ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i1p004-033

Proposta de um modelo epistemológico de referência expandido para o ensino da matemática

Proposal for an expanded reference epistemological model for mathematics teaching

Propuesta de un modelo epistemológico de referencia ampliado para la enseñanza de las matemáticas

Proposition d'un modèle épistémologique à référence élargie pour l'enseignement des mathématiques

Teodora Pinheiro Figueroa[1]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
https://orcid.org/0000-0001-8680-5202

Saddo Ag Almouloud[2]
Universidade Federal do Pará (UFPA)
https://orcid.org/0000-0002-8391-705

Resumo

Este artigo de cunho teórico-metodológico, tem por objetivo propor um modelo epistemológico de referência expandido para o ensino de conceitos matemáticos, apoiando-se na teoria antropológica do didático, mais especificamente, nos seguintes constructos teóricos: triângulo didático expandido, arqueescola, transposição arquididática, ponto de fuga das relações pessoais e institucionais. O modelo epistemológico de referência expandido leva em consideração o fato de que o saber decorre de praxeologias de várias culturas, de vários saberes-fazer em diversas instituições, e serve como referência para o estudo de saberes matemáticos na perspectiva do triângulo didático expandido, para que ocorram discussões a respeito da expansão das praxeologias matemáticas e das praxeologias didáticas para instituir uma cultura naquele que ensina e naquele que aprende em cursos de formação de professores. Como exemplo, apresenta-se um modelo de um modelo epistemológico de referência expandido relacionado ao cálculo diferencial e integral e aplicou-se o modelo construído ao teorema fundamental do cálculo, propondo sugestões de possíveis praxeologias matemáticas e praxeologias didáticas, alinhadas ao ponto de fuga do cálculo, ao estudo de problemas que envolvem padrões de movimento e de mudança. Inferimos que o conceito de ponto de fuga evidencia a importância do estreitamento entre as diferentes relações pessoais e institucionais ao saber matemático. Este estreitamente das relações permite incrementar discussões que

[1] teodora.pinheiro@gmail.com
[2] saddoag@gmail.com

tornam as instituições espaços de debates, tendo como referência os modelos epistemológicos de referência. Nesta perspectiva, o modelo epistemológico de referência expandido amplia os espaços destas discussões, a partir do triangulo didático expandido, que tem como princípio o paradigma de questionamento do mundo nas instituições de ensino, o qual se dá por meios das relações pessoais e institucionais com o objeto de saber.

Palavras-chave: Triângulo didático expandido, Arqueescola, Transposição arquididática, Teorema fundamental do cálculo.

Abstract

This theoretical-methodological article aims to propose an expanded epistemological reference model for teaching mathematical concepts, based on the anthropological theory of didactic, more specifically, on the following theoretical constructs: expanded didactic triangle, archeschool, archedidactic transposition, vanishing point of personal and institutional relationships. The expanded epistemological reference model takes into account the fact that knowledge derives from praxeologies of various cultures, from various know-how in various institutions, and serves as a reference for the study of mathematical knowledge from the perspective of expanded didactic triangle, so that discussions can take place regarding the expansion of mathematical praxeologies and didactic praxeologies to establish a culture in those who teach and in those who learn in teacher training courses. As an example, a model of a expanded epistemological reference model related to differential and integral calculus is presented and the constructed model was applied to the fundamental theorem of calculus, proposing suggestions for possible mathematical praxeologies and didactic praxeologies, aligned with the vanishing point of calculus, to the study of problems that involve patterns of movement and change. We infer that the concept of vanishing point highlights the importance of the narrowing of different personal and institutional relationships with mathematical knowledge. This narrowing of relationships allows for increased discussions that make institutions spaces for debate, taking as a reference the epistemological reference model. In this perspective, the expanded epistemological reference model expands the spaces for these discussions, based on the expanded didactic triangle, which has as its principle the paradigm of questioning the world in educational institutions, which occurs through personal and institutional relationships with the object of knowledge.

Keywords: Expanded didactic triangle, Archeschool, archedidactic transposition, Fundamental theorem of calculus.

Resumen

Este artículo teórico-metodológico tiene como objetivo proponer un modelo epistemológico ampliado de referencia para la enseñanza de conceptos matemáticos, basado en la teoría antropológica del didactismo, más específicamente, en los siguientes constructos teóricos: triángulo didáctico ampliado, arqueescola, transposición archidáctica, punto de fuga de las relaciones personales e institucionales. El modelo epistemológico ampliado de referencia tiene en cuenta que los conocimientos derivan de praxeologías de diversas culturas, de diversos saberes en diferentes instituciones, y sirve como referencia para el estudio del conocimiento matemático desde la perspectiva del triángulo didáctico ampliado, de modo que puedan tener lugar discusiones sobre la expansión. de praxeologías matemáticas y praxeologías didácticas para establecer una cultura en quienes enseñan y quienes aprenden en los cursos de formación docente. A modo de ejemplo, se presenta un modelo de un modelo epistemológico ampliado de referencia relacionado con el cálculo diferencial e integral y el modelo construido se aplicó al teorema fundamental del cálculo, proponiendo sugerencias de posibles praxeologías matemáticas y praxeologías didácticas, alineadas con el punto de fuga del cálculo. El estudio de problemas que involucran patrones de movimiento y cambio. Inferimos que el concepto de punto de fuga resalta la importancia de los vínculos más estrechos entre diferentes relaciones personales e institucionales con el conocimiento matemático. Esta estrecha relación nos permite incrementar discusiones que conviertan a las instituciones en espacios de debate, tomando como referencia los modelos epistemológicos de referencia. Desde esta perspectiva, el modelo epistemológico ampliado de referencia amplía los espacios para estas discusiones, a partir del triángulo didáctico ampliado, que tiene como principio el paradigma del cuestionamiento del mundo en las instituciones educativas, que se da a través de relaciones personales e institucionales con el objeto de conocimiento.

Palabras clave: Triángulo didáctico ampliado, Arqueoescuela, Transposición arquidáctica, Teorema fundamental del cálculo.

Résumé

Cet article théorico-méthodologique vise à proposer un modèle épistémologique de référence élargi pour l'enseignement des concepts mathématiques, basé sur la théorie anthropologique du didactisme, plus spécifiquement, sur les constructions théoriques suivantes : triangle didactique élargi, archéo-école, transposition archididactique, point de fuite des relations personnelles et institutionnelles. Le modèle épistémologique de référence élargi prend en compte le fait que les connaissances dérivent de praxéologies de différentes cultures, de divers savoir-faire dans différentes institutions, et sert de référence pour l'étude des connaissances mathématiques dans la perspective de triangle didactique élargi, afin que des discussions puissent avoir lieu sur l'expansion de praxéologies mathématiques et de praxéologies didactiques pour établir une culture chez ceux qui enseignent et ceux qui apprennent dans les cours de formation des enseignants. À titre d'exemple, un modèle épistémologique de référence élargi lié au calcul différentiel et intégral est présenté et le modèle construit a été appliqué au théorème fondamental du calcul, proposant des suggestions de praxéologies mathématiques et praxéologies didactiques possibles, alignées sur le point de fuite du calcul, à l'étude de problèmes impliquant des modèles de mouvement et de changement. Nous en déduisons que le concept de point de fuite met en évidence l'importance des liens plus étroits entre les différentes relations personnelles et institutionnelles avec la connaissance mathématique. Cette relation étroite permet de multiplier les discussions qui font des institutions des espaces de débat, en utilisant comme référence les modèles épistémologiques de référence. Dans cette perspective, le modèle épistémologique de référence élargi élargit les espaces de ces discussions, basées sur le TDE, qui a pour principe le paradigme du questionnement sur le monde dans les institutions éducatives, qui se déroule à travers des relations personnelles et institutionnelles avec l'objet de connaissance.

Mots-clés : Triangle didactique élargi, Archéo-école, Transposition archidactique, Théorème fondamental du calcul.

Proposta de um modelo epistemológico de referência expandido para o ensino da matemática

As pesquisas em Didática da Matemática têm como foco apresentar contribuições para as questões relativas aos fenômenos que ocorrem no âmago dos processos de ensino e aprendizagem, intervindo, direta ou indiretamente nas relações existentes entre o aluno, o professor e o saber em jogo. Essas contribuições podem ser evidenciadas pelas Teorias da Didática da Matemática, que apresentam modelos teóricos para o estudo e investigação dos fenômenos que ocorrem no universo dos processos de ensino e aprendizagem de conhecimentos matemáticos.

Os modelos teóricos são peças-chaves essenciais ao desenvolvimento do campo de pesquisa em Didática da Matemática.

Brousseau (1972) relata sobre um dos primeiros modelos teóricos em uma Conferência sobre Estruturas de Aprendizagem, o qual foi considerado como um ponto de partida para o desenvolvimento da Teoria das Situações Didáticas (TSD), que modela as situações didáticas e as interações entre o aprendiz, o saber e o *milieu.*

Gascón (2024) assevera que, para a TSD, os modelos não são os mecanismos psicocognitivos subjacentes ao processo de aprendizagem, mas sim as situações consideradas como modelos de corpos de conhecimento matemático. Sendo assim, as questões de investigação:

> Como os alunos aprendem matemática? Que dificuldades encontram? Por meio de que mecanismos ou processos cognitivos adquirem conceitos matemáticos (ou como os constroem)? Quais são os métodos mais apropriados para ensinar esses conceitos? etc. (Gascón, 2024, p.3)

mudam de natureza, para:

> Quais são as condições que uma situação deve satisfazer para concretizar o conhecimento específico que modela? Quais são os efeitos previsíveis desta operação sobre os sujeitos envolvidos e suas produções? Qual jogo deve ser praticado para que o conhecimento seja necessário? Quais são as informações ou feedback relevantes que os sujeitos devem receber do *milieu* para orientar as suas escolhas e concretizarem um tipo de conhecimento em vez de outro? (Gascón, 2024, p.3)

Essa mudança de natureza das questões sinaliza a ocorrência de novos tipos de problemas didáticos, com o foco nas situações e que requerem um olhar mais refinado no âmbito da epistemologia do saber.

