tiques, *European Journal of Psychology of Education*, numéro spécial, 80-81.
MILLER G.A. (1956) The magical number seven plus or minus two: some limits on our capacity for processing information, *Psychological Review*, 63, 81-97.
NESHER P., PELED I. (1985) Changes in Decimal Reasoning, *Proceedings of the ninth International Conference for the psychology of Mathematics Education*, vol.I, 324-341.
PIAGET J. (1975) *L'équilibration des structures cognitives, problème central du développement*, Etudes d'Epistémologie Génétique, vol.33, Paris, PUF.
RESNICK L.B., NESHER P., LEONARD F., MAGONE M., OMANSON S., PELED I. (1989) Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 1, 8-27.
SACKUR-GRISVARD C. (1985) Active versus passive use of knowledge, *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Noordwikerhout, Pays-Bas, vol.1, 496-500.
SACKUR-GRISVARD C., LEONARD F. (1983) Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux positifs, *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, 340, 450-459.
SACKUR-GRISVARD C., LEONARD F. (1985) Intermediate cognitive organizations in the process of learning a mathematical concept: the order of positive decimal numbers, *Cognition and Instruction*, 2, 2, 157-174.
SWAN M. (1983) Teaching decimal place value a comparative study of «conflict» and «positive only» approaches, *Proceedings of the seventh international conference for the psychology of mathematics education*, 212-216.
SIMON H.A. (1974) How big is a chunk? *Science*, 183, 4124, 482-488.
TULVING E. (1985) How many memory systems are there? *American Psychologist*, 30, 4, 385-398.
VIENNOT L. (1977) *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire*, Thèse de Doctorat, ParisVII.
WINKIN Y. (1981) *La nouvelle communication*, Paris, Seuil.
ZAJONC R.B. (1968) Cognitive theories in social psychology, in Lindzey G. & Aronson E., *The handbook of social psychology*, Addison-Wesley, MA, 320-411.

ÉPISTÉMOLOGIE ET DIDACTIQUE

Michèle Artigue[1]

ABSTRACT

This article is devoted to the analysis of relations between epistemology and didactic, more precisely to the role played by epistemological analysis in didactic theory and practice. In the first and second paragraphs, we emphasize its role of vigilance. The third paragraph is devoted to the notion of didactic obstacle to which the visibility of relations between epistemology and didactic tends to be restricted, and the fourth to the notion of conception. We describe and analyse the life of these two notions inside the didactic field in France, and raise some crucial issues in connection with them.

RESUMEN

En este artículo, nos preguntamos acerca de la relaciones entre epistemología y didáctica, más precisamente acerca del papel que juega el análisis epistemológico en didáctica. En los dos primeros parágrafos, acentuamos la función de vigilancia de este análisis. En el tercero parágrafo, estudiamos la noción de obstáculo epistemológico, parte más visible de las relaciones entre epistemología y didáctica, y en el cuarto la noción de concepción. Describimos y analizamos la vida de estas dos nociones en el edificio didáctico y planteamos unas preguntas que nos parecen de mayor importancia.

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous nous interrogeons sur les relations entre épistemologie et didactique et plus précisément sur la fonction de l'analyse épistémologique en didactique. Dans les deux premiers paragraphes, l'accent est mis sur la fonction de vigilance de cette analyse. Le troisième paragraphe est consacré à la notion d'obstacle épistémologique sur laquelle tend à se focaliser la visibilité de l'épistémologique en didactique, et le quatrième à la notion de conception. Nous décrivons et analysons l'histoire de ces notions dans le champ de la didactique des mathématiques en France et posons, à leur propos, un certain nombre de questions qui nous semblent cruciales.

1. Equipe DIDIREM, Université Paris 7, 2 Place Jussieu, 75005 Paris, France.

Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10, n°2.3, pp. 241-286, 1990

Il est usuel de présenter la didactique des mathématiques comme un champ scientifique au carrefour de divers autres champs: mathématiques, épistémologie, linguistique, psychologie, sociologie, sciences de l'éducation… et, tout en soulignant le rôle que peuvent jouer ces sciences dans son développement, d'insister sur le fait que la problématique didactique conduit à remanier plus ou moins profondément les outils, conceptuels ou méthodologiques, que la recherche leur emprunte.

Dans ce texte, issu de reflexions menées dans le cadre de la mise en place, en maîtrise de mathématiques, à l'Université Paris 7, d'un enseignement intitulé: «Approche historique et didactique des mathématiques», je me centrerai sur les relations entre épistémologie et didactique, plus précisément sur les besoins épistémologiques en didactique, c'est-à-dire sur les besoins formulables en termes de connaissance des processus par lesquels les concepts mathématiques se forment et se développent et plus généralement de connaissance des caractéristiques de l'activité mathématique.

I. ÉPISTÉMOLOGIE — OBJETS DU SAVOIR SCIENTIFIQUE — OBJETS D'ENSEIGNEMENT

A un premier niveau, l'analyse épistémologique est, me semble-t-il, nécessaire au didacticien pour l'aider à mettre à distance et sous contrôle les «représentations épistémologiques»[2] des mathématiques induites par l'enseignement:

— en aidant à redonner une historicité aux concepts mathématiques que l'enseignement usuel tend à présenter comme des objets universels, à la fois dans le temps et dans l'espace,

— en aidant à redonner une historicité également à des notions métamathématiques comme celle de rigueur alors que l'enseignement usuel cultive la fiction d'une rigueur éternelle et parfaite des mathématiques.

Dans le monde de l'enseignement, en effet, l'entrée dans la rigueur mathématique est symbolisée par l'entrée dans l'uni-

2. La notion de «représentation épistémologique» est introduite ici pour désigner les conceptions que se forge dans ce domaine un individu donné à travers son propre vécu mathématique. Cette notion est à rapprocher de celle de représentation «métacognitive» introduite par A. Robert et J. Robinet (cf. par exemple [3]): les représentations épistémologiques constituent en effet une des composantes des représentations métacognitives.

vers de la géométrie démonstrative, et la référence implicite ou explicite à la géométrie grecque liée à cette représentation contribue à véhiculer et renforcer cette fiction d'une rigueur hors du temps et de l'espace.

L'analyse épistémologique (cf. par exemple «La rigueur et le calcul» [1], E. Barbin [2]) met bien en évidence l'évolution au cours du temps de la notion de rigueur, sa dépendance des domaines mathématiques concernés et du niveau d'élaboration des objets qu'elle manipule. L'exemple du Calcul Infinitésimal me semble particulièrement significatif de cette dépendance du champ. Il va en effet se développer, à partir du XVIIème siècle, essentiellement autour de méthodes: méthode des indivisibles (Cavalieri, Roberval...), méthode d'adégalisation (Fermat), méthode des infiniment petits (Leibniz, Bernouilli...), méthode des séries (cette dernière constituant, sur tout le XVIIIème siècle, le processus privilégié de traitement des fonctions)...

Et ce qui valide ces méthodes, au moins dans un premier temps, c'est avant tout leur caractère de méthode, c'est-à-dire leur capacité d'adaptation à la résolution d'une large classe de problèmes, et leur productivité. L'enthousiasme de cet extrait de la préface du premier traité de Calcul Infinitésimal écrit par le Marquis de l'Hospital [4] témoigne bien de cet état d'esprit:

> «L'étendue de ce calcul est immense: il convient aux courbes mécaniques comme aux géométriques; les signes radicaux lui sont indifférents et même souvent commodes; il s'étend à tant d'indéterminées que l'on voudra; la comparaison des infiniment petits de tous genres lui est également facile. En delà naissent une infinité de découvertes surprenantes.»

A travers cette relativisation de la rigueur, l'analyse épistémologique nous apprend également que les problèmes de fondement sont loin d'être toujours premiers en mathématiques. L'exemple de l'Analyse est à ce titre encore frappant: ses fondements ne se mettent en place qu'après des siècles d'utilisation, la recherche sur les fondements étant d'ailleurs tout autant motivée par le besoin de transmettre la science que par les besoins issus du développement scientifique (cf. par exemple A. Dahan, J. Peiffer [5]).

Dans cette direction, celle de la vigilance épistémologique, de la prise de distance par rapport à l'objet d'étude, l'analyse épistémologique permet également au didacticien de prendre la mesure des disparités existant entre savoir «savant», pour reprendre l'expression introduite par Y. Chevallard dans [6], et savoir «enseigné». En effet, alors que l'Ecole vit sur la fiction consistant à voir dans les objets d'enseignement des copies simplifiées mais fidèles des objets de la science, l'analyse épistémologique, en nous permettant de comprendre ce qui gouverne l'évolution de la connaissance scientifique, nous aide à prendre conscience de la distance qui sépare les économies des deux systèmes.

Le découpage du savoir en tranches susceptibles d'être enseignées successivement à un public déterminé, le fait que l'appropriation[3] de ce savoir doive pouvoir être sanctionnée sur la base d'un corpus restreint de compétences, sont par exemple des contraintes qui pèsent fortement sur l'enseignement mais sont dénuées de signification en termes d'évolution du savoir savant.

Y. Chevallard (cf. [6]) a importé en didactique des mathématiques la notion de transposition didactique, initialement due à M. Verret (cf. [8]), justement dans le but de prendre en compte ces différences.

En résumé, on a vu dans ce premier paragraphe l'analyse épistémologique aider la didactique à se déprendre de l'illusion de transparence des objets qu'elle manipule au niveau du savoir et aider le didacticien à se dégager des représentations épistémologiques erronées que tend à induire sa pratique d'enseignant. Mais, l'épistémologie intervient à un niveau plus essentiel encore me semble-t-il de la théorisation didactique.

3. Dans des textes récents (cf. par exemple [7]), Y. Chevallard récuse les termes «d'appropriation» et «d'acquisition» massivement utilisés. Les termes d'appropriation et d'acquisition reflètent pour lui directement le rapport culturel au savoir en vigueur dans nos sociétés, un rapport culturel qui pèse sur l'institution scolaire et par ricochet sur le didacticien mais est inadapté à une appréhension théorique satisfaisante des phénomènes en jeu. Cette vision culturelle est en particulier dichotomique: on possède le savoir ou on ne le possède pas comme on possède une maison ou une voiture, et tend de ce fait à nier la diversité incontournable des rapports au savoir. Il s'agit peut-être là encore d'une fiction qu'est obligé d'entretenir le système d'enseignement mais dont le didacticien ne doit pas risquer d'être dupe. La théorisation en termes de rapports au savoir qu'il développe dans une perspective anthropologique est un outil qui va lui permettre de s'en déprendre.

II. ÉPISTÉMOLOGIE ET THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Le didacticien est concerné par la construction de connaissances mathématiques dans un milieu constitué à cette fin, par des individus, élèves, adultes actuels. En ce sens, il est confronté au problème de l'élaboration (pour des recherches de type ingénierie didactique) ou de l'analyse de génèses de la connaissance que, pour les distinguer de la génèse historique, on qualifie souvent de génèses artificielles.

