ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i4p353-388

Epistemologia e Didática[1]

Epistemology and didactics

Epistemología y didáctica

Épistémologie et didactique

Michèle Artigue[2]
Laboratoire de Didactique André Revuz
Doctorat d'État es-Sciences
https://orcid.org/0000-0002-8176-8243

Tradução

Saddo Ag Almouloud[3]
Universidade Federal do Pará
Doutorado em Matemática e Aplicações
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Marluce Alves dos Santos[4]
Universidade do Estado da Bahia
Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências (UFBA/UEFS-BA)
https://orcid.org/0000-0002-5935-5901

Solange Fernandes Maia Pereira[5]
Universidade do Estado da Bahia
Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática (ULBRA-RS)
https://orcid.org/0000-0002-5634-8220

Resumo

Este artigo examina a relação entre epistemologia e didática, e mais especificamente a função da análise epistemológica na didática. Os dois primeiros parágrafos centram-se na função de vigilância desta análise. O terceiro parágrafo é consagrado à noção de obstáculo epistemológico, sobre o qual a visibilidade da epistemologia em didática tende a concentrar-se, e o quarto à noção de conceção. Descrevemos e analisamos a história destas noções no domínio da didática da matemática em França e colocamos sobre elas um certo número de questões que nos parecem cruciais.

---

[1] Texto publicado en francês na revista *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 9, n °3, pp. 281-308,1989.* Uma versão anterior está disponível Cahier de DIDIREM, nº 3, 1989, hal-02138030

[2] michele.artigue@univ-paris-diderot.fr
[3] saddoag@gmail.com
[4] maralves@uneb.br
[5] sfpereira@uneb.br

Palavras-chave: Análise epistemológica, Obstáculo epistemológico, Concepção, Análise didática.

Abstract

This article is devoted to the analysis of relations between epistemology and didactic, more precisely to the role played by epistemological analysis in didactic theory and practice. In the first and second paragraphs, we emphasize its role of vigilance. The third paragraph is devoted to the notion of epistemological obstacle to which the visibility of relations between epistemology and didactic tends to be restricted, and the fourth to the notion of conception. We describe and analysis the life of these two notions inside the didactic field in France and raise some crucial issues in connection with them.

Keywords: Epistemological analysis, Epistemological obstacle, Conception, Didactic analysis.

Resumen

En este artículo, nos preguntamos acerca de las relaciones entre epistemología y didáctica, más precisamente acerca del papel que juega el análisis epistemológico en didáctica. En los dos primeros parágrafos, acentuamos la función de vigilancia de este análisis. En el tercero parágrafo, estudiamos la noción de obstáculo epistemológico, parte más visible de las relaciones entre epistemología y didáctica, y en el cuarto la noción de concepción. Describimos y analizamos la vida de estas dos nociones en el edificio didáctico en Francia y planteamos, acerca de ellas, unas preguntas que nos parecen de mayor importancia.

Palabras clave: Análisis epistemológico, Obstáculo epistemológico, Concepción, Análisis didáctico.

Résumé

Dans cet article, nous nous interrogeons sur les relations entre épistémologie et didactique, et plus précisément sur la fonction de l'analyse épistémologique en didactique. Dans les deux premiers paragraphes, l'accent est mis sur la fonction de vigilance de cette analyse. Le troisième paragraphe est consacré à la notion d'obstacle épistémologique, sur laquelle tend à se focaliser la visibilité de l'épistémologiques en didactique, et le quatrième à la notion de conception. Nous décrivons et analysons l'histoire de ces notions dans le champ de la didactique des mathématiques en France et posons, à leur propos, un certain nombre de questions qui nous semblent cruciales.

Mots-Clés : Analyse épistémologique, Obstacles épistémologique, Conception, Analyse didactique.

Epistemologia e didática

É comum apresentar a didática da matemática como um campo científico no cruzamento de vários outros campos: matemática, epistemologia, linguística, psicologia, sociologia, ciências da educação e, ao mesmo tempo em que se enfatiza o papel que essas ciências podem desempenhar em seu desenvolvimento, insistir no fato que a problemática didática leva a uma reformulação mais ou menos profunda das ferramentas, conceituais ou metodológicas, que a pesquisa toma emprestado delas.

Neste artigo, que é o resultado de reflexões realizadas no âmbito da introdução de um curso intitulado “Abordagem histórica e didática da matemática” no curso de mestrado em matemática da Universidade Paris 7, vou me concentrar na relação entre epistemologia e didática e, mais especificamente, nas necessidades epistemológicas da didática, ou seja, as necessidades que podem ser formuladas em termos de conhecimento dos processos pelos quais os conceitos matemáticos são formados e desenvolvidos e, de modo mais geral, o conhecimento das características da atividade matemática.

Epistemologia - objetos do saber científico - objetos de ensino

Em um primeiro nível, parece-me que a análise epistemológica é necessária para ajudar o pedagogo a colocar à distância e sob controle as "representações epistemológicas" [6] da matemática induzidas pelo ensino:

- ajudando a restaurar uma historicidade aos conceitos matemáticos que o ensino convencional tende a apresentar como objetos universais, tanto no tempo quanto no espaço,
- ajudando a restaurar uma historicidade também a noções metamatemáticas como a de rigor, enquanto o ensino usual cultiva a ficção de um rigor eterno e perfeito da matemática.

No mundo do ensino, de fato, a entrada no rigor matemático é simbolizada pela entrada no mundo da geometria demonstrativa, e a referência implícita ou explícita à geometria grega ligada a essa representação ajuda a transmitir e reforçar essa ficção de um rigor fora do tempo e do espaço.

A análise epistemológica (cf., por exemplo, "La Rigueur et le Calcul" (CII[7], 1982), E.

[6] A noção de "representação epistemológica" é introduzida aqui para designar as concepções que um determinado indivíduo forma neste campo por meio de sua própria experiência matemática. Essa noção deve ser comparada à de representação "metacognitiva" introduzida por A. Robert e J. Robinet (1989): as representações epistemológicas constituem um dos componentes das representações metacognitivas.

[7] Commission inter-IREM Epistémologie et histoire des mathématiques,

Barbin (1988)) destaca claramente a evolução ao longo do tempo da noção de rigor, sua dependência dos domínios matemáticos em questão e do nível de elaboração dos objetos que ela manipula. O exemplo do Cálculo Infinitesimal me parece particularmente significativo dessa dependência do campo. A partir do século XVII, ele se desenvolveu essencialmente em torno de métodos: o método dos indivisíveis (Cavalieri, Roberval etc.), o método de adegalização (Fermat), o método dos infinitamente pequenos (Leibniz, Bernouilli etc.) e o método das séries (este último constituindo o processo privilegiado de tratamento das funções ao longo do século XVIII) ...

E o que valida esses métodos, ao menos em um primeiro momento, é acima de tudo seu caráter metodológico, ou seja, sua capacidade de se adaptar à resolução de uma grande classe de problemas e sua produtividade. O entusiasmo deste trecho do prefácio do primeiro tratado sobre Cálculo Infinitesimal escrito pelo Marquês de l'Hospital (1696) testemunha o espírito da época:

> A extensão desse cálculo é imensa: ele é adequado para curvas mecânicas e para geometria; os signos radicais são indiferentes a ele e até muitas vezes convenientes: estende-se a tantos indeterminados quanto se desejar; a comparação do infinitamente pequeno de todos os tipos é igualmente fácil para ela. Além disso, nasce uma infinidade de descobertas surpreendentes.

Por meio dessa relativização do rigor, a análise epistemológica também nos ensina que os problemas de fundamento estão longe de ser sempre primordiais em matemática. O exemplo da Análise ainda é impressionante a esse respeito: seus fundamentos só são configurados após séculos de uso, sendo a pesquisa sobre fundamentos motivada tanto pela necessidade de transmitir a ciência quanto pelas necessidades decorrentes do desenvolvimento científico (cf. por exemplo A. Dahan e J. Peiffer (1986).

Nessa direção, a da vigilância epistemológica, do distanciamento do objeto de estudo, a análise epistemológica também permite ao didático medir as disparidades existentes entre o saber "sábio", para usar a expressão introduzida por Y. Chevallard (1985), e o saber "ensinado". Com efeito, enquanto a Escola vive da ficção de ver nos objetos de ensino cópias simplificadas, mas fiéis, dos objetos da ciência, a análise epistemológica, ao nos permitir compreender o que rege a evolução do conhecimento científico, nos ajuda a tomar consciência da distância que separa as economias dos dois sistemas.

A repartição do saber em fatias que podem ser ensinadas sucessivamente a um determinado público, o fato de que a apropriação[8] desse saber deve poder ser sancionada com base em um corpus limitado de habilidades, são, por exemplo, restrições que pesam muito no ensino, mas são desprovidas de significado em termos de evolução do saber sábio.

Y. Chevallard (1985) importou a noção de transposição didática, inicialmente devida a M. Verret (1975), para a didática da matemática, precisamente com o objetivo de levar em conta essas diferenças.

Em resumo, neste primeiro parágrafo, vimos a análise epistemológica como uma ajuda para a didática se libertar da ilusão de transparência dos objetos que manipula ao nível do conhecimento e ajudar o didático a se libertar das representações epistemológicas errôneas que sua prática docente tende a induzir. Mas a epistemologia intervém em um nível ainda mais essencial, parece-me, da teorização didática.

Epistemologia e teoria das situações didáticas

O didático se preocupa com a construção do conhecimento matemático em um meio constituído para esse fim, por indivíduos, alunos e adultos atuais. Nesse sentido, ele se depara com o problema de elaborar (para pesquisas do tipo engenharia didática) ou analisar as gêneses do conhecimento que, para distingui-las da gênese histórica, são frequentemente descritas como gêneses artificiais.

É certo que as restrições que regem essas gêneses não são idênticas àquelas que regem a gênese histórica, mas esta última continua sendo, para o didático, um ponto de ancoragem para a análise didática, uma espécie de promontório de observação, quando se trata de analisar um determinado processo de ensino, ou uma base de trabalho, caso seja necessário elaborar tal gênese.

Isso ocorre por uma razão óbvia, a saber que os problemas que motivaram a introdução deste ou daquele conceito, bem como aqueles que regeram sua evolução, são constitutivos do significado desse conceito e que o didático, em sua análise, é necessariamente confrontado com esse problema do significado do conceito.

---

[8] Em textos recentes, Y. Chevallard (1988) rejeita os termos amplamente usados “apropriação” e “aquisição”, substituindo-os por “relação com o saber”, distinguindo entre vários tipos de relação com o conhecimento: pessoal, oficial, institucional ..... Em sua opinião, os termos “apropriação” e “aquisição” estão muito ligados à ideologia escolar para servir de base para uma compreensão teórica satisfatória dos fenômenos envolvidos, uma vez que favorecem uma concepção da construção do conhecimento em termos de uma ruptura dicotômica: ou você possui o saber ou não possui, como possui uma casa ou um carro, e, portanto, tendem a negar a diversidade inescapável das relações com o saber.
Essa talvez seja outra ficção que o sistema educacional é obrigado a manter, mas com a qual o didático não deve correr o risco de se deixar enganar. Formular a questão em termos de relação com um determinado tipo de conhecimento pode ajudar a se livrar dela.