Diante desta necessidade e considerando os processos de Transposição Didática que se fazem necessários para que as situações didáticas ocorram e as questões referentes aos problemas didáticos possam ser respondidas, encontramos na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard(1992), a possibilidade de modelagem do conhecimento/saber em jogo na atividade humana, a partir do constructo de praxeologia $\wp$, formada pelo bloco práxis *[T, τ]*, saber-fazer, e o bloco logos *[θ, Θ]* discurso sobre a práxis, em que *T* se refere ao tipo de tarefa contendo ao menos uma tarefa t, τ a técnica ou modo de se realizar uma tarefa do tipo *T*, *θ* a tecnologia, isto é, um discurso sobre a técnica, e *Θ* a teoria que constitui a tecnologia.

O constructo de praxeologia abre muitas possibilidades para analisar e investigar aspectos referentes à forma como um determinado objeto do saber é interpretado (nos blocos práxis e logos) e consequentemente revelar a sua razão de ser nas instituições que produzem, desenvolvem, utilizam e divulgam esse saber.

Este constructo é resultado de uma evolução nos modelos teóricos, no campo de pesquisa da Didática da Matemática, resultado das questões advindas dos problemas didáticos, os quais emergem para a necessidade de estabelecer relações pessoais e institucionais cada vez mais estreitas a respeito da epistemologia e gênese do saber matemático.

Neste sentido, Chevallard (2019) assevera que as primeiras questões que a TAD nos leva a levantar são: O que é este conhecimento que você chama de $\mathscr{k}$ e afirma ensinar? De onde vem $\mathscr{k}$? Como $\mathscr{k}$ é legitimado—epistemologicamente falando? $\mathscr{k}$ é viável a longo prazo? Ou terá que ser reprocessado ou mesmo excluído?

O autor traz à discussão a importância deste tipo de questionamento para quem ensina alguém a aprender alguma coisa. Nota-se que existe uma preocupação no cumprimento da proposta curricular e uma lacuna a respeito de "n" questionamentos que poderiam ser realizados pelos diversos "por quê" e "para quê" a respeito de $\mathscr{k}$. Pode-se dizer que, em relação aos conhecimentos adquiridos, a relação pessoal com os objetos do saber é o resultado das sujeições às instituições pelas quais o sujeito passou, e que existe um risco de que essas sujeições se reflitam nos sujeitos como garantia de que esses conhecimentos sejam suficientes.

Diante deste cenário, esta pesquisa coloca em questão que a evolução dos modelos teóricos tem convergido para a necessidade de Modelos Epistemológicos de Referência Expandidos (MERE), que apresentam características que possibilitam discussões acerca das praxeologias matemáticas e didáticas com o intuito de responder às questões formuladas por Chevallard (2019), e de questões mais específicas em relação às organizações didáticas, por exemplo: Como deveria ser munido o equipamento praxeológico de quem ensina à alguém a aprender alguma coisa? Estas questões impactam diretamente nos processos de Transposição Didática que ocorrem em cursos de formação de professores de Matemática.

Nesta perspectiva, este artigo de cunho teórico-metodológico, tem por objetivo propor um Modelo Epistemológica de Referência Expandido (MERE), apoiando-se na Teoria Antropológica do Didático, mais especificamente, nos seguintes constructos teóricos: Triângulo Didático Expandido (TDE), *Arqueescola*, Transposição Arquididática, Ponto de Fuga das Relações Pessoais e Institucionais.

A seguir explanaremos elementos chaves que fazem parte do desenvolvimento do MERE.

Ponto de Fuga das Relações Pessoais e Institucionais

O ponto de fuga (Figura 1) é o objeto de saber dos sistemas antropológicos em que a TAD se fundamenta, pois está no cerne das relações humanas. Essas relações humanas na TAD e, de forma geral na Didática da Matemática, se dão em torno de um objeto de saber. Este objeto é o cerne das discussões que ocorrem em processos de Transposição Didática.

O processo de Transposição Didática Externa envolve discussões entre os integrantes da noosfera, que pode ser representada por pessoas que ocupam diferentes posições em diferentes tipos de instituições, como professores, educadores, autores de livros, editores, políticos. Nestas discussões a respeito do processo de Transposição Didática do saber sábio, o saber a ensinar presente em currículos, livros didáticos, torna-se um objeto ***o*** *que* existe para cada uma das instituições que compõem a noosfera, estabelecendo o que pode ser denominada relação institucional $\boldsymbol{R_I(p, o)}$ revelada por cada representante.

O processo de Transposição Didática Interna é realizado pelo professor em um processo de Transposição do saber a ensinar ao saber a ser ensinado. Este processo é impactado pela relação pessoal deste professor com o saber, a qual denotamos por $\boldsymbol{R(x, o)}$**,** bem como pela relação institucional $\boldsymbol{R_I(p, o)}$**,** deste professor com o saber em jogo.

Neste caso, pode-se dizer que um objeto do saber ***o***, é o Ponto de Fuga das relações $\boldsymbol{R(x, o)}$ e $\boldsymbol{R_I(p, o)}$, pois ***o*** é a referência de ambas as relações. Tudo quanto ***x*** sabe de ***o*** determina o nível desta relação em meio as “n” perspectivas de ***o*,** as quais representam as diversas razões de ser de ***o*** em universos de diferentes tipos de comunidades em que este saber vive.

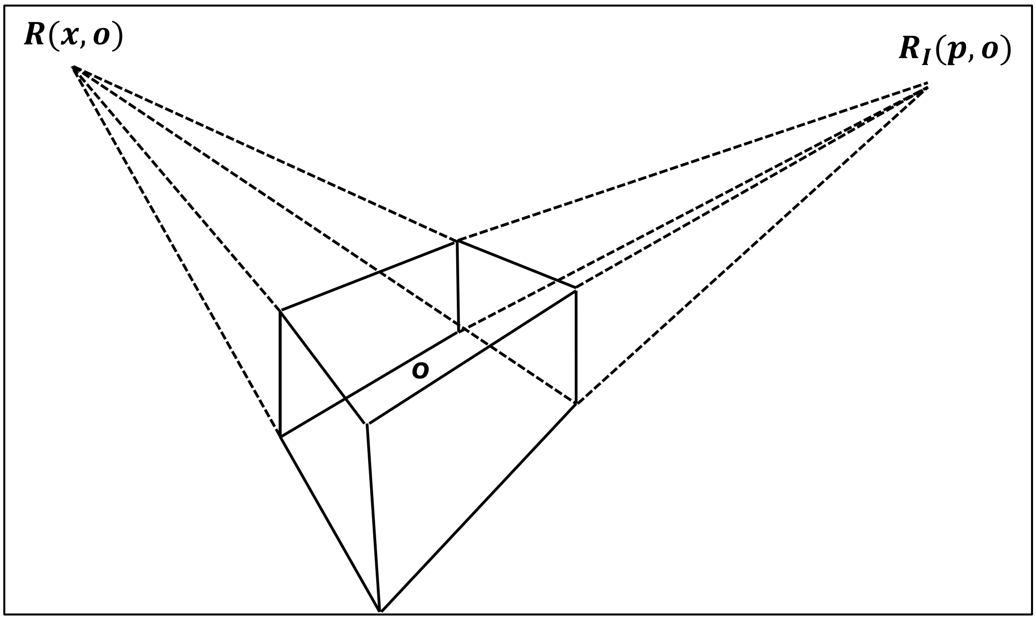

Figura 1.

Ponto de Fuga

Pode-se dizer que o saber matemático é resultado do saber-fazer de diversos universos multiculturais, dos povos babilônios, egípcios, chineses, indianos, islâmicos, e, que continua em fase de evolução em um mundo globalizado. Um mesmo objeto matemático apresenta diversos tipos de releituras entre os povos, como por exemplo, as várias formas de se resolver a equação do segundo grau (Taub, 2022).

Wozniak, Bosch; Gascón[3] afirmam que o conhecimento é o produto de construções humanas, o seu lugar e a sua função diferem, dependendo dos lugares, das sociedades e do tempo. Este fato deixa explícito a existência das diversas perspectivas de ***o*** (objeto do saber) e, o quão pode ser ampliado o equipamento praxeológico de quem se apropria destas diferentes perspectivas, ou razões de ser de ***o***.

Diante disso, surge a seguinte questão: Quais são as perspectivas de ***o*** que vivem nas instituições de ensino, ou mais especificamente, em Instituições de formação de professores? A resposta desta questão depende de como se tem dado os processos de Transposição Didática Externa e Interna.

Asseveramos que quando se tem acesso às diversas perspectivas de ***o***, se tem acesso aos diversos tipos de saber-fazer, bloco práxis, em que se pode abrir discussões a respeito do bloco logos.

[3] https://ardm.eu/qui-sommes-nous-who-are-we-quienes-somos/yves-chevallard/

Strømskag e Chevallard (2024) têm relatado em suas pesquisas que, em termos da TAD, os alunos têm demonstrado uma capacidade limitada do logos componente de sua praxeologia relacionado à concavidade e pontos de inflexão. Esta deficiência dificulta a sua capacidade de explicar e justificar adequadamente ou refutar as técnicas que empregam. Eles asseveram que a possível discrepância dos conhecimentos matemáticos que ocorrem em decorrência de como se dão os processos de Transposição Didática, é resultado do papel do bloco logos numa Instituição ser diferente do seu papel em outra Instituição.

