

Argumentação matemática, um conceito precursor da prova matemática¹

Mathematical argumentation, a precursor concept to mathematical proof

Argumentación matemática, un concepto precursor de la prueba matemática

L'argumentation mathématique, un concept précurseur de la preuve mathématique

Nicolas Balacheff²

Laboratoire d'informatique de Grenoble, Université Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP
38000 Grenoble, France. E-mail:

Tradução

Saddo Ag Almouloud

Universidade Federal do Pará

Doutorado em Matemática e Aplicações

<https://orcid.org/0000-0002-8391-7054>

Marluce Alves dos Santos³

Universidade do Estado da Bahia

Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências (UFBA/UEFS-BA)

<https://orcid.org/0000-0002-5935-5901>

Solange Fernandes Maia Pereira⁴

Universidade do Estado da Bahia

Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática (ULBRA-RS)

<https://orcid.org/0000-0002-5634-8220>

Resumo

Esta palestra oferece uma reflexão sobre o desafio imposto pela tendência atual de currículos e padrões que recomendam o aprendizado da prova desde o início da escola obrigatória. Essa tendência coloca em evidência a noção de argumentação aqui discutida, bem como suas relações com a prova como um meio legítimo convincente e explicativo para apoiar a verdade de um enunciado na sala de aula de matemática. Por fim, discute-se um conceito didático de argumentação matemática, com a proposição de elementos de sua caracterização.

¹ [Mathematical Argumentation, a Precursor Concept of Mathematical Proof | Proceedings of the 14th International Congress on Mathematical Education](#)

² nicolas.balacheff@imag.fr

³ maralves@uneb.br

⁴ sfpereira@uneb.br

Palavras-chave: Argumentação matemática, Aprendizagem precoce da prova, Epistemologia.

Abstract

This lecture offers a reflection on the challenge posed by the current trend of curricula and standards to recommend starting the learning of proof from the very beginning of the compulsory school. This trend pushes on the fore the notion of argumentation, it is here discussed as well as its relations to proof as a convincing and an explaining legitimate means to support the truth of a statement in the mathematics classroom. Eventually, a didactical concept of mathematical argumentation is discussed, and elements of its characterization are proposed.

Keywords: Mathematical argumentation, Early learning of proof, Epistemology.

Resumen

Esta charla ofrece una reflexión sobre el reto que plantea la tendencia actual de los planes de estudio y las normas que recomiendan el aprendizaje de la demostración desde el comienzo de la enseñanza obligatoria. Esta tendencia pone de relieve la noción de argumentación que aquí se discute, así como su relación con la demostración como medio legítimo, convincente y explicativo, de apoyar la verdad de un enunciado en el aula de matemáticas. Por último, se discute una concepción didáctica de la argumentación matemática, proponiendo elementos de su caracterización.

Palabras clave: Argumentación matemática, Aprendizaje temprano de la prueba, Epistemología.

Résumé

Cet exposé propose une réflexion sur le défi posé par la tendance actuelle des curriculums et des standards qui recommandent l'apprentissage de la preuve dès le début de l'école obligatoire. Cette tendance met en évidence la notion d'argumentation discutée ici, ainsi que sa relation avec la preuve en tant que moyen légitime de convaincre et d'expliquer la vérité d'un énoncé dans la classe de mathématiques. Enfin, un concept didactique de l'argumentation mathématique est discuté, proposant des éléments de sa caractérisation.

Mots clés : Argumentation mathématique, Apprentissage précoce de la preuve, Épistémologie.

Argumentação matemática, um conceito precursor da prova matemática

Aprendizagem inicial de prova matemática

Enquanto a “prova matemática”⁵ desaparece dos desafios do ensino da matemática da escola obrigatória do século XXI, aprender como comprovar a veracidade de uma afirmação na sala de aula de matemática ainda está em evidência com o conceito de “prova”:

A noção de prova está no cerne da atividade matemática, seja qual for o nível (essa afirmação é válida do jardim de infância à universidade). E, além da teoria matemática, entender o que é uma abordagem de justificação fundamentada na lógica é um aspecto importante da formação do cidadão. As sementes dessa abordagem fundamentalmente matemática são plantadas nas séries iniciais (Villani & Torossian, 2018, pp. 25–26 — tradução livre).

Como se destina a cobrir todas as séries, a “prova” é usada aqui com seu significado vernáculo. A expressão deste objetivo assume diferentes formas nos currículos, recorrendo a uma variedade de expressões: *raciocínio dedutivo*, *prova*, *justificação*, *argumentação matemática etc.*

Desde 2003, as estruturas avaliativas do TIMSS⁶ refletem como a prova e a demonstração evoluíram desde o início do século XXI. Elas distinguem *domínios de conteúdo* (a disciplina de matemática) de *domínios cognitivos* (os comportamentos esperados dos alunos). Questões relacionadas à validação de um enunciado matemático são abordadas no subdomínio “raciocínio” do domínio cognitivo:

O raciocínio matemático envolve a capacidade de pensamento lógico e sistemático. Inclui raciocínio intuitivo e indutivo baseado em padrões e regularidades que podem ser usados para chegar a soluções para problemas não rotineiros. [...] o raciocínio envolve a capacidade de observar e fazer conjecturas. Também envolve fazer deduções lógicas com base em suposições e regras específicas e justificar resultados.

O *Raciocínio* inclui diversas habilidades entre as quais *justificar*; esta palavra-chave foi associada a *Provar* no quadro de avaliação de 2003, e desapareceu das campanhas de avaliação seguintes. Abandonada então a referência à prova matemática, a palavra-chave escolhida é “justificação” com requisitos específicos: “referência a resultados ou propriedades matemáticas” (TIMSS 2007, 2008, 2011). Em seguida, retorna a expressão-chave “argumento

⁵ Prova matemática' é usada para traduzir as palavras usadas pela linguagem romana cuja etimologia é o latim 'demonstratio' (por exemplo, démonstration em francês). 'Demonstração' foi usada por matemáticos anglófonos até o início do século 20.

⁶ Trends in International Mathematics and Science Study', que dá uma visão de consenso sobre as competências comuns para os alunos da 4ª e 8ª séries. <https://timssandpirs.bc.edu/timss2003i/frameworksD.html>

matemático” (TIMSS 2015, 2019) em um enunciado curto e alusivo.

Pesquisadores em educação matemática estão plenamente cientes dos problemas do ensino da prova, testemunhando seu caráter fundamental para a aprendizagem da matemática. O número de artigos e comunicações em conferências aumentou impressionantemente desde o trabalho pioneiro de Alan Bell (1976). Um dos primeiros livros coletivos “Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice” [Teoremas na Escola] (Boero, 2007) merece atenção especial. A sua ideia nasceu no contexto da 21.^a Conferência da PME (Psychology of Mathematics Education) que demonstrou “o renovado interesse pela prova e pela demonstração na educação matemática” e o de “mudanças importantes na orientação dos currículos em diferentes partes do mundo” (ibid. p. 20).