Além da análise conceitual, a epistemologia intervém nesse nível em um plano mais geral, porque o que o ensino da matemática visa não é simplesmente a transmissão do conhecimento matemático, mas, mais globalmente, o de uma cultura. O objetivo é envolver os alunos no jogo matemático. Mas o que é esse jogo matemático? Quais são os processos gerais de pensamento que o governam? É a análise epistemológica (não necessariamente histórica nesse nível, mesmo que a abordagem histórica nos permita apreender o aspecto necessariamente histórico e espacial dessa cultura) que se preocupa principalmente com essas questões.

A análise conduz o didático a um certo número de questões globais e fundamentais para orientar a produção de engenharias didáticas, como a análise do ensino habitual:

- O que transpor para o ensino dos constituintes dessa cultura e suas interrelações?

- Existe uma transposição mínima ou um conjunto de transposições mínimas a respeitar para não distorcer o significado desta cultura?

- Isso é possível? Em que condições?

- De que forma as transposições podem ou devem depender dos públicos a quem o ensino se destina?

- Quais são as restrições que pesam sobre as transposições habituais? Quais são seus efeitos?

Nessa perspectiva, o trabalho do didático não se limita a integrar esse questionamento de natureza epistemológica em sua atividade. Consiste também na construção de quadros teóricos que permitam trabalhar tais questões e a capitalização das realizações didáticas.

A meu ver, a teoria das situações didáticas desenvolvida por G. Brousseau (1986), os conceitos de dialética ferramenta/objeto e de jogos de quadros elaborados por R. Douady (1984), bem como a noção de situação codidática desenvolvida por D. Alibert, M. Legrand e F. Richard (1987) são precisamente construções que atendem a essas necessidades.

Mas vamos imaginar que se pergunte a um didático de matemática (ou de física, por exemplo) o que a didática tomou emprestado da epistemologia. As chances são de que o primeiro pensamento que vem à mente do nosso didático, a primeira palavra que vem aos seus lábios, não será nem “teoria das situações”, nem “dialética ferramenta/objeto”, nem “jogos de quadros”, nem “situação codidática” - todos esses objetos são percebidos como puramente internos à didática, a epistemologia é invisível ali - mas a palavra “obstáculo” acompanhada por um pensamento para Gaston Bachelard. De fato, é na noção de obstáculo que a visibilidade da epistemologia na didática tende a se concentrar.

Epistemologia e obstáculos

A noção de obstáculo epistemológico foi introduzida pelo filósofo e epistemólogo Gaston Bachelard em um livro publicado em 1938 e intitulado: "La formation de l´esprit scientifique " (1938, p. 13), em que ele escreve:

> Quando buscamos as condições psicológicas do progresso da ciência, logo chegamos à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a transitoriedade dos fenômenos, nem de culpar a fraqueza dos sentidos e da mente humana: é no próprio ato de saber, intimamente, que a lentidão e os problemas surgem, por uma espécie de necessidade funcional. É aí que mostraremos as causas da estagnação e até da regressão, é aí que detectaremos causas de inércia que chamaremos de obstáculos epistemológicos. O conhecimento da realidade é uma luz que sempre projeta sombras em algum lugar. Nunca é imediata e plena. As revelações do real são sempre recorrentes. O real nunca é "o que poderíamos acreditar", mas é sempre o que deveríamos ter pensado. O pensamento empírico é claro, após o fato, quando o aparato das razões foi aperfeiçoado. Ao relembrar um passado de erros, encontramos a verdade em um verdadeiro arrependimento intelectual. De fato, conhece-se contra o conhecimento prévio, destruindo os conhecimentos malfeitos, superando o que, no próprio espírito, impede a espiritualização.

E, no restante do livro, ele identifica, com base em exemplos históricos, capítulo após capítulo, algumas categorias principais de obstáculos: a experiência primeira, o conhecimento geral, o obstáculo verbal, o uso indevido de imagens familiares, o conhecimento unitário e pragmático, o obstáculo substancialista, o obstáculo realista, o obstáculo animista e, finalmente, o do conhecimento quantitativo.

No entanto, deve-se notar que Bachelard exclui explicitamente a matemática de seu propósito. Segundo ele, ela escapa desse tipo de funcionamento e ele escreve:

> Na verdade, a história da matemática é uma maravilha de regularidade. Passou por períodos de paralisação. Não conhece períodos de erro. Nenhuma das teses que apoiamos neste livro, portanto, visa o conhecimento matemático. Tratam somente do conhecimento do mundo objetivo. (Bachelard, 1938, p.22)

No entanto, alguns didáticos importaram esse conceito na didática da matemática.

a) A introdução da noção de obstáculo na didática da matemática:

Até onde sei, o primeiro texto de didática da matemática em que a noção de obstáculo epistemológico aparece é a conferência apresentada por G. Brousseau em 1976 na conferência do CIEAEM em Louvain la Neuve. Em particular, Brousseau vê na noção de obstáculo um meio de mudar o estado do erro, mostrando que:

> O erro e o fracasso não têm o papel simplificado que às vezes queremos que eles desempenhem. O erro não é apenas o efeito da ignorância, da incerteza e do acaso em que acreditamos em teorias empíricas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso ou simplesmente inadequado. Erros deste tipo não são erráticos e imprevisíveis: eles se constituem em obstáculos. No funcionamento tanto do professor quanto do aluno, o erro é constitutivo do significado do conhecimento adquirido. (Brousseau, 1976)

Na sua perspectiva de uma aprendizagem por adaptação a um *milieu* problemático, o objetivo principal da didática é precisamente "estudar as condições que devem ser preenchidas pelas situações ou problemas propostos ao aluno de forma a incentivar o surgimento, funcionamento e rejeição dessas concepções sucessivas". Isso o leva à noção de salto informacional, uma vez que apenas um salto informacional suficiente pode bloquear os mecanismos de adaptação e acomodação de concepções anteriores e levar ao questionamento de um conhecimento obstáculo.

Neste texto, G. Brousseau distingue três origens fundamentais dos obstáculos encontrados no ensino matemático:

- *uma origem ontogenética*, correspondente aos obstáculos ligados às limitações das capacidades cognitivas dos alunos envolvidos no processo de ensino,
- *uma origem didática* para os obstáculos ligados às escolhas do sistema educativo,
- *uma origem epistemológica*, enfim, para os obstáculos ligados à resistência de um conhecimento mal adaptado, ou seja, os obstáculos no sentido de Bachelard.

E, ao mesmo tempo, enfatiza a importância para o didático da análise epistemológica, a identificação dos obstáculos que ela permite devendo permitir classificar, entre as dificuldades geralmente encontradas pelo ensino na aprendizagem desta ou daquela noção, aquelas que são realmente inevitáveis por serem constitutivas da construção do conhecimento.

Em seguida, ele tenta ilustrar sua teorização considerando o ensino de decimais e identificando um obstáculo didático: o de tratar decimais como inteiros com uma vírgula e dois obstáculos epistemológicos: o problema da simetrização de N para a multiplicação e a construção de D como um meio de abordar Q, por um lado, a concepção dos racionais e decimais como razões, e depois como mapas lineares operando em Q, por outro lado. Mas a comprovação de sua qualidade como obstáculos epistemológicos não é realmente fornecida e a análise tende a se diluir na apresentação das situações de ensino destinadas a superar esses obstáculos.

Um segundo artigo, dedicado a essa noção e intitulado: "Epistemologia dos números negativos" apareceu em 1981 na revista Recherches en Didactique des Mathématiques (Glaeser, 1983). G. Glaeser tenta identificar os obstáculos que marcaram historicamente a construção conceitual dos números negativos, tendo o cuidado de especificar (p. 304) que ele usa as palavras "obstáculos, dificuldades, limiar, sintoma" neste artigo de forma muito ingênua, considerando que:

> Só depois de muitos estudos poderemos julgar as distinções relevantes, úteis para o desenvolvimento da didática experimental. (Glaeser, 1983, p. 304)

Sua análise de textos históricos levará G. Glaeser a identificar na história dos números negativos cerca de dez obstáculos revelados por cerca de vinte sintomas, obstáculos em particular para uma compreensão satisfatória da regra dos signos, já iniciada na "Aritmética" de Diofanto, no final do século III d.C., mesmo não havendo referência a números negativos:

> O que está faltando multiplicado pelo que está faltando dá o que é positivo; enquanto o que está faltando multiplicado pelo que é positivo, dá o que está faltando. Glaeser, 1983, p.311)

Isso levara, no entanto, quase 1500 anos para ser totalmente elucidado.

Vamos nos limitar a citar aqui a primeira lista de obstáculos dada por G. Glaeser:

1. Incapacidade de manipular com quantidades negativas isoladas.
2. Dificuldade em entender quantidades negativas isoladas.
3. Dificuldade em unificar a reta numérica, que se manifesta, por exemplo, na consideração da reta como uma justaposição de duas meias linhas opostas.
4. A ambiguidade dos dois zeros (zero origem e zero absoluto).
5. A dificuldade de se afastar do sentido “concreto” atribuído aos números.
6. O desejo de um modelo unificador, ou seja, por exemplo, o desejo de fazer com que o modelo de perda/ganho eficaz para o registro aditivo funcione a qualquer preço para o registro multiplicativo,

e a reproduzir a tabela que ele propõe para dar um relato esquemático de como um certo número de matemáticos superou ou não esses diferentes obstáculos no decorrer da história.

Tabela 1.

Lista de obstáculos de acordo com Glaeser (1983, p.309)

Obstáculos Autores"	1	2	3	4	5	6
Diofanto	-					
Simon Stevin	+	-	-	-	-	-
René Descartes	+	?	-	?		
Colin McLaurin	+	+	-	-	+	+
Leonard Euler	+	+	+	?	-	-
Jean d'Alembert	+	-	-	-	-	-
Lazare Carnot	+	-	-	-	-	-
Pierre de Laplace	+	+	+	?	-	?
Augustin Cauchy	+	+	-	-	+	?
Herman Hankel	+	+	+	+	+	+

Este texto provoca uma viva controvérsia. Em um artigo publicado pela mesma revista, G. Brousseau (1983) retoma sua comunicação a Louvain la Neuve já citada e insiste, com referência ao trabalho de Duroux (1983) sobre o valor absoluto, sobre o que distingue uma dificuldade de um obstáculo: um obstáculo é um conhecimento, Ele critica vigorosamente G. Glaeser por sua formulação dos obstáculos 1 e 2 supracitados, vendo isso como evidência de uma problemática didática inadequada**:**

> Esta formulação mostra o que falta a Diofante ou Stevin, visto de nossa época, em nosso sistema atual. Dessa forma, identificamos um conhecimento ou uma possibilidade que faltava no século XV e que nos impede de dar a solução "certa" ou a formulação adequada. Mas essa formulação mascara a necessidade de entender como foram abordados os problemas que exigiriam a manipulação de quantidades negativas isoladas. Esses problemas estavam sendo colocados? Como eram resolvidos? Ou acreditava-se que poderiam ser resolvidos? O que nos parece hoje ser uma dificuldade foi percebida da mesma forma na época? Por que esse "estado de conhecimento" parecia suficiente, em que conjunto de questões era razoavelmente eficaz? Que vantagens buscava a “recusa” em manipular quantidades negativas isoladas, ou que desvantagens ela permitia evitar? Este estado era estável? Por que as tentativas de o modificar, ou melhor, de renová-lo, estavam fadadas ao fracasso naquela época? Talvez até que apareçam novas condições e um trabalho "lateral" seja feito, mas qual? Essas perguntas são necessárias para entrar na intimidade da construção do conhecimento, mas Glaeser não fez tais perguntas...