Certes les contraintes qui gouvernent ces génèses ne sont pas identiques à celles qui ont gouverné la génèse historique, mais cette dernière reste néanmoins, pour le didacticien, un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné, ou base de travail, s'il s'agit d'élaborer une telle génèse.

Ceci, pour une raison évidente, à savoir que les problèmes qui ont motivé l'introduction de tel ou tel concept comme ceux qui ont gouverné son évolution sont constitutifs de la signification de ce concept et que le didacticien, dans son analyse, est nécessairement confronté à ce problème de la signification du concept.

Au delà de l'analyse conceptuelle, l'épistémologie intervient à ce niveau sur un plan plus général car ce que vise l'enseignement des mathématiques, ce n'est pas simplement la transmission de connaissances mathématiques, c'est plus globalement celle d'une culture. Il s'agit de faire entrer les élèves dans le jeu mathématique. Mais, qu'est ce jeu mathématique? Quels sont les processus généraux de pensée qui le gouvernent? C'est l'analyse épistémologique (pas nécessairement historique à ce niveau, même si l'approche historique permet de saisir l'aspect nécessairement historique et spatial de cette culture) qui est au premier chef concernée par ces questions.

Elle renvoie au didacticien un certain nombre de questions globales et fondamentales pour guider la productions d'ingénieries didactiques comme l'analyse de l'enseignement usuel:
— Que transposer dans l'enseignement des constituants de cette culture et de leurs interelations?
— Y-a-t-il une transposition minimale ou un ensemble de transpositions minimales à respecter pour ne pas dénaturer le sens de cette culture?

— Est-ce possible? Sous quelles conditions?
— En quoi les transpositions peuvent-elles ou doivent-elles dépendre des publics auxquels s'adresse l'enseignement?
— Quelles sont les contraintes qui pèsent sur les transpositions usuelles? Quels sont leurs effets?

Dans cette perspective, le travail du didacticien ne se limite d'ailleurs pas à intégrer ce questionnement de nature épistémologique à son activité. Il consiste aussi à construire les cadres théoriques permettant le travail sur de telles questions et la capitalisation des acquis didactiques.

A mes yeux, la théorie des situations didactiques élaborée par G. Brousseau (cf. [9]), les concepts de dialectique outil/objet et de jeux de cadres élaborés par R. Douady (cf. [10]), comme la notion de situation co-didactique développée par D. Alibert, M. Legrand et F. Richard (cf. [11]) sont justement des constructions répondant à ces besoins.

Mais, imaginons que l'on interroge à brûle-pourpoint un didacticien des mathématiques (ou de la physique d'ailleurs) en lui demandant ce que la didactique a emprunté à l'épistémologie. Il y a fort à parier que la première pensée qui viendra à l'esprit de notre didacticien, le premier mot qui passera ses lèvres, ne sera ni «théorie des situations», ni «dialectique outil/objet», ni «jeux de cadres», ni «situation codidactique» — tous ces objets sont perçus comme purement internes au didactique, l'épistémologie y est invisible — mais le mot «d'obstacle» accompagné d'une pensée à Gaston Bachelard. En effet, c'est sur la notion d'obstacle qu'a tendance à se focaliser la visibilité de l'épistémologie en didactique.

III. ÉPISTÉMOLOGIE ET OBSTACLES

La notion d'obstacle épistémologique a été introduite par le philosophe et épistémologue Gaston Bachelard dans un livre paru en 1938 et intitulé: «La formation de l'esprit scientifique» [12]. Il y écrit (p.13):

> «Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes comme la complexité

et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain: c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de regression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. La connaissance du réel est une lumière qui projette toujours quelque part des ombres. Elle n'est jamais immédiate et pleine. Les révélations du réel sont toujours récurrentes. Le réel n'est jamais "ce qu'on pouvait croire" mais il est toujours ce qu'on aurait dû penser. La pensée empirique est claire, après coup, quand l'appareil des raisons a été mis au point. En revenant sur un passé d'erreurs, on trouve la vérité en un véritable repentir intellectuel. En fait, on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation.»

Et, dans la suite du livre, il identifie, à partir d'exemples historiques, chapitre après chapitre, quelques grandes catégories d'obstacles: l'expérience première, la connaissance générale, l'obstacle verbal, l'utilisation abusive des images familières, la connaissance unitaire et pragmatique, l'obstacle substantialiste, l'obstacle réaliste, l'obstacle animiste, celui enfin de la connaissance quantitative.

Il faut souligner cependant que Bachelard écarte explicitement les mathématiques de son propos. Elles échappent selon lui à ce type de fonctionnement et il écrit (p.22):

«En fait, l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas des périodes d'erreurs. Aucune des thèses que nous soutenons dans ce livre ne vise donc la connaissance mathématique. Elles ne traitent que de la connaissance du monde objectif.»

Des didacticiens vont cependant importer ce concept en didactique des mathématiques.

a) L'introduction de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques

Le premier texte de didactique des mathématiques où apparaisse la notion d'obstacle épistémologique est, à ma connaissance, celui de la conférence présentée en 1976 par G. Brousseau à la conférence de la CIEAEM, à Louvain la Neuve [13]. G. Brousseau y voit en particulier dans la notion d'obstacle le moyen de changer le statut de l'erreur en montrant que:

«l'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiriques ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise.»

Dans la perspective qui est la sienne d'un apprentissage par adaptation à un milieu problématique, l'objet principal de la didactique est justement *«d'étudier les conditions que doivent remplir les situations ou problèmes proposés à l'élève pour favoriser l'apparition, le fonctionnement et le rejet de ces conceptions successives»*. Ceci le conduit à la notion de saut informationnel, seul un saut informationnel suffisant pouvant en effet bloquer les mécanismes d'adaptation et d'accomodation des conceptions antérieures et entraîner la remise en cause d'une connaissance obstacle.

Dans ce texte, G. Brousseau distingue en fait trois origines fondamentales aux obstacles rencontrés dans l'enseignement mathématique:

— *une origine ontogénétique,* correspondant aux obstacles liés aux limitations des capacités cognitives des élèves engagés dans le processus d'enseignement,
— *une origine didactique* pour les obstacles liés aux choix du système d'enseignement,
— *une origine épistémologique,* enfin, pour les obstacles liés à la résistance d'un savoir mal adapté, c'est-à-dire les obstacles au sens de Bachelard.

Et, dans le même temps, il souligne l'importance pour le didacticien de l'analyse épistémologique, l'identification des obstacles qu'elle permet devant permettre de trier, parmi les difficultés généralement rencontrées par l'enseignement dans l'apprentissage de telle ou telle notion, celles qui sont réellement inévitables parce que constitutives du développement de la connaissance.

Il essaie ensuite d'illustrer sa théorisation en considérant l'enseignement des décimaux et en identifiant un obstacle didactique majeur: celui qui consiste à traiter les décimaux comme des entiers avec une virgule et deux obstacles épistémologiques: le problème de la symétrisation de N pour la multiplication et la construction de D comme moyen d'approcher Q d'une part, la conception des rationnels et des décimaux en tant que rapports, et puis en tant qu'applications linéaires opérant dans Q d'autre part. Mais la preuve de leur qualité d'obstacle épistémologique n'est pas vraiment apportée et l'analyse tend à se diluer dans la présentation des situations d'enseignement conçues pour «franchir» ces obstacles.

Un second article, consacré à cette notion et intitulé: «Epistémologie des nombres négatifs» paraît en 1981 dans la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques* (G. Glaeser [14]). G. Glaeser essaie d'y identifier les obstacles qui ont marqué historiquement le développement conceptuel des nombres négatifs, en prenant le soin de préciser (p.304) qu'il utilise dans cet article les mots «obstacles, difficultés, seuil, symptôme» très naïvement, estimant que:

> «Ce n'est qu'à la suite de nombreux travaux qu'on sera en mesure de juger des distinctions pertinentes, utiles pour le développement de la didactique expérimentale.»

Son analyse de textes historiques va conduire G. Glaeser à identifier dans l'histoire des nombres négatifs une dizaine d'obstacles révélés par une vingtaine de symptômes, obstacles en particulier à une compréhension satisfaisante de la règle des signes, une règle déja en germe dans «l'Arithmétique» de Diophante, à la fin du IIIème siècle après J. C., même s'il n'y a pas alors de référence aux nombres négatifs:

> «Ce qui est de manque multiplié par ce qui est de manque donne ce qui est positif; tandis que ce qui est de manque multiplié par ce qui est positif, donne ce qui est de manque.»

et qui demandera pourtant près de 1500 ans avant d'être tout à fait élucidée.

Nous nous bornerons ici à citer la première liste d'obstacles donnée par G. Glaeser:

1. Inaptitude à manipuler des quantités négatives isolées.
2. Difficulté de donner un sens à des quantités négatives isolées.
3. Difficulté à unifier la droite numérique, qui se manifeste par exemple dans la considération de la droite comme juxtaposition de deux demi-droites opposées.
4. L'ambiguïté des deux zéros (zéro origine et zéro absolu).
5. La difficulté à s'écarter du sens «concret» attribué aux nombres.
6. Le désir d'un modèle unifiant, c'est-à-dire par exemple le souhait de faire fonctionner à tout prix pour le registre multiplicatif le modèle perte/gain efficace pour le registre additif,

et à reproduire le tableau qu'il propose pour rendre compte, de façon schématique, du franchissement ou non franchissement de ces différents obstacles par un certain nombre de mathématiciens, au cours de l'histoire.

Obstacles / Auteurs	1	2	3	4	5	6
Diophante	-					
Simon Stevin	+	-	-	-	-	-
René Descartes	+	?	-	?		
Colin McLaurin	+	+	-	-	+	+
Léonard Euler	+	+	+	?	-	-
Jean d'Alembert	+	-	-	-	-	-
Lazare Carnot	+	-	-	-	-	-
Pierre de Laplace	+	+	+	?	-	?
Augustin Cauchy	+	+	-	-	+	?
Herman Hankel	+	+	+	+	+	+

Ce texte suscitera une vive controverse. Dans un article publié par la même revue en 1983 [15], G. Brousseau reprend sa communication à Louvain la Neuve déja citée et insiste, en faisant référence au travail de Duroux sur la valeur absolue [16], sur ce qui distingue une difficulté d'un obstacle: un obstacle est une connaissance. Il critique vigoureusement G. Glaeser pour sa formulation des obstacles 1 et 2 cités plus haut, y voyant le témoignage d'une problématique didactique inadéquate:

> «Cette formulation montre ce qui manque à Diophante ou à Stévin, vu de notre époque, dans notre système actuel. Nous repérons ainsi un savoir ou une possibilité qui manque au XVe siècle et qui empêche de donner la "bonne" solution ou la formulation adéquate. Mais cette formulation masque la nécessité de comprendre par quels moyens on abordait les problèmes qui auraient nécessité la manipulation de quantités négatives isolées. Se posait-on ces problèmes? Comment les résolvait-on? Ou croyait-on pouvoir les résoudre? Est-ce-que ce qui nous apparaît aujourd'hui comme une difficulté était perçu de la même façon à l'époque? Pourquoi cet "état de connaissances" paraissait-il suffisant, sur quel ensemble de questions était-il raisonnablement efficace? Quels avantages procurait le "refus" de manipuler des quantités négatives isolées ou quels inconvénients permettait-il d'éviter? Cet état était-il stable? Pourquoi les tentatives de le modifier ou plutôt de le renouveler étaient-elles vouées à l'échec à ce moment-là? Peut-être jusqu'à ce que de nouvelles conditions apparaissent et qu'un travail "latéral" soit accompli, mais lequel?
> Ces questions sont nécessaires pour entrer dans l'intimité de la construction des connaissances mais Glaeser ne les a pas posées...»