Em 2007, o ICMI lançou seu 19º estudo sobre “Prova e demonstração na educação matemática” (Hanna e de Villiers, 2012/2021). Como aprender a justificar/provar deveria ser abordado desde os primeiros anos, a ideia de prova teve que ser ampliada. O estudo introduziu a ideia de “prova de desenvolvimento” como “um precursor da prova disciplinar (nas suas várias formas) tal como é usada pelos matemáticos” (ibid. p. 444). A introdução desta ideia pretendia (1) fornecer “uma ligação de longo prazo com a disciplina da prova partilhada pelos matemáticos”, (2) fornecer “uma forma de pensar que aprofunda a compreensão matemática e a natureza mais ampla do raciocínio humano”, (3) “desenvolver-se gradualmente a partir dos primeiros anos” (ibid.)

O discurso introdutório destas iniciativas reflete uma complexidade que conhecemos desde o estudo exploratório seminal de Harel e Sowder (1998), que abrange um amplo espectro, desde “esquemas de prova de condenação externa” a “esquemas de prova analítica” (ibid. p. 245). Não abordarei aqui toda essa complexidade, mas sim o projeto educacional que visa desenvolver a aquisição precoce da competência de argumentar (convencer) e de provar (estabelecer a verdade). *O projeto didático é ensinar como responder à questão da verdade e entender o papel da prova na matemática.*

Prova é um conceito difícil por si só. Nós discutimos isso longamente. Mas, não é de surpreender que, como matemáticos, não tenhamos discutido o conceito de verdade. Talvez nós devêssemos.

Abordarei essa questão na próxima seção. Em seguida, abordarei alguns termos do vocabulário relacionado com o objetivo de propor elementos para uma caracterização do conceito de *argumentação matemática* como um precursor para a transição para *prova matemática*.

Temos certeza do que significa “verdadeiro”?

Prova e verdade são conceitos inseparáveis, mas as discussões sobre o que pode ser considerado prova prosseguem como se o significado da palavra *verdade* fosse claro. Isto pode parecer uma questão irrelevante em matemática, onde *verdadeiro* e *falso* são apenas os elementos do conjunto onde proposições ou predicados assumem valor. Mas a lógica matemática não é a lógica da matemática na medida em que a atividade dos matemáticos não se reduz à execução de um formalismo. “De fato, o critério de verdade na matemática é o sucesso de suas ideias na prática; o conhecimento matemático é corrigível e não absoluto; portanto, assemelha-se ao conhecimento empírico em muitos aspectos,” escreveu Hilary Putnam (1975, p. 529) em um breve artigo intitulado *What is mathematical truth?* [O que é verdade matemática?] Esta posição é bastante radical, mas é relevante para o nosso tópico: *mais do que uma ciência, na sala de aula de matemática do K-9, a matemática é uma prática.*

Na escola, a palavra *verdadeiro* primeiramente toma emprestado seu significado da cultura vernacular. Se os alunos do ensino superior mantêm uma diferença entre os significados matemáticos da palavra *verdadeiro* e seu significado na vida cotidiana, esse não é o caso dos alunos do ensino fundamental e médio (K-9). Ao pensar sobre esse problema, perguntei-me: Compartilhamos o significado de *verdadeiro* e *verdade*? Para ter uma ideia de uma resposta, analisei o caso de escrever em inglês algo que foi pensado em francês: a tradução direta do francês *vrai* para inglês *true* não tem consequências?

A etimologia⁷ de *verdadeiro* volta para a palavra *árvore*, que denota firmeza ou fidelidade. Sua evolução incorporou outros significados entre os quais o matemático (ou seja, necessidade lógica). Ainda assim, o uso contemporâneo coloca a sinceridade e a confiabilidade à frente da veracidade. A etimologia de *vrai* remonta à palavra latina *veritas*, cujo paradigma é normativo: refere-se à verdade jurídica que uma instituição legítima encerra e preserva. A evolução introduziu o produtor dos enunciados considerados verdadeiros, de sua sinceridade, mas o significado normativo ainda domina.

Esta edição diz respeito a todas as línguas e culturas de origem dos nossos projetos de pesquisa. As diferenças epistemológicas moldam silenciosamente a pesquisa. Por fim, a investigação que começou por perceber possíveis problemas de tradução acaba por nos convidar a considerar a epistemologia vernacular. A tensão entre as línguas vernáculas e a linguagem matemática deve levar a *questionar cultura que prova e verdade* carregam.

Davidson (1996) nos alertou que *é loucura tentar definir a verdade*. Mas a palavra-

⁷ De acordo com o *Vocabulaire Européen des Philosophies* (Cassin, 2004)

conceito *prova* é inseparável da palavra-conceito *verdadeiro*. Em concordância com Durand-Guerrier (2008, p. 373), recorro à solução de Alfred Tarski para escolher “uma definição que é materialmente adequada e formalmente correta,” ele define “verdade e falsidade simplesmente dizendo que uma frase é verdadeira se for satisfeita por todos os objetos, e falsa caso contrário”⁸. Mas ele acrescenta a condição de que as frases são elementos de “[uma linguagem] cuja estrutura foi exatamente especificada” (Tarski, 1944, pp. 341, 347, 373).

Para aceitarmos a consequência desta condição, introduzamos a distinção feita por John Langshaw Austin (1950) entre *enunciado* e *sentença*. A declaração de um *enunciado* requer palavras e um bom domínio das regras linguísticas para produzir uma *sentença* apropriada ao objetivo de comunicação que o sustenta. Este objetivo inclui adequação semântica e correção formal. Além disso, Austin apresenta um orador e um público, ou seja, *o caráter intencional do ato de falar que profere a verdade e sua dimensão social*. Portanto, além da coerência e da correspondência, deve-se incluir a hipótese de sinceridade e firmeza do orador e do público.

Embora um tanto limitada, esta discussão lança luz sobre a dificuldade de compreender o significado da verdade quando se dá um passo além da lógica matemática, permanecendo dentro do território matemático. A matemática como disciplina científica é universal. A atividade matemática é diversa e abrange as características culturais e históricas da sociedade na qual se desenvolve. Isto é ainda mais verdadeiro para sua aprendizagem e ensino, que são atividades matemáticas situadas e enquadradas por instituições e projetos políticos de uma sociedade.

Então, proponho quatro condições a serem consideradas *a verdade de uma sentença*:

- ter uma mentalidade ética (sinceridade, confiabilidade)
- ser linguisticamente apropriada (enunciado vs sentença)
- ser semanticamente adequada (correspondência)
- ser formalmente correta (coerência)

Essas condições não terão a mesma importância na transição da argumentação, nos estágios iniciais de aprendizagem, para a prova matemática. No entanto, devemos adotar essas perspectivas epistemológicas e didáticas para revisitar a questão clássica de definir a prova em matemática de acordo com as necessidades do ensino de matemática.

⁸ A definição de Tarski fundamenta o teorema da dedução, que faz a ponte entre sintaxe e semântica, verdade e validade.