Sem negar que as dificuldades identificadas por Glaeser podem ser expressas na forma de obstáculos, ele lembra as condições necessárias, segundo Duroux, para que uma dificuldade identificada na história seja qualificada como obstáculo, além da condição já citada de ser conhecimento: a existência de um domínio de validade e de eficácia e resistência.

Para ele, é na análise histórica dessas resistências e nos debates que as superaram que devemos buscar os elementos que possibilitem identificar os obstáculos dos alunos e, sem buscar impor o estudo histórico ao estudo didático, buscar também os argumentos para construir as situações de ensino que permitirão superá-los.

A tese sobre a aprendizagem da noção de limite defendida por B. Cornu em 1983 e os trabalhos de A. Sierpinska (1985), que a ampliaram, reivindicam essa abordagem. A. Sierpinska escreve, por exemplo:

> A pesquisa referida neste artigo está em consonância com a pesquisa indicada por G. Brousseau em seu (1983). Descobrir os obstáculos epistemológicos relacionados à matemática a ser ensinada nas escolas e encontrar formas didáticas de ajudar os alunos a superá-los - esses são, resumidamente, dois problemas principais deste programa de pesquisa.

E, depois de se referir às controvérsias didáticas sobre o assunto, ela esclarece sua posição:

> De nossa parte, manteremos dois aspectos da noção de obstáculo epistemológico de acordo com G. Bachelard (Bachelard 1938):
> - o aparecimento de obstáculos é inevitável [...],
> - a repetição de sua aparição na filogênese e ontogênese dos conceitos

Conjugando o estudo histórico e a observação de duas duplas de alunos em duas tarefas: a primeira preparando a identificação da tangente como limite de uma variável secante, a segunda consistindo em encontrar a equação da tangente à curva que representa a função seno na origem, propõe-se uma lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relacionados à noção de limite:

- *horror infiniti*, que agrupa os obstáculos ligados à recusa do status de operação matemática para a passagem ao limite, a transferência automática de métodos algébricos de manipulação de grandezas finitas para grandezas infinitas, a transferência das propriedades dos termos de uma sequência convergente para seu limite e, por fim, o obstáculo que consiste em associar a passagem ao limite a um movimento físico, a uma aproximação,

- *obstáculos relacionados ao conceito de função*: ocultação da noção de função subjacente, restrição a uma sequência de valores, redução monotônica, não distinção do limite da noção de limite inferior ou superior,

- *obstáculos geométricos***,** a intuição geométrica "colocando um obstáculo sério à formulação de uma definição rigorosa, tanto impedindo a determinação do que deve ser entendido pela diferença entre duas grandezas quanto por um apego da noção de limite à noção de fronteira de um conjunto",

- *obstáculos lógicos***,** relacionados à exclusão de quantificadores ou de sua ordem
- *o obstáculo do símbolo***,** ligado à relutância em introduzir um simbolismo específico para a operação de passagem ao limite.

Mas, a impressão que temos desses trabalhos é que os obstáculos epistemológicos se baseiam, até certo ponto, em seu surgimento e em sua resistência na história dos conceitos considerados e na observação de concepções semelhantes entre os alunos, e não na evidência da resistência dessas concepções entre os alunos atuais.

No entanto, essa condição me parece essencial: devido à disparidade das restrições que regem os dois sistemas, a análise histórica pode ajudar o didático em sua busca pelos nós de resistência da aprendizagem, mas não pode, em nenhum caso, fornecer prova da existência deste ou daquele obstáculo para os alunos de hoje.

E isto é tanto mais verdade quanto notamos que os nós atuais de resistência grave correspondem muitas vezes aos pontos onde intervém um obstáculo de origem epistemológica reforçado por um obstáculo de outra origem, em particular um obstáculo de origem didática.

A comparação entre dois candidatos à condição de obstáculo citados nesses trabalhos: a confusão limite/fronteira e a redução monotônica me parecem interessantes desse ponto de vista. A primeira, em suas formas mais resumidas, aquelas puramente ligadas à influência do significado comum da palavra limite, por exemplo, a confusão observada por B. Cornu entre fronteira e limite no movimento de um pêndulo, não parece constituir uma dificuldade realmente resistente. Na verdade, só resiste em manifestações que também podem ser ligadas à segunda, ou seja, à redução monotônica. Entretanto, o ensino usual, como A. Robert (1982) demonstrou em sua tese, reforça a redução monotônica ao fornecer aos alunos quase exclusivamente sequências que são monotônicas ou que podem ser facilmente divididas em sequências monotônicas.

Com certeza, esse fenômeno está ligado à constante intervenção de tais sequências na matemática[9], mas também é a marca impressa no funcionamento do sistema pela lei da "redução algorítmica" que o rege. Nos primórdios do ensino da análise, o ensino encontra dificuldades inegáveis ligadas à introdução de tudo o que constitui a especificidade da análise em relação à álgebra (o papel central da aproximação e das técnicas associadas, o raciocínio por condições suficientes com as escolhas subjacentes à perda de informação a efetuar, a complexidade das

[9] Essa influência do contexto monotônico deve ser ligada, do ponto de vista epistemológico, ao processo de fixação em um contexto familiar, que será introduzido no parágrafo c).

formalizações). A sua tendência natural é contornar estas dificuldades, fornecendo muito rapidamente aos alunos teoremas poderosos que lhes permitem ultrapassar o registro da aproximação e reduzir-se a uma operação técnica de tipo algébrico. No que diz respeito às sequências, trata-se de teoremas que lidam com a álgebra de limites e, em particular, de teoremas que garantem o limite de sequências crescentes limitadas superiormente (ou decrescentes limitadas inferiormente). Assim, o ensino tende a organizar-se em torno da aplicação destes teoremas em contextos apropriados, e é esta análise técnica e algébrica que constituirá o núcleo da relação do aluno com o objeto “sequência”, reforçando dia a dia o modelo monótono.

Nessas condições, é razoável supor que a persistência observada de erros ligados a essa redução monotônica seja tanto o produto dessas restrições didáticas quanto de restrições epistemológicas.

Considerando-se as disparidades entre as condições da gênese histórica e escolar, parece até razoável levantar a hipótese da existência de nós de resistência no ensino atual que funcionam da mesma forma que os obstáculos epistemológicos funcionaram no desenvolvimento da matemática, sem que seja possível atribuir-lhes historicamente a condição de obstáculo. Isso inevitavelmente nos leva, em uma abordagem paralela à la de Bachelard, para além da identificação de obstáculos na história ou aprendizagem desta ou daquela noção, a uma identificação dos processos que produzem obstáculos na matemática.

Para avançar nessa direção, parece-nos interessante levar em conta a análise feita por L. Viennot (1988a, 1988b), a respeito da noção de obstáculo na didática da física.

b) Obstáculos epistemológicos em didática da física:

Segundo L. Viennot, as pesquisas desenvolvidas nos últimos vinte anos na didática da física sobre as concepções dos aprendizes levaram à oposição entre o conhecimento comum e o conhecimento científico. O conhecimento comum parece ser dotado de um certo número de características: "A condição da evidência, a indefinição e a ambiguidade das formulações, a falta de coerência interna”, que são características opostas às do conhecimento científico.

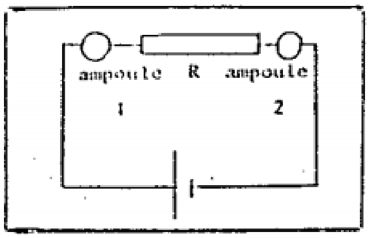
Ao mesmo tempo em que enfatiza que o campo da mecânica fornece exemplos de características do conhecimento comum que parecem ser muito consistentes com essa descrição, L. Viennot se esforça, nesses dois textos, por buscar uma linha de análise que leve a uma descrição mais sintética e mais operativa do que os catálogos de concepções fornecidos por um certo número de pesquisas.

Baseando-se em outro recorte dos campos científicos em questão, ela mostra assim a existência, na mecânica, de coerências que os pesquisadores não souberam ler desde o início nas respostas dos alunos. Por exemplo, na análise das respostas às questões que envolvem forças, ao ampliar o campo para além da noção de força, às noções de velocidade e energia, verifica-se uma coerência das respostas fornecidas correspondente ao uso implícito de um critério de compatibilidade: se há movimento, há força e no mesmo sentido.

Além disso, ela mostra, com base em vários trabalhos, que a ampliação dos campos explorados, para além da mecânica e da dinâmica que haviam servido de suporte para as primeiras pesquisas sobre o raciocínio dos estudantes, possibilitou evidenciar regularidades transversais em relação aos campos conceituais estudados.

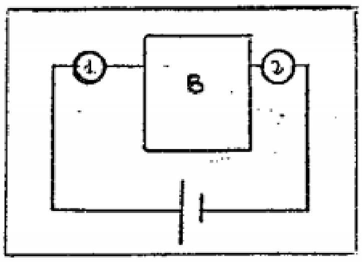
O *raciocínio sequencial* identificado por J.L. Closset (1983) em eletrocinética foi o primeiro exemplo, ao que parece.

Considere a seguinte situação:



Cerca de 50% dos estudantes universitários do primeiro ano pesquisados dizem que, neste circuito, a lâmpada 2 brilhará menos do que a lâmpada 1. A porcentagem cai para cerca de 10% com estudantes mais avançados.

Se agora nos colocarmos na seguinte situação:



Quando perguntados sobre o que deve ser colocado na caixa B para que as duas lâmpadas brilhem da mesma forma, cerca de 50% dos estudantes descartam a possibilidade de colocar uma bateria e cerca de 33% em um nível mais avançado mantêm esse ponto de vista.

Nessas duas situações, embora os diferentes elementos do circuito interajam entre si, as respostas obedecem a um modo sequencial como se A agisse sobre B que agisse sobre C, que não agiria sobre A. Daí o nome raciocínio sequencial.

