Historia de la enseñanza del Cálculo a través de los libros[1]

The history of the teaching of Calculus through books.

MARIA TERESA GONZÁLEZ ASTUDILLO[2]

Resumen

Vamos a hacer un recorrido por la historia de la enseñanza del Análisis Matemático, partiendo de los inicios de su enseñanza hasta la actualidad, dando fe de los cambios producidos a lo largo de un poco más de 400 años. El inicio de este recorrido se inicia a partir del nacimiento de esta rama de las matemáticas, se revisarán algunos de los libros utilizados en la enseñanza de esos contenidos para finalizar con la introducción de las nuevas tecnologías que logran recuperar ciertos aspectos ligados a los orígenes de esta rama de las matemáticas. Se ha dividido esta evolución en cinco etapas para las que se han seleccionado algunos libros que permiten caracterizar la forma de presentar el contenido matemático en cada una de ellas.
***Palabras clave**: libros de texto, Análisis Matemático, nuevas tecnologías.*

Resumo

Vamos fazer um trajecto pela história do ensino da Análise Matemática, partindo do inicio do seu ensino até à actualidade, dando ênfase às mudanças produzidas ao longo de um pouco mais de 400 anos. Este trajecto tem início no nascimento deste ramo da matemática, foram analisados alguns dos livros utilizados no ensino desses conteúdos finalizando com a introdução das novas tecnologias que conseguiram recuperar alguns aspectos ligados à origem deste ramo da matemática. Dividiu-se esta evolução em cinco etapas para as quais se seleccionaram alguns livros que permitem caracterizar a forma de representar o conteúdo matemático em cada uma delas.
***Palavras chave:** livros didáticos, Análise Matemática, novas tecnologias.*

Abstract

We are going to make a journey through the history of the teaching of Mathematical Analysis, starting from the beginning to the present, attesting to the changes brought along almost 400 years. The start of this tour begins from the birth of this branch of mathematics. We will review some of the books used for the teaching of this content and in the end we will refer to the introduction of new technologies that are able to recover some aspects related to the origins of this branch of mathematics. This development has been divided into five stages for which we have selected some books that can characterize the way the mathematical content is presented in each of them.
***Keywords:** textbooks, Mathematical Analysis, new technologies*

---

[1] Este artículo se ha escrito a partir de la adaptación de una conferencia impartida en la XVIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática celebrada en Recife en el año 2011.
[2] Universidad de Salamanca - maite@usal.es

Introducción

Se señala el nacimiento del Análisis infinitesimal moderno, como cuerpo de conceptos y resultados aplicables con cierta generalidad a resolver determinados problemas, a finales del siglo XVII. Aunque anteriormente se habían resuelto algunos problemas particulares, de forma heurística, utilizando ciertos procedimientos infinitesimales, se consideran tanto a Newton (1643-1727) como a Leibniz (1646-1716) como sus fundadores.

Los orígenes están relacionados con el interés por la resolución de ciertos problemas que interesaban tanto a los matemáticos anteriores como a los contemporáneos de Newton y Leibniz y que se suelen clasificar en dos grandes grupos (Grattan-Guinnes, 1984) según la materia de la que tratan: problemas **mecánico-físicos** y problemas **geométricos**.

Los primeros abordaban cuestiones relacionadas con la astronomía, la estática y la mecánica, en la que la deducción de Galileo de las leyes de caída libre de los cuerpos y de la trayectoria parabólica de los proyectiles, significó una ruptura con la física aristotélica, y el comienzo de una nueva época en la que iba a utilizarse ampliamente la matemática en la física. Estos problemas están relacionados con el tiro, con la caída libre, el movimiento de los planetas y aquellos que requieren el estudio de los procesos de movimiento, en particular, del movimiento acelerado.

El segundo grupo de problemas son de naturaleza geométrica o geométrico-mecánica. Dentro de la propia matemática, el cálculo estuvo ligado al estudio de curvas que, inicialmente, fueron las heredadas de los griegos como las secciones cónicas, la cuadratiz de Hipias (460-400 a.C.), la espiral de Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.), la concoides de Nicomedes (aprox. 250 a.C.) y la cisoide de Diocles (aprox. 200 a.C.) Pero a medida que fue avanzando el siglo XVII, se introdujeron otras como: la cicloide que fue una de las más estudiadas; las parábolas e hipérbolas de orden superior ($y^m=kx^n$ y $ky^mx^n=1$ respectivamente siendo m y n números naturales y k una constante); la espiral de Galileo relacionada con un problema físico relativo a la trayectoria de un cuerpo que se mueve alrededor de un centro y que, al mismo tiempo, cae hacia ese centro con aceleración constante, y la concoide de un círculo, llamada también "caracol de Etienne Pascal" (1623-1662) que, a su vez, es un variante de las curvas llamadas "óvalos de Descartes" (1596-1650) relacionadas con problemas de construcción de una lente, que hace que todos los rayos paralelos o que parten de un punto converjan en un único punto después de haber atravesado la lente.

Para abracar esta historia a través de los libros hemos identificado varias fases, iniciando el recorrido en el primer libro de cálculo diferencial de l'Hôpital, pasando por las enciclopedias, los libros de autor, los libros actuales y, llegando hasta el uso de nuevos instrumentos como corresponde al uso de las nuevas tecnologías.

1.- El primer libro de Análisis.

El que es considerado por muchos como el primer texto de Análisis se debe a l'Hôpital, pero ¿cuáles fueron los antecedentes que condujeron tanto a la escritura como a la publicación de este libro? En los años 1684 y 1686 se publicaron, por parte de Leibniz (1645-1716) sendos artículos de su cálculo diferencial en el *Acta Eruditorum* (revista científica fundada por él mismo) pero eran bastante breves, tenían erratas y, en algunos lugares, eran confusos, con lo que no permitían un acceso fácil al nuevo cálculo. Jacob y Jean Bernoulli estudiaron dichos artículos a partir de 1687, y en 1690, mediante artículos publicados en la misma revista *Acta Eruditorum*, demostrando haber conseguido dominar el simbolismo leibniziano y su uso. Jean Bernoulli (1667-1748), el menor de los hermanos Bernoulli, durante su estancia en París a finales del siglo XVII hacia el año 1692, instruyó al Marqués de l'Hôpital en este nuevo cálculo y, de esta colaboración, surgió este libro: *Analyse des infiniment petits*, en París, en 1696.

Tuvo tal éxito este libro que se publicaron numerosas ediciones de él a lo largo de la mayor parte del siglo XVII y se utilizó como libro de texto en prácticamente todas las Escuelas Politécnicas, escuelas militares, Universidades y Academias.