Sans nier que les difficultés repérées par Glaeser puissent trouver à s'exprimer sous forme d'obstacles, il rappelle les conditions nécessaires selon Duroux pour qu'une difficulté repérée dans l'histoire puisse être qualifiée d'obstacle, outre la condition déja citée d'être une connaissance: existence d'un domaine de validité et d'efficacité, résistance.

Pour lui, c'est dans l'analyse historique de ces résistances et dans les débats qui les ont vaincues qu'il faut chercher les éléments qui permettent d'identifier les obstacles des élèves et, sans chercher à plaquer l'étude historique sur l'étude didactique, chercher aussi les arguments pour construire les situations d'enseignement qui permettront leur franchissement.

La thèse sur l'apprentissage de la notion de limite soutenue par B. Cornu en 1983 [17] et les travaux d'A. Sierpinska qui la prolongent [18] se réclament de cette approche. A. Sierpinska écrit par exemple:

> «La recherche dont il est question dans le présent article se place dans la voie des recherches indiquée par G. Brousseau dans son (1983). Découvrir les obstacles épistémologiques liés aux mathématiques à enseigner à l'école et trouver les moyens didactiques pour aider les élèves à les surmonter — voilà, brièvement, deux principaux problèmes de ce programme de recherche.»

Et, après avoir fait allusion aux controverses didactiques sur le sujet, elle précise sa position:

> «Pour notre part, nous retiendrons deux aspects de la notion d'obstacle épistémologique selon G. Bachelard (Bachelard 1938):
> — l'apparition des obstacles a un caractère inévitable [...],
> — la répétition de leur apparition dans la philogénèse et l'ontogénèse des concepts.»

Couplant ensuite l'étude historique et l'observation de deux couples d'élèves dans deux tâches: la première préparant l'identification de la tangente comme limite d'une sécante variable, la seconde consistant à trouver l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction sinus à l'origine, elle propose une liste de cinq groupes d'obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite:

— *horror infiniti*, qui regroupe les obstacles liés au refus de statut d'opération mathématique pour le passage à la limite, au transfert automatique des méthodes d'algèbre propre à manipuler les grandeurs finies à des grandeurs infinies, au transfert des propriétés des termes d'une suite convergente à sa limite et enfin l'obstacle qui consiste à associer le passage à la limite à un mouvement physique, à un rapprochement,

— *les obstacles liés au concept de fonction:* occultation de la notion de fonction sous-jacente, restriction à une suite de valeurs, réduction monotone, non distinction de la limite de la notion de borne inférieure ou supérieure,

— *les obstacles géométriques,* l'intuition géométrique faisant «un obstacle sérieux à la formulation d'une définition rigoureuse, autant en empêchant la détermination de ce qu'il faut comprendre par la différence entre deux grandeurs que par un attachement de la notion de limite à la notion de borne d'un ensemble»,

— *les obstacles logiques,* liés à l'effacement des quantificateurs ou de leur ordre,

— *l'obstacle du symbole,* lié à la réticence à introduire un symbolisme spécifique pour l'opération de passage à la limite.

Mais, de ces travaux on retire l'impression que, ce qui fonde en quelque sorte les obstacles épistémologiques, c'est leur apparition et leur résistance dans l'histoire des concepts considérés, ainsi que l'observation de conceptions analogues chez les élèves, plus que l'attestation de la résistance de ces conceptions chez les élèves actuels.

Or, cette condition me semble essentielle: du fait de la disparité des contraintes qui gouvernent les deux systèmes, l'analyse historique peut aider le didacticien dans sa recherche des nœuds de résistance de l'apprentissage, elle ne peut, en aucun cas, apporter à elle seule la preuve de l'existence de tel ou tel obstacle pour les élèves actuels.

Et ce, d'autant plus que l'on constate que les nœuds actuels de résistance sévère correspondent souvent aux points où un obstacle d'origine épistémologique historique intervient renforcé par un obstacle d'une autre origine, en particulier un obstacle d'origine didactique.

La comparaison entre deux candidats au statut d'obstacle cités dans ces travaux: la confusion limite/borne et la réduction monotone me paraît intéressante de ce point de vue. Le premier, au moins dans ses formes les plus sommaires, celles purement liées à la prégnance du sens commun du mot limite, par exemple la confusion notée par B. Cornu entre borne et limite dans le mouvement d'un pendule, ne semble pas constituer une difficulté réellement résistante. Il ne résiste en fait que dans les manifestations qui peuvent être également reliées au second c'est-à-dire à la réduction monotone. Or l'enseignement usuel, comme l'a montré A. Robert dans sa thèse ([19]), renforce la réduction monotone en fournissant aux étudiants presque exclusivement des suites soit monotones, soit qui se décomposent aisément en suites monotones.

Ce phénomène est sans aucun doute lié à l'intervention constante de telles suites en mathématiques[4], mais il est aussi la marque imprimée au fonctionnement du système par la loi de *«réduction algorithmique»* qui le régit. Dans les débuts de l'enseignement de l'analyse, l'enseignement rencontre des difficultés indéniables liées à la mise en place de tout ce qui constitue la spécificité du fonctionnement de l'analyse par rapport à l'algèbre (rôle central de l'approximation et des techniques associées, des raisonnement par conditions suffisantes avec les choix de perte d'information à effectuer sous-jacents, complexité des formalisations). Sa tendance naturelle est de contourner ces difficultés en fournissant très vite aux élèves des théorèmes puissants qui permettent de court-circuiter le registre de l'approximation et de se ramener à un fonctionnement technique de type algébrique. En ce qui concerne les suites, il s'agit des théorèmes qui gèrent l'algèbre des limites et justement des théorèmes assurant la limite des suites croissantes majorées (respectivement décroissantes minorées). L'enseignement tend ainsi à s'organiser autour de la mise en œuvre de ces théorèmes dans des contextes adaptés et c'est cette analyse technique et algébrisée qui sera le noyau du rapport à l'objet «suite» qui se développera chez l'élève, renforçant jour après jour le modèle monotone.

Il est dans ces conditions raisonnable de faire l'hypothèse que la persistance constatée d'erreurs liées à cette réduction monotone est tout autant le produit de ces contraintes didactiques que de contraintes épistémologiques.

Compte tenu des disparités entre les conditions des génèses historique et scolaire, il semble même raisonnable de faire l'hypothèse de l'existence pour l'enseignement actuel de nœuds de résistance qui fonctionnent comme ont fonctionné les obstacles épistémologiques dans le développement des mathématiques, sans qu'il soit possible pour autant de leur attribuer historiquement le statut d'obstacle. Ceci nous renvoie inévitablement, dans une démarche parallèle à celle de Bachelard, au delà de l'identification des obstacles dans l'histoire ou l'apprentissage de telle ou telle notion, à une identification des processus producteurs d'obstacles en mathématiques.

4. Cette prégnance du contexte monotone est à relier, d'un point de vue épistémologique, au processus de fixation sur un contexte familier, qui sera introduit dans le paragraphe IIc.

Pour avancer dans cette voie, il nous semble intéressant de prendre en compte l'analyse faite par L. Viennot dans [20] et [21], concernant la notion d'obstacle en didactique de la physique.

b) Les obstacles épistémologiques en didactique de la physique

Selon L. Viennot, les recherches qui se sont développées depuis une vingtaine d'années en didactique de la physique sur les conceptions des apprenants ont conduit à opposer connaissance commune et connaissance scientifique. La connaissance commune y apparaît en effet dotée d'un certain nombre de caractéristiques: «Statut d'évidence, flou et ambiguité des formulations, manque de cohérence interne» qui sont opposées à celles de la connaissance scientifique.

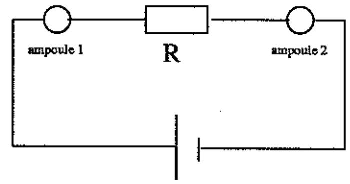
Tout en soulignant que le domaine de la mécanique fournit des exemples de traits de la connaissance commune qui semblent très conformes à cette description, L. Viennot s'attache dans ces deux textes à rechercher une ligne d'analyse qui conduise à une description plus synthétique et plus opératoire que les catalogues de conceptions ou misconceptions que fournissent un certain nombre de recherches.

En s'appuyant sur un autre découpage des champs scientifiques en cause, elle montre ainsi l'existence, en mécanique, de cohérences que les chercheurs n'avaient pas su lire d'emblée dans les réponses des élèves. Par exemple, dans l'analyse de réponses à des questions faisant intervenir des forces, en élargissant le champ, au delà de la notion de force, aux notions de vitesse et d'énergie, on voit apparaître une cohérence des réponses fournies correspondant à l'utilisation implicite d'un critère de compatibilité: si mouvement il y a, force il y a et de même sens.

De plus, elle montre, en s'appuyant sur divers travaux, que l'élargissement des domaines explorés, au delà de la mécanique et de la dynamique qui avaient servi de support aux premières recherches sur le raisonnement des étudiants, a permis de mettre en évidence des régularités transverses par rapport aux domaines conceptuels étudiés.

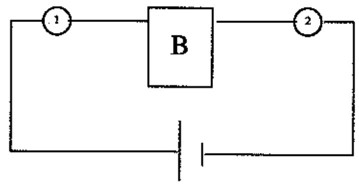
Le *raisonnement séquentiel* identifié par J. L. Closset en électrocinétique [22] en fut le premier exemple, semble-t-il.

Considérons la situation suivante:



Environ 50% des étudiants de première année d'Université interrogés affirment que, dans ce circuit, la lampe 2 brillera moins fort que la lampe 1. Le pourcentage tombe à 10% environ avec des étudiants plus avancés.

Si l'on se place maintenant dans la situation suivante:



Interrogés sur ce qu'il convient de mettre dans la boîte B pour que les deux ampoules brillent de la même façon, environ 50% des étudiants écartent la possibilité de mettre une pile et ils restent environ 33% à un niveau plus avancé à conserver ce point de vue.

Dans ces deux situations, bien que les différents éléments du circuit soient en interaction mutuelle, les réponses obéissent à un mode séquentiel comme si A agissait sur B qui agissait sur C, lequel n'agirait pas sur A. D'où le nom de raisonnement séquentiel.

Des régularités similaires ont été mises en évidence par d'autres chercheurs, par exemple par L. Maurines dans sa thèse sur la propagation des ondes [23] et par S. Rozier en thermodynamique [24].