Regularidades semelhantes foram destacadas por outros pesquisadores, por exemplo, por L. Maurines (1988) em sua tese sobre propagação de ondas e por S. Rozier (1988) em termodinâmica.

Além disso, uma releitura de pesquisas anteriores a partir dessa perspectiva tende a mostrar que muitas das regularidades observadas anteriormente, por exemplo, na dinâmica, podem ser interpretadas envolvendo um número reduzido de mecanismos de redução da complexidade:

- o *raciocínio linear causal*, que consiste em reduzir a complexidade funcional, transformando-a em um conjunto de relações binárias que são então processadas no modo temporal (o raciocínio sequencial em eletro cinética é um exemplo),
- *o amálgama de diferentes grandezas através de um objeto de suporte;* velocidade e altura de uma ondulação em uma corda, força e velocidade de um objeto em movimento, tensão e corrente de uma bateria etc.,
- *a fixação de certas grandezas*.

Como L. Viennot aponta, as regularidades destacadas dessa forma naturalmente levam o pesquisador a se perguntar sobre um nível "correto" de identificação dos obstáculos.

Finalmente, se os obstáculos parecem estar ligados a grandes tendências no raciocínio, além desta ou daquela aquisição conceitual específica, o pesquisador é naturalmente levado a se fazer a seguinte pergunta: essas formas de raciocínio são apenas as do iniciante ou ainda existem no especialista?

A análise das respostas de professores a diferentes questionários tende a sugerir a resposta: sim. Físicos e professores de física frequentemente utilizam o raciocínio linear causal descrito por S. Rozier em algumas de suas práticas. Fazem isso em especial quando comentam um enunciado ou tentam explicar este ou aquele fenômeno em uma linguagem não formalizada. Na resolução de problemas, controla-se melhor esse tipo de raciocínio, mas ele reaparece quando as situações propostas já não são familiares e os erros cometidos não diferem significativamente dos erros dos estudantes, como se, em vez de superar o obstáculo, houvesse uma adaptação caso a caso.

Sobre esse tópico, L. Viennot escreve:

> Isso significa que esse obstáculo ao conhecimento científico constituído pelo raciocínio linear, redutor do ponto de vista funcional, é de longo alcance e de forma alguma desapareceu durante os muitos conflitos cognitivos que os especialistas supostamente experimentaram sobre o assunto. As adaptações foram locais, cada vez mais extensas à medida que a habilidade aumentou, mas a raiz permaneceu.

O que caracterizaria então o especialista não seria a travessia do obstáculo em um sentido ingênuo, mas *a possibilidade de operar em diferentes registros e, em alguns desses registros, poder controlar o obstáculo*.

c) Um retorno à matemática:

Em um texto recente intitulado "Os obstáculos epistemológicos e a didática da matemática", G. Brousseau (1988) retoma a análise da abordagem de obstáculos na didática da matemática. Em particular, especifica que o trabalho do pesquisador consiste primeiro em:

> a) Encontrar erros recorrentes, mostrar que eles se agrupam em torno de concepções.
> b) Encontrar obstáculos na história da matemática.
> c) Confrontar os obstáculos históricos com os obstáculos de aprendizagem e estabelecer seu caráter epistemológico.

e, retomando a própria noção de obstáculo, ele relembra as características expostas por Duroux (1983):

> a) Um obstáculo será um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou falta de conhecimento.
> b) Esse conhecimento produz respostas adaptadas em um determinado contexto encontrado com frequência.
> c) Mas gera respostas falsas fora desse contexto. Uma resposta correta e universal requer um ponto de vista marcadamente diferente.
> d) Além disso, esse conhecimento resiste às contradições que enfrenta e ao restabelecimento de um conhecimento melhor. Não basta ter um conhecimento melhor para que o anterior desapareça (o que distingue a superação de obstáculos da acomodação de Piaget). Portanto, é essencial identificá-lo e incorporar sua rejeição ao novo conhecimento.
> e) Após a tomada de consciência de sua inexatidão, continua a se manifestar de forma intempestiva e teimosa.

Sendo assim a ênfase se coloca além do aspecto do conhecimento e do reconhecimento histórico, na necessidade de provar a resistência atual desse conhecimento mesmo após o que poderia ser considerado como a superação do obstáculo (condição e). A noção de obstáculo também está ligada à produção de erros: o conhecimento deve gerar respostas falsas.

Em seguida, G. Brousseau estuda, de forma bastante detalhada, através dessa lista de características, um conhecimento fóssil: o uso exclusivo de quantis para expressar frações no Egito antigo e examina sua candidatura à condição de obstáculo epistemológico para concluir sua análise nestes termos:

Este exemplo mostra que um obstáculo não é feito de inabilidade nem de explicações

> realmente 'falsas'. É uma adaptação legítima a condições específicas e deixa vestígios na cultura. Ainda não sabemos como caracterizar obstáculos em uma metalinguagem específica como faz Bachelard.

Deve-se notar que a condição (c) enunciada acima não é estritamente verificada nesta análise. A concepção de quantis não produz resultados falsos. Se for abandonada, é porque é se mostrou inadequada para certos problemas e certas operações.

Na minha opinião, esse fenômeno não é um fenômeno anedótico. O obstáculo que o conhecimento causa na história da matemática (e a análise de G. Glaeser da epistemologia dos números negativos destaca isso claramente) é, mais do que o erro, a incapacidade de apreender certos problemas ou resolvê-los efetivamente. Então devemos impor à adaptação didática da noção de obstáculo epistemológico que ela seja necessariamente produtora de erros?

No parágrafo 4 de seu texto, intitulado: "*Busca de um obstáculo a partir de situações escolares: um obstáculo atual inesperado, os naturais*", me parece que G. Brousseau também levanta o problema acima referido da possível existência de conhecimentos que, sem que sua condição de obstáculo histórico seja ou possa ser atestada, funcionariam como obstáculos.

Na realidade sabe-se bem, e existem muitos estudos didáticos atestando isso (cf. por exemplo C. Grisvard e F. Léonard (1983) e M. J. Perrin (1986), que os conhecimentos adquiridos sobre inteiros funcionam como obstáculo ao estender esse conjunto de números para decimais. Um certo número de fortes convicções sobre as propriedades possuídas por números e operações foram de fato formadas (todo número tem um predecessor e um sucessor, a multiplicação produz números maiores, a divisão produz números menores, etc.) e essas propriedades, indissociavelmente ligadas ao conceito de número, importadas para decimais quando se estende o conceito, criam erros particularmente resistentes.

Devemos então impor um atestado histórico à adaptação didática da noção de obstáculo epistemológico?

Essas duas questões nos levam, parece-me, para além do problema de atribuir a condição de obstáculo epistemológico a esta ou aquela dificuldade encontrada pelo ensino, buscando, no funcionamento do conhecimento, mecanismos que produzam obstáculos. Na realidade, se parece natural atribuir a N a condição de obstáculo epistemológico em relação a D, é também porque percebemos no funcionamento desse obstáculo candidato, a manifestação de um processo que historicamente se mostrou gerador de obstáculos: a *generalização abusiva.* De fato, como produtor de obstáculos, esse processo está claramente presente no desenvolvimento histórico de muitas áreas da matemática, por meio da aplicação mais ou menos explícita do princípio da continuidade enunciado por Leibniz, por exemplo.

Nesse nível de análise, parece-me que já é possível identificar um certo número de processos, tanto historicamente quanto para nossos alunos atuais, que produzem obstáculos. Além do processo de generalização abusiva mencionado acima, eles incluem:

- *A regularização formal abusiva*: na minha opinião, está em ação em certos erros persistentes cometidos pelos alunos, como $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ou $\sqrt{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}} = \sqrt{\boldsymbol{a}} + \sqrt{\boldsymbol{b}}$, em certos erros resistentes na manipulação de índices (cf. A. Robert (1983)) e nos obstáculos algébricos ligados à noção de limite descritos por A. Sierpinska e citados acima, por exemplo. Parece obedecer a uma lógica semelhante ao processo de generalização abusiva, embora operando em um registro formal mais restrito.

- *A fixação de noções em contextualização ou modelagem familiares*: Sem dúvida, este processo é historicamente o processo mais visível. Seu reconhecimento está indubitavelmente implícito em Bachelard quando ele admite que a matemática pode admitir períodos de parada. O artigo sobre a epistemologia dos números negativos, já citado, nos fornece pelo menos dois exemplos: a vinculação exclusiva da noção de número à de grandeza, a fixação no modelo aditivo de perdas e ganhos, e destaca claramente a resistência à progressão que essas fixações determinam. Entre os alunos, pode manifestar-se na pressão do conhecimento cultural e social (cf. os obstáculos ligados ao conhecimento comum já mencionados) mas, mais frequentemente, no apego a uma conceção que não é cultural, mas academicamente aprendida (cf. por exemplo, o apego à concepção repartição da unidade no ensino de frações e os trabalhos de H. Ratsimba Rajohn (1982) destinados a tentar desestabilizar este ponto de vista em favor da comensurabilidade).

- *O amálgama de noções em um determinado suporte,* **objeto geométrico ou outro: vemos isso em ação na história, por exemplo, no obstáculo geométrico relativo aos limites, na diferenciação lenta de certas propriedades relativas às funções.** Nos alunos, está na origem de erros persistentes observados no tratamento de comprimentos e áreas, que são obrigados a variar na mesma direção (cf. R.Douady e M.J.Perrin (1989)). E também presente nos estudantes quando a convergência geométrica basta-lhes para garantir a convergência de todas as quantidades associadas ao objeto, por exemplo (cf. D.Alibert et al. 1989).

Esta lista certamente não é exaustiva dos mecanismos produtores de obstáculos. Ao apresentá-la, eu simplesmente queria mostrar o interesse de tal abordagem em uma perspectiva de identificar e estudar o funcionamento dos obstáculos na didática da matemática. De fato, a análise nesse nível, por um lado, pode ajudar o didático a lutar contra a fragmentação que, tanto no que diz respeito aos obstáculos quanto às concepções (ver próximo parágrafo), é uma inclinação natural da pesquisa, por outro lado, chama a atenção para um certo número de pontos:

- A adesão exclusiva a um ponto de vista é talvez, tanto no ensino como na história, um dos processos-chave em matéria de obstáculos. No entanto, essa adesão não se manifesta automaticamente em erros, mas também na incapacidade de lidar efetivamente ou mesmo simplesmente de dar sentido a certos problemas. Mesmo que, a princípio, uma caracterização em termos de erros tenha sido útil e foi usada de forma eficaz para chamar a atenção para o estatuto dos erros, é possível que um apego excessivamente exclusivo a esse ponto de vista acabe constituindo um freio ao desenvolvimento e à exploração da noção de obstáculo na didática.
- Em alguns dos processos mencionados, no amálgama de noções sobre um suporte, na regularização abusiva, por exemplo, encontramos processos próximos aos identificados pelos didáticos da física. Isso provavelmente não é uma coincidência e semelhanças da mesma ordem intervêm no que diferencia principiantes e especialistas em ambas as disciplinas: capacidade de mudar de registro facilmente, capacidades de controle...
- Por trás de alguns dos processos que identificamos estão processos fundamentais do funcionamento matemático: generalização, busca sistemática de regularidades, por exemplo. E, além disso, deve-se notar que antes de se tornar um obstáculo, no desenvolvimento de muitos campos matemáticos, a generalização abusiva foi eminentemente produtiva: todo o tratamento das funções no século XVIII, por exemplo, baseava-se em uma concepção de funções como polinômios continuados por meio de expansões em série, e não se pode negar a fecundidade desse ponto de vista na época. Todo o cálculo de quantidades imaginárias se desenvolveu a partir da aplicação do princípio da continuidade. É claro que, às vezes, tal ponto de vista secretou dificuldades persistentes (cf. por exemplo, certos aspectos da controvérsia dos logaritmos dos números imaginários, J.L.Verley (1983)), mas o fato de operar com base nessa generalização abusiva também foi incrivelmente produtivo.

