Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones

Criteria for organizing the teaching of Superior Mathematics that promote comprehension. An example with polinomial approximation of functions

MABEL ALICIA RODRIGUEZ[1]

MARCEL DAVID POCHULU[2]

ANA MATILDE CECCARINI[3]

Resumen

Ubicados en la problemática de la formación del profesor de Matemática en Argentina nos circunscribimos al problema de la comprensión de contenidos de Matemática Superior. Tomando en consideración investigaciones en Educación Matemática, planteamos criterios que permiten organizar tal enseñanza. Ejemplificamos con una temática que se refiere a las aproximaciones polinómicas de funciones de variable real a valores reales.
Palabras-clave*: comprensión; formación de profesores; aproximaciones polinómicas.*

Abstract

Considering the problematic of teacher education in Argentina we focus on the problem of Superior Mathematics´ comprehension. We take into account research in Mathematics Education and we state criteria that allow to plan such teaching. We choose polinomial approximation of real functions to exemplify these criteria.
Keywords*: comprehension; teacher education; polinomial approximation.*

1. Problemática y revisión de antecedentes

La preocupación por el fracaso escolar y por renovar la enseñanza de la Matemática en las aulas se viene reportando desde hace más de 40 años. GASCÓN y LLADÓ (1998, citado en GASCÓN, 2009), haciendo alusión a las acciones implementadas por la comunidad de profesores en las décadas del 70 y del 80, expresan:

> Surgieron así las primeras alternativas a la enseñanza tradicional de las matemáticas que se concretaron en nuevos materiales curriculares que pretendían superar la separación ficticia entre teoría y práctica matemática y ayudar a los alumnos a participar en el proceso de modelización de situaciones reales. Una de las ideas básicas compartidas dentro de este amplio movimiento era la de "sumergir" al alumno en las matemáticas verdaderas por medio de problemas abiertos, relacionados con hechos concretos que permitiesen hacerle

[1] Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina – mrodri@ungs.edu.ar
[2] Universidad Nacional de Villa María, Argentina – mpochulu@arnet.com.ar
[3] Instituto Superior Montoya, Argentina – ana.ceccarini@gmail.com

> vivir la relación de las matemáticas con las ciencias experimentales, con la tecnología y, en definitiva, con la realidad. (p. 275)

En este sentido, son innumerables las propuestas de enseñanza que se han reportado en estos años, las cuales tienen la intención de achicar la brecha existente entre la Matemática que efectivamente se enseña y la que debería ser enseñada en las aulas. Una de las problemáticas más visibles, por citar un ejemplo, se encuentra en la transición entre el Nivel Medio y el Superior, fundamentalmente por la separación que existe entre enseñar y hacer Matemática, donde las discontinuidades se producen debido a lo que es posible estudiar en un nivel, y lo que se propone para ser estudiado en el otro (GASCÓN, 2009).

Al respecto, GASCÓN (2009, p. 280) sostiene que *"sin negar la existencia de factores cognitivos, podemos explicar en gran medida muchos hechos didáctico-matemáticos en términos de la estructura de las organizaciones matemáticas escolares y del tipo de actividad matemática que las restricciones institucionales permiten llevar a cabo"*. Desde esta perspectiva, la formación de profesores también pasó a ser un vasto campo de estudio de la Didáctica de la Matemática, donde se han cuestionado constantemente los presupuestos que en otras épocas se aceptaron implícitamente.

SÁNCHEZ y GARCÍA (2009) consideran que la formación de profesores puede ser entendida *"como un proceso que conduce a los estudiantes para profesores a ser introducidos en la comunidad de práctica de esos profesionales"* (p. 505) a través del uso de herramientas, las cuales los capacitan para entender y hacer las tareas de la práctica y aprender a enseñar. Para las autoras, estas herramientas -que clasifican en técnicas (materiales educativos, software, etc.) o conceptuales (conceptos y constructos teóricos que fueron generados desde la investigación educativa)- ayudan a comprender y manejar las situaciones donde la Matemática es enseñada o es aprendida.

No obstante, la problemática de la enseñanza de la Matemática no se circunscribe a los niveles más bajos de formación de los alumnos, sino también, está presente en el nivel Superior, y en áreas particulares de esta ciencia, como Cálculo, Álgebra, Geometría, entre otras.

Así, por ejemplo, SALINAS y ALANÍS (2009) expresan que la problemática de enseñanza del Cálculo radica en que existe gran dificultad para lograr que los estudiantes evidencien una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos que requiere esta área de la Matemática, lo cual es ayudado por una enseñanza tradicional donde se promueven prácticas algorítmicas y algebraicas, presentes hasta en las evaluaciones. Este modelo de enseñanza, centrado en técnicas algorítmicas que se alternan con definiciones y resultados formales que las justifican, trae aparejado *"elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas"* (SALINAS y ALANÍS, 2009, p. 359).

Estos autores proponen una enseñanza del Cálculo donde el interés no esté *"puesto en conceptos ni en temas aislados, sino la totalidad del discurso, donde cada parte es explicable por el todo y a su vez el todo se explica por sus partes"* (pp. 377-378), tratando de encontrar, al mismo tiempo, un camino adecuado para el abordaje formal y riguroso de las nociones matemáticas que se ponen en juego.

Continuando con los reportes sobre dificultades en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, SÁNCHEZ MATAMOROS, GARCÍA y LLINARES (2008) señalan que la noción de derivada de una función, al igual que la de integral, son claves en su estudio y que los estudiantes no logran construir un significado adecuado de estos conceptos, aún cuando han recibido su enseñanza. Sostienen que los problemas que se les plantean a los estudiantes deberían mostrar a la derivada integrada desde distintas perspectivas, y remarcan la necesidad de coordinar los diferentes modos de representación, estableciendo conexiones entre lo gráfico, lo analítico y lo algebraico, como una forma de construir imágenes mentales adecuadas en los estudiantes, lo cual ayuda a comprender este concepto.

Con esta visión acerca de la enseñanza de la Matemática, es posible encontrar numerosas propuestas de trabajo en las que se proponen abordajes diferentes de las nociones teóricas que atraviesan el Cálculo, donde tiene un protagonismo importante el uso de las TIC. Entre ellos, FONT (2009), quien propone algunas formas de argumentación de acuerdo al tipo de razonamiento utilizado (por inducción, abducción y deducción) para el cálculo de derivadas, sin usar la definición por límites, tratando de promover la comprensión de los conceptos involucrados y haciendo uso de los nuevos recursos. Advierte que si bien los graficadores dinámicos tienen ciertas ventajas para la enseñanza del Cálculo, también presentan algunos inconvenientes que se deberían tener en cuenta. Uno de ellos es que ayudan a crear imágenes mentales erróneas en los alumnos, como el hecho de considerar que la gráfica de una función es un camino donde un punto puede moverse sobre la representación gráfica, o que la recta tangente que se muestra en una animación es la misma en todos los puntos de la curva, aunque con diferente inclinación; lo cual llevaría a un "doble" error conceptual, no sólo por considerar la misma recta tangente a una curva que toma diferentes posiciones, sino que una curva tendría una sola recta tangente que se desplaza sobre el gráfico.