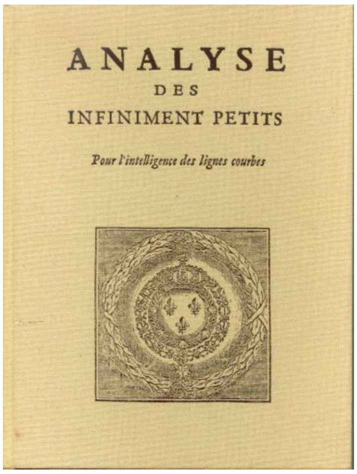


FIGURA 1. Portada del libro de l'Hôpital

La estructura de la obra es la clásica de los libros de matemáticas, heredando la forma de hacer de los matemáticos griegos. A partir de unas definiciones iniciales en las que se establece el significado de los conceptos “primarios” que van a aparecer a lo largo del texto, se van a suceder las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos. Con cada una de dichas proposiciones se incluye un problema o ejercicio resuelto con la pretensión de ejemplificarlo.

La obra tiene 181 páginas y se divide en diez secciones a través de las cuales se hace un repaso de todo el cálculo diferencial. Algunas de estas secciones hacen referencia a cuestiones como: los principios de lo que entonces se llamaba *cálculo de diferencias*, el cálculo las tangentes a cualquier tipo de curva (independientemente del número de indeterminadas que tenga su ecuación), el cálculo de los máximos y mínimos a una curva o sus puntos de inflexión e incluso otros puntos como los de retroceso. También se descubre el uso de las envolventes de M. Hugens para todo tipo de curvas, se trata de cómo obtener cáusticas[3] tanto por reflexión como por refracción y del cálculo de límites de forma indeterminada. El libro finaliza con una observación en la que se indica que los métodos utilizados son generales y se pueden extender también a curvas trascendentes.

El libro contiene algunas aplicaciones a la Física, pero en el prólogo se dice que se necesitaría una sección sobre el maravilloso uso que tiene el cálculo de diferencias en la física y la precisión que podemos lograr pero una enfermedad se lo impidió.

Aunque en esa época muchos libros se escribían en latín por tradición, por considerarlo como lengua culta y para que pudieran ser entendidos por la mayoría de los matemáticos, este libro está escrito en francés, lo que puede ser un indicador del colectivo al que iba dedicado y el uso que se hizo de él como libro de texto.

Este libro, según Cantoral (1995) se adapta al paradigma de la *etapa de difusión del saber* caracterizada por

> una especie de pedagogía impresionista que pretende en el lector evocar una serie de impresiones que contextualicen al concepto o campo de conceptos que el texto trasmite. Esto supone de quien lo lea un ejercicio mayor que aquel que se requiere para dar seguimiento a un razonamiento lógicamente encadenado. En cierto sentido solicita

[3] Caústica: Superficie o línea tangente a un haz de rayos emitidos desde un foco.

> del lector una especie de joroba matemática que le permite, por así decirlo, leer entre líneas" (Cantoral, 1995, p.65).

Esto podemos observarlo en las primeras definiciones incluidas en el libro, la primera de las cuales indica:

> On appelle quantités variables celles qui augmentent ou diminuent coninuellement ;& au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une paraboles les appliquées & les coupées sont des quantites variables, au lieu parametre est une quantité constante (l'Hôpital, 1696, p.1)

En ella, se define lo que se entiende por cantidades variables y cantidades constantes pero no se explica el significado de "aumentan o disminuyen continuamente", con lo que se supone en el lector la noción de variación continua, como señalaba anteriormente Cantoral.

El libro de l'Hôpital, se basa en dos postulados; en el primero se establece que se pueden tomar como iguales dos cantidades que difieren sólo en una cantidad infinitamente pequeña:

> I DEMANDE OU SUPPOSITION. On demande qu'on puisse prendre indifférement l'une pou l'autre deux quantités qui ne different entre'elles que d'une quantité infiniment petite; ou (ce qui est la même chose) q'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une quantité itnfiniment moindre, qu'elle, puisse être considerée comme demeurant la même. (l'Hôpital, 1696, p.2)

Mientras que en el segundo se consideran las curvas como formadas por segmentos rectos infinitamente pequeños que determinan, por medio de los ángulos que forman unos con otros, la curvatura de la curva. De esta forma, se expresa simplemente la manera en que concebían los matemáticos de aquella época las curvas, como la traza de un punto que la recorre.

> II DEMANDE OU SUPPOSITION. Ou demande qu'une ligne courbe puisse être considéree comme l'assembalge d'une infinité des lignes droites, chacune infiniment petit ou (che que est la même chose comme un poligône d'u nombre infini de côtes, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles quìls font entr'eux, la courbure de la ligne. (l`Hôpital, 1696, p. 3).

El primer postulado establece las reglas para el manejo algebraico, extendiendo la noción usual de igualdad, mientras que el segundo, lo hace en un contexto geométrico. Estos dos principios difícilmente se podrían considerar aceptables hoy, pero l'Hôpital los veía "*tan evidentes intrínsecamente que no dejan al lector ningún escrúpulo acerca de su verdad en la mente de un lector atento*" (l'Hôpital, 1696, p. 3). El segundo postulado expresa simplemente la manera en que concebían los matemáticos de aquella época las curvas.

Tal como debe hacer un buen libro de texto, el *Analyse* comienza dando las definiciones de las variables y de sus diferenciales, así como postulados sobre estas diferenciales. Se obtienen las fórmulas diferenciales básicas para las funciones algebraicas a la manera de Leibniz, y se aplican al cálculo de tangentes, máximos y mínimos, puntos de inflexión, curvaturas, cáusticas y límites de forma indeterminada. El libro finaliza con una observación en la que se indica que los métodos utilizados son generales y se pueden extender también a curvas transcendentes, habiendo que destacar de l'Hôpital que fue un escritor excepcionalmente claro y eficaz.

El concepto que tiene l'Hôpital de la diferencial es un poco diferente del de Leibniz. Las diferenciales de Leibniz son diferencias infinitamente pequeñas entre valores sucesivos de una variable; l'Hôpital, en cambio, no considera las variables como recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos, sino como creciendo o decreciendo de manera continua y, entonces, las diferencias son las partes infinitamente pequeñas en que aumentan o disminuyen.

> La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appellée la Différence (l'Hôpital, 1696, p. 2)

En esta época de nacimiento, el Análisis consistía en una colección de métodos analíticos para resolver problemas sobre curvas y los conceptos principales que se manejaban eran cantidades geométricas variables tal como aparecían en los problemas. Con el paso del tiempo, a medida que se fueron haciendo más complicados los problemas y el manejo de las fórmulas más intrincado, el origen geométrico de las fórmulas se fue haciendo más remoto y, así, el cálculo fue cambiando hasta convertirse en una disciplina que se ocupaba simplemente de las fórmulas con lo que se fue algebraizando. Es importante, además, hacer notar que es el estudio de esas diferencias tanto infinitamente grandes como infinitamente pequeñas, de lo que va a tratar esta rama de las Matemáticas, de ahí el nombre de Cálculo Diferencial.