Isso levanta o problema da intervenção didática. Por um lado, embora se possa atacar as consequências de certos processos, é provavelmente inútil tentar atacar os próprios processos, na medida em que eles são parte integrante do funcionamento normal do matemático. Por outro lado, tanto quanto enfrentar este ou aquele obstáculo de forma ad hoc, talvez também seja útil ajudar o aluno a dominar e controlar esses processos fundamentais que são a generalização e a regularização, em sua tendência a sair do controle. É óbvio que, em relação a tal objetivo, os meios de ação dependerão, sem dúvida, da idade dos alunos por meio de sua capacidade de tomar consciência e trabalhar em seu próprio funcionamento.

Essa análise também nos mostra que um funcionamento errôneo para o matemático atual pode ter vivido e, sobretudo, se mostrado profundamente produtivo na história, em um determinado momento da gênese. Podemos, ainda mais, levantar a hipótese de que tal concepção foi, na época, a mais produtiva possível, dado o grau de elaboração possível dos objetos envolvidos. O que pode ser transposto dessa realidade histórica para a didática e, de forma mais geral, para o ensino e por quê? Uma concepção de aprendizagem em termos de obstáculos que superaríamos sucessivamente, na busca de uma concepção mítica completa e universal, é uma boa transposição[10]?

Para concluir esta parte do texto dedicada aos obstáculos, gostaríamos de enfatizar que os pesquisadores na didática da matemática, se em geral concordam com uma abordagem construtivista da formação do conhecimento, colocando no centro da aprendizagem os processos de desequilíbrio - reequilíbrio e as reorganizações a eles associadas, nem todos se aproximam em termos de obstáculos epistemológicos. Vejo duas razões principais para isso:

- O pequeno número de dificuldades cuja condição de obstáculo epistemológico é, no momento atual, verdadeiramente confirmada, se impusermos a esta confirmação a validação das várias condições acima referidas. Isso inevitavelmente leva o pesquisador a questionar se essa noção é realmente necessária para a teoria didática.

- As supostas implicações pedagógicas da adoção dessa abordagem. A maneira “brutal” com que ela tem sido levada em consideração no nível das realizações didáticas, concentrando a atenção apenas na organização de rejeições sucessivas de concepções errôneas, sem dúvida não é alheia à hesitação nesse nível.

A análise que aqui se desenvolveu, particularmente com a identificação de processos geradores de obstáculos, a ênfase colocada nos problemas de mobilidade e de control, para além dos problemas de rejeição apenas, bem como na realidade das diferenças entre principiantes e especialistas, as questões resultantes ao nível da intervenção didática, deverão permitir, pelo menos espero, encarar o problema dessas divergências de forma diferente.

[10] A análise aqui apresentada é, de facto, próxima da desenvolvida por A. Sierpinska (1988) na sua comunicação no Colóquio “Obstacle épistémologique et conflit cognitif”, realizado em Montreal em outubro de 1988, que eu desconhecia quando escrevi este artigo. Baseando-se no trabalho de Wilder, distingue três níveis na cultura matemática: os níveis formal, informal e técnico que correspondem, respetivamente, ao nível das crenças e convicções, ao nível das regras e padrões de funcionamento inconscientes e ao nível das teorias e resultados explicitamente atestados. E desenvolve a tese de que é apenas nos dois primeiros níveis que se encontram os obstáculos epistemológicos, insistindo, no entanto, no carácter relativo desses obstáculos. Note-se que é de facto a estes níveis que se situam os processos que produzem os obstáculos que identificámos neste texto, mesmo que o tipo de descrição adotado nem sempre permita uma categorização clara entre formal e informal.

Epistemologia e concepções

Utilizámos frequentemente o termo “conceção” no que precede. Trata-se de um termo que, tal como o de “obstáculo”, traçou o seu percurso no edifício educativo, pelo menos em França. Sem dúvida que suscitou menos paixão do que a noção de obstáculo, mas também, e talvez por isso, foi menos trabalhado pela comunidade. Nesta secção, tentaremos reconstituir a trajetória desta noção na comunidade didática francesa, destacando as suas ligações epistemológicas e cognitivas e, muito brevemente, mencionando o problema da sua sobrevivência no contexto de uma teoria antropológica como a desenvolvida por Chevallard (1989).

Parece-me que a noção de concepção atende, na didática da matemática, a duas necessidades distintas:

- destacar a pluralidade de pontos de vista possíveis sobre o mesmo objeto matemático, diferenciar as representações e modos de processamento a ele associados, destacar sua adaptação mais ou menos apropriada à resolução desta ou daquela classe de problemas,
- ajudar o didático a lutar contra a ilusão de transparência da comunicação didática veiculada pelos modelos empiristas de aprendizagem, permitindo-lhe diferenciar entre o conhecimento que o ensino quer transmitir e os conhecimentos efetivamente construídos pelo aluno[11].

Esses dois polos, mais ou menos dominantes, podem ser encontrados no conjunto de todas as pesquisas didáticas desenvolvidas nos últimos dez anos em torno do estudo das "concepções" dos alunos. Escrevo a palavra concepção aqui entre aspas porque não é em termos de concepções que os diferentes autores necessariamente se expressam, mesmo que tenham problemas semelhantes. Esse termo compete com vários outros: representações, modelos, por exemplo, nenhum dos quais aparece com um campo realmente específico.

Esse termo "concepção" apareceu na literatura didática, importado de certa forma da linguagem cotidiana, sem que os autores parecessem inicialmente sentir a necessidade de lhe dar uma definição didática.

Brousseau (1980) o usa dessa maneira, parece-me, no artigo que escreveu para o primeiro número da revista "Recherches en Didactique des Mathématiques".

Considerando as dificuldades do aluno em se adaptar a uma nova situação, ele escreveu:

[11] A noção de conceção é pouco utilizada na literatura anglo-saxónica, que se refere muito mais facilmente à noção a priori parecida de misconception (cf., por exemplo, as atas do Congresso organizado sobre este tema na Universidade de Cornell em julho de 1988 (Novak, 1988). Na minha opinião, esta escolha não tem nada de neutro e reflecte a prioridade dada na investigação sobre as misconcepções ao segundo pólo: o pólo cognitivo.

> Essas dificuldades são aquelas que a concepção anterior do aluno traz consigo, e a situação-problema escolhida apenas as revelou. A nova concepção surge porque é uma solução para essas dificuldades. É um novo equilíbrio dos sistemas de resposta do aluno, seja removendo as contradições carregadas pelas velhas concepções, seja trazendo simplificações substanciais.

Em um texto publicado no mesmo número e dedicado à abordagem dos números reais por alunos do ensino primário, R. Douady (1980) não o usa. No entanto, ela usa o termo "modelo", mencionando os seguintes pontos entre outros objetos de sua pesquisa:

> Axiomatizar suas ações, seus discursos, bem como determinar os modelos implícitos utilizados em situação escolar de aprendizagem.
> - Através dos argumentos escritos ou orais que eles utilizavam, para descrever e convencer, queríamos saber os modelos que eles explicitavam e validavam.

Em seguida, ela constrói efetivamente um modelo cuja estrutura matemática não é outra senão a do R+ e cujos axiomas visam traduzir a estrutura e a evolução do conhecimento dos alunos durante o longo processo didático previsto na pesquisa.

Este termo "modelo" já havia sido usado por A. Bessot e F. Richard (1977), que, na época, escreveram:

> É suposto as produções observáveis desses níveis de atividade (ações, formulações, validações) serem regidas por sistemas e modelos - construídos pelo observador, mas tudo acontece como se o modelo fosse usado pelo sujeito - que são modelos implícitos (nível 1), linguagens (nível 2), teorias ou modelos explicitados pelo sujeito desta vez (nível 3).

Em sua tese já citada, A. Robert retoma essa noção de modelo explícito, introduzindo o termo "modelo exprimido" para designar os modelos desenvolvidos pelo pesquisador a partir de expressões escritas sobre a convergência das sequências numéricas produzidas pelos estudantes entrevistados[12] ([4]).

Em uma palestra proferida no V Congresso PME em 1981 e intitulada: "Algumas orientações teóricas e metodológicas da pesquisa francesa na didática da matemática", G. Vergnaud (1981) também não usa o termo "concepção", preferindo modelar o conhecimento

[12] A. Robert destaca em sua pesquisa uma boa correlação entre esses modelos exprimidos e o sucesso ou fracasso com os demais itens do questionário proposto aos alunos. Isso pode parecer surpreendente na medida em que vários estudos, ao contrário, destacaram disparidades significativas entre os níveis declarativo e processual (cf., por exemplo, D. Alibert et al. já citados ou S. Vinner e D. Tall (1981). Foi, em especial, para levar em consideração estas disparidades, por exemplo, que estes últimos introduziram as noções de "conceito imagem" e de "conceito definição", sendo a noção de "conceito imagem" muito próxima da de concepção, mas com um significado global (ver o resto deste parágrafo). Pode-se pensar que a forma da pergunta proposta por A. Robert (solicitam que se adapte a alunos jovens), os critérios escolhidos para vincular uma resposta ao modelo estático (a simple repetição da definição usual de convergência não é suficiente) explicam a boa correspondência encontrada aqui entre os modelos exprimidos e os procedimentos de resolução.

do aluno, introduzindo as noções de teorema em ação e cálculo relacional:

> O conceito de "teorema em ação" designa as propriedades das relações apreendidas e utilizadas pelo sujeito em uma situação de solução de problema, entendendo-se que isso não significa que ele seja capaz de explicitá-las ou justificá-las. O conceito de "cálculo relacional" designa as composições dedutivas (e inferências) que explicam suas produções.