Dessa forma, pode-se notar que a Transposição Institucional[4] tem causado uma violação no logos, provocando rupturas nas justificativas das técnicas realizadas e na identificação da validade de outros saberes-fazer, ou da validação de outras técnicas, as quais poderiam revelar outros aspectos do objeto do saber e, portanto, outras razões de ser.

Esta situação nos levou a refletir sobre a importância de propor Modelos Teóricos de Referência como aportes para discussões sobre a existência de outros saberes-fazer matemáticos nos cursos de formação de professores, para estreitar o nível de engajamento entre $\boldsymbol{R(x\ ,o)}$ e $\boldsymbol{R_I(p,\ o)}$ e, assim colocar a prova o logos que vive nas Instituições tanto na perspectiva de praxeologias matemáticas, como de praxeologias didáticas.

Esta discussão culminou na necessidade de considerar os constructos *Arqueescola* (Strømskag e Chevallard, 2024) e *Transposição Arquididática* (Artaud e Bourgade, 2022), os quais são explanados na próxima seção.

Arqueescola e Transposição Arquididática

Apresenta-se na Figura 2 uma releitura e expansão do triângulo didático proposto por Brousseau (1986) para modelizar os fenômenos relacionados às interações estabelecidas entre quem ensina, quem aprende e o saber no seio da atividade escolar. Neste caso, a releitura e expansão caracterizam-se pelo que denotamos por Triângulo Didático Expandido (TDE), o qual vislumbra a possibilidade de analisar os fenômenos didáticos que podem ocorrer em toda e qualquer relação entre quem ensina e quem aprende, nos diversos espaços onde o ensino e a aprendizagem podem ocorrer.

Na estrutura do TDE (Figura 2), os degraus se referem as “n” instituições dos espaços onde se aprende e se ensina algo e, as ligações representadas pelas semirretas coloridas, desde a base da Figura 2, relacionam quem ensina e quem aprende, e revelam que, mediante estas interações, os conhecimentos são adquiridos por meio das praxeologias existentes nas “n”

[4] O processo pelo qual um elemento de conhecimento $\mathscr{k}$ se move de uma instituição para outra, com mudanças, é chamado de processo de transposição institucional (Chevallard & Bosch, 2020).

instituições. Mas, o que é que ocorre se as praxeologias existentes em alguma destas instituições não forem suficientes para atender às necessidades de quem aprende ou de quem ensina?

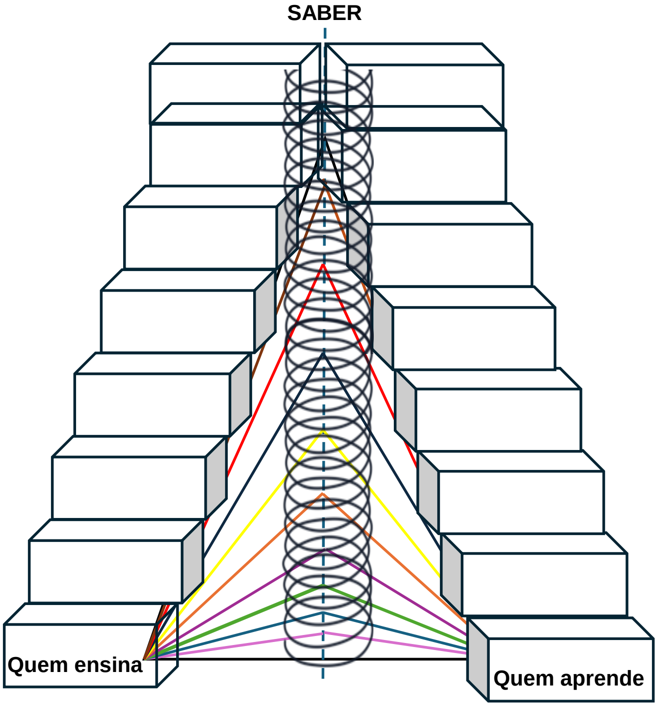

Figura 2.

Triângulo Didático Expandido

Strømskag e Chevallard (2024) afirmam que pode ocorrer que os atores que controlam uma instituição julguem que um sistema existente ou a atividade futura na instituição necessita do atendimento de novas necessidades praxeológicas, neste caso surge a questão: o que a instituição pode fazer nestas condições? Os autores afirmam que se faz necessário a busca do conhecimento em outras instituições que possam apresentar legitimidade epistemológica. Diante deste fato, construímos a estrutura do TDE, com a inserção de uma mola que se coloca no eixo central do TDE, acoplada ao saber e ao centro da relação entre quem ensina e quem aprende. O papel do movimento da mola e a intensidade do movimento deve se dar de acordo com a identificação da necessidade de recursos de praxeologias de outras instituições.

A inserção da mola na estrutura do TDE reflete a necessidade de um saber-fazer no contexto do paradigma de questionamento do mundo proposto por Chevallard (2009), cuja oscilação da mola abre espaço para trilhas matemáticas em diversos contextos matemáticos e extramatemáticos guiadas por Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP) que podem ser aplicados em cursos de formação de professores, e assim enriquecer o equipamento praxeológico dos envolvidos nestes processos.

O constructo de TDE visa instituir uma cultura de intercomunicação permanente entre as instituições em que ***o*** é o Ponto de Fuga das relações $\boldsymbol{R(x, o)}$ e $\boldsymbol{R_I(p, o)}$.

Neste contexto, notamos a necessidade de trazer à discussão, o constructo *Arqueescola*, o qual advém das discrepâncias apontadas por Strømskag e Chevallard (2024), que ocorrem no bloco logos de diferentes instituições em processos de Transposição Didática. Este constructo consiste em um fórum com o objetivo de ampliar as discussões a respeito da utilidade praxeológica e da legitimidade epistêmica das respostas fornecidas nas diversas instituições de formação de professores.

Em decorrência deste fato, percebe-se a necessidade de respostas às seguintes questões, as quais, segundo Artaud; Bourgade (2022), foram propostas por Chevallard em uma palestra: "O que os alunos-professores devem estudar?" ou, mais precisamente, "De que deveria ser feito o equipamento praxeológico da posição p_{wt}?" onde p_{wt} é a posição de aluno-professor.

Estas questões convergem para outra questão: Como fortalecer as Organizações Didáticas (OD)?

Neste caso, inferimos que o TDE também pode contribuir para responder a esta questão, pois sua estrutura contempla a necessidade da emergência da busca de praxeologias necessárias para que os processos de Transposição Didática possam ocorrer de forma que as "n" perspectivas do saber sejam contempladas e legitimadas, tanto na perspectiva das organizações matemáticas quanto na perspectiva das organizações didáticas, de modo a estreitar as relações pessoais e expandir as relações institucionais do sujeito com o saber na posição que ocupa em uma dada instituição.

Podemos, portanto, inferir que o TDE também vislumbra a ocorrência de processos de Transposição Arquididática, que segundo Artaud e Bourgade (2022), é uma noção introduzida para analisar a transposição da matemática para uma instituição produtora de conhecimento. Esta noção refere-se a um processo que envolve o desenvolvimento de uma infraestrutura didática formada pela construção de modelos de praxeologias didáticas acessíveis ao professor na posição $\boldsymbol{p_t}$, formador de professores, para serem estudadas na posição $\boldsymbol{p_{wt}}$ (posição aluno-professor), alunos dos cursos de Licenciatura, ou professores em cursos de formação continuada.

Podemos notar a importância do processo de Transposição Arquididática ao voltarmos o nosso olhar para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), (Brasil, 2018). A BNCC trouxe várias mudanças a nível de currículo, mas as pesquisas (Costin e Pontual, 2020; Jolandek e Pereira; Mendes, 2021) relatam que as questões que prevaleceram entre os professores são:

Como implementar essas mudanças? Como as organizações matemáticas e didáticas podem ser desenvolvidas?

Diante deste cenário, destacamos que ausência de um processo de Transposição Arquididática pode ser considerada uma fonte de dificuldade para a compreensão da maioria dos problemas didáticos. Nota-se que muito se discute sobre as dificuldades dos alunos, mas, percebe-se a urgência de discussões a respeito de possíveis problemas de professores em perceberem os desentendimentos dos alunos e, em como identificar lacunas em seu equipamento praxeológico relacionado à infraestrutura didática. Neste caso, consideramos os constructos Arqueescola e Transposição Arquididática como primordiais no contexto de discussões acerca da construção de um Modelo Epistemológico de Referência (MER).

A partir desta afirmação, propomos um Modelo Epistemológico de Referência Expandido (MERE) que contempla os constructos discutidos anteriormente acerca do Ponto de Fuga (Figura 1), TDE (Figura 2). O MERE proposto tomou por base os seguintes constructos: a Arqueescola e a Transposição Arquididática.

Modelo Epistemológico de Referência Expandido (MERE)

O MER é um modelo que apresenta a epistemologia e a gênese de um dado objeto matemático a partir de sua evolução histórica e, é destituído de influências de instituições de ensino. O MER pode ser apresentado na forma de um Modelo Praxeológico de Referência (MPR) constituído de praxeologias que desempenham um papel importante para a análise das praxeologias que vivem nas instituições de ensino. Florensa, Bosch e Gáscon (2020) asseveram que o MER permite ao pesquisador, sem a influência de representantes da escola e das instituições escolares, propor modelos alternativos para o saber a ser ensinado. Nesta perspectiva, o MER desempenha um papel importante na análise dos processos didáticos transpositivos, no estudo dos fenômenos didáticos e no desenho de novos processos de estudo. Mas, esses pesquisadores questionam: “Como disponibilizá-los na instituição de ensino e aos participantes do processo didático?” (Florensa, Bosch e Gáscon, 2015, p.2640)

Esta questão nos levou a propor o MERE que consiste na ampliação do MER no sentido de o MERE marcar a importância dos modelos teóricos em espaços de discussão em cursos de formação de professores, de modo a contribuir para a formação docente no que diz respeito aos saberes matemáticos e didáticos, e assim instituir uma cultura a respeito da importância em se conhecer a epistemologia e a gênese dos objetos matemáticos a serem estudados.