Por otra parte, GÓMEZ CHACÓN & JOGLAR PRIETO (2010) analizan el desarrollo de las componentes cognitivas, didácticas, técnicas y afectivas en profesores en formación, cuando aprenden funciones exponenciales y logarítmicas en un escenario multimedia y con software de Geometría Dinámica. La investigación desarrollada por estas autoras muestra que las dificultades y bloqueos mentales que aparecieron en los estudiantes participantes del estudio, referidos a la modelación con funciones, pudieron ser salvados por el uso de TIC; aunque las estrategias puestas en juego para resolver una actividad están estrechamente relacionadas con la comprensión conceptual que se tiene de los conceptos involucrados detrás de la técnica empleada. Destacan que para enseñar Matemática con nuevos recursos es necesario contar con capacidades referidas al contenido matemático y resolución de problemas, planificación de un proceso de instrucción y modelaje matemático, empleo y uso de recursos y materiales, y aquellas relacionadas con la componente personal y afectiva (actitudes, emociones personales, creencia, prácticas sociales en el aula, habilidades interpersonales y creatividad, entre otras).

A su vez, expresan que el empleo de TIC en la clase de Matemática aumenta el nivel de confianza y motivación que logran tener los profesores en formación sobre el acceso y la utilización de la tecnología, y los ayuda a desarrollar su conocimiento e identidad profesional.

Argentina no se queda al margen de estas preocupaciones que se refieren tanto a mejorar la formación de profesores para el Nivel Medio como a lograr mayor comprensión de contenidos matemáticos.

En este país, la formación de profesores se da en dos sistemas: el *Universitario*, y el *Superior no Universitario*. El primero se caracteriza por la autonomía en sus decisiones tanto organizacionales como académicas. En el segundo, en cambio, las decisiones se toman regionalmente aunque desde hace cuatro años se creó una institución, el Instituto Nacional de Formación Docente (INFD), cuya función primaria, según el artículo 2 del Dto. 374/07 es "planificar, desarrollar e impulsar las políticas para el Sistema Superior de Formación Docente Inicial y Continua". La formación de profesores de Matemática de nivel Medio, dependiente de este segundo sistema -el Superior no Universitario-, está actualmente transitando un proceso de importantes cambios, centralmente en dos direcciones. Por un lado el INFD está promoviendo cambios curriculares para lo cual convocó a docentes de ambos sistemas para elaborar un Documento que expresara recomendaciones para llevar adelante dichos cambios. Ese Documento[4] (RODRÍGUEZ *et al*, 2010) responde tres preguntas centrales: a) ¿qué debe comprender de Matemática un estudiante del Profesorado durante su formación inicial?, b) ¿qué experiencias formativas debe transitar para lograr tal comprensión?, y c) ¿cómo sabrán docentes y estudiantes que tal comprensión se ha alcanzado?

La otra dirección de cambios se origina a partir de un programa estatal[5] por el cual todos los estudiantes de nivel Medio, los del nivel Terciario superior que se forman como futuros docentes y los profesores de ambos niveles recibirán una computadora personal en un breve lapso de tiempo. Este hecho, denominado "*modelo 1 a 1*", sin dudas impactará en todos los ámbitos cambiando las condiciones para aprender. En particular, esto ocurrirá en las aulas del nivel Medio y en las del futuro profesor, oportunidad que podría aprovecharse para utilizar los recursos tecnológicos para el logro de mayor comprensión. En consecuencia, la formación de profesores para que se desenvuelvan apropiadamente ante estas nuevas condiciones está siendo objeto de estudio y reflexión por parte del Estado Nacional.

La noción de comprensión, que tiene múltiples acepciones e investigadores dedicados a estudiarla, que se vincula con posiciones de investigadores en Educación Matemática como GODINO (2000 y 2003), FONT (2001), PINO-FAN, GODINO y FONT (2011), se entiende aquí del siguiente modo:

> Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra o extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural. (RODRÍGUEZ *et al*, 2010, p. 122)

En este contexto es en el que se inserta este trabajo. En particular, nos hemos propuesto puntualizar algunos aspectos a considerar para diseñar la enseñanza de la Matemática a nivel Superior que contemplen el uso de nuevas tecnologías para aprender Matemática, y una mirada sobre la ciencia que, en concordancia con el Documento de recomendaciones curriculares previamente mencionado, permita lograr en el futuro

[4] Proyecto de Mejora para la Formación Inicial de Profesores del Nivel Secundario.
[5] Conectar Igualdad: Programa de inclusión digital, educativa y social destinado a Escuelas Secundarias,

profesor una mayor comprensión de la disciplina. Tomamos para ejemplificar, una temática usualmente abordada en Cálculo: *aproximaciones polinómicas a funciones y en particular la tangencia*, desde un enfoque que integra aportes geométricos, numéricos, analíticos y contempla el uso de TIC.

2. Algunos criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior

Consideramos que el aporte central de este artículo es la selección y justificación de criterios que permitan organizar la enseñanza de Matemática en la formación de profesores atendiendo a que, por un lado ofrezcan orientaciones precisas a considerar y por otro lado que de márgenes a que cada docente, en función de su contexto de trabajo, institución, grupo de estudiantes, sus conocimientos, recursos, etc., adopte alguna de las líneas teóricas existentes en Educación Matemática o bien rasgos característicos de alguna de ellas para planificar la enseñanza. Que nuestro interés esté centrado en los criterios, y no en el diseño en sí de dispositivos didácticos para proponer la enseñanza de ciertos contenidos matemáticos, permite que, para este artículo, no necesitemos posicionarnos en un marco teórico particular de Educación Matemática, aunque como se verá tomamos elementos teóricos a la hora de fundamentar la propuesta. Un docente que considere los criterios y planifique sus clases, podrá tomar sus decisiones sobre cuáles enfoques de Educación Matemática considerar. Al respecto esperamos que puedan trascender posiciones unívocas que circunscriben a entender una problemática que acontece en la clase de Matemática desde un único enfoque.

Desde este posicionamiento, en esta sección establecemos criterios, que se fundamentan a partir de investigaciones realizadas en Educación Matemática de las que tomamos elementos teóricos a modo de marco teórico, que pueden ser útiles para planificar un proceso de enseñanza enfatice en profundizar la comprensión en los estudiantes.

Un primer criterio intenta recuperar, como se plantea en SALINAS y ALANÍS (2009), el hecho de tener un hilo conductor. Así es que establecemos:

- ✓ *Presentar preguntas o cuestionamientos directrices, amplios, que exijan, para su análisis, apelar a contenidos matemáticos usualmente separados en distintos campos (geométrico, analítico, algebraico, etc.).*

---

de Educación Especial e Institutos de Formación Docente de Argentina, y pertenecientes al sector estatal.

La enseñanza tendría como finalidad lograr acercamientos para responder –total o parcialmente– esas preguntas directrices y los contenidos matemáticos aparecen a raíz de esa finalidad. Este criterio permitiría recuperar el sentido del trabajo matemático que usualmente se invierte poniéndose en primer lugar el contenido sin que se advierta la razón de estudiarlo, los problemas que resuelve o que le dan origen, etc. Cabe resaltar que sólo atender a este criterio ayudaría a reorganizar la enseñanza, evitando compartimentar la Matemática en campos como el Análisis, Álgebra, Geometría, etc. Para ello bastaría considerar una pregunta o hilo conductor que motorice contenidos de diversos campos, y éstos confluyan en ofrecer aproximaciones o respuestas. En este sentido, SALINAS y ALANÍS (2009) expresan:

> La cuestión ¿cuál va a ser o cuál fue el valor de una magnitud que está cambiando? queda constituida como hilo conductor en el cual pueda desarrollarse un curso que permita referir los conceptos y procedimientos del Cálculo, aunque no en el orden ni con el significado y peso con el que aparecen en un discurso tradicional. (p.376)

- ✓ *Utilizar recursos didácticos en función del diseño de la enseñanza y para analizar o evaluar aprendizajes alcanzados.*

Este criterio intenta trascender posiciones didácticas que contemplan únicamente alguna línea teórica en Educación Matemática a la hora de pensar en la enseñanza. Se invierte la lógica de tomar una posición en Educación Matemática a partir de la cual se entiende que siempre es posible diseñar la enseñanza de contenidos para distintos niveles. Esto se expresa, por ejemplo en POCHULU y RODRÍGUEZ (2011).