Por outro lado, esse termo de concepção voltou à tona com a publicação em 1982, ainda na revista Recherches en didactique des mathématiques, de um artigo intitulado: "Concepções do círculo entre crianças do ensino primário" (M. Artigue e J. Robinet, 1982). Neste artigo, J. Robinet e eu enfatizamos, primeiramente, que a observação naturalista das aulas do ensino primário chamou nossa atenção para

> a variedade e aparente impermeabilidade das concepções que os alunos implementavam, sobre uma mesma figura, de acordo com a tarefa proposta.
>
> Daí vem o projeto:
>
> Antes de tudo, observar o comportamento dos alunos em várias situações, identificar em cada caso os procedimentos utilizados, e estudar se seria possível associar esses procedimentos a concepções de figuras geométricas (que teriam de ser definidas).

A pesquisa então se concentra na forma do círculo. Um conjunto de concepções é definido a priori com referência a onze definições distintas do círculo (ver apêndice) e os autores comentam sobre este assunto, sem, no entanto, dar uma definição, sobre a introdução da noção de concepção*:*

> Essas definições são todas logicamente equivalentes e, portanto, definem o mesmo objeto matemático. Mas elas correspondem a diferentes maneiras de perceber o círculo, de usar suas propriedades, e enfatizam diferentes elementos geométricos, relações entre esses elementos. É por esse motivo que associamos a eles concepções distintas do círculo.

Estas concepções são depois analisadas de acordo com diferentes dimensões: caracterização pontual ou global, estática ou dinâmica, elementos e propriedades privilegiadas, depois exploradas para a construção de situações experimentais de apoio à investigação e à análise dos comportamentos dos alunos. Essa abordagem metodológica é comentada nos seguintes termos:

> A distinção que fizemos entre o objeto matemático que é único e as várias concepções que podem estar associadas a ele nos parece importante. Na pesquisa, é uma ferramenta de análise das situações-problema propostas aos alunos, bem como de seus

> procedimentos. Cada atividade privilegia em diferentes graus este ou aquele ponto de vista sobre o círculo, não necessariamente o aspecto pontual e estático que corresponde à definição dos livros didáticos. Por exemplo, se uma criança é solicitada a classificar formas geométricas, ela é capaz de isolar aquelas que são discos muito cedo, muito antes de dominar a noção de distância. Fica claro que não é a concepção ligada à definição clássica a que ela se refere. Em outro nível, pode ser uma maneira de o professor se afastar da aparente simplicidade de certos objetos geométricos. A uniformidade das definições e exercícios propostos pelos livros didáticos mascara a riqueza e a complexidade das concepções que podem ser associadas a esses objetos. Tende, além disso, a impor ao nível do ensino um ponto de vista único, estático e pontual, privilegiando o centro e o raio (como medida) sem levar em conta o conhecimento mais ou menos elaborado que a criança já possui quando confrontada com esse ensinamento.

Os resultados da pesquisa são formulados em termos de concepções e enfatizam a capacidade dos alunos, a partir do nível do CE1, de implementar de forma operacional concepções muito variadas do círculo, mas também na estreita dependência das concepções e das situações.

O mesmo número da revista publica o artigo já citado por R. Ratsimba-Rajohn, dedicado ao estudo de dois métodos de medição racional: comensuração e fracionamento da unidade. A formulação, ligada à modelagem em termos de teoria dos jogos utilizada, é feita em "modelos de ação", sendo esses modelos associados a estratégias, o termo concepção não aparece. Mas em seu artigo já citado igualmente sobre os obstáculos epistemológicos e a didática da matemática, G. Brousseau, referindo-se a esta pesquisa, escreve:

> A possibilidade de provocar a aquisição de concepções diferentes é demonstrada para os racionais. (G. Brousseau, 1980, 1981; N. e G. Brousseau, 1987): tanto a *comensuração* quanto o *fracionamento* são obtidos pela simples manipulação de variáveis didáticas. H. Ratsimba-Rajohn (1981) observa como essas duas concepções podem fazer obstáculo uma à outra e, mesmo assim, coexistir no mesmo aluno, e como uma concepção inicial pode ser não rejeitada, mas reforçada apesar de um salto informacional suficiente a priori.

A. Duroux, em seu DEA já citado, em 1982, finalmente dá quase uma definição da noção de concepção:

> No decorrer do processo de aquisição, por razões diversas [...], algumas dessas situações são privilegiadas em detrimento de outras, o que provoca o surgimento de saberes locais, operando sobre subclasses do campo conceitual e, para determinados valores das variáveis das situações em questão, é esse conhecimento local que chamamos de concepção.

Apesar da falta de uma definição explícita, podemos ver através destes poucos textos o funcionamento (por assim dizer) de uma concepção semelhante da noção de concepção: a concepção é um objeto local, intimamente associado ao conhecimento em jogo e aos vários problemas em cuja resolução intervém; constitui uma ferramenta, tanto para a análise desses conhecimentos e para o desenvolvimento de situações didáticas quanto para a análise rigorosa do comportamento do aluno. Mesmo que as concepções sejam objeto de uma definição autônoma, o que interessa ao didático, obviamente, não é elaborar um catálogo preciso de concepções possíveis, mas estudar a articulação de concepções e situações em um determinado processo de aprendizagem.

Em julho de 1982, em uma apresentação feita na segunda Escola de Verão de Didática da Matemática, G. Vergnaud deu uma definição da noção de concepção que rompeu parcialmente com essa abordagem. De fato, depois de definir um conceito matemático como um trio (S, I, $\mathcal{S}$) com:

S: todas as situações que dão sentido ao conceito,

I: conjunto de invariantes operacionais associadas ao conceito,

$\boldsymbol{\mathcal{S}}$: conjunto de significantes que permitem representar o conceito, suas propriedades e as situações que ele nos permite apreender,

ele apresenta a noção de concepção como o análogo sujeito, em um determinado momento, do conceito.

Podemos ver, então, que a concepção se torna um objeto ligado ao sujeito e perde seu caráter local. De fato, a multiplicidade de concepções possíveis não aparece mais como uma característica do conhecimento, mas como a manifestação da multiplicidade de concepções possíveis do mesmo sujeito ao longo do tempo. Cada concepção é em si global: leva em conta a totalidade da estrutura do sujeito em um determinado momento, assim como o conceito leva em conta a totalidade do conhecimento sobre o objeto matemático[13].

Há, de certa forma, uma mudança no nível das necessidades atendidas pela noção de concepção, da primeira necessidade para a segunda.

Retomo essa definição em termos semelhantes no capítulo 1 de minha tese, defendida em 1984 (Artigue1984:

> Como se distingue em um conceito matemático;
> - a noção matemática definida no contexto do conhecimento sabio em um determinado momento,
> - o conjunto de significantes associados ao conceito,
> - a classe de problemas em cuja resolução ele assume seu significado,
> - as ferramentas: teoremas, técnicas algorítmicas, específicas para o tratamento do conceito,

[13] Encontramos um objeto muito próximo do "conceito imagem" introduzido por Tall e Vinner. A imagem concetual é definida como "the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes".

> nas concepções dos sujeitos será feita uma distinção entre esses vários componentes e, em particular:
> - a classe de situações-problema que dão sentido ao conceito para o aluno,
> - o conjunto de significantes que ele é capaz de associar a ela, em particular as imagens mentais, as expressões simbólicas,
> - as ferramentas, teoremas, algoritmos à sua disposição para manipular o conceito.

Isso me leva a acrescentar ao capítulo 3, que retoma o artigo já citado sobre as concepções do círculo, uma introdução para reinterpretar o que foi obtido nesta primeira pesquisa, no âmbito da definição dada no capítulo 1.

De fato, essa definição global da noção de concepção, mesmo que possa parecer sedutora em termos absolutos, não é a ferramenta de que o didático precisa. Por um lado, é inutilizável porque não corresponde a um nível acessível à análise didática: como podemos inferir da observação do aluno, em uma ou, na melhor das hipóteses, em algumas situações, a totalidade de sua concepção deste ou daquele objeto matemático? Por outro lado, não é realmente pertinente. Na realidade, o que interessa ao didático não é basicamente a compreensão dessa hipotética estrutura global, mas a identificação de concepções locais que se manifestam em situações e a análise das condições de passagem de uma concepção local para outra, seja uma questão de rejeitar uma concepção errônea, estabelecer uma concepção que permita melhorar a eficiência na resolução desta ou daquela classe de problemas ou promover a mobilidade entre concepções já disponíveis. Desse ponto de vista, é o objeto local que é a ferramenta apropriada.

Além disso, na prática, é esse nível local, ligado a este ou aquele ponto de vista sobre o conhecimento em jogo, que é utilizado. Por exemplo, G. Vergnaud (1983) escreveu no volume 4.1 da revista RDM dedicado a um conjunto de pesquisas realizadas por sua equipe sobre a noção de volume:

> No que diz respeito ao volume, é muito importante garantir a ligação entre as duas concepções distintas que um aluno pode ter disso:
> - Por um lado, o volume é uma quantidade física unidimensional, que se presta a comparações, medições, estimativas, transformações, somas e diferenças, etc. em diversas situações do cotidiano.
> - Por outro lado, o volume é uma grandeza tridimensional que pressupõe uma análise físico-geométrica do espaço e uma aplicação dessa análise no digital e no dimensional.
>
> São essas duas concepções e sua conexão que tentamos levar os alunos da quinta série a aprofundar.

R. Douady e M. J. Perrin, no artigo já citado aqui, intitulado "Um processo de aprendizagem do conceito de área de superfície plana", primeiro listam um certo número de dificuldades resistentes bem conhecidas dos professores:

> - A superfície unitária sendo uma superfície de uma determinada forma, a medição de uma superfície S depende da possibilidade de pavimentar efetivamente S com essa forma [...]
> - A área está ligada à superfície e não está dissociada de outras características dessa superfície [...]
> - As fórmulas são estendidas para situações em que não são válidas [...]"

(Deve-se notar que essas dificuldades persistentes estão tipicamente relacionadas a três dos processos que geram obstáculos identificados no parágrafo anterior).

Em seguida, elas fornecem uma interpretação em termos de concepções:

> Parece-nos que um certo número de dificuldades está ligado ao tratamento pelos alunos dos problemas de área, seja do ponto de vista das superfícies, seja do ponto de vista dos números. Por exemplo, uma diminuição da área é entendida como uma diminuição da superfície com sua forma e está associada a uma diminuição do perímetro: a área e o perímetro são então amalgamados com a superfície e vinculados à sua forma [...]
> No outro extremo, a área é um número: estamos no nível do cálculo e apenas observamos elementos relevantes para o cálculo, por exemplo, medidas de comprimento [....] Assim, sobre o tema da área, os alunos desenvolveriam uma "concepção forma" ligada ao quadro geométrico ou uma "concepção número" ligada ao quadro numérico, ou ambos, mas de forma independente, e lidariam com os problemas sem estabelecer uma relação entre os dois pontos de vista.