Como l'Hôpital considera las curvas como formadas por segmentos infinitesimales, la definición que maneja de la recta tangente a una curva es:

> Si l'on prolonge un des petits côtés Mm du poligone qui compose une ligne courbe ; ce petit côté ainsi prolongé sera appellé la Tangente de la courbe au point M ou m. (l'Hôpital, 1696, p.11).

Los problemas presentados y resueltos en el libro son, o bien, geométricos o físicos, para lo que se recurre a curvas con un significado puramente geométrico como, el Folium de Descartes o la parábola semicúbica de Neile. Algunas curvas se construyen a partir de otras curvas como las roulette, a partir de los datos de un problema, o a partir de un dibujo. Las expresiones simbólicas representan toda una familia de funciones y se realiza un estudio las características de las curvas en relación con los parámetros de dichas expresiones.

2.- La época de las enciclopedias

A lo largo del siglo XVIII se publicaron muchos libros de texto que alcanzaron un enorme éxito; además, durante la segunda mitad de este siglo, se produjo un género que más tarde se conoció como el del *Cours de mathématiques*, es decir, el de las obras de varios volúmenes (a menudo tres) que cubrían la matemática o una de sus ramas desde el nivel más elemental al más avanzado. Una de las obras de este tipo que alcanzó más éxito fue el *Cours de mathématique* de Etienne Bézout (1730-1783), un tratado en seis volúmenes que apareció por primera vez en 1764-1769, del que se publicó inmediatamente una segunda edición en 1770-1772, y que pudo vanagloriarse de la gran cantidad de versiones conseguidas, tanto en francés como traducidas a otras lenguas. Fue a través de tales recopilaciones, más que en las obras originales de los autores mismos, como se divulgaron los descubrimientos matemáticos de Euler (1707-1783) y de D'Alembert (1717-1783), entre otros. Durante el siglo XVIII las universidades francesas no destacaron en el cultivo de las matemáticas, siendo las academias y escuelas militares las que produjeron un importante número de matemáticos, y un *Cours de mathématiques* como el de Bézout resultaba muy adecuado para ser utilizado en instituciones de este tipo. Bézout mismo enseñó en una escuela militar y fue examinador de la marina, por lo tanto estuvo en estrecho contacto con los programas que se enseñaban en su época.

El *Cours de mathématique* de Bézout continuó siendo una obra muy prestigiosa aún durante el primer tercio del siglo XIX, especialmente en Norteamérica, donde partes de ella se utilizaron traducidas al inglés en West Point y en otras academias. La cuarta parte del *Cours* de Bézout, que trata de los principios de la mecánica, es la verdadera razón de ser del programa, de forma que su cálculo "*was more an appendix to prepare his course in mechanics, and this is very indicative of the place of higher mathematics* *before 1795*" (Dhombres, 1985, p. 104), aunque se necesiten esos principios generales para abordar las cuestiones de tipo más práctico.

El libro al que dedicamos nuestra atención, constituye el cuarto volumen de la obra de Bézout conocida bajo el epígrafe de *Cours de mathématiques*. Este libro tiene 365 páginas y está dividido en dos partes, en la primera incluye los principios del Cálculo, y la segunda está exclusivamente dedicada a la Mecánica. Al inicio del texto expone Bézout la razón por la cual considera importante el Análisis Matemático: para poder calcular las variaciones de las magnitudes y por sus aplicaciones principalmente a la Mecánica:

> Nous avons donné dans la troisieme Partie, les regles nécessaires pour calculer les quantités, dans tel état de grandeur qu'on puisse les supposer. Mais nous n'avons point considéré les variations par lesquelles ces quantités arrivent à tel ou tel état de grandeur. Ce nouvel objet à cosidérer dans les quantités, donne lieu à une autre branche del Analyse, qui est de la plus grande utilité dans les Sciences Physico-mathématiques & principalement dans la Méchanique, où l'on ne parvient souvent à déterminer les rapports des quantités qui entrent dans les questions relatives à cette science, qu'après avoir considéré les rapports de leurs variations, c'est-à-dire, des accroissements ou des diminutions qu'elles reçoivent à chaque instant. (Bézout, 1764, pp. 1-2)

En la parte en que desarrolla los principios del Cálculo se incluyen las nociones relativas al Cálculo Diferencial e Integral que los define considerando uno como el inverso del otro:

> Nous nous proposons deux objets: le premier d'enseigner à descendre des quantités à leurs éléments : & la méthode pour y parvenir s'appelle calcul *différentiel*. Le second nous montrera la route pour revenir des éléments des quantités, aux quantités mêmes ; & nous appellerons cette méthode , calcul *integral*. (Bézout, 1764, p. 2)

Se da una definición de cantidad infinita o infinitamente pequeña de forma relativa en el sentido de que su infinitud depende de la cantidad con la que se está comparando:

> Nous disons qu'une quantité est infinie ou infiniment petite à l'égard d'une autre, lorqu'il n'est pas possible d'assigner aucune quantité assez grande ou assez petite pour exprimer le rapport de ces deux-là, c'est-à-dire, le nombre de foix que l'une contient l'autre (Bézout, 1764, p. 3)

A partir de la noción de diferencia, se establecen las reglas del cálculo de la diferencial de algunas de las funciones elementales (trigonométricas, logarítmicas, exponenciales,...), se aplican al cálculo de máximos y mínimos, puntos de inflexión y de retroceso, se dan algunas reglas para la determinación de integrales, y se aplica a la rectificación de líneas curvas, a las superficies curvas y a la medida de volúmenes, finalizando con la resolución de algunas ecuaciones diferenciales. La noción que se maneja de diferencia es la siguiente:

> Lorsque l'on considere une quantité variable croissant par degrés infiniment petits, si l'on veut connoître la valeur de ces accroissement, ce qui se présente de plus naturel, est de déterminer la valeur de cette quantité pour un instant quelconque, & la valeur de cette même quantité pour l'instant immédiatement suivant : alors la différence de ces deux valeurs est l'accroissement ou la diminution que cette quantité reçoit : c'est aussi ce qu'on appelle la *différence* ou la *differentielle* de cette quantité. (Bézout, 1764, p. 12)

Pero no se incluye la definición de cociente diferencial y cuando se maneja a lo largo del texto dicho cociente, se hace como si de una fracción se tratara.

Se indica en qué consiste el método de máximos y mínimos considerándolo como una de las aplicaciones más importantes del Análisis. En este caso se establece una diferencia respecto del libro anterior en cuanto a que en lugar de considerar las magnitudes como entidades geométricas, Bézout las considera como cantidades aritméticas entre las que se puede establecer una relación de orden para decir cuándo una es mayor que otra.