Raciocínio, Explicação, Argumentação e Prova

Raciocínio

A estrutura geral dentro da qual a resolução de problemas e a comprovação são estudadas está sob o guarda-chuva comum da palavra “raciocínio”, que frequentemente denota o processo mental de fazer inferências. Usei essa definição nos meus primeiros trabalhos. Refletindo, esta formulação foi incômoda porque direcionou a atenção para a modelagem de processos mentais, enquanto o problema colocado ao professor é o problema *da interpretação matemática* de comportamentos e produções observadas. Então, eu me voltei para

Definição de Raymond Duval que se refere a expressões tangíveis do pensamento. Faz da análise do raciocínio um trabalho sobre discursos e textos que considera a contextualização pelo estado do conhecimento, pelos níveis da linguagem e pelas condicionantes da situação:

O raciocínio é a organização de proposições que é direcionada a um enunciado alvo a fim de modificar o valor epistêmico que esse enunciado alvo tem em um dado estado de conhecimento, ou em um dado ambiente social, e que, como consequência, modifica seu valor de verdade quando certas condições particulares de organização são atendidas (Duval, 1992, p. 52 — tradução livre).

Por “condições particulares de organização,” Duval se refere tanto à estrutura lógica quanto à norma particular do discurso de prova. Esta definição, por um lado, satisfaz as nossas necessidades teóricas, por outro lado, não introduz contradição com uma abordagem psicológica.

Explicação

Gila Hanna foi pioneira na discussão sobre a distinção entre a *prova que prova* e a *prova que explica*. Refere-se à *questão do porquê* um enunciado é verdadeiro, que é a do elo entre prova e conhecimento.

Duval não deixou de notar estas distinções: “Uma vez resolvida a questão do valor epistêmico, coloca-se a questão da construção da coerência ou pertença da nova produção ao sistema de conhecimento” (ibid. p. 40). No final do processo de resolução de problemas, a explicação é, portanto, o sistema explícito de relações do resultado declarado com o conhecimento disponível do solucionador do problema. A prova relacionada terá valor explicativo se este sistema for congruente com o conhecimento dos interlocutores. Essa abordagem é razoável e produtiva em nosso domínio, mas induziu Duval a afirmar uma divisão entre explicação e raciocínio (justificar). O primeiro, escreveu ele (ibid. pp. 37, 39 e 51), fornece

uma ou mais razões para fazer com que um resultado seja compreensível, enquanto para o último, o papel das razões apresentadas é comunicar aos enunciados “a sua força de argumentação”; isto é: o seu papel é convencer.

Ao afirmar a existência de tal divisão, Duval induz uma divisão entre explicação e prova que Hanna rejeita:

Uma prova se torna legítima e convincente para um matemático somente se levar a uma compreensão matemática real. (Hanna, 1995, pág. 42).

Para aprofundar esta questão, é interessante retornar ao termo “argumentação”.

Argumentação

Sempre chegamos à argumentação com um conhecimento substancial do que é argumentação, observa Christian Plantin. Além das concepções de senso comum da argumentação, diversas disciplinas contribuem para seu significado, entre elas a filosofia, a lógica, as ciências cognitivas, a linguística. Para a questão abordada

aqui, vou me concentrar na contribuição da linguística. Dentro desta disciplina, não existe uma abordagem única de argumentação, por isso recomenda-se especificar esta palavra para ter uma caracterização eficaz e avançar sem criar conflitos intransponíveis.

Comumente, o termo argumentação designa tanto a ação de argumentar quanto seu produto. O processo associado implementa meios linguísticos e representacionais para tornar possíveis interações (reais ou potenciais) entre protagonistas que buscam garantir a validade de um enunciado ou, ao contrário, se opõem e confrontam suas posições. O resultado assume a forma de um discurso que materializa as razões para concordância ou discordância. Para distinguir entre o processo e o produto, usarei o verbo “argumentar” para me referir ao primeiro, e o substantivo “argumentação” para o último. Com base na síntese de Plantin (1990), sugiro a seguinte caracterização:

A argumentação é um discurso

- *Orientado*: visa a validade de um enunciado;
- *Crítico*: analisa, apoia e defende;
- *Intencional*: visa modificar um julgamento.

Argumentar é um processo

- Que instrumenta a linguagem;
- Que altera o valor epistêmico de um julgamento;

- Que muda a relação com o conhecimento⁹.

Esta distinção é congruente com aquela feita por Duval entre argumentação retórica e argumentação heurística (ibid. p. 51). O primeiro visa convencer o interlocutor, enquanto o último enfatiza o papel da argumentação na orientação da resolução de problemas. Essa distinção permite aproximar o entendimento comum da argumentação de um entendimento congruente com as exigências de uma atividade matemática. Então, uma argumentação é aceita ou rejeitada de acordo com dois critérios: sua relevância (coerência semântica) e seu valor epistêmico (força de uma crença).

Além disso, o conceito de valor epistêmico facilita a diferenciação entre argumentação matemática e prova matemática. A referência ao valor epistêmico induz a ideia de sua dependência de um autor, enquanto o valor de uma afirmação matemática depende da matemática, não dos matemáticos¹⁰. Existe a possibilidade de tematizar essa oposição (Hanna, 2017) retomando a distinção feita pelos filósofos Frans Delarivière e Bart van Kerkhove entre valor epistêmico, que implica a existência de um agente, e valor ôntico, que é independente de qualquer agente. Para esses autores, tratava-se de qualificar o caráter intrínseco ou relativo do valor explicativo de uma prova. Aqui está o que eles escrevem:

Uma prova matemática pode ser considerada um argumento pelo qual alguém convence a si mesmo ou aos outros de que algo é verdadeiro, então pode parecer difícil ir além do discurso epistêmico sobre uma prova explicativa. Entretanto, se o conteúdo de qualquer evidência específica for produto do trabalho epistêmico de uma pessoa, ele pode ser separado como um objeto independente de uma mente específica. Outras pessoas podem ler essas evidências e se convencer delas. Isso nos leva à questão de saber se mostramos se o fato de um teorema ser verdadeiro é uma característica da prova em si ou se é uma característica de atos comunicativos, textos ou representações. (Delarivière et al., 2017, p. 3)

Isto deve ser comparado com o critério para reconhecer o caráter heurístico ou epistêmico de um argumento, “[que] é devido à existência de uma organização teórica do campo de conhecimento e representações em que a argumentação ocorre, ou à ausência de tal organização teórica.” “Uma argumentação heurística requer a existência de uma organização teórica do campo de conhecimento e representações em que a argumentação ocorre” e “que se seja capaz de compreender ou produzir uma relação de justificação entre proposições que seja dedutiva e não apenas semântica por natureza” (Duval, 1992, pp. 51 e 52).

Assim, a distinção entre argumentação retórica e argumentação heurística se resume à

⁹ Conhecimento refere-se aqui ao par {declaração, argumento}

¹⁰ Não ignoro o limite pragmático de tal afirmação, uma vez que a matemática é o produto de uma atividade.

avaliação do valor epistêmico e do valor ôntico dos enunciados. Podemos então discutir que *uma argumentação será admissível no sentido matemático se o valor epistêmico de suas afirmações for condicionado por seu valor ôntico*. É esse critério que permitirá que ele seja reconhecido como uma prova em matemática. A normalização matemática de provas é um meio técnico de realizar essa avaliação.