- ✓ *Utilizar recursos informáticos como soporte para aprender Matemática.*

Este criterio pone al servicio de la enseñanza y de la comprensión, el uso de recursos de nuevas tecnologías. Cabe resaltar que no debe entenderse que se enseñan los recursos en las clases de Matemática. Algunos de los autores de la sección anterior, permiten sostener esta pauta. Pueden verse argumentaciones a favor de este criterio en ABRATE, LUJÁN y POCHULU (2007) y en POCHULU (2007).

3. A modo de ejemplo: Aproximaciones polinómicas a funciones y tangencia

A continuación proponemos distintos cuestionamientos que dan lugar a un trabajo matemático diverso (primero de los criterios mencionados). En uno de los planteos sumamos recursos tecnológicos (tercer criterio), a la vez que tratamos de explicitar algunos vínculos con distintos elementos didácticos (segundo criterio) que podrían tenerse en cuenta en caso de planificar la enseñanza.

El primer cuestionamiento amplio en formulación, que se presenta aquí es dilucidar "*¿qué sabemos sobre la tangencia?, ¿qué caracteriza a una recta para que sea tangente a una curva?, ¿cuál es su utilidad?, si en lugar de recta tangente se quisiera tomar otro tipo de curva, ¿cuál podría ser, por qué y para qué?*".

Al iniciar la discusión de qué sabemos sobre la tangencia, suele ocurrir que aparecen casi únicamente ejemplos en contexto geométrico de rectas tangentes a parábolas y circunferencias. En este caso, al indagar sobre el concepto, aparece una fuerte presencia de atributos irrelevantes (recta que "toca" a la curva en un único punto y recta que deja a la curva en un semiplano) que puede provocar que los estudiantes se basen en ellos para caracterizar la tangencia e incluso podrían operar con esa imagen conceptual (TALL & VINNER, 1981) en otros casos.

En el devenir histórico, la noción de tangencia ha transitado de la concepción euclidiana (global, estática,) a la tangente leibniziana (local, dinámica), en busca de una comprensión adecuada del concepto de recta tangente como de una herramienta que facilite los procesos de modelización en el complejo aprendizaje del Cálculo. Nociones de tangencia que han sido objeto de estudio y de investigación, dando origen a la aproximación teórica que se encarga de estudiar fenómenos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos que involucran ideas de variación y cambio (SERNA, 2007).

Estas perspectivas teóricas planten interrogatorios respecto del papel determinante que cumple la enseñanza para la comprensión de la relación entre "lo global" y lo "local, como asimismo los diferentes modos de representación para la comprensión del vínculo local-global (CANUL, DOLORES y MARTINEZ, 2011).

En algunos casos, el docente elige motivar la enseñanza de derivadas basándose en *el interés de conocer la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado*. Este hecho presupone que los alumnos conocen la noción de *recta tangente*. Luego, el docente presenta el procedimiento de ir tomando distintas secantes que tienen un punto fijo (el de la tangencia) y el otro punto es el que va cambiando. Así resulta la clásica definición de derivadas y es común que ni bien se termina esta presentación, se suman ejemplos para luego presentar *la definición de recta tangente* como $y = f'(a).(x-a)+f(a)$. Esto produce una cierta circularidad en la argumentación que habría que evitar: "*Necesitamos <u>partir de conocer qué es la recta tangente</u> para motivar la definición de derivada - definimos derivada - <u>con ella defino recta tangente</u>*".

FIGURA 1: Esquema de circularidad que habría que evitar en una posible motivación de la definición de recta tangente

Para salvar este problema podríamos pensar en utilizar otra forma de presentar la derivada, o cambiar la motivación. Nos resulta interesante ahondar en "qué es lo relevante de la tangencia" de modo de explorar si nos es posible encontrar una definición que prescinda de haber conocido previamente la derivada. Para ello nos preguntamos: ¿qué es lo que caracteriza a las rectas que son tangentes que no ocurre en otras? Con ejemplos muy simples se pone en evidencia que "cortar en un único punto no es suficiente". Bastaría pensar en una parábola y su eje de simetría. Éste contiene un único punto de la parábola, el vértice, pero "intuitivamente" los estudiantes afirmarían que no es la recta tangente a la parábola en el vértice.

A medida que se aumenta la cantidad de ejemplos se empieza a advertir que "*la recta tangente es la recta que mejor aproxima a la gráfica de la función cerca del punto de tangencia*". También uno podría decir "*la recta tangente es la recta que mejor describe el comportamiento de la función cerca del punto de tangencia*". Esto es claro coloquialmente, pero necesitamos expresarlo matemáticamente, cuestión que no resulta tan evidente. Si lográramos expresar matemáticamente esto ("*la recta tangente es la recta que mejor aproxima a la gráfica de la función cerca del punto de tangencia*"), y esa expresión, no dependiera de "haber definido" derivada, habremos logrado un circuito que evita la circularidad. Entonces, veamos cómo plasmar esta idea.

Suponemos una función $f: I \subset R \to R$, I un abierto, $a \in I$, con f continua en a. Como es evidente, la recta debe contener al punto, de modo que planteamos la recta con el formato $y = m(x-a) + f(a)$. Entonces *nuestro problema está en decidir ¿qué valor* *debería tomar m* para que esta recta resulte ser la que mejor describe a la función en los alrededores del punto de abscisa $x = a$?

Decir que la recta $y = m(x - a) + f(a)$ se aproxima a la gráfica de la función cerca del punto significa que la diferencia entre f y la recta "es chica". Podemos entonces decir que escribir $f(x) \approx m(x - a) + f(a)$ (para valores de x cercanos al a) es equivalente a decir "$f(x) - [m(x - a) + f(a)] \approx 0$" y esto a su vez dice que $f(x) - [m(x - a) + f(a)]$ tiende a 0 (cuando x tiende a a), es decir: $\lim_{x\to a}\left[f(x) - [m(x-a) + f(a)]\right] = 0$.

Si miramos este límite, notamos que, como *f* es continua, $f(x) \underset{x\to a}{\rightarrow} f(a)$ de modo que este límite es 0 *cualquiera sea el valor de m*. Esto nos dice que esto no basta para identificar cuál es la pendiente de la recta tangente. Lo que falta poner en juego es el hecho de que la recta tangente "es la mejor" aproximación.

Consideremos otra recta que contenga al punto (*a*, *f*(*a*)), $y = m(x\text{-}a) + f(a)$ con $n \neq m$ (para que sea distinta de la que estamos buscando. Lo que venimos diciendo se plantea del siguiente modo: $\lim_{x\to a}\frac{f(x) - m(x-a) - f(a)}{f(x) - n(x-a) - f(a)} = 0$. Analizando este límite, que resulta indeterminado del tipo "0/0", tenemos que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - m(x-a)}{f(x) - f(a) - n(x-a)} = 0 \text{ de donde } \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - n} = 0$$

Como este límite **debe** dar cero, el numerador debe tender a 0 y el denominador no. Al pedir que el numerador tienda a cero, resulta que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m$. De este modo, el límite del denominador no será 0, porque quedará *m* – *n*, que no es cero (pues *m* y *n* son distintos).

De aquí resulta la condición que debe cumplir la pendiente de la recta que mejor aproxima a la gráfica de una función en un punto. La pendiente debe ser $m = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Es claro que ese límite debiera existir, lo cual dependerá de la función considerada, y ser un número real. Con eso tenemos definida la recta tangente habiendo interpretado el significado de la descripción coloquial y prescindimos de haber definido derivadas.