Na perspectiva das Organizações Didáticas, Artaud e Bougarde (2022, p.145) salientam que a profissão de professor não expressa necessidades da didática como conhecimento e, por consequência, não existem “professores didáticos semelhantes aos economistas matemáticos”. Este fato traz consequências nos processos de Transposição Didática que ocorrem nas instituições, como por exemplo, a falta de questionamentos a respeito das praxeologias do professor e de como ampliar o seu equipamento praxeológico de modo a estreitar as iterações entre professor-aluno e saber para a institucionalização do saber em jogo.

O MERE proposto apresenta uma expansão no sentido de, a partir do constructo de TDE, atuar como impulsionador para a confluência de um modelo de análise para duas vertentes:

a) O constructo de *Arqueescola*, para a criação de um fórum de discussões de modo a ampliar o equipamento praxeológico dos estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática a partir de respostas aos questionamentos referentes aos diversos “por quê” e “para quê” a respeito de k, com foco em sua utilidade praxeológica e legitimidade epistêmica.
b) O constructo de *Transposição Arquididática*, para incentivar discussões acerca de uma infraestrutura didática, com questões do tipo: como melhorar ou desenvolver praxeologias didáticas para o ensino e a aprendizagem de um determinado objeto do saber?

Apresenta-se na Figura 3 a estrutura do MERE, onde destacamos que o estudo da evolução histórica do saber, leva à revelação da gênese do mesmo, a qual na Figura 3, se apresenta em uma região de uma malha destacando a matemática como um saber que decorre de praxeologias de várias culturas, de vários saberes-fazer em diversas instituições.

A construção do MERE evidencia a importância deste fato ser levado em consideração e servir como referência para o estudo de saberes matemáticos na perspectiva do TDE, para que ocorram discussões a respeito da expansão das praxeologias matemáticas, $\wp_1^M, \wp_2^M, \wp_3^M, \cdots \wp_n^M$[5], relativas às organizações matemáticas (OM) e das praxeologias didáticas, $\wp_1^D, \wp_2^D, \wp_3^D, \cdots \wp_n^D$[6], referentes às organizações didáticas (OD), representadas na Figura 3, para que o MERE institua uma cultura para quem ensina e para quem aprende em cursos de formação de professores que aponte para trilhas de PEP, representado pelas setas (Figura 3).

[5] M representada matemática
[6] D representa didática

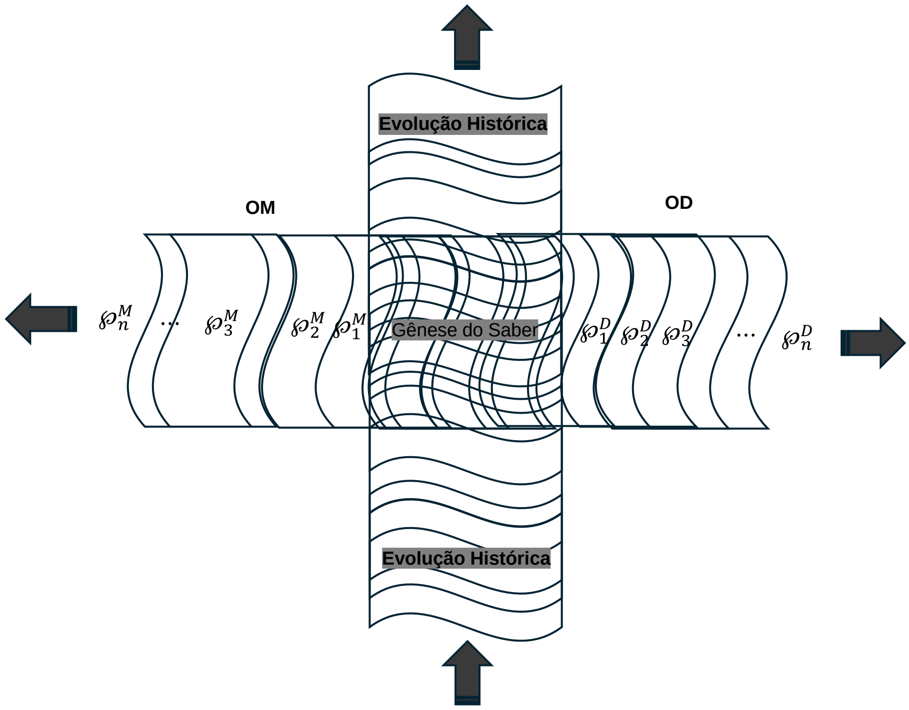

Figura 3.

Estrutura do MERE

Acredita-se que a criação desta cultura levaria a vários questionamentos a respeito dos objetos de conhecimento que podem contribuir para responder às questões referentes aos problemas didáticos que existem nas instituições e que poderão existir em função das mudanças que têm ocorrido nos espaços de ensino.

Para Almouloud (2022), a negação da necessidade de um equipamento praxeológico de base científica constitui, uma das restrições mais importantes no âmbito de um projeto de formação de professores, pois na profissão de professor, a situação descrita por Chevallard (1997, *apud* Almouloud, 2022, p.42) é relevante:

> deve-se notar a ausência de uma linguagem suficientemente rica e amplamente compartilhada para permitir uma análise objetiva (e não simplesmente pessoal) até mesmo das situações profissionais mais comuns, com como consequência uma fraca capacidade coletiva e individual de comunicar, de debater, de pensar até mesmo, sobre os objetos de uma atividade que facilmente se deixa presa na repetição do gesto e do solipsismo técnico.

Os aspectos apontados nesta citação pesam muito na formação de professores e dão origem a uma série de dificuldades que os formadores encontram, como a que se refere à dificuldade de justificar aos alunos a necessidade de confiar em ferramentas cientificamente fundamentadas" (Almouloud, 2022, p.42). Este autor (p.42) ainda assevera que, além da complexidade "da questão em jogo no estudo da formação, ou seja, o ensino de praxeologias" (p.42), é preciso levar em consideração o “fraco desenvolvimento de praxeologias de formação e, portanto, à ausência virtual de infraestruturais didáticas para a formação de professores” (p.42).

Na próxima seção, tecemos reflexões acerca da construção de MERE relacionado com o cálculo diferencial e integral.

MERE - Cálculo Diferencial e Integral (CDI)

As questões chave do MERE são: a) Qual é a gênese do CDI? b) Qual é o Ponto de Fuga dos conceitos relacionados as funções, limites, derivadas e integrais? c) Qual é a função do TDE? d) As respostas para estas questões podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem de CDI?

Inferimos que o MERE para o CDI contribuirá no acesso as respostas destas questões, pois a base de sua fundamentação na TAD implica em voltar o nosso olhar para a epistemologia do CDI, a fim de extrair a sua essência e consequentemente a sua razão de ser, que tem relação direta com o ponto de fuga e o TDE. Dessa forma, acredita-se que teremos algumas respostas às questões anteriores.

Ao estudar a epistemologia do CDI, partimos das concepções da antiguidade, as quais envolvem o pensamento dos povos egípcios e babilônios, a quem, segundo Boyer (1949, pp.14-15), faltava o pensamento matemático científico, não tinham a apreciação das características que distinguem a matemática da ciência, a sua natureza lógica e a necessidade de provas dedutivas. Para estes povos, tudo se resumia aos números, os quais estavam relacionados às suas necessidades utilitárias. Mas, foram eles, por meio das suas investigações empíricas, que desvendaram modos de se fazer matemática e explorar os objetos matemáticos, elementos chaves e inerentes às ferramentas do CDI e de toda a matemática que temos hoje.

São exemplos das suas descobertas: a regra egípcia para calcular a medida do volume de uma pirâmide quadrada, a regra para determinar a medida do volume de um tronco de uma pirâmide quadrada, entre outras. Mas, o resultado para o caso geral requer a utilização de considerações infinitesimais ou limites que, embora constituam o ponto de partida para a história da derivada e da integral, não são encontrados em qualquer registro antes do período grego.

Boyer (1949, pp.15-16) assevera que, na astronomia babilônica, os problemas que envolvem a variação foram estudados, mas, focando apenas a tabulação de valores de uma função (como o brilho da lua, por exemplo), de valores do argumento (tempo) medidos em intervalos iguais, e por meio destes dados, podia-se calcular o máximo (intensidade) da função.

Acredita-se que muitos resultados foram obtidos assim, mas, a sua generalização envolvia o reconhecimento de padrões que requeriam ferramentas, as quais no decorrer do desenvolvimento da matemática se tornaram acessíveis, compreensíveis e aceitos pela sociedade, e que hoje se constituem em ferramentas do CDI.

Diferente da visão utilitária dos egípcios e babilônios, constituída por um conjunto de técnicas para medir, contar e calcular, a matemática grega, segundo Devlin (2002, p.8) se destacou como uma atividade intelectual.

Os gregos teriam sido os primeiros, no entanto, a analisar sistematicamente a ideia de magnitude contínua e a desenvolver conceitos que conduzem à integral e à derivada. Até então, os objetos matemáticos eram estudados na sua forma estática, sem a necessidade de análise de fenômenos que envolviam movimento e mudança.

