiences in the development of an introductory Calculus course through the use of historical problems. With this approach we present to the students both the obstacles encountered in the resolution of meaningful historical problems and the ideas and methods by which theses obstacles have been overcome. In fact we would argue that a suitable reconstruction of the historical context of these fruitful problems can be valuable to improve the student motivation and to move more reasonably towards the indispensable ε-δ methodology in advanced courses of Mathematical Analysis.

Keywords*: Integration of history in the teaching of Calculus; introduction to Calculus; transit to the college education.*

Resumo

O objetivo principal deste artigo é compartilhar nossas experiências no desenvolvimento de um curso introdutor do Cálculo usando problemas históricos. Nesse enfoque se pretende apresentar aos estudantes não somente os obstáculos achados na resolução de significativos problemas históricos, mas também as idéias e métodos usados na sua superação. Realmente pretendemos argumentar que uma adequada reconstrução do contexto histórico desses proveitosos problemas pode incrementar a motivação do estudante e facilitar uma assimilação mais razoável da necessária metodologia ε-δ nos cursos avançados da Análise Matemático.

[1] Universidad de La Habana - concha@matcom.uh.cu
[2] Universidad de La Habana - csanchez@matcom.uh.cu

Palavras chaves: *Integração da historia no ensino do Cálculo, introdução do Cálculo, transição aos estudos universitários, enfoque histórico.*

Introducción

La enseñanza tradicional del Cálculo y el Análisis Matemático adolece de un alto grado de formalidad y de un mecanicismo que obstaculiza la motivación y la intelección del estudiante: definiciones muy precisas, pero vacías de significado; propiedades llamadas fundamentales, sin justificación explícita, algoritmos introducidos con el fin de memorizarlos y "aplicarlos" a problemas, por lo general, bastante artificiales. La mayor parte del tiempo de clase se utiliza en realizar manipulaciones algebraicas y ejecutar estos algoritmos de cálculo. Por supuesto, existen excepciones, pero así es como frecuentemente se enfrenta el estudiante a un primer curso de Cálculo Diferencial e Integral.

Son bien conocidas las dificultades, que en la asimilación de los conceptos básicos del cálculo, confrontan la gran mayoría de los estudiantes en todas las latitudes y en todas las épocas (ver por ejemplo, DAVIS; VINNER 1986; PRZENIOSLO; 2004; ROH, 2010). Artigue (1996) agrupa estas dificultades en tres categorías: las relacionadas con la complejidad intrínseca de los objetos básicos: números reales, funciones, sucesiones, que suelen presentarse en un primer encuentro con el análisis; las dificultades vinculadas a la noción de límite como concepto básico y generalizador y las provocadas por la necesidad de salvar el obstáculo que representa el rompimiento con el pensamiento algebraico. Nuestra experiencia personal nos indica que la forma de enseñanza descrita en el párrafo anterior lejos de motivar y atemperar ese primer encuentro con el cálculo, contribuye a una apropiación poco productiva de los conocimientos básicos del análisis matemático y establece una singularidad esencial en la inteligibilidad matemática de los candidatos a ser futuros usuarios de los modelos matemáticos.

La experiencia muestra que en la mayoría de los cursos de Cálculo tiene lugar una especie de "simulacro" del aprendizaje de los conceptos básicos: El profesor "enseña" o simula que lo hace y el alumno "aprende" o simula que lo hace, pero en realidad no aprehende los conceptos y teorías desarrolladas, sino que elabora un conjunto de mecanismos pertinentes para responder de forma más o menos adecuada al tipo de preguntas que suele aparecer en los exámenes, la mayor parte de las veces de tipo eminentemente algorítmico y mecánico.

Cuando ya se avizoraba lo que podría ser este "estilo" en la educación matemática del siglo XX, Henri Poincaré (POINCARE, 1899) advirtió que para comprender una teoría no es suficiente tomar caminos seguros, sino que es necesario conocer las posibles trabas y darse cuenta de las razones por las que fue seleccionado tal camino más expedito. Para lograr esto en la educación matemática abogó con fundamento porque se ubicaran las teorías en su contexto histórico. Después de Poincaré no han sido pocos los pensadores que han señalado la importancia de la dialéctica entre lo lógico y lo histórico para lograr la mayor eficacia didáctica. Recordemos al menos, el influyente libro de Imre Lakatos donde como apéndice, en la edición española, aparece una atractiva discusión sobre el enfoque deductivo y el enfoque heurístico del que reproducimos el siguiente fragmento:

> El estilo deductivo esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada. (LAKATOS, 1982, p.166)

Nuestra propuesta parte del principio elemental de que una nueva cuestión de estudio debe presentarse formalmente al educando solo cuando éste se encuentre *suficientemente motivado*. Y para aproximarnos a este nivel de motivación consideramos que la historia de la matemática debe ser nuestra herramienta principal. La historia nos provee de problemáticas aderezadas con numerosas paradojas y controversias que nos permiten explicar el encanto y la importancia de los asuntos del programa. Pero ¿qué nos dice el profesor acostumbrado al enfoque deductivo tradicional? Que no obstante divertirse con las anécdotas históricas, no concibe como hacer espacio a ellas en la clase y además, lograr que el alumno aprenda a pensar con rigor lógico. En este breve trabajo queremos ilustrar cómo la historia no sólo nos puede proveer de entretenidas anécdotas, sino también, que con el enfoque historicista podemos especialmente *enseñar a pensar*. Nuestra experiencia nos dicta que con este enfoque los alumnos aprenden tanto la evolución dialéctica del concepto de rigor en la matemática, como también, lo que es más significativo, se pueden convencer por sí mismos de la necesidad del rigor para la cabal intelección de los conceptos.

1. Comentarios preliminares acerca del recurso didáctico de la Historia del Cálculo.

Cuando estudiamos el desarrollo histórico del cálculo observamos que durante las primeras etapas -aproximadamente entre 1650 y 1800- que denominaremos *infancia y* adolescencia, la herramienta principal eran las sumas infinitas, tanto convergentes como divergentes, y se operaba con ellas de forma semejante al álgebra de las sumas finitas. En todos los casos se consideraban evidentes propiedades tales como: si una serie representa una función en un intervalo, también la representará en todos los puntos donde está definida o el llamado *principio de continuidad* nunca enunciado explícitamente, pero que se materializaba en enunciados diferentes acordes al contexto: "lo que es cierto antes del límite, también lo es en el límite"; "lo que es verdad para cantidades finitas, lo es también para cantidades infinitamente grandes o pequeñas" o "lo que es cierto para los números reales, también lo es para los complejos" (ver KLEINER, 2006).

Propiedades tales como "toda función continua no puede tomar valores de signo contrario sin anularse" o "toda función continua alcanza sus valores máximo y mínimo" se consideraban fuera de toda duda. De esta forma aparecieron muchos resultados correctos y sumamente útiles, pero también se evidenciaron numerosas paradojas y ejemplos "excepcionales" que ponían en entredicho los resultados obtenidos. Esta situación conllevó a que, de forma gradual, surgieran críticas y cuestionamientos de estos usos indiscriminados: Bolzano y Cauchy sintieron la necesidad de una definición de función continua en un intervalo, Abel se asombró de que no se llegaran a más situaciones paradójicas por la falta de rigor con que se trataba a las series infinitas, sin embargo Bolzano admitió y Cauchy "demostró" que el límite puntual de una sucesión de funciones continuas era siempre una función continua. Este error fue advertido por Abel y corregido por otros matemáticos, hasta que Weierstrass arraiga en el análisis el uso de la metodología épsilon-delta e introduce la definición actual de convergencia uniforme.

La primera lección de la historia resumida arriba es que el rigor penetra en el Cálculo, como muestra de la mayoría de edad, de la mano de sus más eminentes representantes, no por un simple capricho intelectual, sino por necesidades intrínsecas a su desarrollo. Al lector interesado sugerimos la lectura cuidadosa de los dos ensayos (GRABINER

1981, 1983), donde la autora realiza un atractivo y profundo análisis de las condiciones que llevaron a la introducción de la metodología épsilon-delta en el Cálculo.