Resumiendo lo más relevante de las ideas anteriores, mencionamos (para funciones y puntos con las condiciones indicadas arriba) que es posible definir recta tangente prescindiendo de la noción de derivada. Esto puede hacerse del siguiente modo. Coloquialmente decimos "*la recta tangente a una función en un punto es la recta que mejor aproxima localmente a la función*". Cabe aclarar que no siempre tal recta existe. Analíticamente, siguiendo el desarrollo anterior, la recta tangente se expresa como $y = m(x - a) + f(a)$ donde $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ cuando este límite da por resultado un número real.Consideramos que ha sido interesante plasmar aquí un desarrollo analítico que matematiza la idea coloquial expresada.

De ahora en adelante en el artículo consideramos que el docente ha seguido este recorrido: a) Trabajo con la noción intuitiva de tangencia, b) Expresión coloquial de la noción intuitiva que plasma la idea de mejor aproximación lineal local, c) Formalización de la noción de tangente interpretando simbólicamente tal expresión coloquial, d) Definición de derivada, e) Trabajo con derivadas (hasta inclusive la Regla de L´Hôpital).

Desde el inicio de la sección 3 hasta aquí hemos abarcado los ítems a) al c). De una manera análoga a la descripción coloquial de la tangencia, podríamos pensar "*¿cómo definimos la mejor aproximación cuadrática a una curva alrededor de un cierto punto*"? Siguiendo el mismo razonamiento, podríamos tratar de establecer cuánto deben valer a y b números reales (a no nulo) tales que $y = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + f(x_0)$ sea "la mejor" aproximación a la función f en los alrededores del punto x_0. Notar que uno de los parámetros está fijo por imponer la condición de que la cuadrática contenga al punto de tangencia. Lo mismo que la elección de la escritura de la cuadrática, es por comodidad.

Si tomara *otra cuadrática* que contenga punto $(x_0, f(x_0))$, $c(x - x_0)^2 + d(x - x_0) + f(x_0)$ (con $a \neq c$ ó $b \neq d$) debería ocurrir que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \left[a.(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + f(x_0)\right]}{f(x) - \left[c.(x - x_0)^2 + d(x - x_0) + f(x_0)\right]} = 0$$

Nuevamente analizamos este límite que es indeterminado del tipo "0/0". Aplicando L´Hôpital y tenemos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - [2a(x - x_0) + b]}{f'(x) - [2c(x - x_0) + d]}$$

Si la derivada es una función continua en x_0, tendríamos que el numerador tiende a $f'(x_0) - b$ y el denominador tiende a $f'(x_0) - d$. Si $f'(x_0) - b = 0$ y $f'(x_0) - d$ no es cero, el límite ya daría 0 pero estaríamos en un caso en el que la cuadrática del denominador no era suficientemente buena. La cuestión más crítica sería si $f'(x_0) - b = 0$ y $f'(x_0) - d = 0$ (es decir si $b = f'(x_0)$ y $d = f'(x_0)$ lo que es absolutamente razonable, pues expresaría que la parte "lineal de la cuadrática" coincide con la recta tangente. Notar que, a priori, no tendríamos por qué suponer esto. En este caso, el límite seguiría siendo indeterminado del tipo "0/0" y podríamos volver a aplicar L´Hôpital. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - 2a}{f''(x) - 2c} = 0$$

de donde, siendo $f\,''$ continua en el punto, tendríamos que $f''(x_0) - 2a = 0$ (y $f''(x_0) - 2c \neq 0$ porque si no ambas cuadráticas serían la misma)

De donde $2a = f''(x_0)$ y entonces $a = \frac{f''(x_0)}{2}$.

Siendo así, la cuadrática que mejor ajusta a la gráfica de la función en los alrededores del punto es $y = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Este camino nos lleva al Polinomio de Taylor desde otro lugar.

Consideremos la siguiente pregunta: *¿se observa algún tipo de regularidad en el caso de tomar rectas tangentes a funciones que son polinómicas?*

Queremos poner en relieve la ventaja del uso de TIC que permite analizar ejemplos particulares, conjeturar proposiciones para luego pasar a demostraciones más formales. Este camino permite poner en juego aspectos de argumentación, discutir distintas formas de validar el conocimiento, como lo plantea FONT (2009) y trabajar con generalizaciones en un proceso que sigue la lógica de los desarrollos históricos: de lo particular a lo general. Asimismo el propio recurso de los graficadores habilita a contemplar recursos de visualización (ZIMMERMANN, 1991, CANTORAL y MONTIEL, 2001) que se estudian en Educación Matemática.

Supongamos que se toma una función polinómica, sea $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ y se halla la expresión de su recta tangente, en un valor de x particular. Por ejemplo, sea $x = 2$. En este caso resulta: $y = 11x - 9$.

$plot(\{f(x), y\}, x = -4..4)$

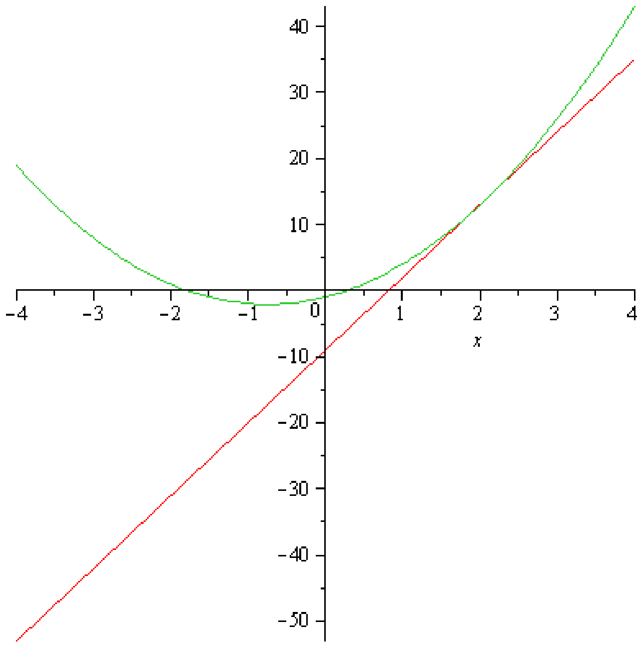

FIGURA 2: Gráfica de una función polinómica de 2° grado y recta tangente

Ahora bien, hemos trabajado con una recta tangente a una función de segundo grado, sabiendo que es la mejor aproximación lineal que tiene la curva en el punto $(2, f(2))$. Consideremos la siguiente función g, cuya expresión analítica se obtiene de hacer la resta entre f y la recta tangente a ella en $(2, f(2))$. Así obtenemos: $g(x) = 2x^2 - 8x + 8$.

Si analizamos la naturaleza de las raíces de g, sólo poniendo en juego que es una cuadrática, diríamos que podrían ser:

(a) Dos raíces reales y distintas, (b) Dos raíces reales e iguales, (c) Dos raíces no reales. Pero g surge de la resta entre una polinómica de grado 2 y una lineal, que particularmente es la recta tangente, y nos preguntamos si todos los casos siguen siendo factibles.