De plus, une relecture des recherches antérieures dans cette perspective tend à montrer que beaucoup des régularités précédemment observées, par exemple en dynamique, peuvent s'interpréter en faisant intervenir un nombre réduit de mécanismes de réduction de la complexité:

— *le raisonnement linéaire causal* qui consiste à réduire la complexité fonctionnelle en la transformant en un ensemble de relations binaires traitées ensuite sur le mode temporel (le raisonnement séquentiel en électrocinétique en est un exemple),

— *l'amalgame de différentes grandeurs par l'intermédiaire d'un objet support:* vitesse et hauteur d'une bosse sur une corde, force et vitesse d'un mobile, tension et courant d'une pile...

— *la fixation de certaines grandeurs.*

Comme le souligne L. Viennot, les régularités ainsi mises en évidence amènent naturellement le chercheur à se poser la question d'un «bon» niveau d'identification des obstacles.

Enfin, si les obstacles paraissent liés à de grandes tendances du raisonnement, au delà de telle ou telle acquisition conceptuelle précise, le chercheur est naturellement conduit également à se poser la question suivante: ces formes de raisonnement sont-elles uniquement le fait du novice ou existent-elles encore chez l'expert?

L'analyse des réponses d'enseignants à différents questionnaires tend à suggérer la réponse: oui. Physiciens et enseignants de physique utilisent fréquemment le raisonnement linéaire causal décrit par S. Rozier, dans certaines de leurs pratiques. Ils le font en particulier quand ils commentent un énoncé ou cherchent à expliquer tel ou tel phénomène dans un langage non formalisé. Dans la résolution de problèmes, ce type de raisonnement est mieux contrôlé mais il réapparaît lorsque les situations proposées ne sont plus familières et les erreurs commises ne diffèrent alors pas sensiblement de celles des étudiants, comme si plutôt que franchissement d'obstacles, il y avait eu adaptation au coup par coup. L. Viennot écrit à ce propos:

> «C'est dire que cet obstacle à la connaissance scientifique que constitue un raisonnement linéaire, réducteur du point de vue fonctionnel, est de grande envergure et qu'il n'a nullement disparu à l'occasion des nombreux conflits cognitifs que les experts sont censés avoir vécu à ce propos. Les adaptations ont été locales, de plus en plus étendues à mesure que la compétence a augmenté mais la racine est restée.»

Ce qui caractériserait alors l'expert serait non pas le franchissement au sens naïf de l'obstacle mais *la possibilité de fonctionner dans différents registres et, dans certains de ces registres, d'arriver à contrôler l'obstacle.*

c) Un retour aux mathématiques

Dans un texte récent intitulé «Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques» [25], G. Brousseau reprend l'analyse de l'approche par les obstacles en didactique des mathématiques. Il précise notamment que le travail du chercheur consiste d'abord à:

> «a) Trouver les erreurs récurrentes, montrer qu'elles se regroupent autour de conceptions.
> b) Trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques.
> c) Confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage et établir leur caractère épistémologique.»

et, revenant ensuite sur la notion même d'obstacle, il rappelle les caractéristiques énoncées par Duroux [16]:

> «a) Un obstacle sera une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance.
> b) Cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte fréquemment rencontré.
> c) Mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.
> d) De plus, cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse (ce qui distingue le franchissement d'obstacles de l'accomodation de Piaget). Il est donc indispensable de l'identifier et d'incorporer son rejet dans le nouveau savoir.
> e) Après la prise de conscience de son inexactitude, elle continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre.»

L'accent est donc mis, au delà de l'aspect connaissance et de la reconnaissance historique, sur la nécessité de prouver la résistance actuelle de cette connaissance y compris après ce que l'on pourrait considérer comme le franchissement de l'obstacle (condition e). La notion d'obstacle y est aussi accrochée à la production d'erreurs: la connaissance doit engendrer des réponses fausses.

G. Brousseau étudie ensuite, de façon très détaillée, une connaissance fossile: l'usage exclusif des quantièmes pour exprimer les fractions dans l'Egypte ancienne, examinant, à travers cette liste de caractéristiques, sa candidature au statut d'obstacle épistémologique, avant de conclure son analyse en ces termes:

> «Cet exemple montre qu'un obstacle n'est fait ni de maladresses, ni d'explications réellement "fausses". Il est une adaptation légitime à des conditions précises, et il laisse des traces dans la culture. Nous ne savons pas encore caractériser les obstacles dans un métalangage spécifique comme l'a fait Bachelard.»

Notons que la condition c) énoncée ci-dessus, ne se trouve pas strictement vérifiée dans cette analyse. La conception des quantièmes ne produit pas de résultats faux. Si elle est abandonnée, c'est parce qu'elle se révèle inadaptée à certains problèmes, à certaines opérations.

Ce phénomène n'est pas à mes yeux purement anecdotique. Ce que cause la connaissance obstacle dans l'histoire des mathématiques, et l'analyse de G. Glaeser sur l'épistémologie des nombres négatifs le met bien en évidence, c'est plus souvent que l'erreur, l'incapacité à appréhender certains problèmes ou à les résoudre efficacement. Faut-il donc imposer à l'adaptation didactique de la notion d'obstacle épistémologique d'être, elle, nécessairement productrice d'erreurs?

Dans le paragraphe 4 de son texte, intitulé: *«Recherche d'un obstacle à partir des situations scolaires: un obstacle actuel inattendu, les naturels»,* G. Brousseau soulève de plus, me semble-t-il, le problème évoqué plus haut de la possible existence de connaissances qui, sans que leur statut d'obstacle historique soit ou puisse être attesté, fonctionneraient comme des obstacles.

Il est bien connu en effet, et de multiples recherches didactiques sont là pour l'attester (cf. par exemple C. Grisvard, F. Léonard [26], M. J. Perrin [27]), que les connaissances acquises sur les entiers fonctionnent comme obstacle lors de l'extension de cet ensemble de nombres aux décimaux. Un certain nombre de convictions fortes sur les propriétés que possèdent les nombres et les opérations se sont en effet constituées (tout nombre a un prédécesseur et un successeur, la multiplication produit des nombres plus grands, la division des nombres plus petits...) et ces propriétés, indissociablement liées au concept de nombre, importées dans les décimaux lors de l'extension du concept, créent des erreurs particulièrement résistantes.

Pour leur conférer le statut d'obstacle épistémologique en didactique est-il, dans ces conditions, absolument essentiel de fournir l'attestation historique de difficultés analogues?

Une transposition didactique efficace de la notion d'obstacle épistémologique doit-elle forcément rester accrochée à l'histoire?

Ces deux questions nous renvoient, me semble-t-il, au delà du problème de l'attribution du statut d'obstacle épistémologique à telle ou telle difficulté rencontrée par l'enseignement, à la recherche, dans le fonctionnement de la connaissance, de mécanismes producteurs d'obstacles. En effet, s'il paraît naturel d'attribuer à N le statut d'obstacle épistémologique par rapport à D, c'est parce que l'on perçoit dans le fonctionnement de ce candidat obstacle, la manifestation d'un processus qui s'est révélé historiquement générateur d'obstacles: *la généralisation abusive*. Effectivement, en tant que producteur d'obstacles, ce processus est à l'évidence présent dans le développement historique de nombreux domaines des mathématiques, à travers l'application plus ou moins explicite du principe de continuité énoncé par Leibniz, par exemple.

A ce niveau d'analyse, il me semble d'ores et déja possible d'identifier un certain nombre de processus, à la fois historiquement et pour nos élèves actuels, producteurs d'obstacles. Outre le processus de généralisation abusive mentionné ci-dessus, il s'agit de:

— *La régularisation formelle abusive*: elle est, à mon avis, à l'œuvre dans certaines erreurs tenaces des élèves comme $(a+b)^2= a^2+b^2$ ou $\sqrt{a+b}= \sqrt{a}+\sqrt{b}$, dans certaines erreurs résistantes de manipulations indiciaires (cf. A. Robert [28]), elle est à l'œuvre historiquement dans les obstacles algébriques liés à la notion de limite décrits par A. Sierpinska et cités plus haut, par exemple. Elle semble obéir à une logique semblable au processus de généralisation abusive, tout en se situant dans un registre de fonctionnement plus étroitement formel.

— *La fixation sur une contextualisation ou une modélisation familières*: Ce processus est sans doute historiquement le processus le plus visible. Sa reconnaissance est sans doute implicite chez Bachelard quand il admet que les mathématiques peuvent admettre des périodes d'arrêt. L'article sur l'épistémologie des nombres négatifs, déja cité, nous en fournit au moins deux exemples: l'attachement exclusif de la notion de quantité à celle de grandeur d'abord, la fixation sur le modèle additif des pertes et gains ensuite, et met bien en évidence la résistance à la progression que ces fixations déterminent. Chez les élèves, il peut se manifester par la pression de la connaissance culturelle et sociale (cf. les obstacles liés à la connaissance commune déja cités), mais le plus souvent c'est dans l'attachement à une conception non pas culturelle mais scolaire (cf. par exemple l'attachement à la conception partage de l'unité dans l'enseignement des fractions et les travaux de H. Ratsimba Rajohn [29] visant à essayer de déstabiliser ce point de vue au profit de la commensurabilité).

— *L'amalgame de notions sur un support donné,* objet géométrique ou autre: on le voit à l'œuvre dans l'histoire par exemple dans l'obstacle géométrique à propos des limites, dans la lente différentiation de certaines propriétés à propos des fonctions. Chez l'élève, il est à l'origine d'erreurs tenaces constatées dans le traitement des longueurs et des aires, tenues de varier dans le même sens (cf. R. Douady et M. J. Perrin [30]). Il est présent aussi chez les étudiants lorsque la convergence géométrique leur suffit à assurer celle de toutes les grandeurs associées à l'objet, par exemple (cf. M. Artigue *et al.* [31]).

Cette liste n'est sûrement pas exhaustive des mécanismes producteurs d'obstacles. J'ai voulu, en la présentant, surtout montrer l'intérêt d'une telle approche dans une perpective d'identification et d'étude du fonctionnement des obstacles en didactique des mathématiques. En effet, l'analyse à ce niveau, d'une part peut aider le didacticien à lutter contre l'émiettement qui, en ce qui concerne les obstacles comme en ce qui concerne les conceptions (cf. paragraphe suivant), est une pente naturelle de la recherche, d'autre part, elle attire son attention sur un certain nombre de points:

— L'adhérence exclusive à un point de vue est peut-être, dans l'enseignement comme dans l'histoire, un des processus clefs en matière d'obstacle. Or cette adhérence ne se manifeste pas automatiquement par des erreurs, elle se manifeste tout autant par l'incapacité à traiter efficacement ou même simplement à donner du sens à certains problèmes. Même si au départ, une caractérisation en termes d'erreurs a été utile et utilisée efficacement pour attirer l'attention sur le statut des erreurs, il se peut qu'un attachement trop exclusif à cette caractéristique finisse par constituer un frein au développement et à l'exploitation efficace de la notion d'obstacle en didactique.