Sin embargo, cuando enseñamos el cálculo, generalmente admitimos como un axioma que los estudiantes serán capaces de asimilar sin ninguna preparación previa conceptos que por su abstracción solo fueron claramente formulados en su etapa de *madurez* en pleno siglo XIX. Sin duda esta es una de las causas de la falta de sentido que para los jóvenes tienen los conceptos "aprendidos". Por ejemplo, meditemos qué ocurre cuando, sin ninguna preparación previa, definimos límite: la terminología utilizada es completamente ajena a la experiencia del alumno, al cual no le es posible conciliar estas ideas abstractas con la idea intuitiva que todo el mundo posee de lo que puede ser un "límite" o la expresión tan frecuente "tender a". En español como definición de *límite* encontramos: *término, confín o lindero de reinos, provincias, posesiones* o, en sentido figurado, *fin, término*; para *tender*, en la acepción catalogada como matemática, se puede leer: *aproximarse progresivamente una variable o función a un valor determinado, sin llegar nunca a alcanzarlo*. En portugués aparece como significado de *limite*: *linha de demarcaçao, fim, término, fronteira* y para *tender* hallamos: *ter tendencia ou vocaçao, ter em vista ou como fim, estender(se)*. ¡Qué distante están estas definiciones del concepto matemático!

Así surge un conflicto: el alumno se ve en la necesidad de compatibilizar estos enunciados completamente diferentes para asociarlos a una misma idea. No se trata de un proceso de sustitución, sino más bien de adecuación, de reconocer en el enunciado matemático las distintas particularidades, *el porqué es más preciso* y sobre todo *el porqué es necesario*. Somos del criterio que ésta es una tarea muy difícil para la mayoría de los estudiantes y para muchos, desafortunadamente, es completamente imposible. Por tanto, consideramos indispensable una introducción gradual del rigor y formalismo abstracto, preparando previamente al estudiante para enfrentarse a un concepto nuevo para él. Pero ¿cómo realizar esta preparación? ¿Cómo alcanzar el rigor deseado?

Al respecto, es famosa una carta del célebre profesor de la Universidad de París Charles Hermite al joven Mittag-Leffler, alumno de Weierstrass. En esta carta, el experimentado Hermite afirma:

> Je crois mon cher Ami qu'il ne serait point sans péril d'exposer d'emblée à des commençants ces mathématiques nouvelles, si incontestablement meilleures et plus rigoureuses que les anciennes. Mon sentiment est

> qu'il faut d'abord préparer à ces nouvelles théories, et suivre l'ancienne route, en montrant soit des erreurs, soit des insuffisances des démonstrations restées longtemps inaperçues, et annonçant que d'autres méthodes les feront disparaître. Et la raison est que quelque chose du développement historique de la science doit se trouver dans l'enseignement…(HERMITE, 1984, p.130)

Existen diferentes estudios donde se aboga por el uso de la Historia en la enseñanza del cálculo y otros que constituyen excelentes documentos de trabajo. Consideramos de particular interés el artículo (KLEINER, 2001), donde además aparece una excelente bibliografía sobre el tema, y los libro (BRESSOUD, 1994, HAIRER; WANNER, 2008) los cuales hacen un uso intenso y extenso de las fuentes originales. En diversas publicaciones se ha tratado de clasificar el uso de la historia en la enseñanza en dos formas, una explícita y otra implícita, en dependencia que se haga mayor énfasis en la historia o en la matemática, por ejemplo en (FAUVEL; van MAANEN, 2000). Nuestra experiencia nos sugiere como más natural concebir un continuo de posibilidades, de gradaciones en los énfasis, cuyo uso estará en dependencia de la naturaleza y complejidad del nuevo concepto, de la preparación que ya los alumnos tengan y especialmente de los objetivos de la asignatura o incluso del tema o concepto concreto objeto de estudio (SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, 1994; SÁNCHEZ FERNÁNDEZ y VALDÉS CASTRO, 1999). Abogamos por la realización de un recorrido orientado a través de las etapas fundamentales del desarrollo de una noción o teoría, para así presentar los conflictos o paradojas, las limitaciones y dificultades que provocaron la introducción de los nuevos conceptos y metodologías. Sin dudas, de esa forma estamos motivando un análisis más profundo y significativo del objeto de estudio.

Por otra parte, debemos cambiar la concepción de muchos profesores que identifican el uso de la historia en las clases como la narración de anécdotas. Opinamos que no deben desdeñarse las anécdotas históricas, pero no es conveniente "abusar" de ellas. Las anécdotas para tener un fin educativo en su sentido más amplio deben ser *significativas*. El énfasis, por supuesto, debe estar en la formación matemática del joven: la formación de conceptos, la habilidad en el trabajo dentro de las teorías matemáticas, las creencias acerca de cómo ellas se forman. Pero no debe desdeñarse la contribución que, anécdotas adecuadamente seleccionadas, aportan en la percepción del lugar de la matemática en la cultura humana, su dependencia de las condiciones sociales de la época en que se desarrolla, el comportamiento ético de los matemáticos, la apreciación de la belleza intrínseca de las teorías y resultados matemáticos.