Prova

Aprendemos que a jornada epistemológica da argumentação até a prova matemática é longa e cheia de armadilhas. As primeiras questões foram sobre prova e lógica, depois sobre a relação entre explicação e prova, e entre prova e prova matemática. A argumentação se tornou mais tarde um tema de pesquisa com a ideia de um conflito fundamental entre argumentação e prova. O primeiro pode ser visto como um obstáculo epistemológico ao último. Concordo com esta ideia. Mas vejo uma solução para o problema que ela levanta, que é dar espaço ao conceito de *argumentação matemática* naquele de *prova de desenvolvimento*. A distinção entre argumentação retórica e heurística, e entre valor epistêmico e ôntico, permite progredir nessa direção. Seguindo Duval, a tensão entre argumentação e prova matemática origina-se na natureza das inferências que *poderia ser* de uma natureza semântica no primeiro caso, e *deve ser* de uma natureza lógica no segundo caso (Fig. 1). Sugere uma mudança na posição do aluno de uma postura pragmática para uma postura teórica (Balacheff, 1990). Uma caracterização adequada da argumentação matemática deveria ser uma ferramenta para facilitar esta evolução.

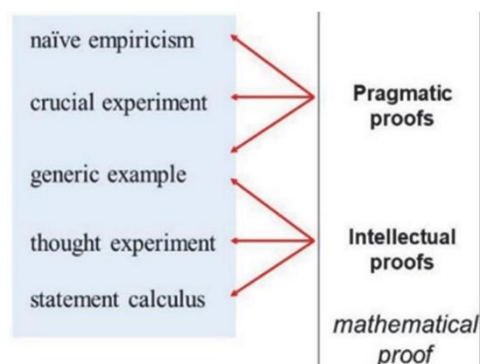


Figura 1.

Os diferentes tipos de prova

Minha pesquisa questionou o que poderia ser considerado uma prova para os alunos *antes* deles serem formalmente apresentados à norma euclidiana de prova matemática. Isso me levou a distinguir entre provas pragmáticas e intelectuais e, dentro de cada categoria, a identificar diferentes tipos de prova. O resultado desta pesquisa inicial foi que o tipo de prova

é determinado em primeiro lugar pela natureza do conhecimento dos alunos e sua representação semiótica disponível. No espaço privado, o esforço é construir uma argumentação que seja convincente e significativa. É no contexto de uma interação social que a argumentação pode ter precedência sobre a explicação. A divisão entre eles poderia abranger uma ampla gama de possíveis esquemas de prova. De fato, a interação social não pode ser evitada; ela é uma fonte de fenômenos complexos que o professor tem que administrar.

Então, o que vem primeiro é uma “explicação” da validade de um enunciado a partir da perspectiva do próprio aluno, sem prejudicar *o que conta para ela ou para ele como uma explicação*, seja em termos de conteúdo ou de forma do texto que o expressa. A justificativa para esse postulado é que o poder explicativo de um texto está diretamente relacionado à qualidade e à densidade de suas raízes no conhecimento do aluno. Portanto, a questão-chave de uma abordagem de aprendizagem da prova é a natureza da relação entre o conhecimento dos alunos e sua argumentação que apoia a validade de um enunciado.

A passagem da explicação à argumentação é imposta pela necessidade de comunicar as razões e sua organização. Quando outros aceitam que uma argumentação estabelece a validade de uma declaração, ela muda seu status, torna-se pública e ganha o status de prova.

O ponto importante é destacar a existência de uma fronteira entre os espaços privado e público. No espaço privado, a explicação trabalha sobre os objetos e suas relações, é a base para a construção da explicação que respalda a validade da solução de um problema, independentemente de esse trabalho garantir ou não a submissão do valor epistêmico ao valor ôntico. Atravessar essa fronteira implica a busca de um consenso. Este processo social, pela sua própria natureza, não pode garantir que os protagonistas individualmente reconheçam o caráter explicativo da argumentação coletivamente aceita — *a prova*. Essa incerteza é ainda maior no caso da prova matemática devido ao seu caráter normativo, que tem precedência sobre suas características retóricas.

Três contos e uma lição

Esta seção apresenta três exemplos que pretendem ilustrar aspectos que considerarei posteriormente para caracterizar a argumentação matemática a partir de uma perspectiva didática. Eles tratam da relação entre conhecimento, recursos semióticos e controles como ferramentas em um processo de validação. Começo com o caso de um matemático famoso, para que percebamos que a questão não é só de iniciantes, mas de certa forma intrínseca à matemática.

Conto 1, onde a racionalidade e a maturidade cognitiva não são as questões

Em seu *Cours d'analyse*¹¹ publicado em 1821, Augustin Cauchy formulou uma primeira versão de um teorema sobre a convergência de séries de funções contínuas:

Seja (I) “ $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$ ” uma série, então o teorema afirma:

Quando os vários termos da série (I) são funções da mesma variável x , contínua em relação a esta variável na vizinhança de um valor particular para o qual a série converge, a soma s da série também é uma função contínua de x na vizinhança deste valor específico. (trad. Bradley & Sandifer 2009, p. 90)

Como sabemos agora, este enunciado é falso. Cauchy reconheceu sua refutação por outros matemáticos. Ele modificou-o e publicou uma nova declaração modificada no *Comptes rendus à l'Académie des Sciences*, trinta anos após a primeira edição do curso, em 1853. Por que um matemático tão notável não percebeu o erro que estava cometendo quando as refutações foram conhecidas, e por que foi tão difícil superá-lo? Gilbert Arzac (2013) estudou atentamente esse episódio para evitar anacronismos que pudessem introduzir a reescrita dos escritos de Cauchy com a formalização da matemática contemporânea. Tal reescrita teria escondido as dificuldades conceituais que os matemáticos encontraram, especialmente com as noções de *função e variável*.

Arzac aponta primeiro que a variável x não está explícita na expressão (I), embora a notação moderna $f(x)$ tenha sido usada no curso. Na verdade, nesta expressão, u_n e x são duas variáveis, x sendo a variável independente da qual dependem as funções u_n . Em segundo lugar, ele nos lembra que a imagem conceitual dominante de *limite* é de cinema, reforçada pelo papel que desenha a curva das funções desempenhadas. A validade do teorema foi então estabelecida usando uma narrativa que expressava qualitativamente o raciocínio. Aqui está um trecho:

[seja s_n a soma parcial como classificação n , r_n o restante e s o limite, estas] três funções da variável x , a primeira das quais é obviamente contínua em relação a x em uma vizinhança do valor particular em questão. Dado isto, vamos considerar os incrementos nestas três funções quando aumentamos x por uma quantidade infinitamente pequena α . Para todos os valores possíveis de n , o incremento em s_n é uma quantidade infinitamente pequena. O incremento de r_n , assim como o próprio r_n , torna-se infinitamente pequeno para valores muito grandes de n . Consequentemente, o incremento na função s deve ser infinitamente pequeno.” (Bradley & Sandifer, 2010, pp. 89–90)

No entanto, Cauchy não apresentou este texto como uma prova matemática como fez para outros teoremas em seu curso, mas como uma *observação*. Esta observação convida o

¹¹ <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8626657>

leitor a imaginar com o matemático o movimento monótono de x e o efeito que causa nas funções em cada etapa do raciocínio. As coisas acontecem porque elas “*devem*” acontecer.