Do período da matemática grega, destacamos neste texto, os paradoxos de Zenão, os quais, para Radice (1981, p.44), tiveram como objetivo reduzir ao absurdo as teses dos pitagóricos, os quais tinham assumido que o espaço e o tempo podem ser pensados como pontos e instantes, mônadas, que para eles era o indivisível. Os paradoxos de Zenão se tornaram necessários para que os gregos renunciassem a tentativa de dar aos fenômenos do movimento e da variabilidade uma explicação quantitativa. Pode-se afirmar que os paradoxos de Zenão mostraram que a chave para o estudo do movimento e da mudança é descobrir uma maneira de descrever os padrões que envolvem a infinidade.

Devlin (2002, p.82) afirma que o paradoxo de Zenão só é paradoxal se pensarmos que uma série infinita deve ter um valor infinito. A chave para encontrar o valor de uma série é desviar a atenção do processo de adição dos termos individuais para a identificação e manipulação do padrão global. Ou seja, esta é a chave para lidar com o infinito em matemática. Mas, o desenvolvimento de uma teoria lógica sobre como manipular séries infinitas foi concluído no final do século XIX.

Strogatz (2019, p.42) assegura que 200 anos após Zenão refletir sobre a natureza do espaço, do tempo, do movimento e do infinito, Arquimedes revelou os princípios matemáticos do equilíbrio e do empuxo em suas leis sobre a alavanca e a hidrostática. Mas, este autor afirma que (p.74) estas leis estavam restritas a situações de imobilidade.

Strogatz (2019, p.74) assevera que Galileu e Kepler, no século XVII, estudaram como as coisas se moviam, e para isso era necessário um tipo de matemática capaz de lidar com o movimento as taxas variáveis, como por exemplo, a análise do porquê a bola rola cada vez mais rápido ao deslizar em uma rampa, por que os planetas ganham velocidade ao se aproximarem do Sol e perdem velocidade ao se afastarem dele.

Estas análises e novas descobertas traziam a necessidade de transpor o que era estudado de forma estática para o estudo de situações que envolviam elementos matemáticos, sujeitos a movimento e mudança no decorrer do tempo.

Esta transição do estudo do que é estático para o transitório sofreu resistência de natureza científica, filosófica e teológica.

De acordo com a necessidade de investigação, os elementos do Cálculo foram sendo desenvolvidos. Nas instituições de ensino, o estudo do Cálculo segue uma ordem: do estudo do Cálculo Diferencial para o estudo do Cálculo Integral.

Mas, na perspectiva do desenvolvimento histórico, este estudo aconteceu na ordem inversa, pois, o Cálculo Diferencial surgiu da Álgebra, e esta levou séculos para se desenvolver, ou seja, para transpor de sua forma original na China, na índia e no mundo islâmico, onde era verbal para uma Álgebra simbólica (Strogatz, 2019, p.101).

O autor afirma ainda que, por volta de 1200, esta Álgebra simbólica se acoplou à Geometria originando a Geometria Analítica, cujo estudo das curvas convergiu para o estudo do Cálculo Diferencial.

A diferenciação, enquanto operação de cálculo da derivada, depende da noção de função. Mas, o que é uma função? Pode-se dizer que uma função é um ***padrão*** de associação entre pares de números: a variável independente ou argumento x, e a variável dependente ou valor y.

Roque (2012, p. 344) afirma que, apesar de que em cursos de cálculo infinitesimal, a definição de derivada é antecedida pela sentença: “Seja uma função y=f(x)”, o conceito de função só foi introduzido após o aprimoramento das técnicas diferenciais efetuado por Leibniz e Newton. Assim,

> Até o advento do Cálculo, a Matemática era uma ciência das quantidades. No século XVII, o trabalho sobre curvas, relacionava quantidades geométricas. A partir do século XVIII muitos matemáticos começaram a considerar que o seu principal objeto era a função. Esta mudança foi descrita por Jaques Hadamard: “O ser matemático, em uma palavra deixou de ser o número: passou a ser a lei da variação, a função. A Matemática não apenas foi enriquecida por novos métodos, foi transformada em seu objeto.” (Roque, 2012, p.344)

No caso da diferenciação, a perspectiva de Newton envolvia um problema de física, a função fluente e a sua derivada o qual denominou de fluxão. Leibniz abordou a questão como um problema geométrico, ao estudar os gradientes de curvas. Ambos investigaram situações dinâmicas por meio de aproximações sucessivas, observando padrões numéricos e geométricos.

Por terem observado padrões numéricos e geométricos neste processo de aproximação, Newton e Leibniz foram capazes de chegar à resposta correta.

Devlin (2002, p.93) observa que os padrões fundamentais da diferenciação são os mesmos padrões que estão subjacentes ao cálculo de medidas de áreas e de volumes, este é o inverso da diferenciação, o fundamento do Cálculo Integral.

O advento do Cálculo proporcionou uma articulação entre praticamente todos os objetos matemáticos, os quais no decorrer de sua evolução eram considerados estáticos: números, pontos, retas, equações, entre outros.

Pode-se dizer que o desenvolvimento do CDI é o resultado do reconhecimento de padrões que descrevem o estudo de movimento e mudança. Neste caso, o ponto de fuga do CDI (Figura 4) se refere ao estudo do movimento e da mudança (representado pelo conjunto de elipses tracejadas que se intersectam, simbolizando a relação entre os diversos corpos de conhecimentos que o constituem), e ele envolve os conhecimentos de funções, limites, derivadas e integrais como um conjunto de técnicas para a manipulação de padrões de infinidade, o infinitamente grande e o infinitamente pequeno, presentes em padrões de movimento e de mudança.

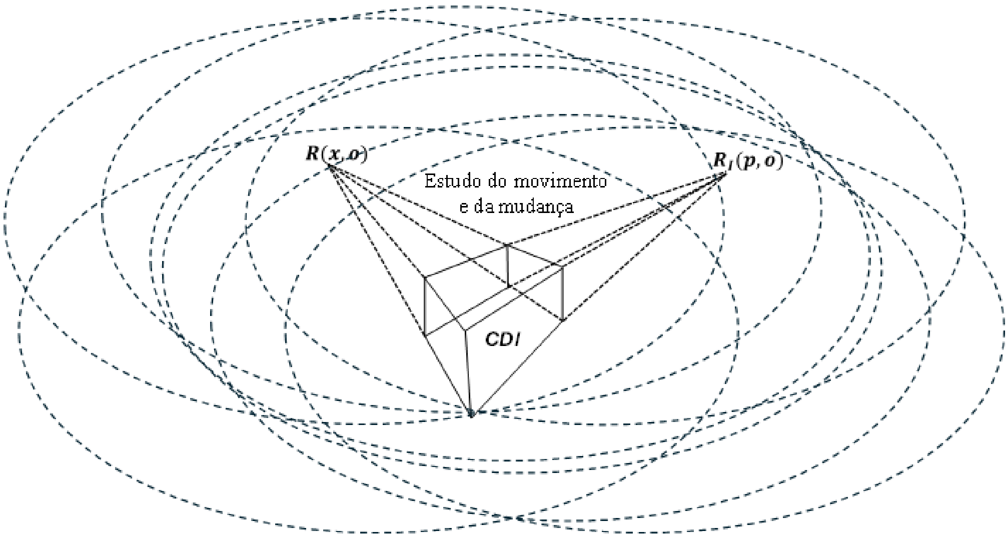

Figura 4.

Ponto de Fuga – CDI

Uma vez definido o ponto de fuga das relações $\boldsymbol{R(x, o)}$ e $\boldsymbol{R_I(p, o)}$ a partir de TDE (Figura 5), pode-se trabalhar as diferentes perspectivas do CDI a partir das suas diversas razões de ser, ou seja, a partir de diferentes contextos extramatemáticos e dos seus objetos do saber (funções, limites, derivadas e integrais).

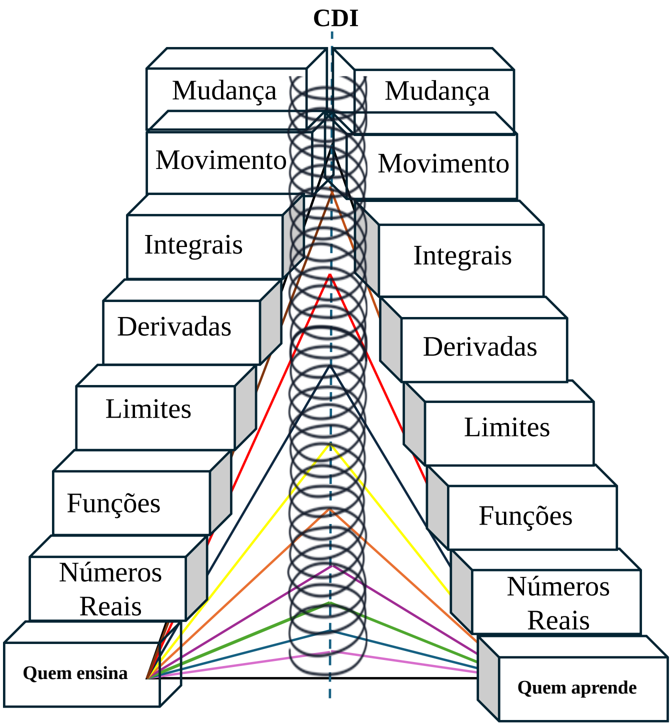

Figura 5.

TDE – CDI

A estrutura do TDE (Figura 5) traz à reflexão a necessidade de conexão entre os conceitos e aponta para a possibilidade de desenvolvimento de PEP.

Apresenta-se na Figura 6 um esquema do MERE para o ensino do CDI fundamentado no seu ponto de fuga, estudo do movimento e da mudança, e na perspectiva do desenvolvimento de praxeologias matemáticas $\wp_1^M, \wp_2^M, \wp_3^M, \cdots \wp_n^M$ e praxeologias didáticas $\wp_1^D, \wp_2^D, \wp_3^D, \cdots \wp_n^D$ de acordo com o ponto de fuga.