2. Descripción de la experiencia

Insertados en el marco teórico indicado antes, hemos diseñado el estudio del Cálculo como una iniciación al estudio del Análisis Matemático que se realiza a nivel universitario. La asignatura proyectada en forma radicalmente diferente a otros cursos tradicionales de Cálculo y que denominamos *Introducción al Análisis* estudia las herramientas analíticas surgidas en la *infancia y adolescencia* del Análisis Matemático, con un espíritu próximo al que animó a los fundadores del mismo, pero aún más cercano al que inspiró al *maestro de todos los matemáticos*, Leonhard Euler.

Tras esta asignatura introductoria, la enseñanza universitaria del Análisis Matemático se estructura siguiendo la etapa de *madurez* del Cálculo, es decir, el estilo de las obras de Bolzano-Cauchy-Weierstrass, sin desdeñar los esenciales aportes conjuntistas de Cantor. Entonces se retoman las nociones básicas introducidas en forma heurística en la *Introducción*... y, a través de las paradojas ya presentadas y otras nuevas, así como un serio cuestionamiento de muchas de las afirmaciones realizadas, se definen las nociones número real, límite y continuidad de funciones de una variable y se formalizan las de derivada e integral (en el sentido de Riemann).

A continuación expondremos con algunos detalles nuestras experiencias en la *Introducción al Análisis*, concebida como una forma de iniciar al estudiante en la heurística del Análisis y para la aceptación posterior y la asimilación reflexiva de la metodología épsilon-delta.

Esta asignatura se ha dividido en 3 partes fundamentales:

- *Funciones Elementales,*
- *Introducción al cálculo diferencial,*
- *Introducción al cálculo integral.*

En la primera parte se estudian las funciones potencia, exponencial, logarítmica, trigonométricas y sus inversas. Primeramente se describe el *cómo* y el *para qué* surgieron nociones tales como potencia con exponente "arbitrario", logaritmo de un número, seno de un ángulo. Presentamos sus propiedades más elementales y las enormes dificultades que presentaban los cálculos de los valores de estas funciones, así como algunos de los primeros algoritmos surgidos para facilitarlos. En particular tratamos con cierto detalle el uso de las diferencias finitas y los polinomios de interpolación. Uno de los propósitos de esta parte es destacar dos cuestiones esenciales: cómo las necesidades de otras ciencias, principalmente la Astronomía, impulsaron el desarrollo de métodos cada vez más exactos y cómo las nociones concebidas solo como herramientas de cálculo aritmético se convirtieran en lo que hoy conocemos como funciones elementales (ver VALDÉS CASTRO; SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, 2011 y para más detalles históricos Jahnke, (ed)**,** 2003; SÁNCHEZ FERNÁNDEZ; VALDÉS CASTRO, 2004; SÁNCHEZ FERNÁNDEZ; VALDÉS CASTRO, 2007 y STRUIK, (ed.) 1969). Posteriormente, en forma heurística, se deducen los desarrollos en series de potencias de estas funciones, siguiendo aproximadamente las ideas contenidas en la *Introducción al Análisis de los Infinitos* de Euler (2001).

Por ejemplo en la explicación de la obtención del desarrollo en serie de potencias del binomio $\sqrt{1+x}$ mostramos cómo antes de Newton la mayoría de los cálculos donde se precisaba utilizar un valor aproximado de su magnitud bastaba considerar un polinomio de primer grado, concretamente: $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ y en muy pocos casos se usaba un polinomio de segundo grado, especialmente: $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2-x^2/8$. Algunos alumnos se cuestionan la exactitud de tales aproximaciones, por qué tales coeficientes en los polinomios y no otros, entonces se responde a su curiosidad con cálculos numéricos a la manera actual y a través de las gráficas de la función $y=\sqrt{1+x}$ y los polinomios aproximantes. Se enfatiza que por supuesto las aproximaciones son mejores para valores de x cercanos a 0.