Si realizamos la representación gráfica de las tres funciones tenemos:

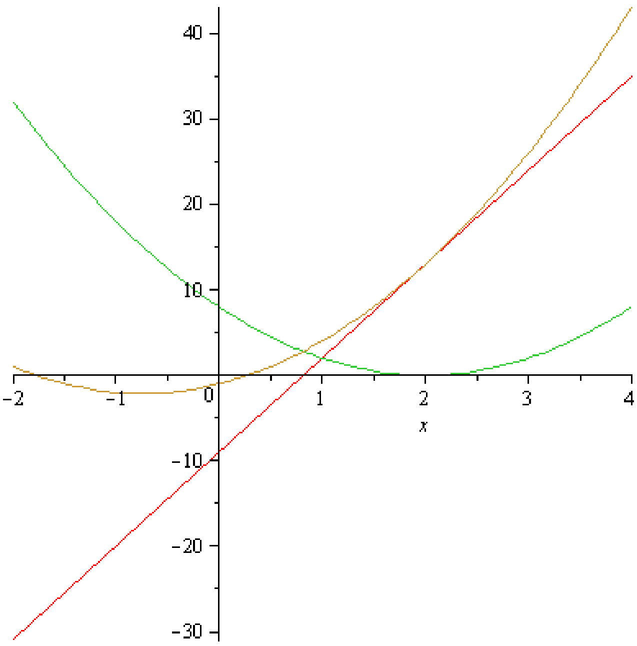

FIGURA 3: Gráfica de funciones polinómicas de 2° grado y recta tangente

Visualmente pareciera que g tiene una raíz doble en $(2, f(2))$. Se podrían proponer más casos particulares, pero también es importante dar cierta generalidad a este hecho para funciones polinómicas de grado 2, y para eso recurrimos al procesador simbólico del mismo software:

$f := x \rightarrow a_2x^2 + a_1x + a_0$

$x \rightarrow a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$

$y := f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

$(2\,a_2\,x_0 + a_1)\,(x - x_0) + a_2\,x_0^2 + a_1\,x_0 + a_0$

$g := f(x) - y$

$a_2\,x^2 + a_1\,x - (2\,a_2\,x_0 + a_1)\,(x - x_0) - a_2\,x_0^2 - a_1\,x_0$

$factor(g)$

$a_2\,(x - x_0)^2$

En consecuencia, más allá del punto que se escoja, la función g (definida como la resta entre f, una polinómica de grado dos, y la mejor aproximación lineal a ella en $(x_0, f(x_0))$ tiene una raíz doble en x_0.

Sigamos analizando más casos particulares, y para ello consideramos una función polinómica de grado 3. Sea la función f cuya expresión analítica es $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. La ecuación de la recta tangente a f en $(2, f(2))$ resulta: $y = 55x - 73$

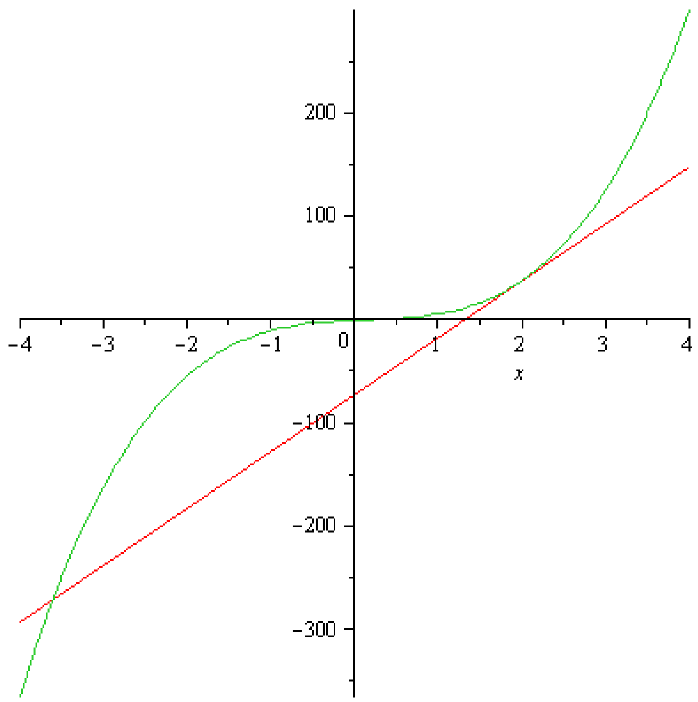

FIGURA 4: Gráfica de una función polinómica de 3° grado y recta tangente

La función g que resulta de la diferencia entre f y la recta tangente a ella en $(2, f(2))$ tiene por expresión analítica a: $g(x) = 5x^3 - 2x^2 - 52x + 72$.

Nuevamente analizamos la naturaleza de las raíces de g.

Por ser una función polinómica de grado 3, podría tener (a) tres raíces reales y distintas, (b) tres raíces reales e iguales, (c) tres raíces reales donde una de ellas tiene multiplicidad 2, (d) 1 raíz real y 2 no reales. Pero si asociamos a esta información el hecho de que g se define como la resta entre una función polinómica y la mejor aproximación lineal a ella en un punto $(x_0, f(x_0))$ ¿cuáles son las posibilidades?, ¿todas se conservan? Incluso se podría hacer un planteo diferente, en términos de buscar ejemplos para cada una de estas posibilidades.

Si realizamos una representación gráfica de nuestro caso particular se tiene:

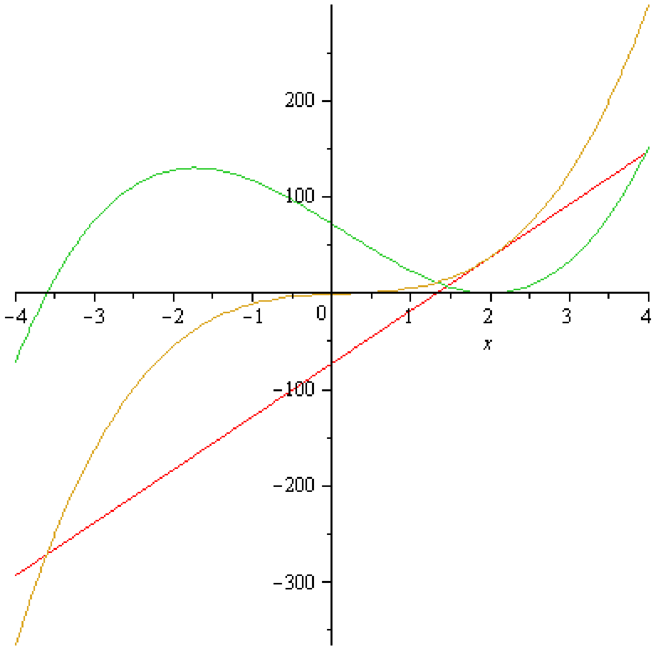

FIGURA 5: Gráfica de funciones polinómicas de 3° grado y recta tangente

Aquí la función *g* tiene 3 raíces reales, donde una de ellas es doble. Es un ejemplo del "tipo" (c) que se detalló anteriormente.

No será posible para el caso (a), esto es, tener 3 raíces reales y distintas, pero dejamos en suspenso esta cuestión y la retomamos más adelante. Veamos qué ocurre en un intento de generalización para este caso particular. Usaremos una vez más el procesador simbólico:

$$f := x \rightarrow a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$x \rightarrow a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$$

$$y := f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$\left(3\, a_3\, x_0^2 + 2\, a_2\, x_0 + a_1\right)\left(x - x_0\right) + a_3\, x_0^3 + a_2\, x_0^2 + a_1\, x_0 + a_0$$

$$g := f(x) - y$$

$$a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x - \left(3\, a_3\, x_0^2 + 2\, a_2\, x_0 + a_1\right)\left(x - x_0\right) - a_3\, x_0^3 \; - a_2\, x_0^2 - a_1\, x_0$$

$$factor(g)$$

$$\left(x - x_0\right)^2 \left(2\, a_3\, x_0 + a_3\, x + a_2\right)$$

Mirando matemáticamente esta expresión nos ayuda a definir la naturaleza de las raíces de la función *g*. Esto nos lleva a descartar rápidamente la imposibilidad de hallar ejemplos para los casos: (a) tres raíces reales y distintas y (d) una raíz real y dos no reales. Incluso hasta resulta interesante, y para los alumnos se contrapone a su intuición, si les proponemos que nos brinden un ejemplo particular de una función polinómica de grado 3 que no tenga puntos de intersección con una recta. Pareciera ser que el modelo mental que tienen de las curvas sí lo permite, y sin embargo, la imposibilidad puede mostrarse desde el punto de vista algebraico.