> C'es à cela que se réduit la méthode qu'on appelle de *maximis & minimis*, qui est une des plus utiles de l'analyse, & qui a pour objet de faire trouver, entre plusieurs quantités qui croissent ou décroissent suivant une même loi, qu'elle est la plus grande ou la plus petite, ou en général celle qui a certaines propriétés dans le plus haut degré à l'égard de toutes ses semblables. (Bézout, 1764, p. 62)

Aunque el siglo XVIII no fue un momento en el que destacaron las universidades francesas, sí lo hicieron las academias, escuelas politécnicas y militares, para las que fue escrito este libro como libro de texto. Destacaron sus estudios sobre las ecuaciones algebraicas, lo que se pone de manifiesto a lo largo de este libro por su inclinación a estudiar directamente estas ecuaciones, sin tener en cuenta el entorno geométrico del que pudieran provenir. Aunque el objetivo del libro es el estudio de la Mecánica, los tipos de aplicaciones se refieren fundamentalmente al estudio de ecuaciones algebraicas y situaciones aritméticas, siendo muy escasos los ejemplos relacionados con elementos geométricos, que, cuando se incluyen, se traducen a una ecuación algebraica. Podemos considerar que hay, por ello, un énfasis centrado en el estudio de las ecuaciones de tipo algebraico, lo que produce una práctica descontextualización de las situaciones planteadas.

3.- Los inicios de los autores locales.

También en el siglo XVIII se publican numerosos libros escritos por matemáticos que han estudiado los libros de los grandes matemáticos europeos o que, durante cierto tiempo, estuvieron fuera de su país y, al retornar, escriben lo que han aprendido en libros de texto. Tal es el caso de Vallejo (1779-1846) matemático granadino que publica diversos libros de texto (González, 2006) uno de los cuales es su *Compendio de Matemáticas Puras y Mixtas* (1819). Esta es una obra dividida en dos tomos. El primero contiene la Aritmética, el Álgebra, la Geometría, Trigonometría rectilínea e idea general de los triángulos esféricos, y Geometría práctica. Tiene 18 páginas de prólogo e introducción, 521 páginas de texto y 4 láminas con 169 gráficas.

El segundo (agosto 1840) trata de la Aplicación del Álgebra a la Geometría, el Cálculo Diferencial, el Cálculo Integral y la parte correspondiente a las matemáticas mixtas (Mecánica, estática, dinámica, hidrostática, hidrodinámica, mecánica industrial, Afinitología, cristalografía, capilarología, pirología, electrología, magnetología, neumatología, gasología, higrometría, anemología, acústica, óptica, meteorología, astronomía y el arte conjetural o teoría de las probabilidades). Tiene 430 páginas de texto, 8 páginas entre el prólogo y el índice y 4 láminas desplegables con 127 imágenes.

Lo que hoy en día llamamos Análisis Matemático está repartido entre los dos tomos. En el primero dentro del Álgebra hay un apartado titulado "*Proposiciones importantes acerca de las cantidades constantes y variables y de los límites*" (Vallejo, 1819, p. 336-345) en el que se trata el concepto de límite de variables. En el segundo tomo se abarcan todas las cuestiones relativas a *De las funciones, Idea general de las series y de los números figurados, del método de los límites y del cálculo de las diferencias* (pp. 40-57) y hay un apartado dedicado al *Cálculo diferencial* (pp. 58-114) y otro dedicado al *Cálculo Integral* (pp. 115-133).

En la introducción Vallejo expone la definición de algunos términos utilizados en matemáticas desde un punto de vista tanto matemático como filosófico, por ejemplo distingue entre cantidad constante y cantidad variable

> Se llama cantidad constante la que en una misma cuestión no puede tener más de un solo valor; y cantidad variable, la que en una misma cuestión puede tener todos los valores que se quiera (Vallejo, 1819, p.1)

El hecho de que una variable pueda aumentar o disminuir según los valores que se le van dando es la esencia del Análisis en el Compendio de Vallejo, de forma que la noción de límite de una variable y posteriormente de una función sólo tiene sentido en relación con la variación (aumento o disminución) que experimenta esta variable. Así se llama "*función a toda cantidad o expresión cuyo valor depende del de una variable*" (Vallejo, 1819, p.40)

La definición de límite es la siguiente:

> Cuando una cantidad variables se puede acercar a otra constante tanto como se quiera, de manera que la diferencia entre ellas pueda llegar a ser menor que cualquier cantidad dada pero sin que jamás puedan llegar a ser iguales, se llama a la cantidad límite de la variable (Vallejo, 1819, p. 343)

Para Vallejo las variables tenían dos límites: uno verdadero cuando las variables decrecen que es 0 y otro que es el límite considerado, se obtiene cuando las variables crecen y se representa por $\frac{1}{0}$. Se hace la salvedad de que este último límite no se considera verdadero porque si se puede alcanzar.

Vallejo distingue entre límites generales y particulares de funciones. El límite general es 0 o ∞. El límite particular de una función se compone de una parte constante y otra variable. La parte variable tendrá límite cero y la constante será el límite de la función. Sólo se consideran dos tipos de estudio en relación con el límite: cuando la variable crece o cuando la variable decrece en función de estas dos opciones se pueden calcular por tanto solamente los límites cuando x tiende a cero o cuando x tiende a infinito.

En el tomo II distingue Vallejo lo que entiende por Cálculo Infinitesimal, Cálculo Diferencia y Cálculo Integral. En relación con el primero establece:

> Hemos visto el modo de hallar la relación de la diferencia o incremento de la función con la diferencia o incremento de la variable; y ahora debemos advertir que entre la función primitiva y el límite de esta relación, hay una dependencia que determina una cantidad por medio de la otra, y todos los recursos que la Análisis Indeterminada nos ofrece para conseguir este fin, se hallan comprendidos en el tratado que se conocen en general con el nombre de Cálculo Infinitesimal. (Vallejo, 1840, p.58)

En cuanto al Cálculo Diferencial se dice:

> Este precioso cálculo tiene dos partes: la primera, que se denomina Cálculo Diferencial, trata de hallar, dada la función, el límite de la relación de su incremento con el de la variable o variables que entran en ella; (Vallejo, 1840, p.58)

Y en cuanto al Cálculo Integral:

> La segunda, trata de determinar la función, cuando se da conocido el límite de la relación de su incremento con el de la variable y se llama Cálculo Integral, que por consiguiente es inverso del Diferencial. (Vallejo, 1840, p.58)

Para calcular las diferenciales de las diferentes funciones utiliza los desarrollos en series de potencias siguiendo la misma nomenclatura que Lagrange, de forma que si tenemos una función z=f.x, sustituye x por x+k (siendo k una cantidad cualquiera) y se obtiene:

$$z' = f(x+k) = f.x + Ak + Bk^2 + Ck^3 + Dk^4 + Ek^5 + etc$$

Donde llama a f.x función primitiva. Pasa a realizar la diferencia entre ambas funciones z'-z a lo que llama Δz,

$$z' - z = \Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + D\Delta x^4 + etc$$