Después de satisfecho el interés sobre la validez de las aproximaciones por tales polinomios y con el fin de conseguir aproximaciones mejores, comentamos la ingeniosa idea de Newton para la búsqueda de los coeficientes en la expresión $\sqrt{1+x}=1+x/2-x^2/8+cx^3+dx^4+\ldots$. Newton simplemente sustituyó este desarrollo en la identidad $\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x}=1+x$ e igualó los coeficientes de las potencias de x en ambos miembros. De esta forma se obtienen los valores $c=\frac{1}{16}$, $d=-\frac{5}{128}$ y de forma semejante se pueden obtener cuantos términos se deseen en el desarrollo del binomio. Entonces llamamos la atención sobre la regla de formación de estos coeficientes, cómo los valores obtenidos pueden ser generados mediante una fórmula análoga a la conocida para el caso de potencias enteras positivas del binomio $(1+x)^n$. Además, discutimos cómo esta analogía junto a algunas ideas expresadas previamente por John Wallis inspiraron a Newton un dudoso, pero eficaz, razonamiento de interpolación para así obtener el desarrollo del binomio para $(1+x)^a$ con un valor de a cualquiera. Este razonamiento que no satisfacía plenamente ni siquiera al propio Newton mucho menos satisface los estándares de rigor actual, cuestión que es necesario aclarar a los estudiantes, pero también es oportuno enfatizar que este fue un instrumento utilizado profusamente y con mucho éxito durante todo el siglo XVIII. Se informa además que solo será a comienzos del siglo XIX que el joven matemático noruego Niels Abel proporcione una demostración rigurosa de la validez del resultado general y que en el curso de Análisis Matemático verán la demostración.

La segunda parte, *Introducción al cálculo diferencial*, está dedicada a estudiar las ideas básicas de la diferenciación, como forma de resolución de problemas geométricos y físicos. Se inicia con la presentación de un conjunto de problemas generadores, relacionados fundamentalmente con la determinación de tangentes a las curvas, la búsqueda de extremos y la noción física de velocidad. Se presentan algunas de las ideas más simples desarrolladas principalmente por Fermat y Roberval para la resolución de estos problemas. Las nociones de diferencial, tangente a una curva y sus relaciones, así como las reglas más elementales de diferenciación las explicamos mediante comentarios de fragmentos del libro del Marqués de L'Hôpital *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas* (L'HOSPITAL, 1998). Para el cálculo de los diferenciales de las funciones elementales y algunas de las reglas de diferenciación nos apoyamos en las ideas contenidas en el *Cálculo Diferencial* de Euler.

En esta obra Euler define como *cálculo diferencial*: "*un método para determinar la relación de los incrementos evanescentes que cualquier función toma cuando la variable, de la cual ella es función, es un incremento evanescente*" (EULER, 2000, p.vi). Esto permite introducir la idea de derivada e interpretarla geométrica y físicamente y así facilitar la obtención de los diferenciales y derivadas de las funciones compuestas e inversas.

A partir de este momento estamos en condiciones de abordar la resolución de problemas de determinación de tangentes, análisis de extremos relativos y absolutos, aproximación de raíces de ecuaciones por el método de Newton, etc. Terminamos esta parte con una deducción heurística de la serie de Taylor. Para ello aproximamos una función $y=f(x)$ mediante el polinomio que interpola esta función en los puntos x_0, $x_1=x_0+\Delta x$, $x_2=x_0+2\Delta x$, …:

$$p(x)=y_0+\frac{x-x_0}{1!}\frac{\Delta y_0}{\Delta x}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}+\ldots,$$

donde $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \ldots$ representan las diferencias sucesivas de la función en esos puntos. Seguidamente consideramos un incremento Δx muy pequeño y observamos que los cocientes $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}, \ldots$, se aproximan a las derivadas sucesivas de la función. De esta forma el polinomio $p(x)$ se convierte en el llamado polinomio de Taylor (HAIRER; WANNER, 2008, VALDÉS; SÁNCHEZ, 2011).

En la última parte, *Introducción al cálculo integral*, comenzamos con algunos de los problemas geométricos que motivaron la noción de integral. En aras de la sencillez, se utilizan fundamentalmente las cuadraturas de algunas curvas sencillas como por ejemplo las parábolas e hipérbolas generalizadas $y=x^\alpha$ que pueden ser cuadradas mediante la división del intervalo en puntos equidistante o, mejor aún, al "estilo de Fermat", es decir, de modo que las abscisas de los puntos de subdivisión formen una progresión geométrica. Nos parece de particular interés destacar la enorme dificultad que presentó en su época la cuadratura de la hipérbola equilátera (la considerada más simple), y cómo los esfuerzos dedicados a resolver este problema influyeron decisivamente en la concepción del logaritmo como función y no solo como un instrumento facilitador de los cálculos numéricos.