Siguiendo esta lógica y la problemática planteada, podría generarnos algunas sospechas que el caso (b) tres raíces reales e iguales, pueda presentarse.

El factor $(2a_3x_0 + a_3x + a_2)$ es lineal, y podría ser cero también para $x = x_0$, y en ese caso tendríamos una raíz triple.

Un pequeño desarrollo algebraico, que lo realizamos con el mismo programa, nos arroja como resultado que esto ocurriría si:

$solve(2\, a_3\, x_0 + a_3\, x_0 + a_2, x_0)$

$$x_0 = -\frac{1}{3}\frac{a_2}{a_3}$$

Veamos esto en un caso particular. Sea la función f, cuya expresión analítica es $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$. Entonces $x_0 = -\frac{1}{2}$. La ecuación de la recta tangente a f en $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ resulta $y = -\frac{11}{2}x - \frac{21}{4}$.

Ahora bien, la función g tiene como expresión: $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ y presenta una raíz triple para $x = -\frac{1}{2}$.

$plot(\{f(x), y\}, x = -3..3)$

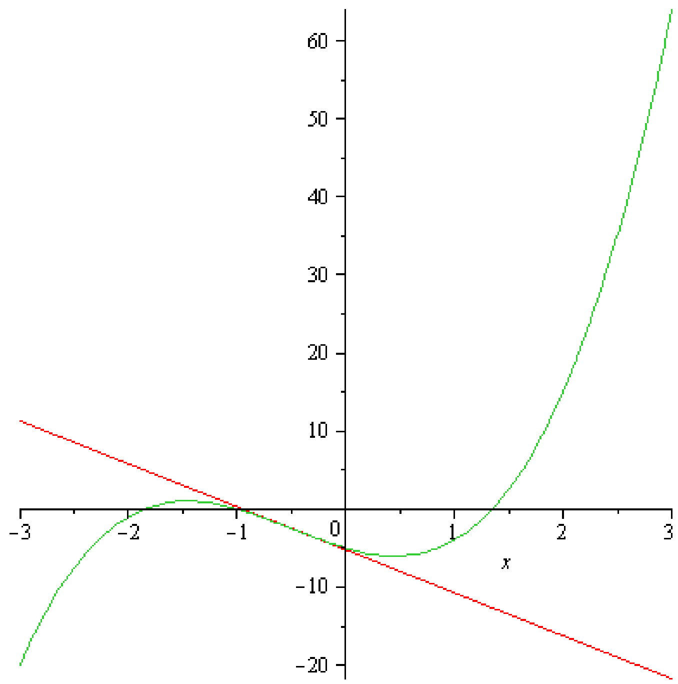

FIGURA 6: Gráfica de una función polinómica de 3° grado y recta tangente

Podríamos conjeturar que esto ocurre cuando la mejor aproximación lineal se la busca en el punto de inflexión de la función cúbica. Hagamos este desarrollo en forma simbólica con el software:

$f := x \to a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$x \to a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$

$f''(x)$

$6\,a_3\,x + 2\,a_2$

$solve(f''(x) = 0, x)$

$-\frac{1}{3}\,\frac{a_2}{a_3}$

Efectivamente nuestras sospechas parecen ser válidas.

Si quisiéramos intentar validar esta conjetura, sin uso de software, y para el caso general, podríamos hacer lo siguiente.

Admitimos que un polinomio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ puede escribirse de este modo:

$$k_n(x-a)^n + k_{n-1}(x-a)^{n-1} + k_{n-2}(x-a)^{n-2} + \cdots + k_2(x-a)^2 + k_1(x-a)^1 + k_0$$

Uno podría convencerse de esta idea intuitiva y geométricamente pensando que el polinomio que presenta las potencias de $x - a$ es una traslación del inicial.

El único valor que es inmediato es el k_0, que debe valer $P(a)$, es decir $k_0 = P(a)$ y al conocer la recta tangente expresada con derivadas podemos también obtener $k_1 = P´(a)$.

Tenemos que:

$$P(x) = k_n(x-a)^n + k_{n-1}(x-a)^{n-1} + k_{n-2}(x-a)^{n-2} + \cdots + k_2(x-a)^2 + f'(a)(x-a) + f(a)$$

Si planteamos la función diferencia entre el polinomio y la recta tangente y analizamos sus raíces tendremos: $h: R \to R, h(x) = P(x) - [k_1.(x-a) + P(a)]$, es decir

$h(x)= k_n(x-a)^n + k_{n-1}(x-a)^{n-1} + k_{n-2}(x-a)^{n-2} + ... + k_2(x-a)^2 +$
$f´(a)(x-a) + f(a)$ - [$f´(a)(x-a) + f(a)$]

Que cancelando y buscando las raíces de h, resulta:

$k_n(x-a)^n + k_{n-1}(x-a)^{n-1} + k_{n-2}(x-a)^{n-2} + \cdots + k_2(x-a)^2 = 0$, de donde h tiene al a como raíz doble y según cómo resulten los coeficientes podríamos decir más, por ejemplo, ser triple (si $k_2 = 0$ y $k_3 \neq 0$).

El pasaje de un polinomio escrito en potencias de x a potencias de $x - a$, puede hacerse inmediatamente si uno conoce el Polinomio de Taylor, pero también puede hacerse en el plano meramente algebraico, simplemente resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. También puede encararse con una mirada analítica, planteando que la diferencia entre las dos expresiones (el polinomio escrito en potencias de x y el escrito en potencias de $x - a$) resulta ser la función nula por lo cual todas las derivadas evaluadas en cualquier punto, siempre darán cero. Esto, desde el punto de vista didáctico habilita a trabajar con los modos de pensamiento algebraico y analítico que son diferentes, suelen desarrollarse por separado y requiere intencionalidad del docente para invitar a compararlos, encontrar ventajas o desventajas según la tarea.

Incluimos el siguiente ejemplo de esta situación.

Escribir $2x^3 - 5x^2 + x + 3$ en potencias de $x - 1$.

Esto significa encontrar a, b, c y d números reales tales que $2x^3 - 5x^2 + x + 3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ (para todo x real).

Desarrollando el miembro de la derecha:

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ $=$ $a(x^3-3x^2+3x-1)+b(x^2-2x+1)+c(x-1)+d$ $=$

$ax^3+x^2.(-3a+b)+x.(3a-2b+c)+(-a+b-c+d)$

Igualando coeficiente a coeficiente:

$$\begin{cases} a=2 \\ -3a+b=-5 \\ 3a-2b-c=1 \\ -a+b-c+d=3 \end{cases}$$

Se resuelve y resultan a = 2, b = 1, c = -3 y d = 1

Por el camino analítico, el planteo es igual, buscamos a, b, c y d números reales tales que $2x^3-5x^2+x+3=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ para todo *x* real.

Esto es lo mismo que decir que:

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d-(2x^3-5x^2+x+3)=0$ para todo x real y esto nos dice que $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d-(2x^3-5x^2+x+3)$ es la expresión de la función nula (h: R → R, $h(x)=0$ para todo x real).