Realiza el cociente respecto del incremento de la variable x

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3 + etc$$

Finalmente realiza el siguiente razonamiento:

> si Δx va disminuyendo el resultado se aproximará sin cesar a A sin que jamás pueda alcanzarlo salvo en el caso en que Δx=0, luego A es el límite de $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ (Vallejo, 1840, p.61)

Para Vallejo dz representa la diferencia de la función z y dx, por lo tanto la diferencia de la función x, pero sólo tienen sentido si está señalada la relación entre dz y dx. Así llama

> El coeficiente diferencial se obtiene dividiendo la diferencial de la función por la diferencial de la variable $A = \frac{dz}{dx}$
>
> La diferencial de la función se obtiene multiplicando el límite de la relación de los incrementos o el coeficiente diferencial por la diferencial de la variable. dz=Adx (Vallejo, 1840, p.61)

Una vez establecido el método del cálculo de las diferenciales de funciones, se estudian los diferentes casos relativos a la expresión simbólica de las funciones estudiando para ello la diferencial de la suma de funciones, del producto, del cociente las diferenciales de diferentes órdenes y el cálculo de los coeficientes de los desarrollos en series de potencias de las funciones

4.- Los libros de secundaria: libros de autor.

En España, el cálculo diferencial ya se incluyó en las enseñanzas que los jesuitas establecieron en su Ratio Studiorum, que era un manual práctico de reglamento interno de las disciplinas académicas, preparado para servir de guía a los profesores. Aunque la primera versión de la Ratio del padre Acquaviva es de 1599, no es hasta el año 1832 con las Ratio del Padre Pachtler cuando se amplía el programa de matemáticas y se incluyen el álgebra, la trigonometría, la geometría analítica y el Cálculo Diferencial e Integral (Labrador y otros, 1986). Resultaba, por lo tanto, ciertamente ambicioso el plan establecido por los jesuitas así como novedoso y precursor de lo que empezaría a implantarse en España un siglo después. De todas formas, los primeros planes de estudio que incorporan contenidos de Análisis Matemático en España datan de 1934.

Los libros que se escribían para la educación secundaria, eran escritos por matemáticos-profesores de cierto renombre dentro de la comunidad matemática y que abarcaban todos los contenidos explicitados en los planes de estudio. La enseñanza secundaria estaba organizada en siete cursos y los contenidos de Análisis aparecían en los dos últimos (sexto y séptimo, alumnos de 16-18 años). Uno de los libros que más se usó en estos inicios y del que se hicieron más ediciones fue el publicado por Rodríguez San Juan y Sixto Ríos en el que se nota, sin lugar a dudas, la influencia de Julio Rey Pastor (1888-1962). Como es bien sabido, Rey Pastor se propuso elevar el nivel de la matemática española considerando su retraso «en medio siglo en la Geometría y en Análisis un poco mayor». Para ello se trazó un plan ambicioso de modo que con el advenimiento de la segunda República, en 1931, se puede considerar que en España existía ya una cultura matemática contemporánea. Pues bien, discípulos suyos como Sixto Ríos y Rodríguez San Juan, contribuyeron a dotar de esa contemporaneidad a nuestra matemática, no solamente en la enseñanza universitaria sino también en la secundaria.

En el libro de Rodríguez San Juan y Sixto Ríos de sexto curso publicado en el año 1950 se relaciona el Análisis Matemático con diferentes fenómenos físicos (velocidad, temperatura, peso, fuerza, oscilación,...), químicos (volumen de gases,...) o económicos (coste de mercancías,...) en los que interviene de una forma u otra la noción de variación y aparece ya explícito el lenguaje de funciones[4] aunque dependiente del concepto de variable.

> Una variable es un símbolo con el que representamos un número cualquiera de un cierto conjunto
> Una constante es un símbolo con el que representamos un número perfectamente determinado.
> En general, diremos que la variable y es función de la variable independiente x definida en un cierto intervalo (a,b), si a cada valor de x de dicho intervalo corresponden uno o varios valores de y mediante una determinada ley (analítica, geométrica, física, económica, arbitraria, etc.) (Ríos y Rodríguez San Juan, 1950, p. 181)

Hay seis temas dedicados al Análisis divididos en dos bloques: uno dedicado a las funciones y otro dedicado a las derivadas. En el primero se trata el concepto de función y su representación gráfica, los límites de funciones y la noción de continuidad. En cuanto al segundo se incluye el concepto e interpretaciones de la derivada, el cálculo de derivadas y sus aplicaciones. La idea que subyace en todos estos libros es la de una matemática ya elaborada que el alumno debe memorizar y practicar resolviendo ejercicios. Una segunda característica es el carácter cíclico de los contenidos que se repiten en sucesivos cursos ampliándose y completándose en cada uno respecto del anterior. En todos los libros, el desarrollo es secuencial y formal, aunque las demostraciones no son totalmente rigurosas, sino que tienen ciertos componentes intuitivos. En definitiva, las capacidades que se pretenden desarrollar en el alumno son: memorización de definiciones y propiedades y práctica algorítmica, con alguna excepción en los ejercicios planteados.

Un apartado importante es el dedicado a la representación gráfica de funciones que sustituye al estudio de curvas que realizaban hasta entonces los matemáticos. Ahora se traduce una expresión algebraica o tabular a la representación gráfica-geométrica de la curva, al contrario de lo que se hacía hasta entonces. Las funciones que se representan son parábolas, cúbicas, hipérbolas, elipses o bien funciones, asociadas a situaciones más o menos reales (temperaturas, vapor de agua), cuyos datos vienen dados de forma tabular.