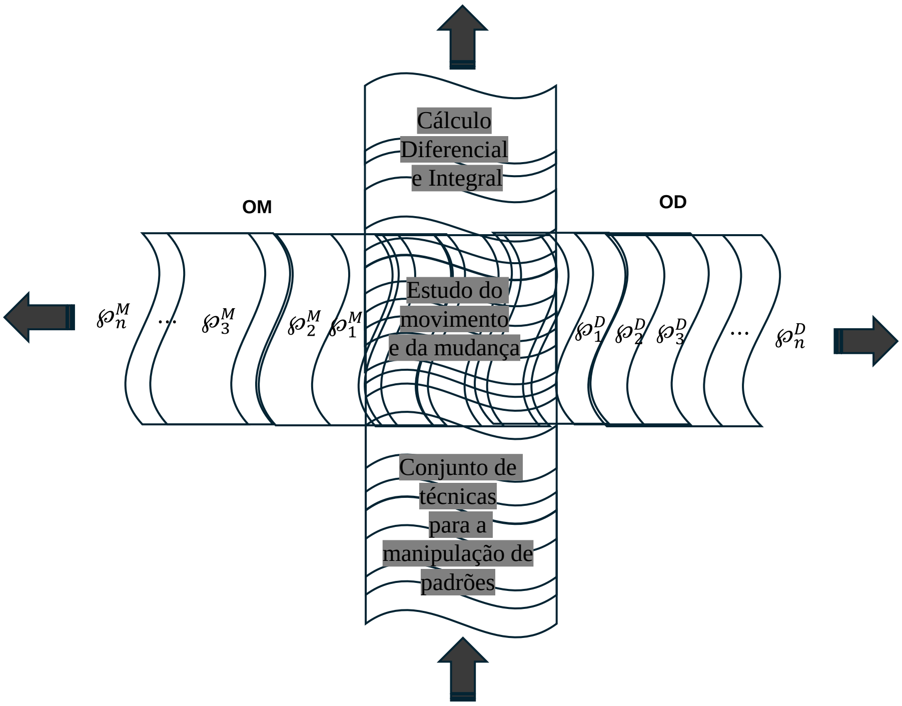

Figura 6.

MERE– CDI

Para exemplificar a aplicação do MERE discutiremos sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), propondo sugestões de possíveis praxeologias matemáticas, $\wp_1^M, \wp_2^M, \wp_3^M, \cdots \wp_n^M$ referente às organizações matemáticas (OM) e praxeologias didáticas, $\wp_1^D, \wp_2^D, \wp_3^D, \cdots \wp_n^D$, referentes às organizações didáticas (OD) alinhadas ao Ponto de Fuga do TFC, o estudo do movimento e da mudança.

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Nos livros didáticos de Cálculo (Simmons, 1987, p.281; Leithold, 1982, p. 258, Thomas, 2005, p.358) o TFC é enunciado da seguinte forma:

Se f é contínua em $[a, b]$, a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivável em todo ponto x em $[a, b]$ e, $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, (Thomas, 2005, p.358)

Segundo Strogatz (2022, p.187), os estudantes resolvem tantas integrais com a ajuda do TFC, mas não fazem ideia da importância e aplicação desse teorema, além disso, o autor faz a comparação deste fato a uma piada sobre o peixe que pergunta ao amigo:

> Você não é grato pela água? Ao que o outro peixe responde: O que é água?" – pois os estudantes de cálculo nadam o tempo todo no teorema fundamental. Portanto, não lhe dão o devido valor. (Strogatz, 2022, p.187)

A proposta do MERE tem intuito de contribuir para a mudança da realidade afirmada por Strogatz (2022, p.187) a partir dos seus elementos constituintes: *Ponto de Fuga, Triângulo Didático Expandido,* o qual envolve os constructos de *Arqueescola* e *Transposição Arquididática*.

Para explicitar estes constructos tendo como foco o TFC, o desenvolvimento do MERE apresenta uma releitura da análise proposta por Strogatz (2022, p.185-202) fundamentada na TAD, tendo como foco uma análise geométrica do TFC que envolve uma articulação entre dois tipos de problemas: um problema direto e um problema inverso.

Groetsch (1999, p.1) afirma que o problema direto é mais usual em cursos de graduação, ou seja, problemas que podemos caracterizar como aqueles em que é fornecido ao aluno a informação suficiente para realizar um processo estável bem definido que leva a um resultado único. Nas ciências, o processo é geralmente denominado modelo, com a entrada rotulada como causa e a saída como efeito.

O problema direto sugere dois tipos de problemas inversos: a) o problema de causalidade: dado um modelo e um efeito, encontre a causa do efeito; b) o problema da identificação do modelo: dada a informação de causa-efeito, identifique o modelo, (Groetsch, 1999, p.3).

No estudo de derivadas, é usual o seguinte tipo de problema direto:

Dada uma curva *y*, determinar a inclinação da reta tangente à curva *y* em um dado ponto.

Este problema direto é do tipo de tarefas (*T*) que existem nos livros de Cálculo. Podemos citar como exemplo deste tipo de tarefa, a tarefa t do livro de Thomas (2005, p.150)

t: Encontrar uma equação para a reta tangente à curva de equação $y = x^3 - 4x + 1$ no ponto (2, 1).

Esta tarefa se subdivide em duas subtarefas:

t_1: Determinar a função derivada

τ_1: Cálculo por definição

θ_1: Teoria sobre limites de funções

t_2: Determinar o coeficiente angular da reta tangente

τ_2: Cálculo da lei de formação da função derivada no ponto dado

θ_2: Teoria sobre valor de uma função em um dado ponto

Portanto, o problema direto é o resultado de uma das aplicações sobre derivadas de funções.

Mas, o TFC do ponto de vista do desenvolvimento da História da Matemática, sob o olhar de Newton, corresponde a resolver um problema inverso que envolve medidas de áreas em uma perspectiva dinâmica. A questão é a seguinte: qual é a importância em determinar estas medidas de áreas?

Nesta perspectiva, de acordo com a estrutura do MERE, surgem algumas questões referentes à organização didática Q_i^D e matemática Q_i^Mreferente ao olhar sob o estudo do TFC em cursos de graduação, seja em cursos de Licenciatura em Matemática, como também em outros cursos, a saber:

Q_1^D : O TFC é proposto nos livros de Cálculo como uma tarefa que explicite a sua razão de ser?

Q_1^M: Como propor este tipo de tarefa na abordagem de um problema inverso?

Para responder à questão Q_1^D pesquisou-se os seguintes livros didáticos de Cálculo: Simmons (1987, p. 278-283); Anton (2005, p.363), Leithold (1982, p. 256-259).

Estes livros apresentam o TFC, a sua prova matemática e exercícios de aplicação direta. Mas, os autores não comentam sobre a razão de ser do mesmo.

Diante desta perspectiva, o que está em jogo no MERE é o *Ponto de Fuga* do estudo do Cálculo (Figura 4), ou seja, o estudo de problemas que envolvem padrões de movimento e de mudança. O MERE para o Cálculo propõe que seja instituído o estudo do movimento e da mudança como elo entre as relações pessoais e institucionais em um processo de Transposição Didática, de modo que as tarefas propostas para o ensino de Cálculo existam em torno do seu ponto de fuga, de modo a contribuir para que ocorra a institucionalização da sua razão de ser para todos os envolvidos em seu estudo.

Para obter a resposta da questão Q_1^M, segue a proposta de tarefa na perspectiva do problema inverso a ser estudado nas aulas de Cálculo.

De acordo com Strogatz (2022), na perspectiva de Newton, os problemas direto e inverso consistem respectivamente em:

> a) dados os fluentes, como encontrar as suas fluxões? Ou, encontrar a inclinação de uma determinada reta tangente a uma curva, ou encontrar a taxa de variação ou derivada de uma função conhecida.
> b) dados as fluxões, como encontrar os seus fluentes? Ou como inferir uma curva a partir da sua inclinação; ou inferir uma função desconhecida a partir da sua taxa de variação? (Strogatz, 2022, p.202)

A proposição b) de Newton é explícita nos livros didáticos de Cálculo por intermédio de tarefas do tipo T_1: Seja $\frac{dA}{dx} = y$, quem é y?

O MERE propõe a releitura de T_1 de modo a deixar explícito a razão de ser do TFC, pois o TDE tem como objetivo a institucionalização de saberes a partir de um conjunto de conhecimentos aprendidos anteriormente, de modo que sejam estabelecidas relações entre eles, as quais são revisitadas de acordo com a necessidade de avançar para outro nível em um processo de expansão do conhecimento que abarca os conhecimentos anteriores. Devido a isso, a mola propulsiona a revisitação a conhecimentos anteriores a partir das relações professor, estudante e saber, de acordo com a necessidade para que seja instituído outro saber.

De acordo com a proposta do MERE, para que isto aconteça de forma efetiva é requerido o constructo de *Arqueescola* que estabelece a necessidade de questões pertinentes ao estudo de um dado objeto do saber entre aqueles que ensinam à alguém alguma coisa, tais como: Qual é a razão de ser do TFC? Por que e para que estudar o Teorema Fundamental do Cálculo?

Após obter respostas às essas questões, a situação fundamental[7] (Brousseau,1990) ideal é a que envolve um olhar sob um *Triângulo Didático Expandido* (Figura 5) de forma a estabelecer um PEP que contribua para a obtenção de respostas que explicitem a utilidade praxeológica e legitimidade epistêmica do TFC.