Tomemos sus derivadas, luego las evaluaremos en $x=1$ (esto es a conveniencia pues se facilitan los cálculos, como se verá a continuación. Podríamos evaluar en cualquier valor y siempre daría 0).

$h(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d-(2x^3-5x^2+x+3)$

$h'(x)=3a(x-1)^2+2b(x-1)+c-(6x^2-10x+1)$

$h''(x)=6a(x-1)+2b-(12x-10)$

$h'''(x)=6a-12$. De ahora en adelante todas las derivadas darían 0.

Evaluamos todas las derivadas en $x=1$

$h(1)=a(1-1)^3+b(1-1)^2+c(1-1)+d-(2.1^3-5.1^2+1+3)$ $=$ $\boxed{d-1}$

$h'(1)=3a(1-1)^2+2b(1-1)+c-(6.1^2-10.1+1)$ $=$ $\boxed{c+3}$

$h''(1)=6a(1-1)+2b-(12.1-10)$ $=$ $\boxed{2b-2}$

$h'''(1)$ $=$ $\boxed{6a-12}$

Ahora, como sabemos que esas derivadas, evaluadas en $x = 1$, deben dar cero, porque derivamos la función nula, tenemos inmediatamente $d = 1$, $c = -3$, $b = 1$ y $a = 2$.

De este modo, tenemos: $2x^3 - 5x^2 + x + 3 = 2(x-1)^3 + (x-1)^2 - 3(x-1) + 1$.

Otro ejemplo de pregunta disparadora que, en este caso habilita a trabajar en el plano algebraico, analítico o geométrico es *volver a la tangencia en cónicas y trabajar con una circunferencia y una recta perpendicular a un radio que pasa por el extremo (no el centro de la circunferencia) del mismo. En ese caso ¿cómo resulta la intersección de la recta que contiene a dicho radio y la circunferencia?*

Desde el punto de vista didáctico, esta actividad resulta interesante pues habilita tres modos de pensar diferentes: el geométrico, el algebraico y el analítico, como vemos a continuación.

Planteo: Sea C una circunferencia de centro O que contiene a un punto P y la recta L que pasa por P que es perpendicular al radio que determina OP. Probemos que la intersección de la recta L y la circunferencia C se reduce al punto P.

Una demostración geométrica

El punto P pertenece tanto a la circunferencia como a la recta, por lo tanto lo único que debemos hacer es "mostrar que no puede haber otro punto, distinto de P, en la intersección entre L y C".

Por el absurdo, supongamos que existe $Q \in L \cap C$, con $Q \neq P$. Consideremos el triángulo de vértices P, O y Q (claramente no están alineados pues, por el supuesto, P y Q están sobre la circunferencia de centro O que contiene a P).

De dicho triángulo sabemos:

OP es un radio, OQ también (pues Q está sobre C), de modo que es isósceles y dos de sus ángulos (que se oponen a los catetos congruentes) deben ser iguales. Pero el ángulo $\hat{P} = 90^{\circ}$. Esto junto con la observación realizada harían que el ángulo $\hat{Q}$ también fuera recto (el señalado en verde en el esquema), lo cual es absurdo si son vértices de un triángulo.

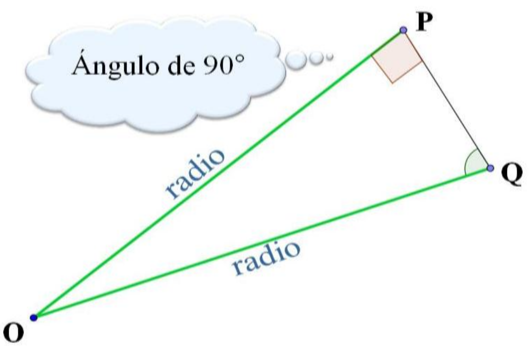

FIGURA 7: Figura de análisis de la situación planteada

Demostración algebraica (mantenemos la misma notación)

Para probar que $L \cap C = \{P\}$, encaramos por el absurdo y suponemos que existe $Q \in L \cap C$, con $Q \neq P$. Por pertenecer ambos puntos a la circunferencia tenemos que: $\|OP\| = \|OQ\|$ (a) y dado que el radio *OP* es perpendicular a la recta *L*, cuya dirección está dada por *PQ*, tenemos que $OP \bullet PQ = 0$. Esto último dice que: $OP \bullet (OQ - OP) = 0$ o análogamente $OP \bullet OQ = OP \bullet OP$ (b).

Sabemos, además, que si α es el ángulo entre los vectores *OP* y *OQ* resulta que $\cos\alpha = \dfrac{OP \bullet OQ}{\|OP\|.\|OQ\|}$. Usando (b) en el numerador tenemos: $\cos\alpha = \dfrac{OP \bullet OP}{\|OP\|.\|OQ\|}$ y por (a), podemos reemplazar $\|OQ\|$ por $\|OP\|$ de modo que $\cos\alpha = \dfrac{OP \bullet OP}{\|OP\|.\|OP\|}$. Luego, tanto el numerador como el denominador resultan $\|OP\|^2$ de donde resulta $\cos\alpha = 1$, entonces $\alpha = 0$, por lo que $P = Q$.

Demostración analítica (mantenemos la misma notación)

Aquí empezamos describiendo la circunferencia como

$$C = \{ (x, y) \in R^2 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \}$$

Sin pérdida de generalidad podemos considerar que el centro es el origen (otro caso resulta de una traslación), de modo que tomamos $C = \{ (x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 = r^2 \}$. El punto *P* pertenece a *C*, de modo que *P* será de la forma $P = (a, \sqrt{r^2 - a^2})$ (con *a* entre

$-r$ y r) si es que está en la semi-circunferencia superior, o P = $(a,-\sqrt{r^2-a^2})$ (con a entre $-r$ y r) si es que está en la semi-circunferencia inferior. Sin pérdida de generalidad, tomamos un caso. Supongamos P = $(a,\sqrt{r^2-a^2})$ con $-r < a < r$. Al final de la demostración desarrollamos los casos $a = r$ y $a = -r$.

La recta L descripta analíticamente debe contener al punto P, esto hace que la forma de ella sea: $L : y = m(x-a)+\sqrt{r^2-a^2}$

Por otra parte, el hecho de saber que L debe ser perpendicular al radio que determinan O y P, nos permite conocer la pendiente m y así tener completa la ecuación de L.

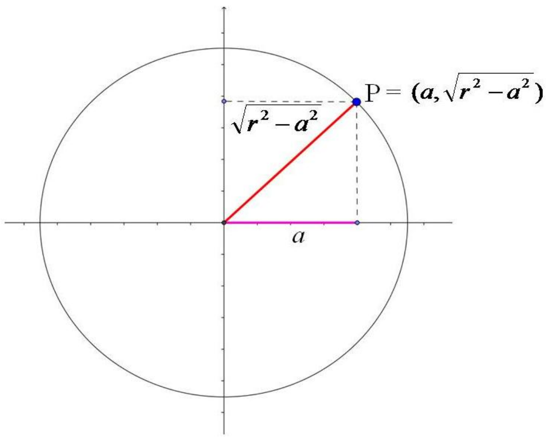

FIGURA 8: Figura de análisis de la situación planteada

La recta que contiene al radio OP tiene pendiente $\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}$. La pendiente de la recta perpendicular a dicho radio debe ser opuesta e inversa a este valor, de modo que $m = \frac{-a}{\sqrt{r^2-a^2}}$ quedando L del siguiente modo:

$$L : y = \frac{-a}{\sqrt{r^2-a^2}}(x-a)+\sqrt{r^2-a^2}$$

Ahora comenzamos a ver que en estas condiciones, la intersección entre C y L da como resultado sólo al punto P.