Em sua tese recente, dedicada ao estudo das concepções de alunos e professores do ensino médio sobre a noção de continuidade, H. El Bouazzaoui (1988), depois de ter realizado uma revisão detalhada das diferentes noções introduzidas a esse respeito pelos didáticos, também insiste no caráter local das concepções. Também faz uma série de distinções:

- Ao nível dos alunos, ela retoma a distinção anteriormente feita por vários pesquisadores (cf. por exemplo os trabalhos de Duroux e Cornu já citados) entre as concepções iniciais, anteriores a qualquer aprendizagem escolar sobre os conceitos em consideração, e as concepções induzidas pelo ensino e, nas concepções induzidas, a distinção entre concepções controladas pelo ensino e concepções não controladas pelo ensino,
- Ao nível dos professores, ela faz uma distinção entre as concepções manifestadas pelo professor e as concepções que ele transmite em seu ensino,
- Por fim, ela distingue essas concepções "individuais" das concepções "coletivas" que podem ser veiculadas por programas e livros didáticos ou identificadas na gênese histórica.

O problema da tentação globalizante, pelo menos na prática, parece assim estar mais ou menos resolvido. Na verdade, é o problema oposto, o da localização extrema, que parece ser o problema crucial no momento. De fato, se nos textos de G. Vergnaud, R. Douady e M.J. Perrin que citamos, há um agrupamento de concepções em torno de grandes tendências relevantes para a análise didática, em outros casos a preocupação de refinar a análise do comportamento dos alunos leva a uma extrema diferenciação de concepções[14].

Além disso, inferir concepções, como geralmente acontece, não a partir da análise do conhecimento envolvido, mas da observação direta do comportamento dos alunos em situações específicas, faz com que elas sejam reduzidas ao nível dos observáveis.

Como apontei em minha tese, no que diz respeito ao trabalho de modelagem das concepções do sujeito:

> De fato, nas pesquisas, vários objetos aparecem sob o nome de modelos de concepções do sujeito**,** que vão desde a construção axiomática até a técnica de resolver um problema específico.

Diante dessas dificuldades, a ancoragem das concepções na análise a priori de possíveis pontos de vista sobre o conhecimento em jogo, sobre as classes de problemas acessíveis ou bem adaptados a este ou aquele ponto de vista, por meio do estudo do funcionamento atual desse conhecimento, bem como de seu desenvolvimento histórico, pode parecer uma garantia necessária.

No entanto, não resolve todos os problemas. Por um lado, a análise epistemológica, em particular se ela pretende ancorar no desenvolvimento histórico do conceito, à medida que se torna mais refinada, como a análise psicológica, levará a diferenciar uma multiplicidade de concepções sobre um determinado objeto, e o problema de agrupamento em classes relevantes para a análise didática não é a priori nada óbvio. Por outro lado, a disparidade dos dois sistemas já destacada não garante que as concepções assim identificadas sejam exatamente os instrumentos adequados para a realização da análise didática.

Consideremos, por exemplo, a noção de tangente. A análise histórica destaca facilmente a diversidade de pontos de vista possíveis sobre este objeto. Sem pretender ser exaustivo, citarei alguns deles, tentando respeitar a ordem cronológica:

Uma reta é tangente a uma curva quando, tendo um ponto em comum com a curva, nenhuma reta pode ser traçada entre ela e a curva passando por esse ponto.

É o ponto de vista derivado da proposição 16 do Livro III dos elementos de Euclides que define a tangente ao círculo.

[14] Esta mesma tendência pode ser encontrada em estudos sobre misconcepções

Uma reta é tangente a uma curva quando tem um ponto em comum com a curva e sempre permanece do mesmo lado dessa curva.

É nessa propriedade que Apolônio de Perga se baseia para determinar a tangente à parábola [42]. Deve-se notar que essa propriedade, mesmo relativizada em nível local, se for apresentada como uma caracterização da tangente, leva à rejeição da possibilidade de uma curva ter uma tangente em um ponto de inflexão geométrica. Encontramos vestígios dessa limitação em Descartes.

- *Uma reta é tangente a uma curva se tiver um ponto em comum com a curva e for perpendicular, nesse ponto, à normal à curva.*

De certa forma, esse ponto de vista generaliza a noção de uma tangente a um círculo por meio da noção de círculo osculador, para colocar em termos modernos. No Livro 2 de sua Geometria [43], Descartes determina assim a subnormal da cicloide considerando um círculo centrado no eixo das abscissas (e, portanto, dependente de dois parâmetros) e escrevendo algebricamente a condição para que a equação correspondente à interseção do círculo e da curva tenha duas raízes iguais.

Uma reta é tangente a uma curva se cruzar essa curva em dois pontos coincidentes.

Este ponto de vista sobre a tangente também não requer a intervenção explícita do cálculo diferencial. Foi usado, por exemplo, por Descartes (1898) como uma adaptação do método descrito anteriormente: em vez de considerar a interseção de um círculo e a curva, consideramos a de uma linha reta e a curva. Foi encontrado mais tarde, por exemplo, em Euler e Cramer e, claro, na geometria algébrica.

A tangente a uma curva em um ponto M é o suporte do vetor velocidade em M de um ponto móvel que descreve essa curva.

Esse ponto de vista também é muito antigo. Por exemplo, permitiu que Roberval desenvolvesse um processo para construir a tangente a uma curva que pode ser considerada como resultante de dois movimentos conhecidos (por exemplo: a ciclóide), antes da implementação do cálculo diferencial (G. Personier dit Roberval, 1730).

Uma reta tangente a uma curva é a reta definida pelo ponto de tangência e um ponto nessa curva que é infinitamente próximo.

Este é o ponto de vista clássico do cálculo infinitesimal, desenvolvido por Leibniz e presente no já citado tratado do Marquês de l'Hospital, associado à visão de uma curva como um polígono com uma infinidade de lados:

"Pedimos que uma linha curva seja considerada [...] como um polígono de um número infinito de lados, cada um infinitamente pequeno, que determinam pelos ângulos que fazem entre eles, a curvatura da linha.”

Esta é também a visão atualmente subjacente à análise não padronizada.

A tangente a uma curva em um ponto M é o limite das secantes (MP) para a curva, quando o ponto P, movendo-se na curva, tende para M.

Este é o ponto de vista desenvolvido, por exemplo, por d'Alembert (1747)na Encyclopédie Méthodique, com o objetivo de evitar a manipulação de quantidades infinitesimais, um ponto de vista classicamente retomado no ensino.

A tangente é a reta cujo coeficiente de direção é o valor da derivada da função associada à curva, na abscissa do ponto considerado.

Esta é a apresentação feita por Lagrange, por exemplo, em sua "Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du Calcul Différentiel " (J.L. Lagrange, 1797).

A tangente à curva representativa da função f em um ponto M é a reta associada à aplicação afim tangente a f nesse ponto.

Esse ponto de vista, que fundamenta a noção de diferenciabilidade, está presente, por exemplo, no trabalho de Fréchet (1911) e, nos últimos vinte anos, nos currículos do ensino médio.

É claro que esses vários pontos de vista sobre a noção de tangente diferem pelo menos dois a dois em dois dos três níveis a seguir:

- *Natureza da ligação com o cálculo diferencial*: alguns funcionaram antes da implementação do cálculo diferencial, mesmo que possam ser e tenham sido reformulados usando cálculo diferencial; outros estão, por outro lado, intrinsecamente ligados a esse mesmo cálculo diferencial,

- ***Natureza dos significantes associados***: é claro que eles não desenvolvem as mesmas representações mentais da noção de tangente, nem necessariamente se traduzem nas mesmas expressões simbólicas,

- *Eficiência na resolução de problemas*: nem todos permitem resolver as mesmas classes de problemas: os primeiros historicamente encontrados só permitiam traçar tangentes a curvas muito particulares; com a invenção do cálculo infinitesimal, desenvolveram-se diferentes concepções, cujos campos de ação não eram a priori claramente diferenciados; a visão em termos de aproximação à ordem um era necessária para unificar os resultados do cálculo diferencial em uma e várias variáveis e também para estender a ideia de tangência a espaços mais gerais (cf. D. Alibert et al. já citado).

Portanto, parece natural associá-los a diferentes concepções da noção de tangente. Esses objetos fornecem uma grelha bem adaptada ao trabalho didático?

Numerosas pesquisas têm mostrado, por exemplo, que a concepção dominante da tangente desenvolvida pelo ensino atual é uma concepção algébrica desta última: a tangente em um ponto M à curva C representativa da função f é a reta que passa por M e do coeficiente de direção o valor da derivada na abscissa desse ponto. De fato, a tangente a uma curva, com exceção da tangente ao círculo, é introduzida no nível da decima primeira classe como uma interpretação geométrica da derivada (ela própria apresentada sob os dois aspectos: limite do quociente dos incrementos e aproximação à ordem 1), portanto, desde o início no quadro matematicamente mais eficiente. O problema essencial que o ensino enfrenta é, então, ter sucesso em articular a estrutura algébrica dominante da derivação e a estrutura geométrica, para permitir ao aluno a mobilidade de passagem de uma estrutura para a outra, necessária para a eficiência na resolução de problemas. É o que D. Tall (1986) tenta fazer em sua tese no contexto de uma engenharia didática baseada no uso de ferramentas computacionais.

Nessa perspectiva, a identificação de concepções historicamente encontradas pode nos ajudar a interpretar as respostas de determinados alunos, a compreender sua coerência. Não nos ajuda fundamentalmente a resolver os problemas de compartimentalização entre quadros, na medida em que, historicamente, a tangente é acima de tudo um objeto geométrico. Quando Lagrange, por exemplo, em seu trabalho já citado, chega à primeira caracterização algébrica da tangente em termos de derivada (aparentemente idêntica à dos alunos), foi depois de ter mostrado que a caracterização geométrica de Euclides implica (usando uma formulação atual) entre a curva que representa a função $y=f(x)$ e a tangente de equação $y=F(x)$, no ponto de tangência com abcissa x, um contato satisfazendo $f'(x)=F'(x)$.

A pesquisa realizada por Habiba El Bouazzaoui sobre as concepções desenvolvidas por alunos e professores do ensino médio sobre a noção de continuidade, já citada, também destaca tanto o interesse quanto os limites, do ponto de vista didático, da abordagem histórica. A análise do desenvolvimento histórico dessa noção permite lhe identificar um certo número de concepções que são usadas para interpretar as respostas dos alunos a questionários, bem como entrevistas realizadas com professores. Aqui, novamente, a análise didática mostra a distância que separa o funcionamento dos dois sistemas: no ensino médio, o conceito de continuidade não é um conceito operativo para a resolução de problemas; funciona apenas em termos de reconhecimento de objetos, e as concepções que se desenvolvem sobre ele, tanto entre alunos quanto entre professores, são claramente marcadas por essa característica do ensino.