Diante destes elementos constituintes do MERE, a proposta de tarefa para o estudo do TFC, que envolve o estudo de um problema inverso, é a proposta de praxeologias matemáticas $\wp_1^M, \wp_2^M, \wp_3^M, \cdots \wp_n^M$ associadas a problemas de medida de área, e na perspectiva da T*ransposição Arquididática*, sugere-se praxeologias didáticas $\wp_1^D, \wp_2^D, \wp_3^D, \cdots \wp_n^D$ que poderão ser discutidas entre professores e pesquisadores que atuam nas instituições de ensino superior.

A seguir apresenta-se um exemplo a partir da proposição e análise de tarefas relativas a praxeologias matemáticas (t_i^M) e tarefas relativas a praxeologias didáticas (t_i^D) em que $i = 1, 2, \cdots$

t_1^D: Como introduzir o TFC a partir de um problema inverso associado a um problema que envolve medida de área?

Este tipo de tarefa requer a técnica (τ) de análise e pesquisa, fundamentada na tecnologia (θ) proposta pelo MERE, ou seja, a epistemologia do objeto em estudo, a qual institui a cultura de um professor pesquisador que vive em um processo de estudo e pesquisa e que é disseminador desta cultura em suas relações pessoais e institucionais.

[7] Almouloud (2020) afirma que uma situação fundamental é uma situação adidática cuja noção a ensinar é a resposta considerada a mais indicada. Ela permite introduzir os conhecimentos em sala de aula numa epistemologia propriamente científica. Portanto, é uma situação adidática característica de um saber ou de um conhecimento, e cujo funcionamento depende dos valores das variáveis didáticas escolhidas.

As tarefas a seguir são resultado deste processo de pesquisa e estudo em livros de História da Matemática, como o livro do Devlin (2002, pp.102-103) e o livro do Strogatz (2022, pp.193-198).

t_1^M: Observar o gráfico (Figura 7), obtido mediante o esboço de uma curva de equação y=*f*(*x*) e a região, de área *A(x)*, delimitada superiormente por esta curva, bem como imaginando que esta região se expande à direita. Em outros termos, imaginar o movimento da reta pontilhada para a direita, e consequentemente, a mudança de posição de *x* ao longo do eixo das abscissas. Podemos denotar *A(x)* como uma função área?

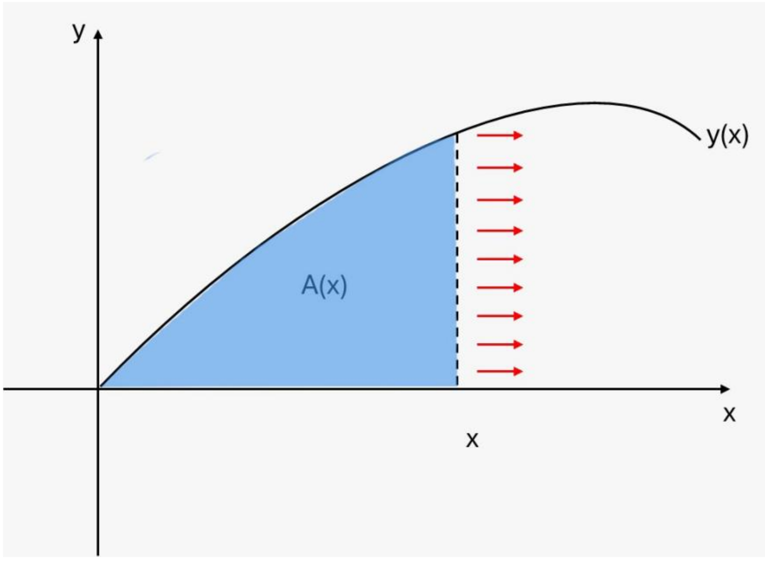

Figura 7.

Gráfico de y=f(x)

Esta tarefa requer a técnica de observação e reconhecimento de elementos do Cálculo, presentes no *TDE*: números reais, funções, limites, derivadas, integral e em meio a todos estes elementos a abstração de que a articulação entre todos eles é o estudo do movimento e da mudança, fundamentados na tecnologia (θ) instituída pelo MERE, ou seja, para que o estudante desenvolva esta habilidade de observação e abstração, faz-se necessário que o estudo destes elementos tenha uma razão de ser, que não depende de apenas de cálculos algébricos.

A resposta a questão da tarefa t_1^M é decorrente da observação de que para qualquer ponto x haverá uma área correspondente. Talvez, surja a dúvida: mas, quem é A(x), a nível de registro algébrico?

t_2^M: Discutir sobre qual seja a ferramenta matemática que pode descrever a taxa instantânea de expansão da área à medida que *x* se move para a direita. Ou, sobre qual a taxa em que esta área abaixo da curva está sendo expandida para uma determinada posição x.

O desenvolvimento desta tarefa depende do resultado da tarefa anterior. É uma tarefa importante para a discussão e reflexão entre os alunos e o professor sobre o saber em jogo.

O ideal é que os alunos identifiquem a derivada como a ferramenta matemática que possibilite descrever a taxa instantânea de expansão da área à medida que x se move para a direita.

t_3^M: Mostrar por meio de um esboço como obter esta taxa instantânea de expansão da área.

Esta tarefa é desafiadora, pois exige a capacidade de imaginação e de abstração dos estudantes.

Pesquisas, como as de Nurcahyono et al (2019), Ibrahim et al (2024), apontam que o estudo de matemática requer estas características, pois para o desenvolvimento da história da matemática, fez-se necessária a imaginação para criar ideias e prová-las. Além disso, os autores reforçam a importância de uma análise da existência de uma relação entre ideias formadas a partir de experiências empíricas e as formadas usando-se a imaginação.

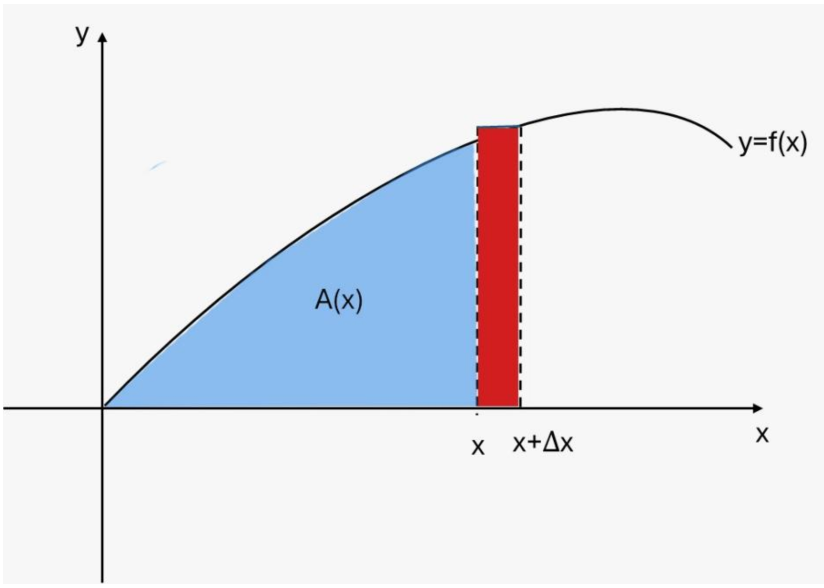

Figura 8.

Expansão de A(x)

Na Figura 8 apresenta-se uma técnica (τ) que favorece realizar a tarefa t_3^M, ou seja, o esboço do gráfico, cuja tecnologia (θ) envolve o conceito e a compreensão da taxa de variação instantânea apoiando-se em uma perspectiva geométrica.

t_4^M: Expressar matematicamente essa taxa.

A técnica necessária para realizar esta tarefa advém das respostas obtidas na realização das tarefas anteriores (t_1^M, t_2^M, t_3^M), e a habilidade de se expressar matematicamente, na perspectiva da álgebra.

No trabalho intitulado "Metassíntese de pesquisas sobre o papel da linguagem em Didática da Matemática", Almouloud e Figueroa (2021, p.284), afirmam que:

> Comungamos com Perrin-Glorian e Bosch (2013) quando observam que a fala, como símbolos, gráficos ou gestos, são parte das ferramentas ostensivas da atividade matemática. Como tal, requerem condições específicas de distribuição, uso e manutenção. Acrescentam que devemos aprender a verbalizar escritos simbólicos para poder comentá-los e organizá-los; usar, escolher ou inventar as palavras apropriadas; produzir discursos específicos; articular os ostensivos dos diversos registros; reduzir e restaurar a espessura ostensiva da praxeologia etc.

Dessa forma, o objetivo é que os estudantes, a partir das tarefas anteriores, tenham observado a variação da medida A(x) da área A da região sob o gráfico da função, quando x se movimenta de uma distância Δx. A partir desta alteração tem-se uma nova medida de área $A(x + \Delta x)$, escrita algebricamente da seguinte forma:

$$A(x + \Delta x) = A(x) + f(x)\Delta x$$

Manipulando algebricamente esta equação, com o objetivo de determinar a taxa de expansão, obtém-se:

$$\frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Mas, esta igualdade se refere a uma aproximação "grosseira", por isso a necessidade da próxima tarefa, para reflexão sobre este fato.

t_5^M: À medida que Δx se aproxima de zero, o que significa esta taxa?

A realização desta tarefa envolve a análise de limites de funções. Logo, para que a igualdade:

$$\frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x)$$

seja precisa, faz-se necessário uma análise a nível do limite de funções para Δx tendendo a zero. Logo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = A'(x) = f(x)$$

Talvez a conclusão desta tarefa poderia levar a questionamentos do porquê *A'(x)* é igual a *f(x)*? Algo possa ter se perdido em meio ao processo de resolução da tarefa. Portanto, é de fundamental importância se certificar deste fato.