El concepto de continuidad se encuentra, junto con el de límite, en el bloque dedicado a las funciones, desarrollándose ambos conceptos desligados del concepto de variable (como se había hecho hasta entonces). Se trata primero el concepto de límite dando una definición intuitiva ligada a la noción de aproximación:

[4] Anteriormente los libros utilizaban el lenguaje de las variables

> El límite de la función f(x) cuando x tiende a *a* es el número *b*, si se verifica que los valores de la función f(x) se aproximan tanto como queramos a b, tomando los valores de la variable x convenientemente próximos a *a* (no se hace ninguna hipótesis sobre el valor de la función en el punto a). (Ríos y Rodríguez San Juan, 1950, p.204)

Aparece una simbolización moderna del límite, los autores escriben:

> lim f(x) = b, o bien f(x)$\rightarrow$ **b**, cuando x$\rightarrow$ **a**.
> x $\rightarrow$ a
> que se lee: f(x) tiende a **b** cuando x tiende a **a**. (Ríos y Rodríguez San Juan, 1950, p.204)

Esta definición se completa dando una interpretación geométrica del límite de una función en un punto utilizando entornos simétricos. Se observa, en estos autores, una preocupación por los aspectos geométricos, que se traduce tanto en las interpretaciones de los conceptos como en los ejercicios propuestos, donde aparecen problemas de límites en contextos geométricos; es una característica que desaparecerá en los libros posteriores. Se ha producido una evolución en la definición del concepto de *límite*, desde su presentación, ligado a la idea de variable, hasta la introducción del concepto de *función*, clarificándose el concepto de *límite* a partir de este último. En torno al concepto de límite se estudian algunas de sus propiedades, los infinitésimos y los límites infinitos, así como algunas indeterminaciones para lo que se usa el lenguaje de ε. Así, cuando los autores demuestran que el límite de una función es un cierto valor, a lo largo de dicha demostración afinan el valor de ε (ε/2, ε/4...) de modo que al final salga en el segundo miembro de la desigualdad.

A partir del concepto de límite se define la continuidad también de modo intuitivo

> Todos tenemos la idea intuitiva de que la gráfica de una función continua se caracteriza porque no presenta saltos y podemos dibujarla continuamente sin levantar el lapicero (Ríos y Rodríguez San Juan, 1950, p. 206).

y, a continuación, se da la definición clásica mediante el límite, que traducen inmediatamente a la forma métrica y posteriormente al lenguaje de incrementos.

> Una función f(x) es continua en el punto x=a si
> 1º existe $\lim_{x\to a} f(x)$
> 2º está definida la función para x=a
> 3º es $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (Ríos y Rodríguez San Juan, 1950, p. 206)

Hay una gran cantidad de representaciones gráficas cartesianas, para ejemplificar las propiedades de las funciones continuas y la discontinuidad: hipérbola, parte entera de x, coste de un viaje por kilómetros, volumen ocupado por un gas que se calienta; un aumento notable de representaciones gráficas dándose una interpretación geométrica del límite o contraejemplos sobre la existencia de límite. Para esto último se utiliza la representación gráfica de la función *E(x)* que permite de manera visual mostrar cuándo no existe el límite de una función.

Estos dos conceptos tienen un carácter esencialmente instrumental, declarado por los autores al comienzo de las lecciones correspondientes al límite, aunque hay un componente geométrico importante referido al estudio de límites de pendientes de rectas secantes a una curva, de longitudes de cuerdas, de áreas bajo ciertas condiciones, de sucesiones de circunferencias.

La noción de derivada se relaciona con el concepto de tangente (interpretación geométrica) a una curva, problema que se indica, es el origen del cálculo diferencial. Se calculan las tangentes de curvas de segundo orden, es decir, las cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola y se construyen las tangentes de forma geométrica para ver la necesidad de métodos analíticos que permitan la determinación de las tangentes a las curvas partiendo de las ecuaciones y sin recurrir a propiedades geométricas especiales. También se relaciona con la noción de pendiente definida como "la razón del incremento vertical correspondiente a un incremento horizontal" (Ríos y Rodríguez San Juan, 1950. p. 214), el cociente incremental y la variación media de un intervalo.

Una vez definida la noción de derivada en un punto, se define la noción de función derivada y se estudian otras aplicaciones de la derivada: velocidad de un móvil, aceleración, velocidad angular, la función marginal. Utilizando la definición de función derivada como límite del cociente incremental se calculan las derivadas de las funciones elementales y se estudian las operaciones con derivadas. Finalmente, para demostrar la potencia del cálculo de derivadas éstas se utilizan para el cálculo de tangentes y normales a las cónicas.

5.- Los libros actuales: libros de editorial

A partir de los años 70 surgen algunas editoriales que se van consolidando a lo largo del tiempo, fundamentalmente en los 80, y ya en los 90 se produce el boom editorial publicándose libros de educación secundaria, que siguen una enseñanza de tipo tradicional, con un enfoque más bien formalista e instrumental.

Aunque el Ministerio de Educación y Ciencia establece una normativa respecto a los contenidos que se deben incluir en la enseñanza y el tratamiento u orientación que se les debe dar, actualmente cada editorial tiene su propia línea y su propio mercado, por lo que los autores de los libros deben adaptarse a la línea marcada. Éstos son, generalmente profesores de educación secundaria que compaginan su trabajo en los Institutos con la publicación de libros de texto para todos los cursos de la educación secundaria, y en muchas ocasiones son los que imponen su propio libro en los centros educativos.

En este momento, la educación secundaria en España está configurada en dos bloques, una obligatoria constituida por cuatro cursos académicos (12 a 16 años) y otra post-obligatoria de dos cursos para los alumnos de 17 y 18 años y que les prepara para el ingreso en las Universidades. Al finalizar esta enseñanza secundaria los alumnos tienen que realizar una prueba que les permite el acceso a las Universidades.

Los contenidos relacionados con las funciones comienzan a estudiarse desde 2º de educación secundaria (14 años) pero, en realidad cuando empiezan a enfrentarse al Análisis propiamente dicho es en los últimos cursos de la secundaria donde se incluyen temas relativos a la derivación, integración y sus aplicaciones. Los libros de estos cursos son muy voluminosos, los conceptos suelen estar condensados en pocas palabras y se incide más en el aprendizaje de tipo deductivo, y en los aspectos simbólicos y formales asociados a los conceptos. Además se utilizan numerosos recursos para presentar los conceptos: fotografías, esquemas, ejemplos, colores, notas históricas.

Una de las editoriales con más repercusión y difusión en España es la editorial ANAYA, las imágenes y referencias que se van a incluir aquí son de uno de sus libros. Al igual que en la mayoría de los libros que se usan en la actualidad hay una utilización profusa de gráficas y dibujos geométricos que sirven de apoyo intuitivo a la comprensión de los conceptos, hay referencias al contexto histórico y cultural en el que se han desarrollado dichos conceptos, y aparecen fotos y pequeñas biografías de los matemáticos que han contribuido a estos descubrimientos, lo que contribuye a la contextualización de los contenidos.

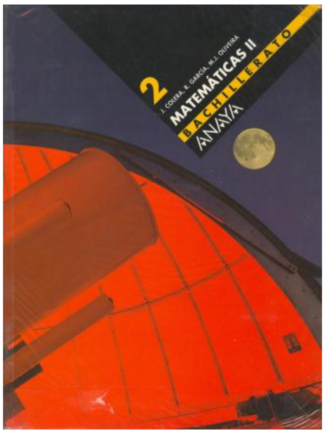


FIGURA 2. Portada del libro de Anaya

La estructura de los libros es típica de la enseñanza secundaria. Están divididos en bloques de contenidos en los que se desarrollan diferentes temas según los conceptos a enseñar-aprender, se incorporan explicaciones detalladas, ejemplos relacionados con los conceptos, numerosos ejercicios resueltos y propuestos,... hay una gran profusión de imágenes, colores, recuadros y síntesis para llamar la atención del alumno en cuanto a qué es lo más importante que no debe olvidar y siempre debe tener en cuenta.