— On retrouve dans certains des processus cités: amalgame de notions sur un support, régularisation abusive, par exemple, des processus proches de ceux identifiés par les didacticiens de la physique. Ceci n'est sans doute pas un hasard et des ressemblances du même ordre interviennent dans ce qui différencie novices et experts dans les deux disciplines: capacité à changer aisément de registre, capacités de contrôle...

— Derrière certains des processus que nous avons identifiés se profilent des processus fondamentaux du fonctionnement mathématique: généralisation, recherche systématique de régularités, par exemple. Et d'ailleurs il faut bien constater qu'avant de se constituer en obstacle, dans le développement de nombreux domaines mathématiques, la généralisation abusive a été éminemment productrice: tout le traitement des fonctions au XVIIIème siècle, par exemple, a été basé sur une conception des fonctions comme des polynomes continués via les développements en série, et on ne peut nier la fécondité de ce point de vue à l'époque. Tout le calcul sur les quantités imaginaires s'est développé à partir de l'application du principe de continuité. Il est clair qu'à certains moments, un tel point de vue a secrété des difficultés tenaces (cf. par exemple certains aspects de la controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, J. L. Verley [32]) mais le fait de fonctionner sur la base de cette généralisation abusive a été aussi incroyablement producteur.

Ceci pose le problème de l'intervention didactique. D'une part, si l'on peut s'attaquer aux conséquences de certains processus, il est sans doute vain d'essayer de s'attaquer aux processus eux-mêmes, dans la mesure où ils sont partie intégrante du fonctionnement normal du mathématicien. D'autre part, autant que de s'attaquer ponctuellement à tel ou tel obstacle, peut-être est-il aussi utile d'aider l'élève à maîtriser et contrôler ces processus fondamentaux que sont la généralisation et la régularisation, dans leur tendance au dérapage. Il est évident que par rapport à un tel objectif, les moyens d'action vont sans doute dépendre de l'âge des élèves via leurs capacités à prendre conscience (de) et travailler sur leur propre fonctionnement.

Cette analyse nous montre aussi qu'un fonctionnement erroné pour le mathématicien actuel, a pu vivre et surtout se révéler profondément producteur dans l'histoire, à un moment donné de la génèse. On peut, même plus, faire l'hypothèse qu'une telle conception était, à l'époque, la plus productrice possible, compte-tenu du degré d'élaboration conceptuelle des objets en jeu. Que transposer de cette réalité historique en didactique et plus généralement dans l'enseignement et pourquoi? Une conception de l'apprentissage en termes d'obstacles que l'on s'empresserait successivement de franchir dans la quête d'une mythique conception achevée et universelle est-elle une bonne transposition[5]?

Nous voudrions, pour terminer ce paragraphe, souligner que les chercheurs en didactique des mathématiques, s'ils se rallient globalement à une approche constructiviste de la formation des connaissances, mettant au centre de l'apprentissage les processus de déséquilibration-rééquilibration et les réorganisations qui leur sont associées, ne se situent pas tous dans une approche en termes d'obstacles épistémologiques. Je vois à ceci deux raisons essentielles:

— Le faible nombre de difficultés dont le statut d'obstacle épistémologique est, à l'heure actuelle, véritablement attesté, si l'on impose à cette attestation la validation des différentes conditions citées plus haut. Ceci conduit inévitablement le chercheur à se demander si cette notion est réellement nécessaire à la théorie didactique.

— Les implications pédagogiques pressenties d'un ralliement à cette approche. La façon «brutale» dont elle a été souvent prise en compte au niveau des réalisations didactiques, en focalisant l'attention sur la seule organisation des rejets successifs de conceptions erronnées, n'est sans doute pas étrangère aux réticences se situant à ce niveau.

L'analyse qui a été développée ici avec en particulier l'identification de processus générateurs d'obstacles, l'accent mis

5. L'analyse présentée ici est en fait proche de celle développée par A. Sierpinska dans sa communication au Colloque: «Obstacle épistémologique et conflit cognitif» qui s'est tenu à Montréal en octobre 1988 [33], dont je n'avais pas connaissance au moment où j'ai écrit cet article. S'appuyant sur les travaux de Wilder, elle distingue trois niveaux dans la culture mathématique: les niveaux formel, informel et technique correspondant respectivement au niveau des croyances et convictions, au niveau des règles et schémas inconscients de fonctionnement et au niveau des théories et des résultats explicitement attestés. Et elle développe la thèse que c'est aux deux premiers niveaux uniquement que se situent les obstacles épistémologiques en insistant elle aussi sur le caractère relatif de ces derniers. Notons que c'est bien à ces niveaux que se situent les processus producteurs d'obstacles identifiés dans ce texte, même si le type de description adopté ne permet pas toujours une catégorisation franche entre formel et informel.

grâce à elle sur les problèmes de mobilité et de contrôle, au delà des seuls problèmes de rejet, ainsi que sur la réalité des différences entre novices et experts, les questions qui en résultent au niveau de l'intervention didactique, devraient permettre, du moins je l'espère, d'envisager autrement le problème de ces divergences.

IV. ÉPISTÉMOLOGIE ET CONCEPTIONS

Nous avons très souvent employé dans ce qui précède le terme de «conception». C'est un terme qui, comme celui d'obstacle, a tracé son chemin dans l'édifice didactique, au moins en France, suscitant sans aucun doute moins de passion que la notion d'obstacle, mais aussi et peut-être par là-même moins travaillé par la communauté. Dans ce paragraphe, nous essayerons de restituer la trajectoire de cette notion dans la communauté didactique française, en mettant en évidence ses attaches à la fois épistémologiques et cognitives et en évoquant, très brièvement, le problème de sa survie dans le cadre d'une théorie anthropologique comme celle développée par Y. Chevallard dans [7].

La notion de conception répond en effet, me semble-t-il, à deux nécessités distinctes:

— mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique, différencier les représentations et modes de traitement qui lui sont associés, mettre en évidence leur adaptation plus ou moins bonne à la résolution de telle ou telle classe de problèmes,

— aider le didacticien à lutter contre l'illusion de transparence de la communication didactique véhiculée par les modèles empiristes de l'apprentissage, en lui permettant de différencier le savoir que l'enseignement veut transmettre et les connaissances effectivement construites par l'élève[6].

On retrouve ces deux pôles, plus ou moins dominants, dans l'ensemble des recherches didactiques qui se sont développées

6. La notion de conception n'est pratiquement pas utilisée dans la littérature anglo-saxone qui se réfère beaucoup plus volontiers à la notion a priori voisine de misconception (cf. par exemple les actes du Congrès organisé sur ce thème à l'université de Cornell en juillet 1988 [34]). A mes yeux ce choix n'a rien de neutre et traduit justement la priorité accordée dans les recherches sur les misconceptions au second pôle cité: le pôle cognitif.

ces dix dernières années autour de l'étude des «conceptions» des élèves, en France. J'écris ici le mot de conception entre guillemets car ce n'est pas en terme de conceptions que les différents auteurs s'expriment nécessairement, même s'ils ont par ailleurs des problématiques voisines. Ce terme entre en effet en concurrence avec divers autres: représentations, modèles, par exemple, aucun n'apparaissant avec un champ vraiment spécifique.

Ce terme de «conception» va apparaître dans la littérature didactique, importé en quelque sorte du langage courant, sans qu'au départ les auteurs semblent éprouver le besoin d'en donner une définition didactique.

G. Brousseau l'utilise ainsi, me semble-t-il, dans l'article qu'il écrit pour le premier numéro de la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques* en 1980 [35]. Considérant les difficultés d'adaptation de l'élève à une situation nouvelle, il écrit en effet:

> «Ces difficultés sont celles que portent en elle la conception antérieure de l'élève et la situation problème choisie les a seulement révélées. La nouvelle conception apparaît parce qu'elle est une solution à ces difficultés. Elle est une rééquilibration des systèmes de réponse de l'élève soit qu'elle lève les contradictions portées par les anciennes conceptions, soit qu'elle apporte des simplifications substantielles.»

Dans un texte publié dans le même numéro et consacré à l'approche des nombres réels par des élèves de l'école élémentaire [36], R. Douady, elle, ne l'utilise pas. Mais elle emploie en revanche le terme de «modèle», mentionnant entre autres objets de sa recherche les points suivants:

> «— Axiomatiser leurs actions, leurs discours et aussi déterminer les modèles implicites utilisés en situation scolaire d'apprentissage.
>
> — Par les arguments écrits ou oraux qu'ils utilisaient, pour décrire et convaincre, nous voulions connaître les modèles qu'ils explicitaient et validaient.»

Elle construit ensuite effectivement un modèle dont la structure mathématique n'est autre que celle de R^+ et dont les axiomes visent à traduire la structure et l'évolution des connaissances des élèves au cours du long processus didactique envisagé dans la recherche.

Ce terme de «modèle» avait déja été utilisé par A. Bessot et F. Richard en 1977. Elles écrivaient alors (cf. [37]):

> «Les productions observables de ces niveaux d'activité (actions, formulations, validations) sont supposées être régies par des systèmes et des modèles — construits par l'observateur mais tout se passe comme si le modèle était utilisé par le sujet — qui sont des modèles implicites (niveau 1), des langages (niveau 2), des théories ou des modèles explicités par le sujet cette fois (niveau 3).»

Dans sa thèse déja citée, A. Robert reprendra cette notion de modèle explicite, introduisant quant à elle le terme de «modèle exprimé» pour désigner les modèles élaborés par le chercheur à partir d'expressions écrites sur la convergence des suites numériques produites par les étudiants interrogés[7].

Dans une conférence faite au Vème Congrès PME en 1981 et intitulée: «Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques» [39], G. Vergnaud n'utilise pas lui non plus le terme de conception, préfèrant modéliser les connaissances de l'élève, en introduisant les notions de théorème en acte et de calcul relationnel:

> «Le concept de "théorème en acte" désigne les propriétés des relations saisies et utilisées par le sujet en situation de solution de problème, étant entendu que cela ne signifie pas pour autant qu'il est capable de les expliciter ou de les justifier.
>
> Le concept de "calcul relationnel" désigne de son côté les compositions déductives (et les inférences) qui rendent compte de ses productions.»

En revanche, ce terme de conception revient sur le devant de la scène avec la parution en 1982, toujours dans la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques*, d'un article intitu-

7. A. Robert met en évidence dans sa recherche une bonne corrélation entre ces modèles exprimés et la réussite ou l'échec aux autres items du questionnaire proposé aux étudiants. Ceci peut paraître étonnant dans la mesure où diverses recherches, au contraire, ont mis en évidence des disparités importantes entre niveau déclaratif et niveau procédural (cf. par exemple M. Artigue *et al.* déja cité ou S. Vinner et D. Tall [38]. C'est en particulier pour prendre en compte ces disparités, par exemple, que ces derniers ont introduit les notions de «concept image» et de «concept définition», la notion de «concept image» étant très proche de celle de conception mais avec un sens global (cf. la suite de ce paragraphe). On peut penser que la forme de la question proposée par A. Robert (il est demandé de s'adapter à des élèves jeunes), les critères choisis pour rattacher une réponse au modèle statique (la simple répétition de la définition usuelle de la convergence ne suffit pas) expliquent la bonne adéquation trouvée ici entre modèles exprimés et procédures de résolution.

lé: «Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire» [40]. Dans cet article, J. Robinet et moi-même soulignons d'abord que l'observation naturaliste de classes de l'école élémentaire a attiré notre attention sur «la variété et l'apparente étanchéité des conceptions que les élèves mettaient en œuvre, à propos d'une même figure, suivant la tâche proposée». D'où le projet:

> «d'observer, dans un premier temps, le comportement des élèves dans des situations variées, de recenser dans chaque cas les procédures utilisées, et d'étudier s'il était possible d'associer à ces procédures des conceptions des figures géométriques (qui seraient à définir).»