A resposta à questão anterior depende de uma análise no que acontece próximo ao intervalo infinitesimal à medida que x se altera para $x+\Delta x$, considerando esta distância Δx tendendo a zero, ou seja, infinitesimal, logo o seu comprimento dado por *f(x)* permanece quase constante. Neste caso, a medida da área infinitesimal *dA= f(x)dx*.

Observa-se que as tarefas $t_1^M, t_2^M, t_3^M, t_4^M, t_5^M$ foram planejadas na perspectiva do *TDE* envolvendo a A*rqueescola* e a T*ransposição Arquididática*, o qual é constituído por uma mola, cuja oscilação e intensidade do movimento é dada decorrente da necessidade de recursos de praxeologias de outras instituições.

A ideia deste trabalho é que esta proposta seja discutida entre alunos e professores, de modo a trazer à tona mais elementos para o MERE, no intuito de ampliar o equipamento praxeológico de estudantes e professores em processos de Transposição Didática.

Nos livros pesquisados (Simmons (1987, p. 278-283); Anton (2005, p.363), Leithold (1982, p. 256-259); Tan (2004, p.817), se observa que a razão de ser do TFC está ligada ao processo de transposição do saber sábio para o saber instituído pelos livros didáticos, sem que ela seja objeto de estudo.

t_2^D: Como institucionalizar o conceito TFC?

As tarefas apresentadas até aqui levaram a uma conclusão importante: que *A'(x) = f(x).* Por intermédio deste resultado, o TFC foi estudado a partir da determinação da lei de formação da função *A(x),* ou seja, encontrar uma função cuja derivada seja *f(x).* Mas, para isso, faz-se necessário a busca de padrões mais abstratos, envolvendo derivada de funções e cálculo de medida de área.

t_5^M: Qual é a importância de se determinar a medida da área da região sob uma curva arbitrária? O que significa esta área?

Esta tarefa é desafiadora por exigir uma abstração por parte dos estudantes a partir da análise da matemática pela matemática. Medidas de áreas que mudam a uma taxa de variação e/ou expansão, se referem a medidas de áreas que se acumulam em função da variação das posições de x no eixo das abscissas, como observado na tarefa t_3^M (Figura 8).

O problema direto e inverso, ou seja, determinar inclinações de retas tangentes e medidas de áreas são problemas importantes para qualquer área das ciências, pois toda e qualquer área da ciência envolve problemas que requerem a determinação de taxas de mudança e a forma de determinar estes acúmulos de mudanças, os quais podem ser sinalizadores para o controle de processos na área de planejamento e desenvolvimento de projetos.

O intuito do MERE é contribuir para o desenvolvimento de praxeologias que tenham como foco a instituição da razão de ser do saber em jogo.

Sugere-se que a partir da institucionalização do TFC, problemas do tipo proposto por Strogatz (2022, pp .201-202) sejam explorados, tais como: problemas sobre a flutuação de fluxo de entrada de recursos em uma conta bancária e o saldo nela acumulado; problemas sobre taxa de crescimento da população mundial e a quantidade de pessoas na Terra, problemas sobre a concentração variável de uma droga quimioterápica no sangue de um paciente e da exposição acumulada a este medicamente ao longo do tempo. São problemas que envolvem previsões futuras em um mundo que funciona em movimento e mudança no decorrer do tempo.

Considerações Finais

O MER é de fundamental importância para os pesquisadores em Didática da Matemática, e deve ser de conhecimento dos professores formadores, para incrementar discussões sobre a epistemologia e a gênese do saber.

Inferimos que a ideia do ponto de fuga evidencia a importância do estreitamento entre ***R (x, o)*** e ***R_I (p, o)***, que permite incrementar discussões que tornam as instituições espaços de debates, tendo como referência Modelos Epistemológicos de Referência (MER).

Em nosso ponto de vista, o MERE amplia os espaços destas discussões, a partir de TDE, que tem como princípio encarar o ensino que se dá por meios das relações ***R (x, o)*** e ***R_I(p, o)***, e que influencia o fazer ciência com os seus infinitos questionamentos e desestabilizações. À medida que o questionamos, desvendamos outras perspectivas, outros quadros, outros registros, outras culturas e outras possíveis conexões, requeridas diante de um mundo repleto de inesperadas catástrofes e contínuas evoluções tecnológicas.

Mas, para que isto ocorra, a partir das pesquisas evidenciadas, destacou-se a importância de o MERE ser uma referência para se constituir e instituir nos espaços de ensino, os constructos de *arqueescola* e *transposição arquididática*.

Esta necessidade está relacionada à preocupação em ampliar o equipamento praxeológico dos professores formadores e dos professores em formação.

Referências

Almouloud S.A. (2022). *Fundamentos da Didática da Matemática*. 2ª edição revisada e ampliada. Curitiba: Editora da UFPR, 344 p.

Almouloud S.A. (2022). Estudo de praxeologias de estatística e de organizações didáticas em estatísticas na formação de professores. In: Almouloud SA., Santos MAD, Freitas RL. (Org.) - Práticas de ensino e processos de aprendizagem de matemática, estatística e ciências. *Editora CRV,* p.17-50. Disponivel em: https://www.editoracrv.com.br/produtos/detalhes/37509-praticas-de-ensino-e-processos-de-aprendizagem-de-matematica-estatistica-e-ciencias

Almouloud S.A.; Figueroa T.P. (2021). Metassíntese de pesquisas sobre o papel da linguagem em didática da matemática. In: Rauen FJ, Cardoso MC., Filho BMA. et al. – Linguagem e Ensino de Ciências e Matemática: Perspectivas de interfaces, – Formiga (MG): *Editora Real Conhecer,* 293p. Disponível em: https://editora.realconhecer.com.br/2021/10/linguagem-e-ensino-de-ciencias-e.html

Artaud M; Bourgade J.P. (2022). Transpositive Phenomena of Didactics. in Teacher Training. In: Chevallard Y, Barquero B, Bosch M, Florensa I, Gascón J, Nicolás P, Advances in the Anthropological Theory of the Didactic, *Birkhäuser*, pp. 139-146.

Boyer CB. (1949). *The history of the Calculus and its conception development*. Dover Publications.

Brasil (2018). *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base. Educação Básica*. Brasília: MEC, 2018

Brousseau G. (1972). *Processus de mathématisation. La Mathématique à l'Ecole Élémentaire*. Paris: APMEP.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodoes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions, v.72, p.33-115.

Brousseau G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editons, p.309-336, v. 9.3.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12/1, La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2009). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Cours donné à la 15e école d'été de didactique des mathématiques (*Clermont-Ferrand*, 16-23).

Chevallard Y. (2019). Introducing the Anthropological Theory of the Didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education* 12: 71-114.

Chevallard Y, Bosch M. (2020). Didactic transposition in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 214–218). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_48

Costin C.; Pontual T. (2020). Curriculum Reform in Brazil to Develop Skills for the Twenty-First Century. In: F. M. Reimers (ed.), *Audacious Education Purposes*.

Devlin K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto Editora ltda.

Florensa, I., Bosch, M., Gascón J. (2015). The epistemological dimension in didactics: Two problematic issues. In: CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, *Praha*, p. 2635–2641.

Florensa I; Bosch M; Gascón J. (2020). Reference epistemological model: what form and function in school institutions, *Educação Matemática Pesq*uisa, São Paulo, v. 22, n. 4. pp 240-249.

Gascón J. (2024). Questões problemáticas relativas aos paradigmas didáticos, Extended Abstracts 2022 -7ª Conferência Internacional sobre a Teoria Antropológica do Didático (CITAD 7). Springer.

Groetsch C.W. (1999). *Inverse Problems: activities for undergraduates*, The Mathematical Association of America.

Ibrahim I.; Khalil I.A, Prahmana, R.C.I. (2024). Mathematics learning orientation: Mathematical creative thinking ability or creative disposition? *Journal on Mathematics Education*, vol. 15, n°. 1, pp. 253-27. In: https://jme.ejournal.unsri.ac.id/index.php/jme/article/view/521

Jolandek E.G, Pereira A.L; Mendes L.O.R. (2021). Desafios e impactos da implementação da Base Nacional Comum Curricular: o que dizem professores de matemática. *Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar*, Mossoró, v. 7, n. 21. In: https://periodicos.apps.uern.br/index.php/RECEI/article/view/3129

Leithold L. (1982). *O Cálculo com Geometria Analítica*, vol1. Editora Harper & Row do Brasil ltda.

Nurcahyono N.A; Suryadi D; Prabawanto S. (2019). Analysis of Students' Mathematical Imagination Ability in Solving Problems, IOP Conf. Series: *Journal of Physics*: Conf. Series 1179.

Radice L.L. (1981). *O Infinito: De Pitagóras a Cantor itinerários filosóficos e matemáticos de um conceito de base*. Lisboa: Editorial Notícias-Biblioteca de Conhecimentos Básicos.

Roque T. (2012). *História da Matemática* – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Simmons G.F. (1987). *Cálculo com Geometria Analítica*. vol1.São Paulo:Pearson Makron Books.

Strogatz, S. (2022). O poder do infinito: como o cálculo revela os segredos do universo. Tradução Paulo Afonso, 1 ed. Rio de Janeiro, Editora Sextante.

Strømskag, H.; Chevallard, Y. (2024). Didactic transposition and the knowledge to be taught: Towards an archeorganisation for concave/convex functions, International Journal of Mathematical Education. In: Science & Technology.

Tan S.T. (2004). *Applied Mathematics for the managerial, life and social sciences*, third edition, Thomson.

Taub D. (2022). Programming tasks as an instrument for helping students make meaning of methods for solving quadratic equations. Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), *Bozen-Bolzano*, Italy.

Thomas G. (2005). *Cálculo*, vol1, São Paulo: Addison Wesley.