A prova de 1853 introduziu o critério de convergência uniforme:

$S_{n'} - S_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n'-1}$ torna-se infinitamente pequeno para valores infinitamente grandes dos números n e $n' > n$.

Mas ainda assim, essa prova tem o estilo de uma narrativa dominada. A ordem dos enunciados afirmações e a aparência dos termos impulsionados pela retórica da argumentação não são congruentes com a ordem lógica da prova formal de n/ε . Por assim dizer, esconde a dependência de n sobre ε e não sobre x , como é evidenciado pela expressão algébrica moderna¹². O estilo da versão revisada de Cauchy ainda é o da observação inicial, porém ele agora a chama de prova matemática.

A vontade de rigor está, sem dúvida, presente em toda a obra de Augustin Cauchy, mas encontra obstáculos: as definições de *variável* e *função*, a ausência do sinal $<$ e daí a manipulação formal das desigualdades, a ausência de uma notação para *valor absoluto* (introduzido por Weierstrass em 1841) e dos quantificadores (introduzido na virada do século XX). Finalmente, a linguagem natural é infundida por uma imagem conceitual cinematográfica de *convergência* e o leibniziano “*lex continuitatis*” (lei da continuidade).

A análise de Gilbert Arzac evidencia a estreita relação entre *representação*, *linguagem* e as *ferramentas de raciocínio* por um lado, e por outro lado os limites devidos à concepção cinematográfica de *continuidade* e *limite*. A dificuldade de Cauchy não se devia à sua racionalidade subjacente e à sua maturidade cognitiva.

Conto 2, onde há uma questão de controle semântico

É comum observar que o aprendizado inicial de geometria pelos alunos encontra dificuldades com os conceitos de perímetro e área e suas relações. Estudei algumas dessas dificuldades enfrentadas por alunos dos 7º e 8º anos, usando uma tarefa clássica sobre o perímetro e a área de um retângulo, que é um objeto familiar para eles. Eles sabem muito sobre isso, seja

um objeto geométrico ou uma forma para a qual eles podem calcular a área e o perímetro. A tarefa consiste em perguntar aos alunos, trabalhando em duplas, o que eles acham de certas afirmações atribuídas a outros alunos. Tomo o caso de um par, A&C, sobre duas dessas alegações:

¹² $\forall \varepsilon \exists N \forall n > N \forall n' [n' > n \rightarrow \forall x |S_n - S_{n'}| < \varepsilon]$

Serge: Se você aumentar a área de um retângulo, seu perímetro também aumenta.

Brigitte: Todos os retângulos que têm uma área de 36 cm^2 têm um perímetro não inferior a 24 cm.

O que você acha do que cada um desses alunos diz: você concorda ou discorda? Explique.

A&C julgaram positivamente a proposta de Serge, mas os alunos não viram imediatamente como explicá-la: “*É uma bobagem, porque é óbvio [...] como podemos provar isso?*” Eles retornam a essa questão após considerar a alegação de Brigitte, que induz ao uso da fórmula de área e perímetro. Sem alterar seu julgamento inicial, eles invocam propriedades aritméticas:

Quando você aumenta o perímetro, os números que você aumenta... aí, os números que se multiplicam... que somam [...] bem, sim, porque quando você aumenta o perímetro, o comprimento e a largura aumentam. Então, quando você multiplica os dois, ele também aumenta.

O caso A&C ilustra uma concepção de área-perímetro que se desenvolve dentro da estrutura da aritmética simbólica, na qual as fórmulas fornecem uma representação cuja manipulação e interpretação estão sob o controle de seu referente (ou seja, o que elas modelam). O princípio de uma covariação monotonamente crescente de área e perímetro é forte o suficiente para se impor e controlar a manipulação das fórmulas. Em ambos os casos, os alunos não estavam limitados pelas ferramentas semióticas necessárias para realizar a tarefa proposta, nem pelas habilidades lógicas. A busca deles estava limitada por suas concepções.

Conto 3, onde a questão é a reestruturação do conhecimento

Embora os alunos pareçam dominar algumas ferramentas matemáticas, a maneira como as utilizam em diferentes situações pode revelar inconsistências que podem deixar o professor confuso. As vinhetas a seguir vêm de um estudo da relação entre o provar e o conhecer dos alunos do 9º ano (Miyakawa, 2005, p. 225). Os dois alunos, L&J, estão resolvendo tarefas de construção e reconhecimento de simetria reflexiva:

Problema: construção do simétrico de um segmento:

31 *J:* Está tudo bem aí.

32 *L:* Um ângulo reto..., então, pegamos o compasso assim... entendeu?

33 *J:* Sim.

34 *L:* Ops, espera... se dobrarmos assim... sim, serve, está tudo bem

35 *J:* Hum

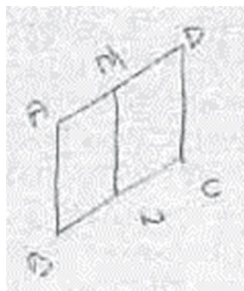


Problema: Reconhecer uma relação de simetria

Dada a hipótese:

paralelogramo $ABCD$ M meio de $[AD]$

N meio de $[BC]$



Prova de L&J:

A é o ponto simétrico de D em relação a M, porque A e D estão à mesma distância de M e os três pontos estão alinhados.

B é o ponto simétrico de C em relação a N, porque B e C estão à mesma distância de N e os três pontos estão alinhados.

Conclusão: AB e DC são simétricos em relação à reta MN

148. J: sim, é o mesmo de antes. Se, se M é o meio de AD, e N é o meio de BC. MN ...

[...]

153. L: Isso significa que em algum lugar, o ângulo reto e tudo mais, não existe mais.

154. J: Hum...

155. L: Então, então, espera, M é ..., merda, A é simétrico de D.

156. J: Ah, sim, dizemos a mesma coisa.

157. L: Bem, sim.

O caso da L&J evidencia o papel crítico dos controles nas decisões e ações. Existem tanto controles visuais relacionados à simetria, como dobradura de papel e controles associados ao uso de instrumentos (problema 1), quanto controles baseados em propriedades geométricas e baseados em um senso comum global de simetria (que oblitera o controle geométrico). A questão que é ilustrada ali não é a falta de lógica ou a ausência de conhecimento, mas a da reestruturação do conhecimento. Mesmo um matemático, na vida cotidiana, primeiro avalia perceptiva e globalmente a simetria de uma instalação, antes de usar suas competências matemáticas.