Una vez motivada la necesidad de elaborar un algoritmo idóneo para la resolución de esta clase de problemas, se introduce la noción de integral definida como área bajo una curva. Para vincular la integral definida con el cálculo de primitivas se utilizan las ideas geométricas con las cuales Newton y Leibniz mostraron la relación entre los dos problemas básicos del cálculo infinitesimal: la determinación de tangentes y el hallazgo de cuadraturas. Una vez en posesión de la fórmula fundamental del cálculo, pueden justificarse de forma sencilla las propiedades básicas de la integral, usando las correspondientes propiedades de la derivada (VALDÉS; SÁNCHEZ, 2011).

Con las herramientas desarrolladas estamos en condiciones de plantear y resolver algunos de los problemas más famosos que surgieron durante la etapa de la infancia y adolescencia del cálculo y condujeron a la introducción de curvas notables como la tractriz, la catenaria, la isócrona y la braquistócrona.

Finalizamos esta asignatura con nociones sobre los cálculos aproximados: deducción de la fórmula de Taylor con resto, mediante integración por partes (método que proviene de Johann Bernoulli y fue perfeccionado por Cauchy) y métodos de cálculo aproximado de integrales usando los polinomios de interpolación (ver por ejemplo SÁNCHEZ FERNÁNDEZ; VALDÉS CASTRO, 2004, HAIRER y WANNER, 2008 y VALDÉS CASTRO; SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, 2011).

Nuestra intención ha sido utilizar la génesis del cálculo como inspiración, guía y fuente de problemas, pero sin jamás pretender calcar lo ocurrido en la historia. En general asumimos la terminología y simbolismo contemporáneos, no vacilamos en modificar un ejemplo para simplificarlo, en utilizar herramientas, conocidas a los estudiantes, pero surgidas con posterioridad a la época en que el problema fue resuelto. Por ejemplo, para un problema geométrico de extremos tomado de los *Elementos* de Euclides podemos auxiliarnos de la notación algebraica; el problema de la cuadratura de la parábola resuelto por Arquímedes en forma totalmente geométrica y retórica lo adaptamos haciendo uso del lenguaje de las coordenadas; la deducción de Newton de la fórmula fundamental del cálculo la expresamos en términos de derivadas o diferenciales y no de fluxiones o fluentes. En resumen, hemos pretendido actuar de forma próxima a lo que Grattan-Guinness denominó *historia-sátira* (GRATTAN-GUINNESS, 2004).

3. Análisis de los resultados obtenidos

La aplicación durante 5 cursos de este estilo de trabajo nos ha conducido a las consideraciones siguientes:

1. Hemos podido apreciar un cambio paulatino en la comprensión de los estudiantes respecto a qué es la matemática y cómo ella se desarrolla. Varios estudiantes se han animado a realizar cuestionamientos, a plantearse problemas y, en ocasiones a intentar su solución, buscando explicar algunas de las situaciones paradójicas que se presentaban. Pero sobre todo, muchos de ellos perdieron el miedo a expresarse y equivocarse en las discusiones producidas durante la solución a los problemas, es decir, se incorporaron activamente en las discusiones y debates, participando en la elaboración de las nuevas ideas. Este cambio sustancial de actitud se aprecia más nítidamente en los semestres posteriores donde se realiza un estudio más formal del análisis matemático.

2. Muy importante fue la "humanización" del quehacer matemático. Con las citas y relatos biográficos se consiguió la desmitificación de los matemáticos y de cómo obtienen sus logros. Los alumnos comenzaron a considerarlos como seres normales, con ciertas características y virtudes especiales, pero también con defectos y susceptibilidades limitantes.

Con la actitud respetuosa del profesor respecto a las fallas o inexactitudes en el proceso de análisis y discusión, no solo las inherentes a la obra de los grandes matemáticos, sino también las ocurridas en la clase (muchas veces con cierta semejanza), se logró modificar, al menos parcialmente, la imagen y el papel del error en el proceso normal de aprendizaje. Las discusiones en clase pusieron de manifiesto que, al igual que ocurre en el desarrollo de la matemática, los fallos de los estudiantes muchas veces se deben a que toman como un hecho cierto aquello que se imaginan o desean que ocurra. Esta nueva actitud permitió ejercer lo que Imre Lakatos (LAKATOS, 1982) denominó "crítica matemática", es decir, ser capaz de intercambiar conjeturas, ideas, enfoques, sin temor a ser descalificado por los errores cometidos. Hemos podido constatar en la práctica lo que hace más de un siglo Hermite comentaba en la carta mencionada antes: "*C'est un fait d'expérience absolument certain, que l'erreur a été bien souvent plus utile que des vérités parfaites, pour la marche de l'esprit et le progrès de la science.*" (HERMITE, 1984, p.130)