La recherche se centre ensuite sur la forme cercle. Un ensemble de conceptions est défini a priori en référence à onze définitions distinctes du cercle (cf. annexe) et les auteurs commentent à ce propos, sans toutefois donner une définition, l'introduction de la notion de conception:

> «Ces définitions sont toutes logiquement équivalentes et définissent donc le même objet mathématique. Mais elles correspondent à des façons différentes de percevoir le cercle, d'utiliser ses propriétés et elles mettent l'accent sur des éléments géométriques, des relations entre ces éléments, différents. C'est pourquoi nous leur associons des conceptions distinctes du cercle.»

Ces conceptions sont ensuite analysées suivant différentes dimensions: caractérisation ponctuelle ou globale, statique ou dynamique, éléments et propriétés privilégiés, puis exploitées pour la construction des situations expérimentales support de la recherche et l'analyse des comportements des élèves. Cette approche méthodologique est commentée en ces termes:

> «La distinction que nous avons opérée entre l'objet mathématique qui est unique et les conceptions variées qui peuvent lui être associées nous paraît importante.
> Elle constitue, dans la recherche, un outil d'analyse des situations-problèmes proposées aux élèves comme de leurs procédures. Chaque activité privilégie à des degrés différents tel ou tel point de vue sur le cercle, pas nécessairement l'aspect ponctuel et statique qui correspond à la définition des manuels. Par exemple, si l'on demande à un enfant de trier des formes géométriques, il est capable d'isoler celles qui sont des disques très tôt donc bien avant de maîtriser la notion de distance. Il est clair qu'alors ce n'est pas à la conception liée à la définition classique qu'il se réfère. A un autre niveau, elle peut constituer pour l'enseignant un moyen de se déprendre de la simplicité apparente de certains objets géométriques. L'uniformité des définitions et exercices proposés par les manuels masque en effet la richesse et la complexité des conceptions qui peuvent être associées à ces objets. Elle tend, de plus, à imposer au niveau de l'enseignement un point de vue unique, statique et ponctuel, privilégiant le centre et le rayon (comme mesure) sans tenir compte des connaissances plus ou moins élaborées que possède déja l'enfant lorsqu'il est confronté à cet enseignement.»

Les résultats de la recherche sont formulés en termes de conceptions et mettent l'accent sur la capacité des élèves, dès le niveau du CE1, de mettre en œuvre de façon opératoire des conceptions très variées du cercle, mais aussi sur l'étroite dépendance des conceptions et des situations.

Le même numéro de la revue publie l'article déja cité de R. Ratsimba-Rajohn, consacré à l'étude de deux méthodes de mesures rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l'unité. La formulation, liée à la modélisation en termes de théorie des jeux utilisée, se fait en «modèles d'action», ces modèles étant associés à des stratégies, le terme de conception n'apparaît pas. Mais dans son article déja cité également sur les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, G. Brousseau, se référant à cette recherche, écrit:

> «La possibilité de provoquer l'acquisition de conceptions différentes est démontrée pour les rationnels. (G. Brousseau, 1980, 1981; N. et G. Brousseau, 1987): soit la *commensuration*, soit le *fractionnement* sont obtenus par la simple manipulation des variables didactiques. H. Ratsimba-Rajohn (1981) observe comment ces deux conceptions peuvent se faire obstacle mutuellement et cependant coexister chez un même élève, et comment une conception initiale peut être, non pas rejetée, mais renforcée malgré un saut informationnel a priori suffisant.»

A. Duroux, dans son DEA déja cité, en 1982, donne enfin quasiment une définition de la notion de conception:

> «Dans le déroulement du processus d'acquisition, pour diverses causes [...], certaines de ces situations sont privilégiées au détriment d'autres, ce qui provoque l'apparition de connaissances locales, opérantes sur des sous-clans du champ conceptuel, et pour certaines valeurs des variables des situations concernées, c'est ce savoir local que nous appelons conception.»

On voit à travers ces quelques textes, en dépit de l'absence de définition explicite, fonctionner, si l'on peut dire, une conception similaire de la notion de conception: la conception est un objet local, étroitement associé au savoir en jeu et aux différents problèmes dans la résolution desquels il intervient; elle va constituer un outil, aussi bien pour l'analyse de ce savoir et l'élaboration de situations didactiques que pour l'analyse stricte du comportement de l'élève. Même si les conceptions font l'objet d'une définition autonome, ce qui intéresse le didacticien, visiblement, ce n'est pas de dresser un catalogue fin des conceptions possibles, mais d'étudier l'articulation conceptions-situations dans un apprentissage donné.

En juillet 1982, dans un exposé fait à la deuxième Ecole d'Eté de didactique des mathématiques, G. Vergnaud va donner une définition de la notion de conception qui rompt en partie avec cette approche. En effet, après avoir défini un concept mathématique comme un triplet (S, I, *S*) avec:

S: ensemble des situations qui donnent du sens au concept,

I: ensemble des invariants opératoires associés au concept,

S: ensemble des signifiants permettant de représenter le concept, ses propriétés et les situations qu'il permet d'appréhender;

il présente la notion de conception comme l'analogue sujet, à un moment donné, du concept.

On voit donc que la conception à la fois devient un objet lié au sujet et perd son caractère local. En effet, la multiplicité des conceptions possibles n'apparaît plus comme un trait du savoir, mais comme la manifestation de la multiplicité des conceptions possibles d'un même sujet au cours du temps. Chaque conception est elle-même globale: elle prend en compte la totalité de la structure du sujet à un moment donné, comme le concept prend en compte la totalité de la connaissance sur l'objet mathématique[8].

Il y a, en quelque sorte, basculement au niveau des nécessités auxquelles répond la notion de conception, de la première nécessité vers la seconde.

Je reprends cette définition dans des termes voisins dans le chapitre 1 de ma thèse, soutenue en 1984 [41]:

> «Comme l'on distingue dans un concept mathématique:
> — la notion mathématique telle qu'elle est définie dans le contexte du savoir savant à une époque donnée,
> — l'ensemble des signifiants associés au concept,
> — la classe des problèmes dans la résolution desquels il prend son sens,
> — les outils: théorèmes, techniques algorithmiques, spécifiques du traitement du concept,
> on distinguera dans les conceptions des sujets ces diverses composantes et, en particulier:
> — la classe des situations-problèmes qui donnent son sens au concept pour l'élève,
> — l'ensemble des signifiants qu'il est capable de lui associer, en particulier les images mentales, les expressions symboliques,
> — les outils, théorèmes, algorithmes dont il dispose pour manipuler le concept.»

Ceci me conduit d'ailleurs à rajouter au chapitre 3 qui reprend l'article déja cité sur les conceptions du cercle, une introduction pour réinterpréter ce qui a été obtenu dans cette première recherche, dans le cadre de la définition donnée au chapitre 1.

En fait, cette définition globale de la notion de conception, même si elle peut paraître séduisante dans l'absolu, ne constitue pas l'outil dont a besoin le didacticien. Il est d'une part inutilisable et ce, parce qu'il ne correspond pas à un niveau accessible à l'analyse didactique: comment inférer de l'observation de l'élève dans une ou au mieux quelques situations la globalité de sa conception sur tel ou tel objet mathématique? D'autre part, il n'est pas réellement pertinent. En effet, ce qui intéresse le didacticien, ce n'est pas au fond la compréhension de cette struc-

8. On retrouve un objet très proche du «concept image» introduit par Tall et Vinner. En effet, le concept image est défini comme: «the total cognitive structure that is associated with the concept, which include all the mental pictures and associated properties and processes».

ture globale hypothétique mais l'identification de conceptions locales qui se manifestent en situation et l'analyse des conditions de passage de telle conception locale à telle autre, qu'il s'agisse de rejeter une conception erronée, de mettre en place une conception permettant d'améliorer l'efficacité dans la résolution de telle ou telle classe de problèmes ou de favoriser la mobilité entre des conceptions déja disponibles. De ce point de vue, c'est l'objet local qui est bien l'outil adéquat.

D'ailleurs, dans la pratique, c'est bien ce niveau local relié à tel ou tel point de vue sur le savoir en jeu, qui est utilisé. Par exemple, G. Vergnaud écrit en 1983 dans le volume 4.1 de la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques* consacré à un ensemble de recherches mené par son équipe sur la notion de volume [42]:

> «En ce qui concerne le volume, il est très important d'assurer la liaison entre les deux conceptions distinctes que peut s'en faire un élève:
> — d'une part le volume est une grandeur physique unidimensionnelle, qui se prête à des comparaisons, des mesures, des estimations, des transformations, des sommes et des différences, etc... dans plusieurs situations de la vie quotidienne.
> — d'autre part, le volume est une grandeur tridimensionnelle qui suppose à la fois une analyse physico-géométrique de l'espace et une application de cette analyse dans le numérique et le dimensionnel.
> Ce sont ces deux conceptions et leur liaison que nous avons essayé de faire approfondir par les élèves de cinquième.»

R. Douady et M. J. Perrin, dans l'article déja cité intitulé «Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane», énumèrent tout d'abord un certain nombre de difficultés résistantes bien connues des enseignants:

> «— La surface unité étant une surface d'une certaine forme, la mesure d'une surface S est tributaire de la possibilité de paver effectivement S avec cette forme [...]
> — L'aire est attachée à la surface et ne se dissocie pas d'autres caractéristiques de cette surface [...]
> — On étend les formules à des situations où elles ne sont pas valables [...]»

(Notons que ces difficultés persistantes relèvent typiquement de trois des processus générateurs d'obstacle identifiés au paragraphe précédent!).

Elles en fournissent ensuite une interprétation en termes de conceptions:

> «Il nous semble qu'un certain nombre de difficultés sont liées au traitement par les élèves des problèmes d'aire, soit du point de vue des surfaces, soit du point de vue des nombres. Par exemple, une diminution de l'aire est comprise comme une diminution de la surface avec sa forme et va de pair avec une diminution du périmètre: l'aire et le périmètre sont alors amalgamés à la surface et liés à sa forme [...]
> A l'autre extrême, l'aire est un nombre: on est sur le plan du calcul et on ne relève que des éléments pertinents pour le calcul, par exemple des mesures de longueur [...]
> Ainsi, au sujet de l'aire, les élèves développeraient une "conception forme" liée au cadre géométrique ou une "conception nombre" liée au cadre numérique, ou les deux, mais de façon indépendante, et ils traiteraient les problèmes sans établir de relation entre les deux points de vue.»