Concepção, Explicação e Argumentação

Temos experiências pessoais e diárias de uso do mesmo conhecimento matemático de maneiras diferentes, dependendo da situação e do contexto. Sem perceber, poderíamos usar números decimais como um par de inteiros quando eles representam um preço a ser pago, ou como inteiros equipados com um ponto, dependendo da escolha da unidade. Ambos não são congruentes com o significado matemático do conceito correspondente. No caso dos alunos, isso pode levar a erros em certas situações. Costumávamos ver lá as evidências de “concepções errôneas.” No entanto, esses erros, na maioria das vezes, são resultado da extensão de

procedimentos e conhecimentos válidos dentro de um determinado domínio, mas falhos além dele.

Propus unificar as facetas de um mesmo pedaço de conhecimento dentro de um modelo construído sobre a noção de “concepção” para denotar uma compreensão que tem as propriedades de um pedaço de conhecimento dentro de um certo domínio de validade. Uma vez *um conjunto de problemas* foi especificado como sendo seu domínio de validade, uma concepção pode ser caracterizada por três conjuntos unidos e vinculados: um *conjunto de ferramentas semióticas*, um *conjunto de operadores* e uma *estrutura de controle* que permite avaliar, escolher e decidir (Balacheff, 2013). As estruturas de controle regulam os processos de resolução de problemas desde o seu início até a decisão final de seu término bem-sucedido. Assim, a validade de uma solução depende fundamentalmente das concepções. Nos estágios iniciais, os alunos podem confiar em uma combinação de critérios pragmáticos e baseados em conhecimento, o que não está de acordo com as normas matemáticas. Mas sabemos que essas normas evoluíram ao longo da história, assim como evoluem com o aprendizado da matemática. Então, podemos concordar com as seguintes afirmações:

- A validação de uma afirmação depende dos meios de representação, vinculação e processamento dos objetos em questão, bem como dos meios de controle associados.
- A racionalidade dos alunos é construída desde as primeiras atividades na sala de aula de matemática, o que lhes permite entrar em uma abordagem de validação bem antes da formalização completa dos objetos matemáticos.

Então, as atividades coletivas em sala de aula, reguladas pelo professor como referente matemático, impõem uma socionorma *matemática* (Cobb & Yackel, 1996) que pode não estar em conformidade com as canônicas, mas que pode ser aceita desde que respeite condições mínimas (Pedemonte, 2005, p. 17):

- Disponibilidade de teoremas correspondentes aos operadores;
- Existência de uma estrutura matemática que pode substituir a concepção e fornecer a base teórica —ou seja, objetos e um sistema de dedução e princípios aceitos.

Provar e Saber, Uma Interação Dialética

Provas empíricas e intelectuais

A dependência mútua dos sistemas de representação e estruturas de controle torna necessário distinguir diferentes tipos de prova para dar conta de suas diferenças e de sua evolução. A classificação que propus no final da década de 1980 tinha esse objetivo. Muitas

vezes é interpretado como uma sequência de “estágios”, o que não é. As observações em que se baseou evidenciaram que os alunos aceitam um tipo de prova de acordo com suas concepções e de acordo com sua percepção da situação.

Essa dependência é particularmente óbvia quando se lida com contraexemplos. Diferentes abordagens de validação podem ser identificadas no decorrer da resolução de um problema ou no decorrer de um debate contraditório. As chances das interações sociais ou da situação podem até levar à obliteração da argumentação em favor da persuasão. Enfim, um tipo de prova é menos uma informação sobre o aluno do que sobre *o aluno em uma situação em um dado momento de sua história matemática*.

Nas séries iniciais, os problemas lidam preferencialmente com experiências conhecidas ou concretas. Quanto mais os alunos avançam na escolaridade, menos esse contexto fica disponível, e a matemática se torna cada vez mais abstrata. Mas, ter ou não acesso a um referente concreto é uma característica de uma situação de aprendizagem que desempenha um papel central na configuração do problema de validação. A possibilidade de executar uma decisão ou satisfazer uma afirmação dá acesso a validações pragmáticas. Quando esse acesso não é possível, as validações são necessariamente intelectuais. Assim, a produção de provas intelectuais requer, entre outras coisas, a expressão linguística ou semiótica de objetos e suas relações.

A passagem do empirismo ingênuo para a prova matemática pode, por assim dizer, descrever o movimento do aprendizado da prova na sala de aula de matemática. Este movimento é o de uma abordagem pragmática para uma teórica e, portanto, de uma evolução *da leitura das situações de aprendizagem* em que a atividade matemática se desenvolve e o estatuto do conhecimento mobilizado evolui.

O papel fundamental dos exemplos genéricos

O exemplo genérico consiste na eliciação das razões da validade de uma afirmação pela realização de operações ou transformações sobre um objeto presente não por si mesmo, mas como representante de uma classe de objetos que compartilham as mesmas características. A formulação coloca em evidência e estrutura essas características da classe enquanto permanece vinculada à exposição de um de seus representantes, sem depender de suas propriedades singulares. Este é o processo pelo qual vemos o geral no particular.

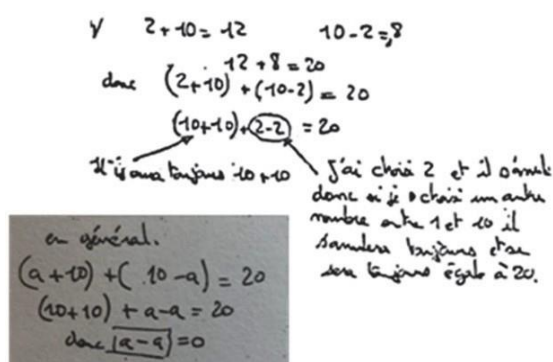
O exemplo genérico está na fronteira entre a prova pragmática e a prova intelectual, cruzamento esse que é provocado pela consciência do caráter genérico do caso. Segue abaixo

uma vinheta ilustrativa que atesta o caráter genérico do exemplo utilizado pelo aluno. Isto vem de uma repetição do trabalho de Alan Bell que eu

fiz no início da minha pesquisa (Fig. 2).

O que está escrito completa o movimento em direção a uma representação que dá conta da generalidade, ao mesmo tempo em que retém um controle sobre o fio da escrita que reflete o da construção da solução; assim, pode-se compreender o estranho “portanto $a - a = 0$ ”.

O desafio para o professor que pode utilizar exemplos em seu ensino, é ser preciso ao dar o caráter genérico do caso. Como meio probatório, um exemplo genérico não é apenas um exemplo.



“donc” tradução “então”

– Sempre haverá $10 + 10$

– Eu escolhi 2 e ele se anula, então se eu escolher outro número entre 1 e 10, ele sempre se anula e é sempre igual.

Na caixa cinza, a versão final da prova

Fig. 2. Escolha qualquer número entre 1 e 10. Some o resultado a 10 e anote a resposta. Subtraia o primeiro número de 10 e anote a resposta. Adicione suas duas respostas.