3. Al abordar, en asignaturas posteriores, la formalización de los conceptos del análisis haciendo uso del lenguaje épsilon-delta, se pudo constatar mayor fluidez en la aceptación y asimilación de las definiciones. Resultó evidente que los alumnos sentían la necesidad de tener un instrumento que les permitiera dar respuesta satisfactoria a las disímiles paradojas e incongruencias que se habían presentado previamente. Por ejemplo, la noción de convergencia y divergencia de series numéricas y el análisis del cumplimiento de las propiedades algebraicas usuales con estos nuevos entes matemáticos fueron muy bienvenidos, incluso algunos estudiantes se han interesado por investigar, desde un punto de vista riguroso, los resultados y paradojas históricas comentadas en el texto *Introducción al Análisis Matemático* (VALDÉS; SÁNCHEZ, 2011).

El trabajo con las herramientas eulerianas se revela satisfactorio cuando se consideran solo las funciones elementales (combinaciones de funciones racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas), sin embargo, la introducción de funciones con un comportamiento bien diferente permiten convencer de la necesidad de las definiciones formales de límite, continuidad, derivada e integral. Por ejemplo, una discusión del comportamiento gráfico de la función $y = x \operatorname{sen} 1/x$ conduce al cuestionamiento de la idea geométrico-intuitiva de continuidad como "curva que puede trazarse sin levantar el lápiz". En esta discusión puede resultar muy útil explotar las posibilidades que brindan los programas computacionales, en especial la realización de "acercamientos" cada vez más precisos o animaciones adecuadamente concebidas. Un ejemplo interesante, pero algo más avanzado (precisa del conocimiento de la propiedad de la derivada de tomar los valores intermedios) es a través del hecho que las funciones con salto finito, por sencillas que sean, carecen de función primitiva. Precisamente este fue uno de los cuestionamientos más importantes que a comienzos del siglo XIX condujeron a la definición de la integral como límite de las sumas integrales. Este tipo de situación no solo proporciona una motivación excelente para una definición rigurosa de la integral (según Riemann), sino que también enmarca de forma más precisa la validez del teorema fundamental de cálculo.

Esta nueva situación permite colocar en un primer plano la necesidad del análisis de la existencia de los entes matemáticos, de cuáles propiedades satisfacen y cuáles no, de las restricciones que son necesarias imponer para que sea cierto un resultado sugerido por la intuición.

4. Es común excusar el empleo de los métodos inspirados en la historia con "la falta de tiempo para cumplir el programa de la asignatura". En nuestra propuesta no se añade más tiempo al programa, solo se reorganiza la materia tradicional y se atempera su impartición: al inicio se da mayor prioridad al análisis de las situaciones problemáticas históricas y las posibles vías de solución y se pospone la formalización de los resultados. Esta práctica nos ha permitido comprobar que el uso de la historia facilita el aprendizaje, ya que le otorga mayor significado a la materia enseñada y permite revelar la pertinencia de los teoremas y procedimientos para el quehacer profesional en el mundo matematizado actual y además "*el tiempo que se emplea en aprender a razonar con los problemas históricos, después permite poder comprender más rápido y mejor*", según las palabras de uno de los estudiantes participante en esta experiencia.

Todos los profesores de experiencia sabemos que "cumplir el programa de una asignatura o tema" es una frase que puede ser interpretada en diferentes formas. En nuestro caso prima el criterio de centrarnos en los aspectos fundamentales, omitiendo detalles o temáticas que no son indispensables para revelar la esencia del quehacer matemático y pueden ser aprendidos, cuando se necesiten, en forma autodidacta. En particular hemos disminuido el énfasis en los algoritmos destinados únicamente a "aprender a calcular", en especial aquellos métodos artificiosos que solo brindan respuestas que actualmente son factibles de obtener con el uso de los programas computacionales.

5. Indudablemente, en la puesta en práctica de este proyecto se presentan dificultades de diferente índole. Se necesitan materiales escritos que concreten la propuesta y adecuados a cada tipo y nivel de enseñanza, profesores con una formación no solo en matemática y su didáctica, sino que también posean los conocimientos acerca de la génesis histórica del material objeto de estudio, que les permita llevar a cabo esta idea con la mesura necesaria.