De facto, o que estas disparidades evidenciam é o facto de o aluno não poder ser reduzido ao estatuto de sujeito epistemológico ou cognitivo. O que determina o seu comportamento é também, e muitas vezes em primeiro lugar, o seu estatuto de sujeito didático. É este facto que está no cerne da teoria já citada elaborada por Y. Chevallard. Por definição, nessa teoria os saberes parecem estar ligados às instituições, e a relação de um indivíduo com um determinado objeto de saber é condicionada pela instituição ou instituições em que encontrou esse conhecimento, e estas instituições não se limitam geralmente à instituições escolares. Por muito atraente que seja esta abordagem, será que ela desqualifica automaticamente a noção de conceção como instrumento de análise didática? A questão está colocada, mas longe de estar resolvida. Pela minha parte, tenho tendência a pensar que a noção de conceção, definida como acima como um objeto local enraizado na análise do saber, corresponde a um nível intermédio necessário à análise didática.

Nesse nível das concepções, bem como nos níveis discutidos anteriormente, a análise epistemológica ajuda por tanto o didático a controlar as relações com o saber matemático dos objetos que manipula. Também lhe permite observar de um ponto externo o sistema educacional que está estudando e do qual muitas vezes está quase próximo demais. Mas, ao destacar a distância que separa a gênese histórica das noções da realidade da sala de aula, ao mesmo tempo mostra-lhe também tudo o que separa esses dois campos: o epistemológico e o didático.

Referências

Alibert, D. et al. *Procédures différentielles en mathématiques et en physique au niveau du premier cycle de l'enseignement supérieur*, Brochure n°74, Ed. IREM Paris 7, 1989**.** http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97040.pdf

Alibert, D., Legrand, M. et Richard, F. Alteration of didactic contract in codidactic situation, *Actes du Congrès PME XI*, Montréal, J.C.Bergeron et al. (Eds.), p. 379-385, 1987.

Apollonius de Perge. *Les coniques***.** Traduction P.ver Eecke, rééd. Blanchard, Paris.

Artigue, M. *Contribution à l´étude de la reproductibilité des situations didactiques*, Thèse d'Etat, Université Paris 7, 1984.

Artigue, M. et Robinet, J. Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *RDM, Vol. 3.1, 1982, p. 5-64.*

Bachelard, G. : *La formation de l'esprit scientifique***,** Paris, Librairie J.Vrin, 1938.

Barbin, E***:*** La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques***, Bulletin APMEP, N°366, 591-620, 1988.***

Bessot, A. et Richard, F**.** *Etude du schéma dans l'enseignement* des *mathématiques***,** Mémoire de DEA, IREM de Bordeaux, 1977.

Bouazzaoui**,** H. *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction*, Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, 1988.

Brousseau, G. La problématique et l'enseignement des mathématiques, *XXVIIIème Rencontre de la CIEAEM,* Louvain la Neuve, 1976.

Brousseau, G. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques**,** In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Proceedings of the International Conference: Construction des savoirs : obstacles et conflits (pp. 41-63).Montréal: CIRADE Agence d'Arc., 1988.

Brousseau, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *RDM***,** Vol. 4.2, 1983, p. 164-198.

Brousseau, G. Problèmes de l'enseignement des décimaux**,** *RDM*, Vol. 1.1, 1980, p. 11-58.

Brousseau, G. *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques***,** Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I, 1986.

Chevallard**,** Y. : *La transposition didactique***,** Grenoble, La Pensée Sauvage, 1985.

Chevallard**,** Y**.** : *Notes sur l'échec scolaire***,** Ed. IREM Aix-Marseille, 1988.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport persqonnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Université de Grenoble 1.

CIosset, J. L. D'où proviennent certaines erreurs rencontrées chez les élèves et les étudiants en électrocinétique ? *Bulletin de l'Union des Physiciens, N°657, p. 81-102, 1983***.**

Cornu, B. *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles.* Thèse de 3ème Cycle, Université de Grenoble I, 1983.

D'Alembert, J. Article : Tangente**,** dans l'Encyclopédie Méthodique, 1747.

Dahan-Dalmedico**,** A**.** et Peiffer**,** J**.** : *Une histoire des mathématiques : routes et dédales***,** Paris, Le Seuil, Coll. Points-Sciences, 1986.

Descartes, R. *Géométrie*, *Livre 2*, 1637, Oeuvres, Ed. Ch.Adam et P.Tannery 6, Paris, 1902.

Descartes, R. *Lettre à C. Hardy***,** 1638, Oeuvres, Ed. Ch.Adam et P.Tannery 2, Paris, 1898.

Douady R. et Perrin, M. J. : Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, *Educational Studies in Mathematics*,20, p.387-424, 1989.

Douady, R. : *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Thèse d'Etat, Université Paris 7, 1984.

Douady, R. Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans**)**, *RDM, Vol. 1.1, 1980, p. 77-110***.**

Duroux, A**.** La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure, *Petit x***,** 3, 43-66, 1983.

Fréchet, M. Sur la notion de différentielle**,** *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, Tome 152, N°13, p. 845-847 et 1050-1051, 1911.

Glaeser, G. Epistémologie des nombres relatifs**,** *RDM* Vol. 2,3, 1981, p. 303-346.

Grisvard, C. et Léonard, F. Résurgence de règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux, *Bulletin APMEP*, N°340, 450-459, 1983.

Groupe inter IREM Epistémologie et Histoire : *La rigueur et le calcul***,** Paris, CEDIC-Nathan, 1982.

Verley, J. L. *La controverse du logarithme des nombres complexes***,** Fragments d'histoire des mathématiques, Brochure *APMEP* N°34, 1983.

Lagrange, J. L. Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, Paris, 1797.

Marquis de l'Hospital **:** Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, Paris, 1696

Maurines, L. *Premières notions sur la propagation des signaux mécaniques*. Thèse de doctorat. Université Paris 7, 1988**.**

Novak, J.D. (Ed.). (1988). *Proceedings of the second international seminar on misconceptions and educational strategies in sciences and mathematics education*. Cornell University, juillet 1988.

Perrin, M. P. *Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves du CM2 et du Collèg*e, Cahier de Didactique des Mathématiques N°24, Ed. IREM Paris 7, 1986.

Personier, G. dit Roberval : *Divers ouvrages de mathématiques et de physique***,** Paris, 1693, (réimp.) Mém. Acad. Sc. Paris, 1666/99, 6, Ed. Paris, 1730.

Ratsimba-Rajohn, H. Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles, *RDM*, Vol. 3.1, 1982, p. 65-113.

Robert, A. L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, *RDM,* Vol. 3.3, 1983, p. 307-341.

Robert, A. et Robinet, J**.** Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement, *Cahier de DIDIREM N°l*, Ed. IREM Paris 7**,** 1989**.**

Robert, A. *Une acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur*, Thèse d'Etat, Université Paris 7, 1982**.**

Rozier-Michaud, S. *Le raisonnement linéaire causal en thermodynamique classique élémentaire,* Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1988**.**

Sierpinska, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *RDM* Vol. 6.1, 1985, p. 5-67.

Sierpinska, A. (1988). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Proceedings of the International Conference: Construction des savoirs : obstacles et conflits (pp. 130-148).Montréal: CIRADE Agence d'Arc.

Tall, D. *Building and testing a cognitive approach to the calculas using interactive computer graphies***.** Doctoral Thesis, University de Warwick, 1986**.**

Tall, D., Vinner, S**.** Concept image and concept définition in mathematics mth particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics***,** Vol. 12, p. 151-169, 1981.

Vergnaud, G. Didactique du concept de volume**,** *RDM*, Vol. 4.1, 1983, p. 9-25.

Vergnaud, G. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Actes du Congrès PME V,* Grenoble : Laboratoire I.M.A.G., 1981, p. 7-17, Vol. 2.

Verret, M. *Le temps des études*, Paris, Librairie H. Champion, 1975.

Viennot, L. : Obstacle épistémologique et raisonnements en physique : tendance au contournement des conflits chez les enseignants**,** In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Proceedings of the International Conference: Construction des savoirs : obstacles et conflits (pp. 117-129).Montréal: CIRADE Agence d'Arc., 1988a.

Viennot, L. : Tendance à la réduction fonctionnelle : obstacle au savoir scientifique et objet de consensus**,** In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Proceedings of the International Conference: Construction des savoirs : obstacles et conflits (pp. 84-92).Montréal: CIRADE Agence d'Arc., 1988b.

Apêndice

1. Definições do círculo

Atualmente, a maioria dos livros didáticos de matemática dão a mesma definição de círculo:

D1: A circunferência de centro O e raio R é, no plano, o conjunto dos pontos localizados à distância R de O. Mas podemos definir um círculo de muitas outras maneiras. Por exemplo:

D2: Chamamos de círculo qualquer curva plana fechada de classe C2 de curvatura algébrica constante.

D3: Chamamos de círculo qualquer curva plana homogênea por isometria.

D4: Chamamos de círculo qualquer curva plana que admite uma infinidade de eixos de simetria.

D5: Seja Γ uma curva fechada, plana e convexa (isto é, aresta de uma parte convexa G do plano) admitindo em qualquer ponto umatangente. Para qualquer direção d, designamos por a_d o limite superior dos comprimentos dos segmentos de direção d contidos em G. Γ este um círculo se e somente se:

- para cada direção d, a_d é o comprimento de um único segmento D_d de direção d incluído em G,
- todos os segmentos D_d têm o mesmo comprimento,
- todos os segmentos D_d são concorrentes.

D6: Uma curva plana Γ este um círculo se e somente se existe um ponto O do plano e um real positivo d tales que:

- Γ determina em qualquer reta que passa por O um segmento de comprimento d,
- O é o meio deste segmento.

Tais definições são aquelas que desenvolvemos em o resultado do pré-experimento. Uma curva plana Γ é definida por uma aplicação contínua φ do segmento [0, 1] no plano "quase injetiva": a única exceção admitida a injetividade é φ(0)=φ(l). É de classe C2 se for duas vezes continuamente diferenciável. É homogênea por isometria se e somente se, para todos os x e y em Γ, existe f, f isometria do plano e f(Γ) = Γ e f(x) = y.

Halbwachs (1981) propôs 10 definições dos quais:

D_7: O círculo é o conjunto de pontos M tais como o rácio AM/BM de suas distâncias a dois pontos fixos A e B seja constante.

D_8: O círculo é a curva fechada que, por um comprimento determinado, abrange a área máxima.

As três definições a seguir são devidas respectivamente a Euclides, Leibnitz e Legendre:

D_9: Um círculo é uma figura plana incluída numa única linha que chamamos de circunferência e tal que todos os retas traçadas até a circunferência de um dos pontos colocados nesta figura são iguais entre si.

D_{10}: Uma linha móvel sendo colocada de tal forma que dois de seus pontos A e B permaneçam imóveis, outro qualquer ponto C nesta linha descreve uma circunferência.

D_{11}: A circunferência de um círculo é uma linha curva cujos todos os pontos estão igualmente distantes de um ponto interior que chamamos de centro.