- Que resultado você obtém?
- Tente começar com outros números. Você obtém o mesmo resultado?
- O resultado será o mesmo para todos os números iniciais?
- Explique por que sua resposta está correta. (Bell, 1976, p. 40)

O desafio didático

O aprendizado inicial da prova na sala de aula de matemática requer a criação de uma situação na qual os alunos provavelmente criarão um problema para assumir a responsabilidade pela solução que propõem. Projetos de pesquisa exploraram diversas abordagens, desde situações de aprendizagem baseadas em investigação aberta até a criação de situações específicas. Elas implicam um compromisso exigente do professor para implementá-las e manter um significado matemático da atividade, mas recuando para respeitar a autonomia dos alunos. O ponto fraco é encerrar a situação passando de um debate sobre a validade de uma afirmação para um debate sobre a natureza e a estrutura da própria argumentação como objeto cujas características explícitas condicionam sua admissibilidade como prova. Em outras palavras, a questão da validade da solução do problema precisamente em jogo deve ser superada

para dar lugar à questão do critério de verdade, que nada mais é do que lançar as bases da produção do conhecimento matemático.

A validação de um enunciado matemático não obtém sua legitimidade da conformidade com a lógica e do estatuto exclusivo dos enunciados mobilizados, mas do conjunto de enunciados aos quais elas estão vinculadas dentro de um todo estruturado: uma teoria que deve ser reconhecida como tal.

Com efeito, a referência a um quadro teórico explícito como contexto para a atividade matemática está presente em muitas pesquisas, mas não foi tematizada até a proposta de Alessandra Mariotti (2001; 1997) de definir um “teorema” como o sistema de

relações mútuas entre três componentes: um enunciado, sua prova e a teoria dentro da qual essa prova faz sentido.

Projetar situações que permitam concretizar estas condições é o maior problema que estamos enfrentando. Entre elas está o tomar a argumentação, o coração da resolução de problemas, como um objeto para a compreensão e aprendizado do que é uma prova em matemática.

Argumentação Matemática

A complexidade da gênese epistemológica da argumentação matemática

Existem várias formas de validação cujos pesos mudam ao longo de um continuum, desde a declaração de um problema até a comunicação de sua solução de acordo com uma norma em vigor. Suas interações e dependências com as concepções subjacentes de um sistema cuja natureza determina a da própria matemática.

Nas últimas duas décadas, os tomadores de decisões educacionais buscaram estabelecer uma relação com a matemática mais próxima das características epistemológicas da disciplina. Assim, a aquisição de conhecimentos era completada pela de “competências,” entre as quais os currículos designam o raciocínio e a comunicação matemática. Será que a definição bastante ampla destes poderia levar ao surgimento de uma atividade que aprofundasse o discurso matemático e, assim trazer à vida na sala de aula uma verdadeira pequena sociedade matemática? É claro que não há uma resposta definitiva.

As situações de prova devem ter as características de situações de validação com a restrição adicional de criar uma necessidade intrínseca para a análise, certificação, e institucionalização dos meios de prova no quadro coletivo da classe. Mas, embora saibamos com bastante precisão o que uma prova deve ser em termos de objetivo de aprendizagem no

final da escola obrigatória, não há uma caracterização compartilhada que possa servir de referência no curso da escolaridade que a precede. Assim, um tema importante é a caracterização da *argumentação matemática* como um meio legítimo de estabelecer a verdade e como um precursor para o aprendizado de provas matemáticas.

Uma argumentação matemática deve ser potencialmente admissível em relação às normas da sala de aula de matemática, ou seja, ser aceita como prova pela turma e confirmada pelo professor. Esta é uma condição mínima levando em conta a dimensão social. Proponho partir da definição de Andreas Stylianides (Stylianides, 2007, p. 291):

Uma demonstração é um argumento matemático, uma sequência conectada de afirmações a favor ou contra uma afirmação matemática, com as seguintes características:

1. Ela usa enunciados aceitos pela comunidade da sala de aula (conjunto de enunciados aceitos) que são verdadeiros e estão disponíveis sem justificativa adicional;
2. Utiliza formas de raciocínio (modos de argumentação) que são válidas e conhecidas pela comunidade de classe, ou dentro de seu alcance conceitual;
3. Ela é comunicada usando formas de expressão (modos de representação de argumentos) que são apropriadas e conhecidas pela comunidade da sala de aula, ou dentro de seu alcance conceitual.

Em grande parte, esta proposta é congruente com a definição comum de prova. Seu interesse está em destacar três características que correspondem a três problemas que precisam ser resolvidos no ensino. O primeiro é o problema da criação de uma referência, cuja forma deve ser modelada e as condições de criação especificadas. O segundo e o terceiro distinguem dois aspectos da argumentação: sua natureza (tipos de argumentação) e sua expressão (modos de representação dos argumentos). Estas duas características estão de fato interligadas no processo de produção da argumentação: o raciocínio e a argumentação são limitados pelos meios de representação, pelas habilidades linguísticas e pelo nível das concepções mobilizadas e compartilhadas (por exemplo, o caso do exemplo genérico).

Contudo, embora as raízes históricas da prova matemática lhe dessem legitimidade, *o conceito de argumentação matemática será um conceito didático* e não a transposição de um conceito matemático, a menos que consideremos que a função “social” deste último no seio da comunidade científica o constitui. Isto seria um erro tanto epistemológico quanto teórico: embora seja produto de uma atividade humana que é objeto de uma certificação ao final de um processo social, uma prova matemática é independente de um agente particular. A normalização da prova em matemática, além do caráter institucional de seu referencial teórico, exigiu sua despersonalização, descontextualização e atemporalidade. Pelo contrário, a argumentação é

intrinsecamente realizada por um agente e depende das circunstâncias de sua produção.

As características da argumentação matemática não devem apenas permitir que ela se diferencie de outras práticas e normas de argumentação para garantir a transição para a norma da prova matemática, mas também devem ser eficazes na hora de arbitrar as propostas dos alunos. Além disso, a argumentação matemática deve satisfazer os requisitos de institucionalização. É um problema difícil e delicado nos níveis elementares; o reconhecimento de seu caráter matemático não pode ser reduzido à avaliação de sua forma. Como, por exemplo, arbitrar um exemplo genérico que ponha em equilíbrio o geral e o específico, cujo equilíbrio se encontra no final de um debate contraditório em busca de um acordo o menos possível maculado pelo compromisso?

A prova é tanto base quanto organizadora do conhecimento. Contribui para reforçar sua evolução e fornece ferramentas para sua organização. No ensino, legitima novos conhecimentos e constitui um sistema: conhecimento e prova ligados entre si constituem a “teoria.” A função de institucionalização das situações de prova coloca a validação explícita sob a arbitragem do professor que é, em última análise, a garantia de seu caráter matemático. Esta dimensão social, no sentido de que o funcionamento científico depende de uma organização construída e aceita, está no cerne da dificuldade de ensinar prova em matemática.

Quando uma argumentação é matemática?

Alguém se dedica a procurar uma prova de um enunciado se houver razões, baseadas em suas concepções, para apoiar sua verdade. Verificada esta condição, o enunciado mereceu seu reconhecimento como uma conjectura. Esta observação me levou a propor uma caracterização da conjectura que espelha a caracterização do teorema:

Conjectura = {concepção, enunciado, argumentação}.

Estabelecer a validade da conjectura requer raciocínio e sua formulação, incluindo a formação de uma frase para expressar sua afirmação. Estas construções evoluem junto com o processo de resolução de problemas até o ponto em que *uma explicação da verdade* é estabelecida *aos olhos do solucionador de problemas*, individual ou coletiva, que poderia servir ao menos como argumentação para outros, podendo até ser aceita como explicação.