Para el éxito de estas propuestas es recomendable -aunque no imprescindible- contar con medios computacionales suficientes para poder simular la experimentación numérica, procedimiento muy importante en el pasado que mantiene su vigencia indudablemente. Además se evita ocupar tiempo en tediosos cálculos automatizables. La tecnología, bien utilizada, puede brindar una ayuda inigualable para subrayar la comprensión conceptual y las representaciones gráficas de los objetos matemáticos, así como mostrar los fallos que un uso irreflexivo de la misma puede provocar.

6. Finalmente señalemos que, si bien esta propuesta disminuye la magnitud del "salto" en la trayectoria de tránsito entre los estudios secundarios y un primer enfrentamiento con las herramientas del cálculo diferencial e integral este no desaparece completamente. Además, la introducción del principiante en el estudio formalizado del análisis a través del lenguaje épsilon-delta hace necesario un segundo "salto". Por supuesto, la posibilidad de tener uno o varios escalones de apoyo intermedio hace más factible la posibilidad de alcanzar mayor nivel a un público más amplio y heterogéneo. Sin embargo, estamos conscientes del interés que tendría realizar un análisis histórico, epistemológico y didáctico, con el objetivo de poder brindarles a los estudiantes *un trayecto escolar lo menos discontinuo y lo más suave posible*.

Referencias

ARTIGUE, M. (1996). Teaching and learning elementary analysis. In *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education*. Sevilla, 15–29.

BRESSOUD, D. (1994). *A Radical Approach to Real Analysis*. Washington D.C. The Mathematical Association of America.

DAVIS, R.; VINNER, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 281–303.

EULER, L. (2001) *Introducción al análisis de los infinitos*. Edición de Antonio J. Durán, Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. Sevilla.

EULER, L. (2000) *Foundations of Differential Calculus*, Springer Verlag, N.Y.

FAUVEL, J. VAN MAANEN, J. (eds.) (2000). *History in Mathematics Education*. The ICMI Study, Kluwer Academic Publishers.

GRABINER, J.V. (1981). *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, M.I.T. Press, Cambridge and London.

GRABINER, J.V. (1983). *Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus*, American Math. Monthly N.3,V. 90, 185-194.

GRATTAN-GUINNESS, I. (2004). History or Heritage? An important distinction in Mathematics and for Mathematics Education. *American Mathematical Monthly*, N.1, Vol.111, pp.1-12.

HAIRER, E., WANNER, G. (2008). *Analysis by its history*, New York. Springer Verlag.

HERMITE, Ch. (1984). Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883), *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, V.5, 49-285.

JAHNKE, H. N. (ed) (2003). *A History of Analysis*. Washington. D.C. American Math. Soc.

KLEINER, I. (2001). *History of the infinitely small and the infinitely large in calculus*, Educational Studies in Mathematics V. 48, 137–174.

KLEINER, I. (2006). Principle of Continuity. A brief history, *Mathematical intelligencer*, N. 4, V. 28, 49-57.

LAKATOS, I. (1982). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid. Alianza Editorial.

L'HOSPITAL, G. F. Marqués de (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. C. México. UNAM.

POINCARE, H. (1899). *La logique et l'intuition dans la science mathematique et dans l'enseignement*, L'enseignement mathematique, V.1, 157-162.

PRZENIOSLO, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, V.55, 103–132.

ROH, K. (2010). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity. *Educational Studies in Mathematics,* N.3, V.73, 263-279.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C. (1994). Usos y Abusos de la Historia de la Matemática en el Proceso de Aprendizaje, en Nobre, S.(ed.) *Procc. Meeting of the HPM group.* Blumenau.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C.; VALDÉS CASTRO, C. (1999). Por un enfoque histórico-problémico en la educación matemática. *Revista Ciencias Matemáticas* N.2, Vol.17, 137-148.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C.; VALDÉS CASTRO, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo*. Madrid. Ed. Nivola.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C.; VALDÉS CASTRO, C. (2007) *Las funciones. Un paseo por su historia*. Madrid. Ed. Nivola.

STRUIK, D.J. (Ed.) (1969) *A Source Book in Mathematics 1200-1800,* Harvard. University Press.

VALDÉS CASTRO, C.; SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C. (2011). *Introducción al Análisis Matemático*. La Habana. Ed. Félix Varela.