Para la enseñanza del Análisis hay un bloque completo con seis temas dedicados a: límites y continuidad, derivadas y técnicas de derivación, aplicaciones de la derivada, representación de funciones, cálculo de primitivas y aplicaciones de la integral definida. Lo que se pretende es dotar a los alumnos de los instrumentos matemáticos necesarios para posibles aplicaciones posteriores y este aspecto práctico es el que domina todos los temas.

Hay que resaltar la gran cantidad de ejercicios y problemas de tipos diversos que hay, aplicados tanto a las matemáticas como a otras ciencias y a la vida real, además de darle un gran protagonismo a la geometría. Destacan, por ejemplo los que hacen referencia a la economía, cuestiones relativas a costes, producción, consumo,… También se hacen referencias al uso de las nuevas tecnologías, poniendo ejemplos e indicando la forma de utilización de otros medios, como calculadoras gráficas. Además se proponen ejercicios buscando completar la reversibilidad del pensamiento del alumno, por lo que aparecen tanto en sentido directo como inverso. Este es el caso de las representaciones gráficas, a veces se trata de construirlas y otras de interpretarlas, o bien relación las representación gráfica de una función con la de su función derivada.

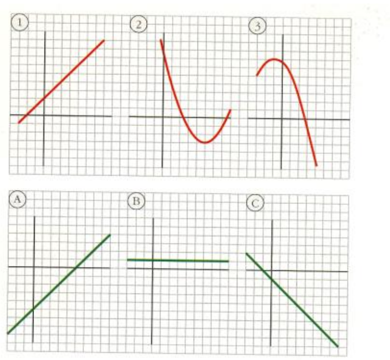
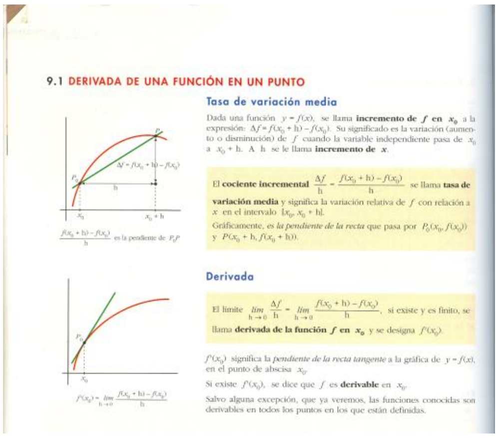


FIGURA 3. Ejemplos de gráficas de los libros actuales

FUENTE. Anaya (1950, p. 251)

En cuanto a las definiciones se busca el acercamiento intuitivo y el tratamiento de los conceptos desde diferentes ángulos o puntos de vista, acompañados de ejemplos, ejercicios resueltos, situaciones en las que se cumplen las hipótesis, contraejemplos, o ilustraciones gráficas de diferente índole para asegurar la compresión. Por ejemplo, en relación con el concepto de derivada, al mismo tiempo que se da su definición como el límite de un cociente incremental, en el margen izquierdo se incluye un gráfico que ilustra la situación que se está definiendo.



9.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Tasa de variación media

Dada una función $y = f(x)$, se llama **incremento de f en x_0** a la expresión: $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Su significado es la variación (aumento o disminución) de f cuando la variable independiente pasa de x_0 a $x_0 + h$. A h se le llama **incremento de x**.

El **cociente incremental** $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ se llama **tasa de variación media** y significa la variación relativa de f con relación a x en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$.

Gráficamente, *es la pendiente de la recta* que pasa por $P_0(x_0, f(x_0))$ y $P(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ es la pendiente de P_0P

Derivada

El límite $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, si existe y es finito, se llama **derivada de la función f en x_0** y se designa $f'(x_0)$.

$f'(x_0)$ significa la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de $y = f(x)$, en el punto de abscisa x_0.

Si existe $f'(x_0)$, se dice que f es **derivable** en x_0.

Salvo alguna excepción, que ya veremos, las funciones conocidas son derivables en todos los puntos en los que están definidas.

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

FIGURA 4. Definición del concepto de derivada

FUENTE. Anaya (1950, p. 252)

Pero además se insiste en las reglas de cálculo para ayudar a los alumnos a resolver y ser eficientes en la resolución de las actividades de aula. Estos apoyos gráficos se concretan en el uso de cuadrículas, diferentes colores, flechas, cuadros de doble entrada, cuadros resumen, comparación de gráficas cartesianas,…

6.- La introducción de las nuevas tecnologías

Tanto las calculadoras gráficas como los ordenadores se usan como herramientas para la enseñanza del Análisis Matemático, por sus capacidades gráficas, para representar las curvas que se asocian a las funciones y poder visualizar directamente sobre ellas muchos conceptos, así como las características y propiedades que poseen.

Actualmente, ya existe cierto número de materiales curriculares elaborados para la enseñanza del Análisis Matemático; el software sobre el que están desarrolladas estas propuestas son Programas de Calculo Simbólico (PCS), o de geometría dinámica que, aplicado al Análisis, nos permite identificar las curvas por sus propiedades geométricas y, por lo tanto, recuperar las ideas que marcaron el surgimiento del Análisis. Por ejemplo, en la figura siguiente se tiene la construcción de la función que calcula, a partir de un segmento de longitud dada, el punto de dicho segmento que lo divide en dos partes, de forma que la suma del área del triángulo equilátero cuyos lados son iguales a una de esas partes, con el área del cuadrado cuyo lado es igual a la otra parte del segmento, sea mínima.

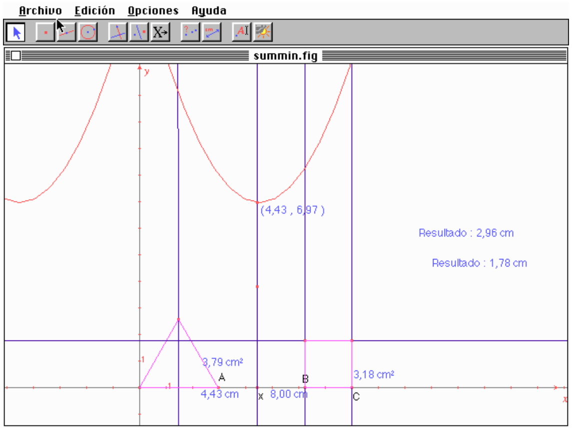


FIGURA 5. Un problema de optimización a través de un software geométrico

El uso de este tipo de recursos permite aprovechar sus capacidades gráficas para que sea el propio software el que lleve a cabo las actividades más rutinarias y los alumnos puedan pensar, comprender y generalizar. Las gráficas de funciones en estos entornos, son consideradas en algunos casos como la traza de un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y en otros como un lugar geométrico. La presentación de los conceptos del Análisis utilizando estos medios aporta una forma de trabajo interactiva en el sentido de que, a partir de una misma función descrita por medio de algún fenómeno, se puede estar considerando su representación algebraica, su representación tabular, su representación gráfica, indistintamente, así como realización de cálculos aritméticos y utilización de funciones científicas.