Em uma atividade matemática adequada, o futuro esperado de uma conjectura deve ser transformado em um teorema. Mas nas séries iniciais, o conhecimento de referência não está organizado em uma teoria e a estrutura da prova não está em conformidade com as normas matemáticas. Além disso, no ensino de matemática nem todos os enunciados verdadeiros se

tornam teoremas: um teorema é, em sala de aula, um enunciado institucionalizado que pode ser usado sem produzir novamente sua prova. Por esse motivo, nos níveis de ensino considerados, sugiro que se consulte a conjectura validada como um enunciado válido e caracterizá-lo pelo trio:

Enunciado válido = {base de conhecimento, sentença, argumentação matemática}.

Isso coloca em primeiro plano o papel da base de conhecimento, que deve ser o mesmo papel da teoria no caso do teorema, ou seja, a referência onde é legítimo tomar enunciados para construir a argumentação. Na maioria das vezes, esta referência existe, mas é deixada como uma cláusula implícita do contrato didático; são os enunciados que foram apresentados como tal em lições anteriores. Isto é mais uma caixa de ferramentas (Reid, 2011, p. 26), mas poderia desempenhar um papel análogo ao de uma teoria, congruente com a ideia de Hans Freudenthal (1973, p. 390) de uma *organização local* que pode ser considerada matemática se for limitada o suficiente para que sua consistência e seu domínio de validade possam ser pragmaticamente garantidos. Um exemplo de tal referência sendo explicitada para os alunos poderia ser a quase axiomatizada¹³⁰ geometria dos livros didáticos do 8º ano no Japão baseados em uma “escolha deliberada” de propriedades fundamentais e sua organização local como um sistema (Miyakawa, 2016). Outro exemplo poderia vir do uso de micromundos que têm a propriedade específica de evoluir de algumas ferramentas e primitivas para objetos complexos com o conhecimento do aluno (Mariotti, 2001).

Associando diferentes registros semióticos, uma *argumentação matemática* é um texto multimodal que não se sustenta sozinho: é construído em torno de uma sentença e contextualizado por um estado de conhecimento. Sua caracterização requer de cada um destes componentes:

- *Uma base de conhecimento* — explícita, estabelecida por e para a comunidade da sala de aula;
- *Uma sentença* — linguisticamente apropriada, semanticamente adequada, de uma posição geral;
- *Uma argumentação* — eticamente consciente, formalmente coerente, congruente com as concepções dos alunos, vinculando a sentença à base de conhecimento.

Exemplos genéricos e experimentos mentais são formas candidatas de tais argumentações. Tornando-se uma norma sociomatemática, a argumentação matemática transformará a sala de aula do ensino fundamental em uma sociedade matemática, ainda que

¹³ Quase' significa que certas propriedades são introduzidas por observação ou aceitas.

situada e provisória. Ela preparará os alunos do jardim de infância ao 9º ano para passarem de uma posição de praticantes para uma de abordagem teórica da matemática como ciência. Entretanto, atingir esse objetivo é um desafio para a comunidade da educação matemática. Um dos seus aspectos foi destacado por Patricio Herbst quando éramos coautores de um artigo, e merece as palavras finais:

As atividades em sala de aula não são desempenhos matemáticos apenas porque a sala de aula é uma sala de aula de matemática e não apenas quando seu desempenho é fiel a uma pontuação matematicamente verificada, mas o observador precisa de meios para apoiar a alegação de que uma atividade em sala de aula é um desempenho matemático, mesmo quando ele não tenha usado uma definição aceita, um símbolo convencional ou uma prova sintaticamente válida. (Herbst & Balacheff, 2009)

Referências

- Arsac, G. (2013). *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes et la convergence uniforme: De la difficulté historique du raisonnement sur les limites*. Hermann.
- Austin, J. L. (1950). In: Longworth, G. (ed.), *Truth* (The virtual issue nº1–2013). The Aristotelian Society.
- Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach of the psychology of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 2–8.
- Balacheff, N. (2013). CK ϕ , a model to reason on learners' conceptions. In: Martinez, M. V. and Castro, A. (eds.), *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group PME (PME-NA)*. pp. 2–15.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1–2), 23–40.
- Boero, P. (ed.). (2007). *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*. Sense Publishers.
- Bradley, R. E. and Sandifer, C. E. (2010). *Cauchy's Cours d'analyse: An Annotated Translation*. Springer Science & Business Media.
- Cassin, B. (ed.) (2004). *Vocabulaire européen des philosophies*. Seuil — Le Robert.
- Cobb, P. and Yackel E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31(3/4), 175–190.
- Davidson, D. (1996). The folly of trying to define truth. *The Journal of Philosophy*, 93(6), 263–278.
- Delarivière, S., Frans, J. and Van Kerkhove B. (2017). Mathematical explanation: a contextual approach. *Journal of Indian Council of Philosophical Research*, 34(2), 309–329.
- Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM - Mathematics Education*, 40(3), 373–384.
- Duval, R. (1992). Argumenter, prouver, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, 31, 37–61.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Springer Netherlands.

- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42–49.
- Hanna, G. (2017, September 22). Connecting two different views of mathematical explanation. enabling mathematical cultures. *Enabling Mathematical Cultures*, Mathematical Institute, University of Oxford.
- Hanna, G. and Villiers M. de (eds.). (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study (corrected edition 2021)*. Springer.
- Harel, G. and Sowder L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In: A. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky, and T. Dick (eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 7, pp. 234–283). American Mathematical Society.
- Herbst, P. and Balacheff, N. (2009). Proving and Knowing in Public: The Nature of Proof in a Classroom. In: D. A. Stylianou, M. L. Blanton, and E. J. Knuth (eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (pp. 40–63). Routledge.
- Legrand M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 365–406.
- Mariotti M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 6(3), 257–281.
- Mariotti, M. A. Bussi, M. G. B., Boero, P., Ferri, F. and Garuti R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In: E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21st PME Conference* (Vol. 1, pp. 180–195). University of Helsinki.
- Miyakawa T. (2005). Une étude du rapport entre connaissance et preuve : Le cas de la notion de symétrie orthogonale [Université Joseph Fourier]. http://www.juen.ac.jp/math/miyakawa/article/these_main.pdf
- Miyakawa, T. (2016). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: The cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, 92(2), 37–54.
- Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(3), 313–347.
- Plantin, C. (1990). *Essai sur l'argumentation*. Éditions Kimé.
- Putnam, H. (1975). What is mathematical truth. *Historia Mathematica*, 2, 529–533.
- Reid, D. A. (2011). Understanding proof and transforming teaching. *PME-NA 211 Proceedings*, 15–18.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics*, 38(3), 289–321.
- Tarski, A. (1944). The Semantic Conception of Truth: And the Foundations of Semantics. *Philosophy and Phenomenological Research*, 4(3), 341.
- Villani, C. and Torossian C. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. La documentation française. *Ministère de l'éducation nationale*.