Dans sa thèse récente, consacrée à l'étude des conceptions d'élèves et professeurs de l'enseignement secondaire sur la notion de continuité [43], H. El Bouazzaoui, après avoir mené une revue détaillée des différentes notions introduites à ce propos par les didacticiens, insiste elle aussi sur le caractère local des conceptions. Elle opère par ailleurs un certain nombre de distinctions:

— Au niveau des élèves, elle reprend à son compte la distinction précédemment opérée par différents chercheurs (cf. par exemple les travaux de Duroux et Cornu déja cités) entre les conceptions initiales, préalables à tout apprentissage scolaire sur les notions considérées, et les conceptions induites par l'enseignement et, dans les conceptions induites, la distinction entre conceptions contrôlées par l'enseignement et conceptions incontrôlées par l'enseignement,

— Au niveau des professeurs, elle opère une distinction entre les conceptions manifestées par le professeur et les conceptions qu'il véhicule dans son enseignement,

— Enfin, elle distingue ces conceptions «individuelles» des conceptions «collectives» qui peuvent être véhiculées par les programmes et les manuels ou identifiées dans la génèse historique.

Le problème de la tentation globalisante, au moins en pratique, semble ainsi à peu près résolu. En fait, c'est le problème inverse, celui d'une localisation extrême qui apparaît à l'heure actuelle comme le problème crucial. En effet, si dans les textes de G. Vergnaud, R. Douady et M. J. Perrin que nous avons cités, il y a regroupement de conceptions autour de grandes tendances pertinentes par rapport à l'analyse didactique, dans d'autres cas le souci d'affiner l'analyse des comportements des élèves conduit à différencier à l'extrême les conceptions[9].

De plus, le fait d'inférer les conceptions, comme c'est souvent le cas, non de l'analyse du savoir en jeu mais de l'observation directe de comportements d'élèves dans des situations précises conduit à les aplatir sur les observables.

Comme je le soulignais dans ma thèse, à propos de travaux portant sur la modélisation des conceptions du sujet:

> «En fait, dans les recherches, apparaissent sous le nom de modèles des conceptions du sujet, des objets divers qui vont de la construction axiomatique à la technique de résolution d'un problème précis.»

Face à ces difficultés, l'ancrage des conceptions dans l'analyse a priori des points de vue possibles sur le savoir en jeu, sur les classes de problèmes accessibles ou bien adaptés à tel ou tel point de vue, à travers l'étude du fonctionnement actuel de ce savoir comme de son développement historique peut apparaître comme une garantie nécessaire.

Il n'en résout pas pour autant tous les problèmes. D'une part l'analyse épistémologique, en particulier si elle se veut ancrée dans le développement historique du concept, en s'affinant, tout comme l'analyse psychologique, va conduire à différencier une multitude de conceptions sur un objet donné et le problème de leur regroupement en classes pertinentes pour l'analyse didactique n'a a priori rien d'évident. D'autre part, la disparité des deux systèmes déja soulignée ne nous garantit pas que les conceptions ainsi identifiées seront exactement les bons instruments pour mener l'analyse didactique.

Considérons par exemple la notion de tangente. L'analyse historique met facilement en évidence la diversité des points de vue possibles sur cet objet. Sans chercher l'exhaustivité, j'en citerai quelques uns, en essayant de respecter l'apparition chronologique:

— *Une ligne droite est tangente à une courbe lorsqu'ayant un point commun avec la courbe, on ne peut mener par ce point aucune droite entre elle et la courbe.*

C'est le point de vue dérivé de la proposition 16 du livre III des éléments d'Euclide qui définit la tangente au cercle.

— *Une droite est tangente à une courbe lorsqu'elle a un point commun avec la courbe et reste toujours du même côté de cette courbe.*

C'est sur cette propriété que se base Apollonius de Perge pour déterminer la tangente à la parabole [44]. Notons que cette propriété, même relativisée au niveau local, si elle est présentée comme une caractérisation de la tangente, conduit à rejeter la possibilité pour une courbe d'avoir une tangente en un point d'inflexion géométrique. On trouve historiquement trace de cette limitation chez Descartes.

— *Une droite est tangente à une courbe si elle a un point commun avec la courbe et est perpendiculaire en ce point à la normale à la courbe.*

Ce point de vue généralise, en quelque sorte la notion de tangente à un cercle via celle de cercle osculateur, pour s'exprimer en termes modernes. Descartes dans le livre 2 de sa Géométrie [45] détermine ainsi la sous-normale à la cycloïde, en considérant un cercle centré sur l'axe des abscisses (donc dépendant de deux paramètres) et en écrivant algébriquement la condition pour que l'équation correspondant à l'intersection du cercle et de la courbe ait deux racines égales.

— *Une droite est tangente à une courbe si elle coupe cette courbe en deux points confondus.*

Ce point de vue sur la tangente ne nécessite pas lui non plus l'intervention explicite du calcul différentiel. Il sera utilisé par exemple par Descartes [46], comme adaptation de la méthode précédemment décrite: au lieu de considérer l'intersection d'un cercle et de la courbe, on considère celle d'une droite et de la courbe. On le retrouve plus tard par exemple chez Euler et Cramer et bien sûr en géométrie algébrique.

— *La tangente à un courbe en un point M est le support du vecteur vitesse en M d'un point mobile décrivant cette courbe.*

Ce point de vue est lui aussi très ancien. Il a permis par

9. On trouve d'ailleurs cette même tendance dans les travaux portant sur les misconceptions.

exemple à Roberval de mettre au point un procédé pour construire la tangente à une courbe qui peut être envisagée comme résultant de deux mouvements connus (par exemple: la cycloïde), avant la mise en place du calcul différentiel [47].

— *Une droite tangente à un courbe est la droite définie par le point de tangence et un point de cette courbe infiniment voisin.*

C'est le point de vue classique du calcul infinitésimal, développé par Leibniz et présent dans le traité déja cité du Marquis de l'Hôspital, associé à la vision d'une courbe comme un polygone à une infinité de côtés:

> «On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée [...] comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entre eux, la courbure de la ligne.»

C'est aussi le point de vue sous-jacent actuellement à l'analyse non standard.

— *La tangente à une courbe en un point M est la limite des sécantes (MP) à la courbe, lorsque le point P, se déplaçant sur la courbe, tend vers M.*

C'est le point de vue développé, par exemple, par d'Alembert dans l'Encyclopédie Méthodique [48], avec l'objectif d'éviter la manipulation des quantités infinitésimales, classiquement repris dans l'enseignement.

— *La tangente est la droite dont le coefficient directeur est la valeur de la dérivée de la fonction associée à la courbe, à l'abscisse du point considéré.*

C'est la présentation faite par Lagrange par exemple dans sa «Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel» [49].

— *La tangente à la courbe représentative de la fonction f en un point M est la droite associée à l'application affine tangente à f en ce point.*

Ce point de vue, sous-jacent à la notion de différentiabilité, est présent par exemple chez Fréchet [50], et, depuis une vingtaine d'années, dans les programmes de l'enseignement secondaire.

Il est clair que ces divers points de vue sur la notion de tangente se différencient deux à deux au moins sur deux des trois niveaux suivants:

— *nature du lien avec le calcul différentiel*: certains ont fonctionné avant la mise en place du calcul différentiel, même s'ils peuvent être et ont été reformulés en utilisant ce dernier, d'autres sont en revanche intrinsèquement liés à ce même calcul différentiel,

— *nature des signifiants associés*: il est clair qu'ils ne développent pas les mêmes représentations mentales de la notion de tangente, qu'ils ne se traduisent pas non plus nécessairement par les mêmes expressions symboliques,

— *efficacité dans la résolution de problèmes*: ils ne permettent pas tous de résoudre les mêmes classes de problèmes: les premiers historiquement rencontrés ne permettaient que de tracer les tangentes à des courbes bien particulières; avec l'invention du calcul infinitésimal se développent différentes conceptions dont les champs d'action ne sont pas a priori nettement différenciés; la vision en termes d'approximation à l'ordre un, était-elle nécessaire pour unifier les résultats du calcul différentiel à une et plusieurs variables ainsi que pour étendre l'idée de tangence à des espaces plus généraux (cf. M. Artigue *et al.* déjà cité).

Il semble donc naturel de leur associer des conceptions différentes de la notion de tangente. Ces objets fournissent-ils pour autant une grille bien adaptée au travail didactique?

De nombreuses recherches ont montré par exemple que la conception dominante de la tangente développée par l'enseignement actuel est une conception algébrique de cette dernière: la tangente en un point M à la courbe C représentative de la fonction f est la droite passant par M et de coefficient directeur, la valeur de la dérivée en ce point. En effet, la tangente à une courbe (si l'on excepte la tangente au cercle introduite au niveau du collège) est introduite au niveau de la classe de première comme interprétation géométrique de la dérivée (elle-même présentée sous les deux aspects: limite du quotient des accroissements et approximation à l'ordre 1), donc dès le départ dans le cadre mathématiquement le plus performant.

Le problème essentiel qui se pose à l'enseignement est alors d'arriver à articuler le cadre algébrique dominant de la dérivation et le cadre géométrique pour permettre chez l'élève la mobilité de passage d'un cadre à l'autre nécessaire à l'efficacité dans la résolution de problèmes. C'est par exemple ce qu'essaie de faire D. Tall dans sa thèse [51] dans le cadre d'une ingénierie didactique basée sur l'utilisation de l'outil informatique.

Dans cette perspective, l'identification des conceptions historiquement rencontrées peut nous aider à interpréter certaines réponses d'élèves, à comprendre leur cohérence. Elle ne nous aide pas fondamentalement à résoudre les problèmes de cloisonnement entre cadres dans la mesure où justement, historiquement, la tangente est un objet avant tout géométrique. Lorsque Lagrange, par exemple, dans son ouvrage déja cité, arrive la première caractérisation algébrique de la tangente en termes de dérivée (identique apparemment à celle des élèves), c'est après avoir montré que la caractérisation géométrique d'Euclide implique (en utilisant une formulation actuelle) entre la courbe représentative de la fonction y= f(x) et la tangente d'équation y= F(x), au point de tangence d'abscisse x, un contact satisfaisant f'(x)= F'(x).

La recherche faite par Habiba El Bouazzaoui sur les conceptions développées par les élèves et les enseignants de l'enseignement secondaire à propos de la notion de continuité, déja citée, met-elle aussi bien en évidence à la fois l'intérêt et les limites, d'un point de vue didactique, de l'approche historique. L'analyse du développement historique de cette notion lui permet d'identifier un certain nombre de conceptions qui sont utilisées ensuite pour interpréter les réponses d'élèves à des questionnaires ainsi que les entretiens menés avec des enseignants. Là encore l'analyse didactique montre la distance qui sépare le fonctionnement des deux systèmes: dans l'enseignement secondaire, le concept de continuité n'est pas un concept opératoire pour la résolution de problèmes, il ne fonctionne qu'en termes de reconnaissance d'objet et les conceptions qui se développent à son propos, tant chez les élèves que chez les enseignants sont nettement marquées par cette caractéristique de l'enseignement.