Las innovaciones que introducen los medios tecnológicos son numerosas, desde el trabajo directo con las gráficas de las funciones, la categoría concedida a las tablas funcionales, que pasan a ser consideradas al mismo nivel que cualquier otro sistema de representación; la posibilidad de traducción entre diferentes sistemas de representación en ambos sentidos y en pantallas independientes, la importancia que adquiere el dominio de definición de la función, la posibilidad de concebir las gráficas de las funciones desde un punto de vista geométrico-dinámico (al igual que hacían los matemáticos clásicos) animando las construcciones realizadas, la posibilidad de obviar la expresión simbólica de la función, la consideración de la función desde un punto de vista local enfatizado por la herramienta que permite hacer zoom en la gráfica,...

El uso de las nuevas tecnologías, permite el estudio de funciones que hasta ahora era impensable, por la dificultad asociada a su representación gráfica, de forma que se pueden estudiar funciones sencillas como las que aparecen normalmente en los libros de texto, pero también se pueden considerar funciones definidas por una serie de potencias, funciones trigonométricas más complicadas, funciones definidas en coordenadas tanto cartesianas, como polares o paramétricas, con lo que el abanico de funciones realmente amplio. Incluso, se puede realizar el análisis de una función obtenida directamente a partir de un experimento o una situación real. Esto puede hacer que cambie considerablemente tanto las clasificaciones que se suelen considerar en relación con las funciones como el hecho de que sean objetos exclusivamente matemáticos, sin ninguna relación con una situación física constatable. Además las funciones dejan de ser consideradas exclusivamente bajo su forma simbólica para ser manejadas a partir tanto de su gráfica, como desde su expresión tabular.

El objetivo de este material es fundamentalmente la visualización, la concepción global de los procesos implicados en el aprendizaje del Análisis Matemático, ya que todos los procesos de tipo aritmético o algebraico son realizados directamente por la calculadora y el alumno puede centrar su atención en los procesos propios del Cálculo Diferencial, y el análisis local de las funciones, que es la verdadera esencia del Análisis Matemático. Los procesos de visualización y de representación pasan a tener un papel esencial para la adquisición de los conceptos.

En resumen, las aportaciones que ofrecen las nuevas tecnologías son muy numerosas, desde la recuperación del concepto de función como objeto geométrico, su manejo como objeto algebraico, o su estudio como objeto aritmético. Se ofrece una visión fundamentalmente dinámica de los conceptos del Análisis Matemático y se permite una relación directa con la experimentación.

Conclusiones

El camino ha sido largo desde la publicación del primer libro de Análisis Matemático hace más de 400 años hasta los libros actuales. Desde entonces, tanto los conceptos de esta rama de las matemáticas como su enseñanza han sufrido cambios radicales. Desde el punto de vista matemático se han ido conformando los diferentes conceptos que manejamos hoy en día. Se ha pasado de una consideración puramente geométrica ligada al estudio de diversas curvas, a la introducción de la noción de variable para finalmente lograr conformar el concepto de función. Se han superado numerosos obstáculos ligados al concepto de límite, considerándolo inicialmente bajo la noción intuitiva de aproximación para ir dotándole de mayor rigor matemático. La definición de este concepto ha ido evolucionando estando primeramente ligada a la noción de cambio para ir adquiriendo una mayor entidad tanto si se considera la definición topológica como la métrica. En cuanto a las nociones de diferencial y de derivada también se ha logrado dar una definición formal de ambas superando así las nociones intuitivas y el manejo informal de los inicios. Evidentemente, los inicios puramente geométricos de estas nociones se han perdido con el paso del tiempo y con la necesidad de dotarles de rigor, con ello, el fundamento en el que se basaban ha desaparecido y resulta totalmente opaco tal como se presentan los conceptos hoy en día.

En cuanto a la enseñanza, ésta se ha ido adaptando a las nuevas definiciones, descontextualizando los conceptos de sus orígenes y de los problemas que se pretendía resolver, con lo que el origen geométrico de estos conceptos, ha desaparecido totalmente. Los primeros libros de texto pretendían reflejar el rigor que se buscaba en las propias matemáticas. A medida que ha ido evolucionando la enseñanza el centro de atención ha pasado, de ser la matemática, a buscar un mayor acercamiento a los alumnos, para lo cual se han incluido en los libros, gráficas, resúmenes, ejemplos, que pretenden hacer más próximos los conceptos a la forma de pensar de los alumnos según su desarrollo cognitivo. Actualmente, las nuevas tecnologías pueden ayudarnos a recuperar los orígenes geométricos de los conceptos, verlos de una forma diferente y con ello dotarles de sentido, adaptando para ello los problemas y necesidades de los inicios.

Referencias

BEZOUT, E. (1764) *Cours de mathématique*. Avignon : Imp. H. Offray.

CANTORAL, R. (1995) Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis* 11 (1), pp. 55-101.

CÓLERA, J. y OLIVERA, M. J. (2009). *Matemáticas II.* Madrid: Grupo Anaya

DHOMBRES, J. (1985) French Mathematical Textbooks from Bézout to Cauchy. *Historia scientarum*, 28, pp. 91-137.

GRATTAN-GUINNES, I (1984) *Del cálculo a la teoría de conjuntos.* Madrid: Alianza Editorial.

GONZÁLEZ, M.T. (2006) El Cálculo Diferencial em el "Compendio" de José Mariano Vallejo. En MAZ, Alexander, TORRALBO, Manuel y Rico, LUIS (eds.) *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde La Educación Matemática*. Córdoba: Universidad de Córdoba

LABRADOR, C.; BERTRÁN-QUERA, M.;DÍEZ ESCANIANO, A Y MARTÍNEZ, J. (1986) *La Ratio Studiorum de los Jesuitas.* Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

l´HOPITAL, G (1696) *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. París: De l'imprimerie royale.

RÍOS, S. Y RODRÍGUEZ SAN JUAN, A. (1950) *Matemáticas. 6º curso de bachillerato.* Los autores. Madrid. 1950.

VALLEJO, M (1819) *Compendio de Matemáticas Puras y Mixtas. Tomo I.* Madrid: Imprenta Garrasayaza.

VALLEJO, M (1840) *Compendio de Matemáticas Puras y Mixtas. Tomo II.* Madrid: Imprenta Garrasayaza.