Esto se plantea por medio del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = \dfrac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2}}(x-a) + \sqrt{r^2 - a^2} \end{cases}$$

Sólo deberíamos ver que este sistema tiene solución única, $x = a$. Operando

$$x^2 + \left(\frac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2}}(x-a) + \sqrt{r^2 - a^2} \right)^2 = r^2$$

$$x^2 + \frac{a^2}{r^2 - a^2}(x-a)^2 - 2.\frac{a}{\cancel{\sqrt{r^2 - a^2}}}(x-a).\cancel{\sqrt{r^2 - a^2}} + r^2 - a^2 = r^2$$ de donde

$$x^2 + \frac{a^2}{r^2 - a^2}(x-a)^2 - 2a(x-a) + r^2 - a^2 = r^2$$ que es equivalente a

$$x^2 + \frac{a^2}{r^2 - a^2}(x-a)^2 - 2a(x-a) - a^2 = 0$$ agrupando y escribiendo como diferencia de cuadrados:

$$(x-a).(x+a) + \frac{a^2}{r^2 - a^2}(x-a)^2 - 2a(x-a) = 0$$, luego sacando factor común $(x - a)$

$$(x-a)\left[(x+a) + \frac{a^2}{r^2 - a^2}(x-a) - 2a \right] = 0$$ lo que nos dice que una raíz es $x = a$, sólo resta ver que el corchete se anule sólo con $x = a$ pues de pasar esto, ambas raíces serían $x = a$.

Si notamos, la expresión del corchete es lineal en x, sólo basta reemplazar en $x = a$ y ver si se anula, lo que resulta inmediato.

Los casos en el que $P = (r, 0)$ o $(-r, 0)$ resultan inmediatos pues la recta L perpendicular al radio es $x = r$ ($x = -r$ en el otro caso) y la intersección con la circunferencia resulta $r^2 + y^2 = r^2$ de donde $y = 0$ es la única solución. Esto dice que la intersección entre la recta y la circunferencia es únicamente $P = (r, 0)$.

A modo de cierre

Es interesante pensar que la enseñanza de la tangencia se origina, al menos en Argentina, trabajando con circunferencias en el nivel Primario. Allí pareciera que el interés se desplaza de “la mejor aproximación lineal” hacia “las posiciones relativas” entre objetos que en el caso particular de las circunferencias y las rectas ofrecen sólo tres alternativas: dos, uno o ningún punto en común. En ese contexto el nombre de “recta tangente a la circunferencia” hace referencia en realidad a posiciones relativas entre objetos. Esta idea no refleja el concepto desde lo analítico, y en este sentido, hemos analizado las dificultades que se presentan cuando se intenta definir la tangencia en un curso de Matemática Superior: o se apela a atributos irrelevantes que son válidos para algunas cónicas y no para las funciones en general; o se cae en una lógica circular donde se requiere conocer la noción de derivada para definir la recta tangente, mientras que para presentar la derivada, muchas veces se usa el concepto de tangencia. La discusión en lenguaje coloquial sobre la tangencia permite tener una descripción precisa sobre el concepto, aunque plasmar matemáticamente ese hecho no resulta inmediato. En términos de TALL y VINNER (1981) se requeriría del estudiante que asigne significados, mientras que si se parte de una definición formal, se extrae significado cuando se intenta comprender el concepto. Estas dos operaciones –extraer y asignar significado- colaboran con la comprensión de las nociones matemáticas.

Los criterios de diseño que hemos propuesto, y que ejemplificamos con algunas actividades, permitirían afrontar una enseñanza de la Matemática Superior donde se promueve la comprensión de los conceptos involucrados, tal como es concebida en documentos curriculares y en trabajos de Educación Matemática. Así, se lograría articular cada situación problema, con los conceptos, propiedades y procedimientos, a través de argumentaciones soportadas por el lenguaje propio de la Matemática, y acorde al nivel superior. A su vez, es de destacar que el proceso llevado a cabo no resulta lineal, aunque sí posee un hilo conductor que motoriza contenidos de diversos campos y se articulan diferentes miradas para el mismo tema (numérica, algebraica, analítica, geométrica), a las que se le suma el uso de TIC.

En consecuencia, trabajar en Matemática Superior con nuevos recursos siguiendo algunos criterios aparentemente simples demanda (a) proponer tareas y actividades matemáticamente adecuadas, (b) organizar procesos didácticos bien planificados y (c) aprender a trabajar sin saber todas las respuestas (lo cual suele colocar a los profesores en una posición inusual e incómoda). Esto dará un marco adecuado para poder “hacer

Matemática" en el aula, en el sentido de llevar a cabo actividades que posibilitan la formulación de hipótesis y conjeturas, realizar demostraciones de casos particulares –las cuales podrían ayudar a encontrar el camino para generalizaciones posteriores– hallar contraejemplos y elaborar complejos cálculos algebraicos, entre otras acciones.

Referencias

ABRATE, R.; LUJÁN, M. y POCHULU, M. (2007). La investigación educativa en Matemática con nuevos recursos. En: R. Abrate y M. Pochulu. (Comps.). *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*. Villa María: Universidad Nacional de Villa María, pp. 217-234.

CANUL, E., DOLORES, C. y MARTÍNEZ, G. (2011). De la Concepción Global a la Concepción Local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 14 (2), 173-202*.

CANTORAL, R. y MONTIEL, G. (2001): *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall & Pearson Educación.

FONT, V. (2001). Processos mentals versus competencia. *Biaix 19*, 33-36.

FONT, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x) = x^2$ sin usar la definición por límites. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 18,* 15-18.

GASCÓN, J. (2009). El problema de le Educación Matemática entre la Secundaria y la Universidad. *Educação Matemática Pesquisa 11 (2),* 273-302.

GODINO, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO 25,* 77-87.

GODINO, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Extraído el 2 de febrero de 2011 de http://www.ugr.es/~godino/funciones-semioticas/ monografiatfs.pdf.

GÓMEZ CHACÓN, I. & JOGLAR PRIETO, N. (2010) Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using GeoGebra from a holistic approach. *Educação Matemática Pesquisa 12 (3),* 485-513.

PINO-FAN, L.; GODINO, J.D. y FONT, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa 13 (1),* 141-178.

POCHULU, M. (2007). Períodos de números racionales: Un abordaje desde la teoría de números y con nuevos recursos. *Números 68*, pp. 1-8.

POCHULU, M. y RODRÍGUEZ, M. (Comps.). (2011). *Educación Matemática – Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Los Polvorines: Ediciones UNGS y EDUVIM.

RODRÍGUEZ, M. *et al*. (2010). Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática. En INFD (Comp.). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Áreas: Biología, Física, Matemática y Química*. Ministerio de Educación, Instituto Nacional de Formación Docente y Secretaría de Políticas Universitarias, pp. 118-179. Extraído el 1 de septiembre de 2011 de http://cedoc.infd.edu.ar/upload/Matematica.pdf.

SALINAS, P. y ALANÍS, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12 (3),* 355-382.

SÁNCHEZ, V. Y GARCÍA, M. (2009). La formación de profesores en relación con las matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa 11 (3),* 497-523.

SÁNCHEZ MATAMOROS, G., GARCÍA M. y LLINARES, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11 (2),* 267-296.

SERNA, L. (2007). *Estudio Socioepistemólogico de la tangente*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

TALL, D. & VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits ans continuity. *Educational Studies en Mathematics 12(2),* 151-169.

ZIMMERMAN, W. (1991). Visual thinking in calculus. In W. ZIMMERMAN & S. CUNNINGHAM (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics. Washington D.C.: Mathematical Association of America, pp. 127-138.