En fait, ce que mettent en évidence ces disparités, c'est le fait que l'élève ne peut être réduit au statut de sujet épistémique ou de sujet cognitif. Ce qui détermine son comportement c'est aussi et souvent en priorité son statut de sujet didactique. C'est ce fait qui est au centre de la théorie déja citée élaborée par Y. Chevallard. Les savoirs y apparaissent par définition liés à des institutions et les rapports à tel ou tel objet de savoir développés par un individu, conditionnés par la ou les institutions dans lesquelles il a eu à rencontrer ces savoirs, ces institutions ne se limitant pas en général à des institutions scolaires. Cette approche, pour aussi séduisante qu'elle soit, disqualifie-t-elle automatiquement la notion de conception comme outil de l'analyse didactique? La question est posée mais loin d'être tranchée. J'aurais pour ma part tendance à penser que la conception, définie comme cela a été fait plus haut comme un objet local ancré dans l'analyse du savoir, correspond à un niveau intermédiaire nécessaire à l'opérationalité de l'analyse didactique.

A ce niveau des conceptions comme aux niveaux précédemment abordés, l'analyse épistémologique aide donc le didacticien à contrôler les relations au savoir mathématique des objets qu'il manipule. Elle lui permet aussi de regarder d'un point extérieur le système d'enseignement qu'il étudie et duquel il est souvent presque trop proche. Mais, en mettant en évidence la distance qui sépare le développement historique de la réalité des classes, elle ne manque pas de lui montrer par la même occasion tout ce qui sépare ces deux champs: l'épistémologique et le didactique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Groupe inter IREM Epistémologie et Histoire (1982) *La rigueur et le calcul,* Paris, CEDIC-Nathan.
[2] BARBIN E. (1988) «La démonstration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques», *Bulletin APMEP*, N°366.
[3] ROBERT A. et J. ROBINET (1989) «Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement», *Cahier de DIDIREM*, N°1, Ed. IREM Paris 7.
[4] MARQUIS DE L'HOSPITAL (1696) *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes,* Paris.
[5] DAHAN-DALMEDICO A. et J. PEIFFER (1986) *Une histoire des mathématiques: routes et dédales,* Paris, Le Seuil, Coll. Points-Sciences.
[6] CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique,* Grenoble, La Pensée Sauvage.
[7] CHEVALLARD Y. (1989) *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel,* Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université de Grenoble I.
[8] VERRET M. (1975) *Le temps des études,* Paris, Librairie H. Champion.

[9] BROUSSEAU G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques,* Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I.
[10] DOUADY R. (1984) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet,* Thèse d'Etat, Université Paris 7.
[11] ALIBERT D., M. LEGRAND et F. RICHARD (1987) *Alteration of didactic contract in codidactic situation,* Actes du Congrès PME XI, Montréal, J. C. Bergeron *et al.* Ed., pp.379-385.
[12] BACHELARD G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique,* Paris, Librairie J. Vrin.
[13] BROUSSEAU G. (1976) *La problématique et l'enseignement des mathématiques,* XXVIIIème Rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve.
[14] GLAESER G. (1981) «Epistémologie des nombres relatifs», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol.2.3, pp.303-346.
[15] BROUSSEAU G. (1983) «Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol.4.2, pp.164-198.
[16] DUROUX A. (1983) «La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure», *Petit x,* N°3.
[17] CORNU B. (1983) *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles,* Thèse de 3ème Cycle, Université de Grenoble I.
[18] SIERPINSKA A. (1985) «Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol.6.1, pp.5-67.
[19] ROBERT A. (1982) *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur,* Thèse d'Etat, Université Paris 7.
[20] VIENNOT L. (1988) *Obstacle épistémologique et raisonnements en physique: tendance au contournement des conflits chez les enseignants,* Communication au Colloque international: Construction des savoirs — Obstacles et conflits, Montréal.
[21] VIENNOT L. (1988) *Tendance à la réduction fonctionnelle: obstacle au savoir scientifique et objet de consensus,* Communication au Colloque international: Construction des savoirs — Obstacles et conflits, Montréal.
[22] CLOSSET J. L. (1983) «D'où proviennent certaines erreurs rencontrées chez les élèves et les étudiants en électrocinétique?», *Bulletin de l'Union des Physiciens,* N°657, pp.81-102.

[23] MAURINES L. (1988) *Premières notions sur la propagation des signaux mécaniques,* Thèse, Université Paris 7.
[24] ROZIER-MICHAUD S. (1988) *Le raisonnement linéaire causal en thermodynamique classique élémentaire,* Thèse, Université Paris 7.
[25] BROUSSEAU G. (1988) *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques,* Communication au Colloque International: Construction des savoirs — Obstacles et conflits, Montréal.
[26] GRISVARD C. et F. LÉONARD (1983) «Résurgence de règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux», *Bulletin APMEP,* N°340.
[27] PERRIN M. J. (1986) «Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves du CM2 et du Collège», *Cahier de Didactique des Mathématiques,* N°24, Ed. IREM Paris 7.
[28] ROBERT A. (1983) «L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol.3.3, pp.307-341.
[29] RATSIMBA-RAJOHN H. (1982) «Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol.3.1, pp.65-113.
[30] DOUADY R. et M. J. PERRIN (1989) «Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane», *Educational Studies in Mathematics,* Vol.20, N°4, pp.387-424.
[31] ARTIGUE M. *et al.* (1989) *Procédures différentielles en mathématiques et en physique au niveau du premier cycle de l'enseignement supérieur,* Rapport de recherche, Ed. IREM Paris 7.
[32] VERLEY J. L. (1983) *La controverse du logarithme des nombres complexes,* Fragments d'histoire des mathématiques, Brochure APMEP, N°34.
[33] SIERPINSKA A.(1988) *Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique,* Communication au Colloque international: Construction des savoirs — Obstacles et conflits, Montréal.
[34] Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Sciences and Mathe-

matics Education, Université de Cornell, juillet 1988, J. D. Novak Ed.
[35] BROUSSEAU G. (1980) «Problèmes de l'enseignement des décimaux», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.1.1, pp.11-58.
[36] DOUADY R. (1980) «Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans)», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.1.1, pp.77-110.
[37] BESSOT A. et F. RICHARD (1977) *Etude du schéma dans l'enseignement des mathématiques,* Mémoire de DEA, IREM de Bordeaux.
[38] VINNER S. et D. TALL (1981) «Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics*, Vol.12, pp.151-169.
[39] VERGNAUD G. (1981) *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques,* Actes du Congrès PME V, Grenoble, pp.7-17, Vol.2.
[40] ARTIGUE M. et J. ROBINET (1982) «Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.3.1, pp.5-64.
[41] ARTIGUE M. (1984) *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques,* Thèse d'Etat, Université Paris 7.
[42] VERGNAUD G. (1983) «Didactique du concept de volume», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.4.1, pp.9-25.
[43] BOUAZZAOUI H. El (1988) *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction,* Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec.
[44] APOLLONIUS DE PERGE *Les coniques,* Traduction P. ver Eecke, rééd. Blanchard, Paris.
[45] DESCARTES R. (1637) *Géométrie, Livre 2*, Œuvres, Ed. Ch. Adam et P. Tannery 6, Paris, 1902.
[46] DESCARTES R. (1638) *Lettre à C. Hardy*, Œuvres, Ed. Ch. Adam et P. Tannery 2, Paris, 1898.
[47] PERSONIER G. dit Roberval (1693) *Divers ouvrages de mathématiques et de physique,* Paris, (réimp.) Mém. Acad. Sc. Paris, 1666/99, 6, Ed. Paris, 1730.

[48] ALEMBERT J. d' (1747) «Article: Tangente», dans l'*Encyclopédie Méthodique*.
[49] LAGRANGE J. L. (1797) *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel,* Paris.
[50] FRÉCHET M. (1911) *Sur la notion de différentielle,* Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Tome 152, N°13, pp.845-847 et 1050-1051.
[51] TALL D. (1986) *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics,* Doctoral Thesis, University de Warwick.

ANNEXE

1. *Définitions du cercle*

Les manuels de mathématiques, à l'heure actuelle, donnent quasiment tous la même définition du cercle:

D_1: Le cercle de centre O et de rayon R est, dans le plan, l'ensemble des points situés à la distance R de O.

Mais l'on peut définir un cercle de bien d'autres façons. Par exemple:

D_2: On appelle cercle toute courbe plane fermée de classe C^2 de courbure algébrique constante.

D_3: On appelle cercle toute courbe plane homogène par isométrie.

D_4: On appelle cercle toute courbe plane admettant une infinité d'axes de symétrie.

D_5: Soit Γ une courbe fermée, plane, convexe (c'est-à-dire bord d'une partie convexe G du plan) admettant en tout point une tangente. Pour toute direction d, on désigne par a_d la borne supérieure des longueurs des segments de direction d contenus dans G. Γ est un cercle si et seulement si:
— pour chaque direction d, a_d est la longueur d'un segment unique D_d de direction d inclus dans G,
— tous les segments D_d ont même longueur,
— tous les segments D_d sont concourants.

D_6: Une courbe plane G est un cercle si et seulement si il existe un point O du plan et un réel positif d tels que:
— Γ détermine sur toute droite passant par O un segment de longueur d,
— O soit le milieu de ce segment.

Ces définitions sont celles que nous avions élaborées à l'issue de la pré-expérimentation. Une courbe plane Γ est définie par une application continue φ du segment [0, 1] dans le plan «quasi-injective»: la seule exception admise à l'injectivité est $\varphi(0)= \varphi(1)$. Elle est de classe C^2 si elle est deux fois continuellement dérivable. Elle est homogène par isométrie si et seulement si:
$\forall x \in \Gamma \, \forall y \in \Gamma \, \exists f$ (f isométrie du plan et $f(\Gamma)=\Gamma$ et $f(x)=y$).

Halbwachs dans (Halbwachs, 1981) en propose dix dont:

D_7: Le cercle est l'ensemble des points M tels que le rapport AM/BM de ses distances à deux points fixes A et B soit constant.

D_8: Le cercle est la courbe fermée qui, pour une longueur donnée, enferme l'aire maximale.

Les trois définitions suivantes sont, elles, dues respectivement à Euclide, Leibniz et Legendre:

D_9: Un cercle est une figure plane comprise par une seule ligne qu'on appelle circonférence et telle que toutes les droites menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure sont égales entre elles.

D_{10}: Une ligne en mouvement étant placée de telle sorte que deux de ses points A et B restent immobiles, un autre point quelconque C de cette ligne décrit une circonférence.

D_{11}: La circonférence d'un cercle est une ligne courbe dont tous les points sont également distants d'un point intérieur qu'on appelle centre.